Proposta per l’elaborato di matematica e fisica

Per lo studente

Integrali impropri ed effetto fotoelettrico

Rifletti sulla teoria

- Illustra l’applicazione del calcolo differenziale alla determinazione dei massimi e minimi relativi e dei flessi di una funzione.
- Enuncia il teorema fondamentale del calcolo integrale e la relativa formula per il calcolo degli integrali definiti.
- Illustra il ruolo delle simmetrie, parità e disparità, nel calcolo di integrali definiti su intervalli simmetrici.
- Definisci il concetto di integrale improprio, illustrando con esempi i vari casi che si possono presentare.
- Esponi i concetti di intensità di irraggiamento di un’onda elettromagnetica nell’ambito della teoria classica di Maxwell.
- Descrivi l’effetto fotoelettrico. Illustra gli aspetti critici dell’interpretazione che la fisica classica fornisce del fenomeno e ricava l’equazione dell’energia cinetica massima dei foto-elettroni secondo l’ipotesi di Einstein del quanto di luce.

Mettiti alla prova

Considera la funzione $f(x)$, definita per $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = axe^{-\frac{x^2}{b}},$$

con a e b costanti reali positive.

1. Dimostra che il grafico di $f(x)$ presenta un punto di massimo relativo, un punto di minimo relativo e tre punti di flesso per ogni valore positivo di a e b.

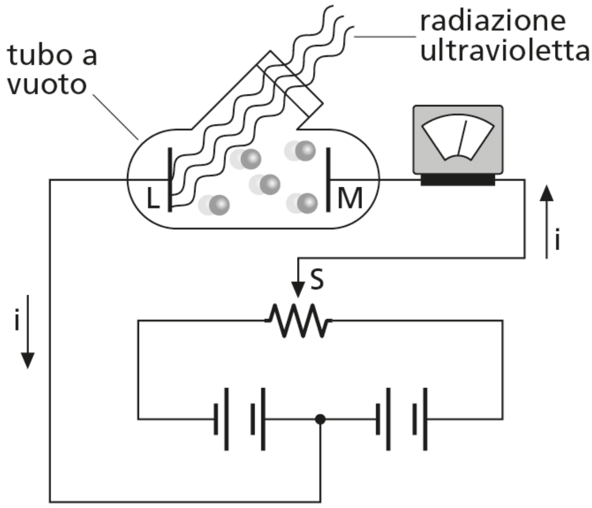
2. Dimostra che la regione illimitata compresa tra il grafico di $f(x)$ e il semiasse positivo dell’asse delle ascisse ha un’area finita S pari a $S = \frac{ab}{2}$.

3. Determina per quali valori di a e b il grafico di $f(x)$ presenta un massimo relativo per $x = 2$ e la retta tangente al grafico in $x = 0$ forma con l’asse x un angolo $\alpha = \arctan\frac{\sqrt{2e^3}}{2}$.

4. Supponi che a e b assumano i valori $a = \frac{\sqrt{2e^3}}{2}$ e $b = 8$ che soddisfano le richieste del punto precedente.
Dimostra che la retta normale (perpendicolare alla tangente) in uno dei flessi di ascissa non nulla contiene anche gli altri due flessi.

Prosegue >>

Considera le condizioni sperimentali tipiche per lo studio dell'*effetto fotoelettrico*, cioè l'emissione di elettroni da una superficie metallica colpita da un fascio di radiazione elettromagnetica (vedi figura).



Supponi che, in queste condizioni, un'area

$S_L = 4{,}00\ \mathrm{cm}^2$

del catodo metallico L (sodio metallico, potenziale di estrazione $W_0 = 2{,}36\ \mathrm{eV}$) sia uniformemente illuminata da una radiazione ultravioletta di lunghezza d'onda $\lambda = 400\ \mathrm{nm}$, la cui intensità in $\mathrm{W/m^2}$ varia nel tempo, in secondi, come la funzione:

$I(t) = \frac{f(t)}{e\sqrt{2e}} = Ate^{-\frac{t^2}{B}}, \quad \text{per } t \geq 0,$

dove $A = 0{,}50\ \mathrm{W/(s \cdot m^2)}$ e $B = 8{,}0\ \mathrm{s^2}$.

5. Supponi che la distanza tra il catodo L e l'anodo M sia $d = 10{,}0\ \mathrm{cm}$ e che un elettrone con energia cinetica massima K_e esca con velocità diretta perpendicolarmente alle superfici degli elettrodi. Dopo aver ricavato l'espressione dell'energia cinetica massima K_e in funzione della frequenza della radiazione, calcola il minimo valore $V_{\min}$ della differenza di potenziale che deve essere applicata tra gli elettrodi per frenare gli elettroni con energia cinetica massima in modo da ridurre a zero la corrente (potenziale di arresto) e il tempo impiegato da un elettrone con energia cinetica massima a compiere il tratto d quando la differenza di potenziale è pari a $V_{\min}$.

6. Supponi che solo il 20% dell'energia che colpisce in ogni istante il catodo sia assorbita dagli elettroni che sono emessi con la massima energia cinetica. Stima il numero di tali elettroni che vengono emessi in un secondo dal catodo, nel momento in cui l'intensità di irraggiamento $I(t)$ raggiunge il suo massimo.

7. Stima il numero totale di foto-elettroni emessi dal catodo per $t \geq 0\ \mathrm{s}$.

Possibile integrazione multidisciplinare

- L'*effetto fotoelettrico* è il fenomeno alla base del funzionamento delle *celle fotovoltaiche*. Uno degli obiettivi dell'**Agenda 2030** per lo sviluppo sostenibile è il seguente:

  Obiettivo 7: Assicurare a tutti sistemi di energia economici, affidabili, sostenibili e moderni.

  Commenta questo obiettivo e confronta le diverse fonti di energia rinnovabile e sostenibile.

Prosegue >>

Per l'insegnante

Possibili domande da fare durante il colloquio

In sede d'esame, per verificare l'effettiva comprensione della parte teorica, si possono fare allo studente le seguenti domande.

- Considera la funzione $f(x)$ dispari e derivabile in tutto il suo dominio. Che cosa puoi dire di eventuali simmetrie delle funzioni $f'(x)$ e $f''(x)$? Motiva le tue affermazioni.
- Enuncia il teorema della media integrale e definisci il concetto di funzione integrale. Qual è il ruolo del teorema della media integrale nella dimostrazione del teorema di Torricelli-Barrow (teorema fondamentale del calcolo integrale)?
- È corretto affermare che, se $f(x)$ è dispari, vale:
  $$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 0?$$
  Che cosa cambia, e perché, se si calcola l'integrale:
  $$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{x^2}\ dx\,?$$
- Descrivi qualitativamente la genesi e le caratteristiche di un'onda elettromagnetica armonica secondo la teoria di Maxwell, e spiega come e in che misura una tale onda determini un trasporto di energia.
- Discuti in breve gli aspetti critici dell'interpretazione classica dell'effetto fotoelettrico e le ipotesi di Einstein che consentono di conciliare la sua interpretazione con i fatti sperimentali.
- In quale contesto si presenta per la prima volta la costante h che interviene nell'energia del quanto di luce? Si può attribuire una quantità di moto al quanto di luce nell'ambito della teoria della relatività ristretta? In quali altri contesti sperimentali la radiazione elettromagnetica si comporta come un insieme di “particelle” dotate di energia e quantità di moto individuali?

Traccia di svolgimento del *Mettiti alla prova*

1. **Determinazione di massimi, minimi, flessi di $f(x)$.**

   La funzione $f(x)$ è dispari.

   Calcoliamo $f'(x)$:
   $$f'(x) = \frac{a}{b}e^{-\frac{x^2}{b}}(b-2x^2) \ \rightarrow \ f'(x) > 0 \quad \text{per} \quad -\sqrt{\frac{b}{2}} < x < \sqrt{\frac{b}{2}}.$$
   La funzione derivata si annulla e cambia segno nei punti simmetrici $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{b}{2}}$.

   Il punto $x_1 = -\sqrt{\frac{b}{2}}$ è un punto di minimo relativo e il suo valore è $f\left(-\sqrt{\frac{b}{2}}\right) = -a\sqrt{\frac{b}{2e}}$, mentre il punto $x_2 = \sqrt{\frac{b}{2}}$ è un punto di massimo relativo e il suo valore è $f\left(\sqrt{\frac{b}{2}}\right) = a\sqrt{\frac{b}{2e}}$.

   Osserviamo che
   $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0,$$
   quindi il punto di minimo relativo e il punto di massimo relativo sono rispettivamente anche il punto di minimo assoluto e il punto di massimo assoluto.

Prosegue >>

Calcoliamo $f''(x)$:

$$f''(x)=\frac{2a}{b^2}e^{-\frac{x^2}{b}}x(2x^2-3b)\ \rightarrow\ f''(x)>0\ \text{ per }\ -\sqrt{\frac{3b}{2}}<x<0\ \vee\ \ x>\sqrt{\frac{3b}{2}}.$$

La funzione derivata seconda si annulla e cambia segno nei punti $x_3=0$ e $x_{4,5}=\pm\sqrt{\frac{3b}{2}}$. I punti di coordinate $(0;0)$ e $\left(\pm\sqrt{\frac{3b}{2}};\pm a\sqrt{\frac{3b}{2e^3}}\right)$ sono tre flessi per il grafico di $f(x)$**.**

2. **Calcolo dell'integrale improprio $\int_0^{+\infty} f(x)\ dx$.**

   L'area della regione illimitata può essere calcolata con un integrale improprio, cioè come limite di una funzione integrale:

$$S=\int_0^{+\infty} f(x)\ dx=\lim_{k\to+\infty}\int_0^k axe^{-\frac{x^2}{b}}\ dx=\lim_{k\to+\infty}\left[-\frac{ab}{2}e^{-\frac{x^2}{b}}\right]_0^k=\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{ab}{2}-\frac{ab}{2}e^{-\frac{k^2}{b}}\right)=\frac{ab}{2}.$$

3. **Determinazione delle costanti a e b.**

   La condizione di massimo per $x=2$ è soddisfatta se e solo se $\sqrt{\frac{b}{2}}=2\rightarrow b=8$.

   La condizione che la retta tangente al grafico in $x=0$ formi con l'asse delle ascisse l'angolo α equivale a richiedere:

$$f'(0)=\frac{\sqrt{2e^3}}{2}\ \rightarrow\ \frac{a}{8}e^0(8-0)=\frac{\sqrt{2e^3}}{2}\ \rightarrow\ a=\frac{\sqrt{2e^3}}{2}.$$

4. **Tangenti e normali nei punti di flesso.**

   Scriviamo la funzione $f(x)$ e la sua derivata prima e seconda per i parametri assegnati:

$$f(x)=\frac{\sqrt{2e^3}}{2}xe^{-\frac{x^2}{8}},\quad f'(x)=\frac{\sqrt{2e^3}}{8}e^{-\frac{x^2}{8}}(4-x^2),\quad f''(x)=\frac{\sqrt{2e^3}}{32}e^{-\frac{x^2}{8}}x(x^2-12).$$

   Ricaviamo le coordinate dei flessi: $\left(\pm2\sqrt{3};\pm\sqrt{6}\right)$. Determiniamo l'equazione della retta normale nel flesso di ascissa positiva $\left(2\sqrt{3};\sqrt{6}\right)$. Bisogna quindi trovare la retta di coefficiente angolare antireciproco di $f'\left(2\sqrt{3}\right)=-\sqrt{2}$ passante per il flesso:

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-2\sqrt{3}\right)+\sqrt{6}\ \rightarrow\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}x.$$

   Osserviamo che sia l'origine sia il punto $\left(-2\sqrt{3};-\sqrt{6}\right)$ appartengono alla retta trovata. In particolare, data la simmetria della funzione, la retta $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$ è la normale in entrambi i flessi.

5. **Calcolo del potenziale di arresto $V_{\min}$.**

   Scriviamo la relazione di Einstein tra energia cinetica massima dell'elettrone foto-emesso K_e, energia del fotone (quanto di luce) $h\nu$ e potenziale di estrazione del metallo $W_0=2{,}36\ \text{eV}$:

$$K_e=h\nu-W_0$$

   Usiamo i dati del problema ed esprimiamo in elettronvolt l'energia del fotone di luce ultravioletta, $1\ \text{eV}=1{,}602\cdot10^{-19}\ \text{J}$, otteniamo:

$$h\nu=\frac{hc}{\lambda}=\frac{6{,}626\cdot10^{-34}\cdot2{,}998\cdot10^{8}}{4{,}00\cdot10^{-7}}=4{,}97\cdot10^{-19}\ \text{J}\simeq3{,}10\ \text{eV}.$$

   Otteniamo quindi:

$$K_e=h\nu-W_0=3{,}10-2{,}36=0{,}74\ \ \text{eV}.$$

   Osserviamo che

$$[K_e]_{\text{J}}=e[K_e]_{\text{eV}}=eV_{\min}.$$

Prosegue >>

Avendo già calcolato l'energia cinetica massima K_e con cui un elettrone esce dal catodo, in elettronvolt, si può dire subito che la differenza di potenziale $V_{\min}$ che deve essere applicata tra gli elettrodi per frenare l'elettrone è pari esattamente a $V_{\min} = 0{,}74\ \mathrm{V}$. Quindi, posto uguale a 0 il potenziale dell'anodo, il catodo deve avere come minimo un potenziale positivo di

$$V_{\min} = 0{,}74\ \mathrm{V}$$

per poter arrestare gli elettroni più veloci.

La velocità di uscita di un elettrone con energia cinetica massima si ricava dalla relazione

$$v_0 = \sqrt{\frac{2K_e}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}74 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}}{9{,}109 \cdot 10^{-31}}} \simeq 5{,}10 \cdot 10^5\ \mathrm{m/s}.$$

Poiché tale velocità è molto inferiore a quella della luce, possiamo usare la dinamica newtoniana per stimare il tempo di arrivo sull'anodo. Nell'ipotesi di campo elettrico uniforme

$$E = \frac{V}{d}$$

e assenza di attriti, il moto è un moto uniformemente decelerato con accelerazione

$$a = -\frac{eV_{\min}}{m_e d} = -\frac{1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}74}{9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot 0{,}10} \simeq -1{,}30 \cdot 10^{12}\ \mathrm{m/s^2}.$$

In corrispondenza del potenziale d'arresto gli elettroni arrivano fermi sull'anodo, per cui:

- $t = -\frac{v_0}{a} = \frac{5{,}10 \cdot 10^5}{1{,}30 \cdot 10^{12}} \simeq 3{,}92 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}.$

6. **Tasso di emissione dei foto-elettroni a $t = 2{,}0\ \mathrm{s}$.**

Per quanto visto nei punti precedenti l'intensità di irraggiamento $I(t) = 0{,}5te^{-\frac{t^2}{8}}$, misurata in $\mathrm{W/m^2}$, raggiunge il suo massimo per $t = 2{,}0\ \mathrm{s}$. Il 20% del corrispondente valore di massimo rappresenta I_e, la potenza istantanea per unità di superficie, utile all'estrazione degli elettroni con energia cinetica massima K_e:

$$I_e = 0{,}20 \cdot I(2{,}0) \;\rightarrow\; I_e = 0{,}20e^{-\frac{1}{2}} \simeq 0{,}121\ \mathrm{W/m^2}.$$

Moltiplicando I_e per la superficie del catodo otteniamo la potenza P_e spesa per l'estrazione degli elettroni con energia cinetica massima K_e; dividendo P_e per l'energia $h\nu$ del singolo fotone possiamo ottenere una stima della frequenza $\frac{dn}{dt}$ con cui vengono emessi gli elettroni all'istante $t = 2{,}0\ \mathrm{s}$.

$$\frac{dn}{dt} \simeq \frac{P_e \cdot S_L}{h\nu} = \frac{0{,}121 \cdot 4{,}00 \cdot 10^{-4}}{4{,}966 \cdot 10^{-19}} = 9{,}77 \cdot 10^{13}\ \text{elettroni/s}.$$

7. **Stima del numero totale di foto-elettroni emessi.**

Se interpretiamo l'area $w = \frac{ab}{2e\sqrt{2e}} = 2{,}0\ \mathrm{J}/m^2$ della regione illimitata compresa tra il grafico di $I(t)$ e il semiasse positivo $t \geq 0$ come l'energia totale per unità di superficie irraggiata sul catodo, possiamo procedere in modo analogo a quanto visto sopra e stimare il numero totale N di elettroni emessi con la massima energia cinetica come

$$N = \frac{w \cdot S_L}{h\nu} = \frac{2{,}0 \cdot 4{,}00 \cdot 10^{-4}}{4{,}966 \cdot 10^{-19}} \simeq 1{,}61 \cdot 10^{15}\ \text{elettroni}.$$