Proposta per l’elaborato di matematica e fisica

Per lo studente

Massimi, minimi e flessi e moto di un punto materiale

Rifletti sulla teoria

- Spiega come puoi studiare la crescenza e la concavità di una funzione $f(x)$ che ammette derivata prima e derivata seconda continue.
- Enuncia e dimostra il teorema di Lagrange. Forniscine un’interpretazione grafica.
- Enuncia alcune proprietà dell’integrale definito.
- Come puoi calcolare la velocità istantanea e l’accelerazione istantanea di un punto materiale a partire dalla sua legge oraria?
- Sia $F(t)$ l’intensità di una forza impulsiva variabile definita nell’intervallo $[0;\tau]$. Spiega che cos’è e come si calcola la forza media.
- Fornisci un esempio di forza $\vec{F}$ la cui intensità dipende dalla posizione x. Spiega come si calcola, in questo caso, il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ quando il suo punto di applicazione si sposta da A a B.

Mettiti alla prova

Considera la famiglia di funzioni

$$f_k(x)=\frac{4x}{k}e^{1-\frac{x}{k}},\quad \text{con } k>0 \quad \text{e} \quad x\in[0;+\infty[.$$

1. Verifica che ciascuna funzione ammette un massimo assoluto e un flesso e che, al variare di k, tali punti appartengono a due rette orizzontali. Determina le equazioni delle due rette.

2. Enuncia il teorema della media.

3. Verifica che il valor medio della funzione $f_k(x)$ nell’intervallo $[0;k]$ è indipendente dal valore di k.

Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi lungo l’asse x di un sistema di riferimento cartesiano in cui le distanze sono misurate in metri. La legge oraria del punto materiale è data dalla funzione $x(t)=f_1(t)$ per $t\geq 0$ con le opportune unità di misura.

4. Determina la velocità media del punto nell’intervallo $[0;1]$.

5. Esiste un istante in cui la velocità istantanea è uguale alla velocità media? Perché?

6. Esiste un istante in cui la forza agente sul punto P si annulla? Se la risposta è affermativa, quanto vale in questo caso l’intensità della velocità di P?

Possibile integrazione multidisciplinare

- Realizza una **simulazione grafica** del moto del punto materiale dove la legge oraria del punto materiale è data dalla funzione $x(t)=f_1(t)$ per $t\geq 0$.

Prosegue >>

Per l'insegnante

Possibili domande da fare durante il colloquio

In sede d'esame, per verificare l'effettiva comprensione della parte teorica, si possono fare allo studente le seguenti domande.

- Sia $f(x)$ una funzione che soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[a; b]$. Dimostra che se $f'(x) > 0$ in $]a; b[$, allora la funzione è crescente nell'intervallo aperto.
- Enuncia e dimostra il teorema di Torricelli.
- Definisci il concetto di primitiva per la funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a; b]$.
  "Se una funzione ammette una primitiva essa è unica."
  Commenta questa affermazione in base alle tue conoscenze.
- Supponi che $F(t)$ sia l'espressione dell'intensità di una forza dipendente dal tempo che agisce su un punto materiale P di massa m. Spiega come si deducono le espressioni della velocità $v(t)$ e della legge oraria del punto P. Le informazioni sono sufficienti? In caso di risposta negativa, quali informazioni mancano?
- Fornisci un esempio di forza conservativa.
- Il campo elettrico indotto è conservativo? Perché?

Traccia di svolgimento del *Mettiti alla prova*

1. **Massimo assoluto e flesso di $f_k(x)$ ed equazioni delle rette a cui appartengono.**

   Osserviamo che $f_k(0) = 0$ e $f_k(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0; +\infty[$. Inoltre, determiniamo il limite per $x \to +\infty$ usando gli ordini di infinito:

   $$\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{ke^{\frac{x}{k}-1}} = 0.$$

   Calcoliamo le funzioni derivata prima di $f_k(x)$:

   $$f_k'(x) = \frac{4}{k^2}(k - x)e^{1-\frac{x}{k}}.$$

   Quindi: $f_k'(x) = 0$ per $x = k$, $f_k'(x) > 0$ per $x < k$ e $f_k'(x) < 0$ per $x > k$. Tutte le funzioni della famiglia ammettono un massimo relativo in $x = k$.

   Poiché le funzioni nell'intervallo considerato sono sempre positive e il limite agli estremi è 0, il massimo relativo è anche assoluto. Calcoliamo il valore del massimo:

   $$f_k(k) = \frac{4k}{k}e^{1-\frac{k}{k}} \to f_k(k) = 4.$$

   Pertanto il massimo assoluto al variare di k ha coordinate $M(k; 4)$ e tutti i massimi appartengono alla retta $y = 4$.

   Per trovare il punto di flesso calcoliamo la derivata seconda

   $$f_k''(x) = \frac{4}{k^3}(x - 2k)e^{1-\frac{x}{k}}.$$

   Quindi: $f_k''(x) = 0$ per $x = 2k$, $f_k''(x) > 0$ per $x > 2k$ e $f_k''(x) < 0$ per $x < 2k$. Tutte le funzioni della famiglia ammettono un flesso in $x = 2k$. Calcoliamo il valore della funzione nel punto di flesso:

   $$f_k(2k) = \frac{4 \cdot 2k}{k}e^{1-\frac{2k}{k}} \to f_k(2k) = 8e^{-1}.$$

   Pertanto il punto di flesso al variare di k ha coordinate $F(2k; 8e^{-1})$ e tutti i flessi appartengono alla retta $y = 8e^{-1}$.

2. **Enuncia il teorema della media.**

   Se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo $[a; b]$, esiste almeno un punto z dell'intervallo tale che

   $$f(z) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b - a}.$$

Prosegue >>

3. **Calcolo del valor medio.**

   Calcoliamo il valor medio della funzione. Per determinare l'integrale definito applichiamo la sostituzione $\frac{x}{k} = t$ e poi integriamo per parti:

   $$\frac{\int_0^k f_k(x)\,dx}{k-0} = \frac{1}{k}\int_0^k \frac{4x}{k}e^{1-\frac{x}{k}}\,dx = -\frac{4e}{k}\int_0^k -\frac{x}{k}e^{-\frac{x}{k}}\,dx = -\frac{4e}{k}\int_0^1 -kt\,e^{-t}dt =$$

   $$-4e[e^{-t}(t+1)]_0^1 = -4e(2e^{-1}-1) = 4e-8.$$

   Abbiamo verificato che il valor medio della funzione $f(x)$ non dipende dal parametro k.

4. **Calcolo della velocità media.**

   La legge oraria è

   $x(t) = f_1(t) \to x(t) = 4te^{1-t}$.

   La velocità media nell'intervallo $[0;1]$ è

   $$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \to v_m = \frac{4e^0 - 0}{1} \to v_m = 4\ \mathrm{m/s}.$$

5. **Punto in cui la velocità istantanea è uguale alla velocità media.**

   La funzione $x(t)$ è continua e derivabile in $\mathbb{R}$, perciò è continua in $[0;1]$ e derivabile in $]0;1[$. La funzione soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange e possiamo affermare che esiste almeno un valore $\bar{t} \in]0;1[$ tale che

   $$x'(\bar{t}) = \frac{x(1) - x(0)}{1-0} = v_m.$$

6. **Ricerca degli istanti in cui si annulla la forza.**

   L'accelerazione istantanea è data da

   $a(t) = v'(t) = x''(t) \to a(t) = 4(t-2)e^{1-t}$.

   Per la seconda legge di Newton

   $F(t) = m\,a(t) \to F(t) = 4m(t-2)e^{1-t}$.

   La forza si annulla per $t = 2$ s, nel punto di flesso della funzione $x(t) = f_1(t)$. Usiamo i calcoli svolti nelle richieste precedenti per determinare l'intensità della velocità $|v(t)|$:

   $|v(t)| = |4(1-t)e^{1-t}| \to |v(2)| = 4e^{-1} = 1{,}5\ \mathrm{m/s}$.