Proposta per l'elaborato di matematica e fisica

Per lo studente

Integrali definiti e legge di Faraday-Neumann

Rifletti sulla teoria

- Spiega il metodo di integrazione per parti.
- Enuncia e dimostra la formula di Leibniz-Newton per il calcolo di un integrale definito.
- Spiega le procedure da usare per calcolare il volume del solido ottenuto dalla rotazione di una superficie piana:
  - attorno all'asse x;
  - attorno all'asse y.
- Dopo aver definito le funzioni periodiche, spiega come si calcola il periodo della funzione $f(ax+b)$, se $f(x)$ è periodica di periodo $T>0$.
- Spiega il fenomeno dell'induzione elettromagnetica ed enuncia la legge di Faraday-Neumann. Qual è il contributo dato da Lenz alla comprensione del fenomeno?
- Spiega il funzionamento dell'alternatore. Per quale motivo si sceglie di collegare i contatti striscianti con due semianelli?

Mettiti alla prova

1. Calcola l'area della porzione di piano S delimitata dalla funzione $y=\sin x$ e dall'asse x nell'intervallo $[0;\pi]$.

2. Verifica che il periodo della funzione $f(x)=|\sin x|$ è $T=\pi$ e determina il periodo T_k della funzione $f_k(x)=|\sin kx|$ al variare di $k>0$.

3. Determina i volumi dei solidi di rotazione ottenuti dalla rotazione della superficie S attorno all'asse x e attorno all'asse y.

Se mettiamo in rotazione, con velocità angolare costante ω, una spira quadrata attorno al proprio asse all'interno delle espansioni polari di un magnete otteniamo un alternatore. Supponi la spira sia perpendicolare al campo magnetico nell'istante iniziale e che l'asse di rotazione sia perpendicolare alla direzione del campo magnetico.

4. Indica con B l'intensità del campo magnetico e scrivi l'espressione del flusso magnetico in funzione del tempo.

5. Applica la legge di Faraday-Neumann per trovare la f.e.m. indotta nella spira e scrivi l'intensità della corrente che attraversa una resistenza R.

6. Quanto valgono i valori efficaci della f.e.m. e della corrente indotte?

7. Come puoi quantificare la quantità di carica che ha attraversato la sezione del conduttore in un periodo nel caso in cui i contatti mobili striscino su due semianelli?

Possibile integrazione multidisciplinare

- Scrivi un **programma** che calcoli numericamente l'integrale del punto **1** del *Mettiti alla prova*. Confronta il risultato approssimato con quello esatto e valuta quanti passi di integrazione sono necessari per raggiungere una precisione dello $0{,}1\%$.

Prosegue >>

Per l'insegnante

Possibili domande da fare durante il colloquio

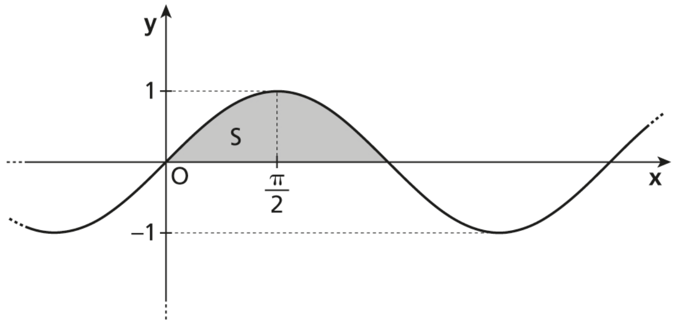
In sede d'esame, per verificare l'effettiva comprensione della parte teorica, si possono fare allo studente le seguenti domande.

- Spiega come si calcola l'area della porzione di piano delimitata dai grafici delle funzioni continue $f(x)$ e $g(x)$ e dalle rette verticali $x = a$ e $x = b$, nell'ipotesi che $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a; b]$.
- Supponi che $f(x)$ sia una funzione continua e negativa in $[a; b]$. Come puoi calcolare l'area del trapezoide delimitato da $f(x)$, dall'asse x e dalle rette verticali $x = a$ e $x = b$?
- Enuncia il teorema della media e forniscine un'interpretazione grafica.
- Il semicerchio delimitato dal grafico della funzione $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ e dall'asse x è la base di un solido le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono dei quadrati. Come si calcola il suo volume?
- Spiega il funzionamento del motore elettrico in corrente continua.
- Un trasformatore può funzionare in corrente continua? Perché?
- Quanto vale la circuitazione del campo elettrostatico? Perché?

Traccia di svolgimento del *Mettiti alla prova*

1. **Grafico di $y = \sin x$ e calcolo dell'area.**

   Disegniamo il grafico di $y = \sin x$.

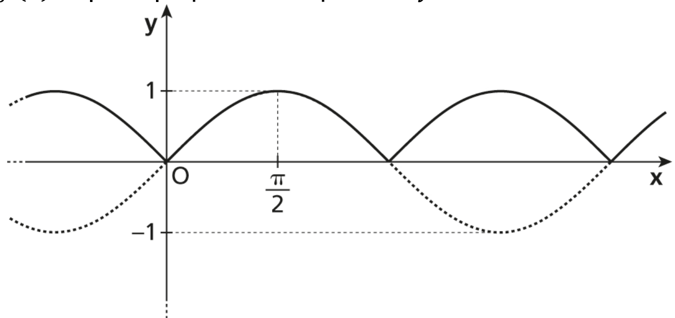
   

   Per trovare l'area richiesta dobbiamo calcolare l'integrale definito

   $\text{Area} = \int_0^{\pi} \sin x = [-\cos x]_0^{\pi} = 2.$

2. **Grafico e periodo di $f(x)$ e periodo di $f_k(x)$.**

   Disegniamo il grafico di $f(x) = |\sin x|$ a partire da quello di $y = \sin x$.

   La funzione $y = \sin x$ ha periodo 2π. Il periodo di $f(x)$ è $T = \pi$ poiché nel disegnare il suo grafico gli archi di sinusoide che appartengono al semipiano delle ordinate negative vengono simmetrizzati rispetto all'asse delle ascisse.

   Pertanto il periodo di $f_k(x) = |\sin kx|$, per $k > 0$, è $T_k = \frac{T}{k} = \frac{\pi}{k}$.

Prosegue >>

3. **Volumi dei solidi di rotazione.**

   Calcoliamo il volume del solido di rotazione attorno all'asse x con la formula:

   $$V_x = \pi \int_0^{\pi} (\sin x)^2\, dx = \pi \int_0^{\pi} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) dx = \pi \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}.$$

   Per determinare il volume del solido di rotazione attorno all'asse y possiamo usare il metodo dei gusci cilindrici. Calcoliamo il volume calcolando per parti l'integrale:

   $$V_y = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x\, dx = 2\pi \left([-x\cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos x \ dx \right) = 2\pi(\pi + [\sin x]_0^{\pi}) = 2\pi^2.$$

4. **Espressione del flusso magnetico in funzione di t.**

   Se all'istante $t_0 = 0$ s la spira è parallela al campo $\vec{B}$, il flusso magnetico attraverso la spira è inizialmente nullo. Pertanto

   $$\Phi_B(t) = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cos \omega t.$$

5. **F.e.m. e corrente indotta.**

   Per la legge di Faraday-Neumann, la f.e.m. è data da

   $$f(t) = -\frac{d\Phi_B}{dt} = B \cdot S \cdot \omega \sin \omega t.$$

   Con i due semianelli, la corrente fluisce sempre nello stesso verso. Pertanto dobbiamo scrivere

   $$f(t) = B \cdot S \cdot \omega \,|\sin \omega t\,|.$$

   Per la legge di Ohm, l'intensità della corrente che attraversa il resistore R è data da

   $$i(t) = \frac{f(t)}{R} = \frac{B \cdot S \cdot \omega \,|\sin \omega t\,|}{R}.$$

6. **Valori efficaci della f.e.m. e della corrente indotta.**

   Possiamo calcolare i valori efficaci:

   $$\mathrm{f.e.m.}_{\mathrm{eff}} = \frac{\mathrm{f.e.m.}_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{B \cdot S \cdot \omega}{\sqrt{2}},$$

   $$i_{\mathrm{eff}} = \frac{i_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{B \cdot S \cdot \omega}{R\sqrt{2}}.$$

7. **Quantità di carica che ha attraversato la resistenza in un periodo.**

   Per quanto osservato, la funzione $i(t)$ ha periodo $T = \frac{\pi}{\omega}$. Si può verificare con la sostituzione $x = \omega t$ che

   $$\int_0^T |\sin \omega t| dt = \int_0^{\pi} \sin x \cdot \frac{1}{\omega} dx = \frac{2}{\omega}.$$

   Quindi, la quantità di carica che attraversa la sezione del conduttore in un periodo è:

   $$q_0 = \int_0^T i(t)\, dt = \frac{B \cdot S \cdot \omega}{R} \int_0^T |\sin \omega t| dt = \frac{B \cdot S \cdot \omega}{R} \cdot \frac{2}{\omega} = \frac{2B \cdot S}{R}.$$