Proposta per l'elaborato di matematica e fisica

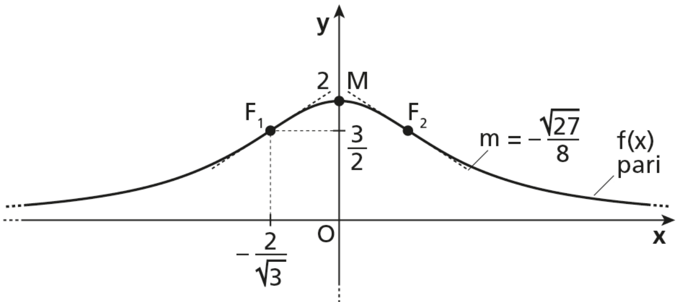
Per lo studente

Grafico della funzione derivata e correnti di spostamento

Rifletti sulla teoria

- La funzione $f(x)$ è dispari e continua in $\mathbb{R}$. Verifica che il suo grafico passa per l'origine O del sistema di riferimento.
- Definisci la primitiva di una funzione $f(x)$ e spiega come si possono usare le primitive delle funzioni nel calcolo dell'integrale definito.
- La funzione $f(x)$ è pari e integrabile in $\mathbb{R}$. Verifica che
  $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.
- Enuncia il teorema della circuitazione di Ampère e spiega perché il campo magnetico $\vec{B}$ non è conservativo.
- Determina l'espressione per il campo magnetico all'interno di un solenoide rettilineo percorso da una corrente i.
- Durante il processo di carica un condensatore immagazzina energia. Da dove proviene questa energia? Quanto vale la densità di energia per unità di volume?

Mettiti alla prova

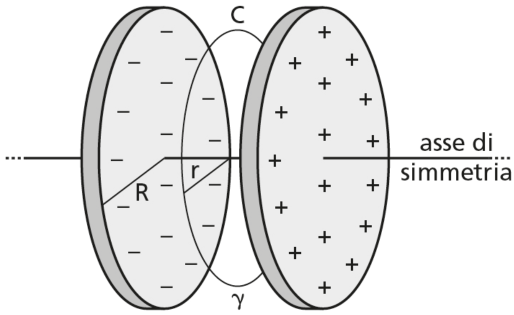


Il grafico in figura rappresenta l'andamento della funzione
$f(x) = \dfrac{8}{x^2 + 4}$.

1. Disegna l'andamento probabile del grafico della funzione $f'(x)$, senza eseguire lo studio di funzione. Basati sui dati deducibili dal grafico e motiva le scelte effettuate.
2. Dimostra mediante la definizione di derivata che la derivata di una funzione derivabile e pari è dispari.
3. Puoi dire la stessa cosa delle primitive di una funzione pari?

Prosegue >>

Un condensatore piano ha le armature di forma circolare e di raggio R. Supponi di poter trascurare gli effetti al bordo.



4. Spiega l'ipotesi di Maxwell delle correnti di spostamento.
5. Determina l'espressione del campo magnetico indotto $B(t)$ a distanza $r < R$ dall'asse del condensatore se l'intensità del campo elettrico tra le armature varia secondo la legge $E(t) = E_0\, f(t)$, con $f(t) = \frac{8}{t^2+4}$.
6. Cosa cambia nell'espressione trovata se $r > R$?

Prosegue >>

Per l'insegnante

Possibili domande da fare durante il colloquio

In sede d'esame, per verificare l'effettiva comprensione della parte teorica, si possono fare allo studente le seguenti domande.

- La funzione $f(x)$ è continua in $\mathbb{R}$. Considera le funzioni $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ e $G(x) = \int_2^x f(t)\,dt$. Sia $\varphi(x) = F(x) - G(x)$. Quanto vale $\varphi'(x)$? Perché?
- La funzione $f(x)$ è dispari e integrabile in $\mathbb{R}$. Verifica che $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.
- Commenta l'affermazione:
  "Se una funzione $f(x)$, due volte derivabile in $\mathbb{R}$, ammette un flesso di ascissa $x = c$, allora la funzione $g(x) = f'(x)$ ammette un estremo relativo in $x = c$."
- Descrivi l'esperimento di Hertz.
- Quanta energia trasporta il campo magnetico $\vec{B}$ di un'onda elettromagnetica? Qual è il suo legame con l'energia trasportata dal campo elettrico $\vec{E}$ della stessa onda?
- Un circuito RL è percorso da una corrente continua di intensità i. Spiega cosa accade quando viene aperto l'interruttore e il generatore è disconnesso dal circuito. Se nel circuito è inserito un LED, inserito in parallelo a RL e polarizzato inversamente, il LED rimane acceso per un breve intervallo di tempo. Sai come quantificare questo intervallo?

Traccia di svolgimento del *Mettiti alla prova*

1. **Dedurre il grafico di $f'(x)$ da quello di $f(x)$.**

   La funzione disegnata ha un asintoto orizzontale. Se interpretiamo geometricamente la derivata prima possiamo dire che

   $\lim_{x \to \pm\infty} f'(x) = 0.$

   Quindi, $f'(x)$ ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$.

   Dalla crescenza della funzione $f(x)$ possiamo dedurre il segno di $f'(x)$: $f'(x) > 0$ per $x < 0$ e $f'(x) < 0$ per $x > 0$. Inoltre, poiché $f(x)$ ha un punto di massimo in $x = 0$ possiamo concludere che $f'(0) = 0$.

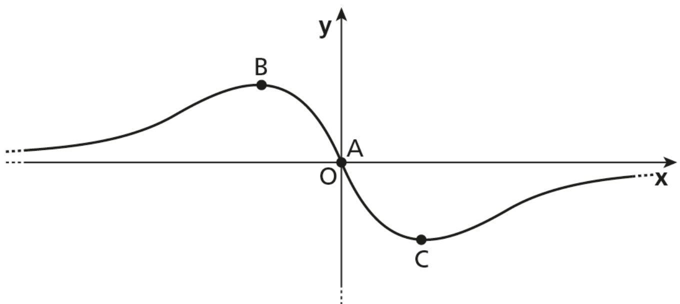
   Dalla concavità della funzione $f(x)$ possiamo dedurre il segno di $f''(x)$. $f''(x)$ è la derivata prima della funzione derivata, quindi possiamo dedurre la crescenza della funzione derivata:

   $f''(x) > 0 \text{ per } x < -\frac{2}{\sqrt{3}} \vee x > \frac{2}{\sqrt{3}}, \qquad f''(x) < 0 \text{ per } -\frac{2}{\sqrt{3}} < x < \frac{2}{\sqrt{3}}, \qquad f''(x) = 0 \text{ per } x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$

   Quindi, la funzione derivata è crescente per $x < -\frac{2}{\sqrt{3}} \vee x > \frac{2}{\sqrt{3}}$, decrescente per $-\frac{2}{\sqrt{3}} < x < \frac{2}{\sqrt{3}}$ e ha due punti stazione per $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$.

   Il grafico della funzione $f'(x)$ ha un massimo relativo nel punto $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ e un minimo relativo nel punto $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

   Tracciamo il grafico probabile di $f'(x)$.



Prosegue >>

2. **Dimostra che la derivata di una funzione derivabile pari è dispari.**

La funzione $f(x)$ è pari e derivabile, pertanto risulta che

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x).$$

Osserviamo che

$$f'(-x)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f\big(-(x-h)\big)-f(-x)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}=$$
$$-\left(\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\right)=-f'(x),$$

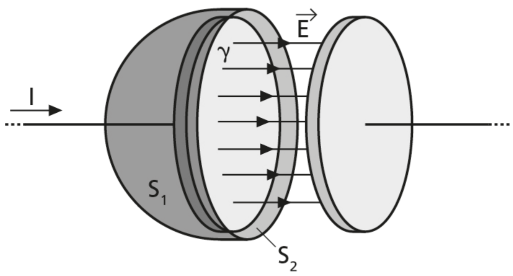
quindi $f'(x)$ è dispari.

3. **Primitive di una funzione pari.**

Per una conseguenza del teorema di Lagrange, se una funzione ammette una primitiva, allora ne ammette infinite che differiscono tra loro per una costante additiva. Quindi, se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, allora $F(x)+c$ è una primitiva di $f(x)$ per ogni $c\in\mathbb{R}$. Supponiamo che $F(x)$ sia dispari, per $c\neq 0$ la funzione $F(x)+c$ non lo è.

4. **Ipotesi di Maxwell e correnti di spostamento.**

Per il teorema di Ampère, la circuitazione di $\vec{B}$ è proporzionale alla somma delle intensità delle correnti concatenate con il circuito su cui viene calcolata.



Se, però, si considera un circuito γ come quello in figura il calcolo della circuitazione presenta valori diversi a seconda che si consideri la superficie S_1 o la superficie S_2.

Per risolvere questo problema, Maxwell ha introdotto il concetto di corrente di spostamento: $i_s=\varepsilon_0\frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$.

Questa grandezza esprime il fatto che i campi elettrici variabili nel tempo generano campi magnetici e ci consente di descrivere il campo elettromagnetico attraverso le equazioni di Maxwell.

5. **Determinare il campo magnetico indotto $B(t)$ a distanza $r<R$ dall'asse del condensatore.**

L'intensità del campo elettrico tra le armature del condensatore varia nel tempo secondo la legge $E(t)=E_0\,f(t)$.

La variazione del flusso del campo elettrico concatenato al circuito γ è data da $\frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}=E_0\pi r^2 f'(t)$.

La circuitazione di $\vec{B}$ sul circuito γ può essere espressa in due modi:

$$C(\vec{B})=\mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}\to C(\vec{B})=\mu_0\varepsilon_0 E_0\pi r^2 f'(t)\to C(\vec{B})=\mu_0\varepsilon_0 E_0\pi r^2\left[-\frac{16t}{(t^2+4)^2}\right],$$

$$C(\vec{B})=2\pi r B(t).$$

Quindi

$$B(t)=\frac{\mu_0\varepsilon_0 E_0}{2\pi r}\pi r^2\left[-\frac{16t}{(t^2+4)^2}\right]\to B(t)=-8\mu_0\varepsilon_0 E_0 r\frac{t}{(t^2+4)^2}$$

6. **Il campo magnetico indotto $B(t)$ a distanza $r>R$ dall'asse del condensatore.**

Nel caso ideale, per i punti esterni al condensatore il campo elettrico è nullo. Pertanto, il flusso del campo elettrico concatenato al circuito γ è:

$$\Phi(\vec{E})=\pi R^2\,E_0\,f(t).$$

Determiniamo l'espressione del campo magnetico:

$$B(t)=\frac{\mu_0\varepsilon_0 E_0}{2\pi r}\pi R^2\left[-\frac{16t}{(t^2+4)^2}\right]\to B(t)=-\frac{8\mu_0\varepsilon_0 E_0}{r}R^2\frac{t}{(t^2+4)^2}.$$