Proposta per l'elaborato di matematica e fisica

Per lo studente

Funzione reciproca, integrali impropri e relatività ristretta

Rifletti sulla teoria

- Fornisci la definizione di funzione derivabile in un intervallo chiuso $[a; b]$. Dimostra che l'insieme delle funzioni derivabili è un sottoinsieme dell'insieme delle funzioni continue e mostra un esempio di funzione continua che non è derivabile.
- Scrivi la regola di derivazione per la funzione reciproca e dimostrala.
- Considera una funzione $f(x)$ continua in un intervallo $[a; b]$ eccetto un suo punto interno c. Indica quali condizioni devono essere soddisfatte affinché sia definito l'integrale improprio $\int_a^b f(x)dx$ e come calcolarlo.
- Scrivi le equazioni di Maxwell e illustrale brevemente.
- Se in un certo sistema di riferimento l'evento *A* accade prima dell'evento *B*, esiste un sistema di riferimento in cui l'evento *B* accade prima dell'evento *A*? Spiega perché.

Mettiti alla prova

Considera la funzione

$$y = f(v) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad \text{con } c \in \mathbb{R}^+.$$

1. Traccia il grafico della funzione nel suo dominio e studiane continuità e derivabilità.

2. Dal grafico di $y = f(v)$ deduci il grafico della funzione $y = \gamma(v) = \frac{1}{f(v)}$.

3. Verifica se la funzione $\gamma(v)$ è integrabile in senso improprio nell'intervallo $[-c; c]$.

La funzione $\gamma(v)$, con $v \geq 0$ e c velocità della luce nel vuoto, è un'importante funzione della fisica: $\gamma(v)$ è il fattore di Lorentz della teoria della relatività ristretta ed è il fattore di dilatazione del tempo misurato da un osservatore che si muove con velocità v rispetto all'osservatore che misura il tempo proprio.

4. Spiega e argomenta questa affermazione.

Un protone si muove di moto rettilineo uniforme, con velocità $v_p = 0{,}900\, c$ rispetto a un elettrone fermo. Il protone urta l'elettrone e dopo l'urto prosegue il suo moto lungo la direzione iniziale, con velocità

$v_p' = 0{,}899\, c$.

5. Qual è la velocità dell'elettrone dopo l'urto? E la sua direzione rispetto alla direzione del protone incidente? Mostra i risultati di un approccio classico al problema e discuti la contraddizione che ne emerge.

6. Riporta la trattazione relativistica dell'urto, facendo riferimento alla definizione relativistica di quantità di moto.

Prosegue >>

Per l'insegnante

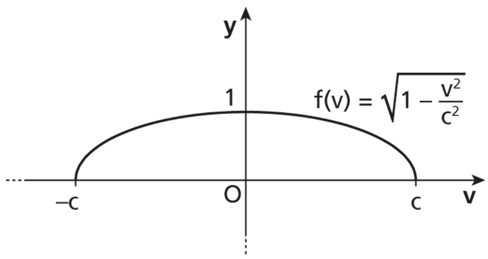
Possibili domande da fare durante il colloquio

In sede d'esame, per verificare l'effettiva comprensione della parte teorica, si possono fare allo studente le seguenti domande.

- Classifica i punti di non derivabilità di una funzione e, per ciascun tipo, fai un esempio di funzione che presenta un punto di non derivabilità in $x = 0$.
- Introduci il concetto di integrale improprio e definisci l'integrale di una funzione in un intervallo illimitato.
- Spiega come dedurre dal grafico di una funzione il grafico della funzione reciproca.
- Riassumi le conclusioni tratte da Maxwell sulle proprietà delle onde elettromagnetiche e la relazione tra c e le altre proprietà fisiche del vuoto.
- Illustra i postulati della relatività ristretta.

Traccia di svolgimento del *Mettiti alla prova*

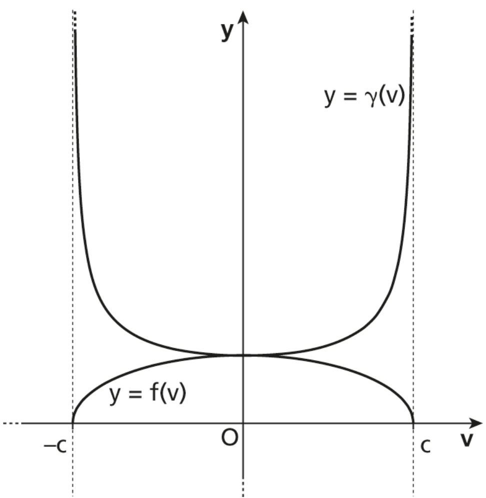
1. **Grafico, continuità e derivabilità di $f(v)$.**
   Il grafico della funzione si può ottenere studiando la funzione con i metodi dell'analisi oppure riconoscendo che si tratta di un arco di ellisse con il centro nell'origine, gli assi di simmetria paralleli agli assi cartesiani e i semiassi di lunghezze c e 1.



   La funzione $f(v)$:
   - ha dominio $D_f = [-c; c]$;
   - è continua in tutto il suo dominio;
   - è derivabile nell'intervallo $]-c; c[$, non è derivabile in $v = \pm c$, poiché $f'_+(-c) = +\infty$ e $f'_-(c) = -\infty$.

   Osserviamo inoltre che la funzione $f(v)$ è pari, è non negativa in tutto il suo dominio e si annulla per $v = \pm c$; è crescente in $[-c; 0[$ e decrescente in $]0; c]$; ha il massimo assoluto nel punto $M(0; 1)$.
2. **Grafico della funzione reciproca $\gamma(v)$.**
   Studiamo le caratteristiche della funzione reciproca $\gamma(v) = \frac{1}{f(v)}$:
   - ha dominio $D_\gamma = \{v \in D_f \mid f(v) \neq 0\} = \ ]-c; c[$;
   - è una funzione pari, come $f(v)$, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate;
   - ha lo stesso segno di $f(v)$, quindi è positiva in tutto il suo dominio D_γ;
   - il suo grafico interseca solo l'asse y, nel punto $M(0; 1)$;
   - presenta asintoti verticali $v = \pm c$, in corrispondenza degli zeri di $f(v)$;
   - poiché $\gamma'(v) = -\frac{f'(v)}{f^2(v)}$, la funzione $\gamma(v)$ è crescente in $]0; c]$, cioè nell'intervallo in cui $f(v)$ è decrescente, e decrescente in $[-c; 0[$, cioè nell'intervallo in cui $f(v)$ è crescente;
   - raggiunge il minimo assoluto nel punto $M(0; 1)$, che è il punto di massimo assoluto di $f(v)$.

   Rappresentiamo nello stesso piano cartesiano i grafici delle funzioni $y = f(v)$ e $y = \gamma(v)$.



Prosegue >>

3. **Integrale improprio.**
La funzione $\gamma(v)$ non è definita in $v = \pm c$ ma è definita in $]-c; c[$; osserviamo che $v = c$ e $v = -c$ sono punti di singolarità di seconda specie. Determiniamo la funzione integrale $G(z)$:
$$G(z) = \int_{-z}^{z} \gamma(v)dv = \int_{-z}^{z} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} dv = 2c \int_{0}^{z} \frac{\frac{1}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} dv = 2c \left[\arcsin\frac{v}{c}\right]_0^z.$$
Calcoliamo
$$\lim_{z\to c^-} G(z) = \lim_{z\to c^-} 2c \left[\arcsin\frac{v}{c}\right]_0^z = 2c\frac{\pi}{2} = c\pi.$$
Quindi la funzione $\gamma(v)$ è integrabile in senso improprio nell'intervallo $[-c; c]$.

4. **Significato fisico della funzione $\boldsymbol{\gamma(v)}$.**
Facendo riferimento all'orologio a luce, si ricava che l'intervallo di tempo misurato nel sistema di riferimento proprio è minore di un fattore $\frac{1}{\gamma}$ rispetto all'intervallo di tempo misurato in un sistema di riferimento che si muove rispetto al sistema proprio con velocità costante v, in direzione trasversale alla propagazione della luce.
Come evidenza sperimentale si può far riferimento alla vita media dei muoni, misurata nel loro sistema di quiete e in un sistema di riferimento rispetto al quale si muovono con velocità ultrarelativistiche.

5. **Velocità dopo l'urto secondo un approccio classico.**
Poiché dopo l'urto il protone prosegue il suo moto lungo la direzione iniziale, possiamo applicare la conservazione della quantità di moto lungo una retta. Orientiamo la retta di riferimento nello stesso verso del moto.
Indichiamo con p_p la quantità di moto del protone incidente e con p_e la quantità di moto dell'elettrone prima dell'urto. L'elettrone è inizialmente fermo, quindi $p_e = 0$. Indichiamo con p'_p e p'_e le quantità di moto del protone e dell'elettrone dopo l'urto.
Imponiamo la conservazione della quantità di moto:
$$p_p + p_e = p'_p + p'_e.$$
Utilizziamo la definizione classica della quantità di moto:
$$m_p\, v_p = m_p\, v'_p + m_e\, v'_e \quad \rightarrow \quad v'_e = \frac{m_p}{m_e}\left(v_p - v'_p\right) = \frac{1{,}673\cdot 10^{-27}}{9{,}109\cdot 10^{-31}}\cdot(0{,}900 - 0{,}899)c = 1{,}8\, c.$$
Otteniamo come velocità dell'elettrone un valore maggiore rispetto alla velocità della luce, in contrasto con i postulati della relatività ristretta.

6. **Velocità dopo l'urto secondo un approccio relativistico.**
La definizione relativistica della quantità di moto è $p = \gamma m v$; utilizziamola per imporre la conservazione della quantità di moto nel processo considerato:
$$m_p\, \gamma_p v_p = m_p\, \gamma'_p v'_p + m_e \gamma'_e\, v'_e \quad \rightarrow \quad \gamma'_e v'_e = \frac{m_p}{m_e}\left(\gamma_p v_p - \gamma'_p v'_p\right) \quad \rightarrow \quad \gamma'_e v'_e = 22\, c.$$
L'elettrone si muove lungo la direzione originaria del protone.
Poniamo $\beta'_e = \frac{v_e}{c} \rightarrow \gamma'_e = \frac{1}{\sqrt{1-\beta'^2_e}}$ e sostituiamo nell'equazione:
$$\gamma'_e v'_e = 22\, c \quad \rightarrow \quad \frac{\beta'_e}{\sqrt{1-\beta'^2_e}} = 22 \quad \rightarrow \quad \beta'_e = \sqrt{\frac{22^2}{1+22^2}} \quad \rightarrow \quad v'_e = 0{,}999\, c.$$
Otteniamo come velocità dell'elettrone un valore prossimo a quello della velocità della luce, ma inferiore, quindi in accordo con la relatività ristretta.