Proposta per l'elaborato di matematica e fisica

Per lo studente

Studio di funzione e circuiti

Rifletti sulla teoria

- Spiega come si possono calcolare gli asintoti orizzontali di una funzione. Fornisci un esempio di funzione dotata di asintoti orizzontali, ma non di asintoti verticali.
- Definisci gli integrali impropri su un intervallo illimitato. Fornisci un esempio di funzione il cui integrale improprio su un intervallo illimitato è convergente e uno di funzione il cui integrale improprio su un intervallo illimitato diverge a $+\infty$.
- Enuncia il teorema di Fermat. Perché la condizione espressa dal teorema è necessaria, ma non sufficiente per l'esistenza di estremi relativi per la funzione?

Considera un circuito costituito da due resistori diversi, posti in serie tra loro e collegati a un generatore ideale.

- Spiega l'effetto Joule. Esprimi la potenza dissipata sulla resistenza complessiva in funzione della differenza di potenziale del generatore e delle due resistenze del circuito.
- Spiega l'interazione magnete-corrente.

Mettiti alla prova

Considera la famiglia di funzioni $f_k\colon [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ definite da:

$$f_k(x) = \frac{x}{(x+k)^2},$$

con k parametro reale positivo.

1. Verifica che tutte le funzioni della famiglia hanno un massimo di ascissa k e un flesso di ascissa $2k$.
2. Considera $f(x) = f_1(x)$. Completa lo studio di funzione e disegna il suo grafico in un opportuno sistema di riferimento cartesiano.
3. Studia la convergenza dell'integrale improprio $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

Un circuito di resistenza complessiva R è alimentato da un generatore di resistenza interna r e f.e.m. ε.

4. Determina l'espressione della potenza P dissipata per effetto Joule sulla resistenza R in funzione dei dati del problema. Spiega che cosa accade se $R \gg r$.
5. Nel caso particolare in cui $\varepsilon = 25\ \mathrm{V}$ e $r = 1{,}0\ \Omega$, determina per quale valore di R è massima la potenza dissipata e trovane il valore.

Possibile integrazione multidisciplinare

- **René Descartes** è noto sia per i suoi contribuiti matematici, come il piano cartesiano, sia per le sue riflessioni filosofiche. Descrivi i temi salienti della sua opera filosofica e illustra in che modo matematica e **filosofia** si intrecciano nel suo lavoro.

Prosegue >>

Per l'insegnante

Possibili domande da fare durante il colloquio

In sede d'esame, per verificare l'effettiva comprensione della parte teorica, si possono fare allo studente le seguenti domande.

- Spiega come si possono calcolare gli asintoti obliqui di una funzione. Fornisci un esempio di funzione dotata di asintoti obliqui, ma non di asintoti verticali.
- Definisci gli integrali impropri di funzioni con un numero finito di punti di singolarità. Fornisci un esempio di funzione il cui integrale improprio di questo tipo è convergente e uno di funzione il cui integrale improprio di questo tipo diverge a $+\infty$.
- Enuncia il teorema di Weierstrass. Una funzione $f(x)$ è continua e strettamente crescente nell'intervallo $[a; b[$. È vero che $f(x)$ ammette massimo assoluto?

Considera un circuito costituito da due resistori diversi, posti in parallelo tra loro e collegati con un generatore ideale.

- Spiega l'effetto Joule; in quale dei due rami del circuito la dissipazione di energia sulla resistenza è massima?
- Spiega la legge di Biot-Savart.

Traccia di svolgimento del *Mettiti alla prova*

1. **Determiniamo minimi e flessi.**

   Consideriamo la funzione $f_k(x) = \frac{x}{(x+k)^2}$. Determiniamo il massimo della funzione. Calcoliamo la derivata prima:

   $$f_k'(x) = \frac{(x+k)^2 - 2(x+k)x}{(x+k)^4} \rightarrow f_k'(x) = \frac{(x+k) - 2x}{(x+k)^3} = \frac{k-x}{(x+k)^3}.$$

   Studiamo il segno della derivata prima, ricordando che $x \geq 0$ e $k > 0$:

   $$f_k'(x) \geq 0 \rightarrow \frac{k-x}{(x+k)^3} \geq 0 \rightarrow x \leq k.$$

   Quindi $f_k(x)$ ha un massimo di ascissa k a prescindere dal valore di k.
   L'ordinata del massimo è:

   $$f_k(k) = \frac{k}{(2k)^2} = \frac{1}{4k}.$$

   Cerchiamo gli eventuali punti di flesso calcolando la derivata seconda della funzione:

   $$f_k''(x) = \frac{-(x+k)^3 - 3(x+k)^2(k-x)}{(x+k)^6} \rightarrow f_k''(x) = \frac{-(x+k) - 3(k-x)}{(x+k)^4} = \frac{2(x-2k)}{(x+k)^4}.$$

   Studiamo il segno della derivata seconda, ricordando che $x \geq 0$ e $k > 0$:

   $$f_k''(x) \geq 0 \rightarrow \frac{2(x-2k)}{(x+k)^4} \geq 0 \rightarrow x \geq 2k.$$

   Il punto di flesso ha ascissa $2k$ e l'ordinata del flesso è:

   $$f_k(2k) = \frac{2k}{(2k+k)^2} = \frac{2}{9k}.$$

2. **Studiamo la funzione $f(x)$.**

   Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$, nell'intervallo $x \geq 0$.

   Per quanto già ricavato, la funzione ha un massimo di coordinate $M\left(1; \frac{1}{4}\right)$ e un flesso di coordinate $F\left(2; \frac{2}{9}\right)$. Inoltre, la funzione data nell'intervallo considerato non è mai negativa e si annulla in $x = 0$.
   Il grafico della funzione non ammette asintoti verticali poiché il denominatore non si annulla nell'intervallo considerato.

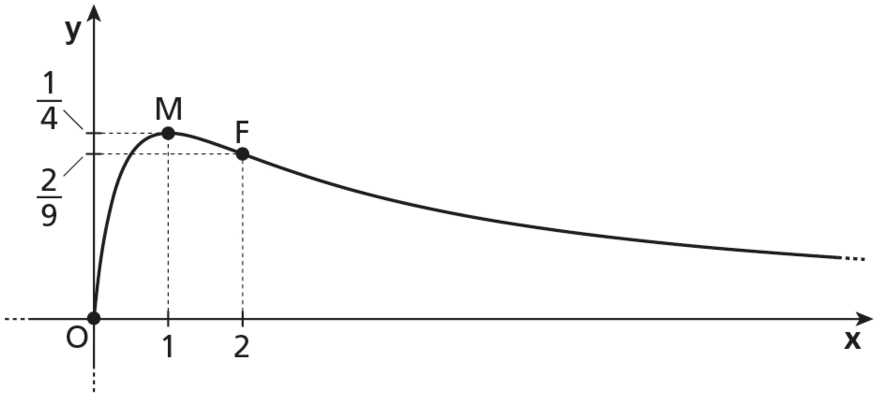
Prosegue >>

Calcoliamo il limite della funzione agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(x+1)^2} = 0.$$

La funzione ammette un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$.

Tracciamo il grafico della funzione.



3. **Studiamo la convergenza dell'integrale improprio.**

Per definizione risulta

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{z\to+\infty} \int_0^z \frac{x}{(x+1)^2}\,dx.$$

Calcoliamo:

$$\int_0^z \frac{x}{(x+1)^2}\,dx = \int_0^z \frac{x+1-1}{(x+1)^2}\,dx = \int_0^z \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx = \left[\ln|x+1| + \frac{1}{x+1}\right]_0^z =$$

$$\ln|z+1| + \frac{1}{z+1} - (\ln|1| + 1) = \ln(z+1) + \frac{1}{z+1} - 1.$$

Quindi:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{z\to+\infty} \int_0^z \frac{x}{(x+1)^2}\,dx = \lim_{z\to+\infty} \left[\ln(z+1) + \frac{1}{z+1} - 1\right] = +\infty.$$

L'integrale diverge a $+\infty$.

4. **Potenza dissipata sulla resistenza.**

Il circuito descritto è equivalente a un circuito in cui un generatore ideale di fem ε è in serie con due resistori, di resistenze R e r rispettivamente.

La resistenza equivalente è $R_{eq} = R + r$ e la corrente che attraversa la resistenza è:

$$i = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{\varepsilon}{R+r}.$$

Pertanto, la potenza dissipata per effetto Joule sulla resistenza è:

$$P = Ri^2 = R\frac{\varepsilon^2}{(R+r)^2}.$$

Se $R \gg r$ dall'espressione precedente possiamo ricavare:

$$P = R\frac{\varepsilon^2}{(R+r)^2} = \frac{R}{R^2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{\left(1+\frac{r}{R}\right)^2} \simeq \frac{\varepsilon^2}{R},$$

che corrisponde alla situazione di un generatore ideale di resistenza interna nulla.

Prosegue >>

5. Calcoliamo la potenza massima per i valori dati.

Nel caso particolare in cui $\varepsilon = 25\ \mathrm{V}$ e $r = 1{,}0\ \Omega$ la funzione che esprime la potenza P dissipata per effetto Joule sulla resistenza diventa:

$$P = 625 \frac{R}{(R+1)^2}$$

ed è, quindi, proporzionale a quella studiata ai punti **1** e **2**. Il suo valore massimo si ottiene per $R = 1{,}0\ \Omega$:

$$P_{\max} = 625 \cdot \frac{1{,}0}{(1{,}0 + 1{,}0)^2} \simeq 1{,}6 \cdot 10^2\ \mathrm{W}.$$