Proposta per l'elaborato di matematica e fisica

Per lo studente

Massimi, minimi e flessi di una funzione e potenziale elettrico

Rifletti sulla teoria

- Enuncia e dimostra il teorema di Fermat e spiega se si tratta di una condizione necessaria e/o sufficiente per l'esistenza di un massimo o di un minimo relativo. Aiutati con esempi e controesempi.
- Scrivi la definizione di asintoto e di asintoto obliquo. Scrivi una funzione che ammetta un asintoto orizzontale e una funzione che ammetta un asintoto obliquo.
- Enuncia il teorema De L'Hospital e dimostralo.
- Considera un conduttore carico in equilibrio elettrostatico. Sia A un punto all'interno del conduttore e B un punto sulla sua superficie. Quanto vale il campo elettrostatico nel punto A? Com'è orientato il campo elettrostatico nel punto B rispetto alla superficie del conduttore?
- Enuncia e dimostra il teorema di Coulomb.
- Spiega come calcolare la capacità di tre condensatori in serie e di tre condensatori in parallelo.

Mettiti alla prova

Considera la funzione $V(x) = (3x^2 + 4x - 1)e^{-x}$.

1. Trova l'asintoto orizzontale. La funzione $V(x)$ ammette un asintoto obliquo?

2. Determina i punti di massimo, di minimo e di flesso.

3. Rappresenta il grafico di $V(x)$.

4. Considera la funzione $V'(x)$. Che cosa rappresentano i punti di flesso di $V(x)$ per la funzione $V'(x)$?

La funzione $V(x)$ rappresenta, con le opportune unità di misura, il potenziale elettrico di una carica vincolata a muoversi lungo l'asse x.

5. Considerando questa contestualizzazione fisica, che cosa rappresenta la funzione $V'(x)$?

6. Come puoi trovare i punti di equilibrio della forza elettrica?

7. Si tratta di equilibrio stabile o instabile?

Possibili integrazioni multidisciplinari

- Il tema dell'**infinito** è stato oggetto di riflessione nei secoli da **artisti** e **filosofi**. Scegli un autore e spiega in che modo ha affrontato il tema dell'infinito.
- L'avvento dell'**energia elettrica** ha suscitato curiosità e ha avuto un'influenza sulla produzione di molti **artisti**. Mostra l'evoluzione della rappresentazione delle fonti di luce nelle opere pittoriche scegliendo alcuni esempi significativi.

Prosegue >>

Per l’insegnante

Possibili domande da fare durante il colloquio

In sede d’esame, per verificare l’effettiva comprensione della parte teorica, si possono fare allo studente le seguenti domande.

- Spiega come cercare gli estremi relativi di una funzione.
- Spiega come puoi usare il metodo delle derivate successive per individuare se un punto sia un punto di massimo o minimo relativo o un punto di flesso ascendente o discendente.
- Illustra il significato geometrico della derivata.
- Spiega cosa si intende per equilibrio elettrostatico.
- Spiega come calcolare la resistenza di tre resistori in serie e di tre resistori in parallelo.
- Qual è il lavoro che deve compiere un generatore di potenziale per stabilire una differenza di potenziale ΔV tra le due armature di un condensatore di capacità C?

Traccia di svolgimento del *Mettiti alla prova*

1. **Asintoto orizzontale ed eventuale asintoto obliquo di $V(x)$.**

Il dominio della funzione $V(x)$ è D: $\mathbb{R}$.
Il limite per $x \to +\infty$ è una forma indeterminata del tipo $\infty \cdot 0$. Per il teorema di De l’Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty} V(x) = \lim_{x\to+\infty} (3x^2+4x-1)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(3x^2+4x-1)}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x+4}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{e^x} = 0 \to$$

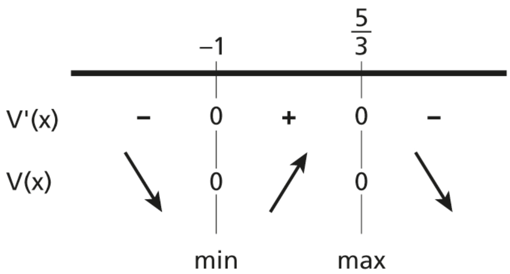
$y = 0$ asintoto orizzontale destro.
Il limite di $V(x)$ per $x \to -\infty$ è $+\infty$, quindi la funzione non ammette un asintoto orizzontale sinistro. Poiché:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{V(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(3x^2+4x-1)e^{-x}}{x} = -\infty,$$

la funzione non ammette asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

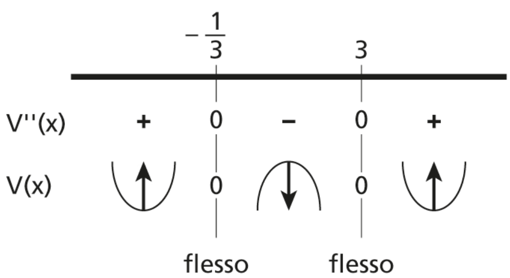
2. **Massimi e minimi relativi e flessi.**

$V'(x) = (6x+4)e^{-x} - e^{-x}(3x^2+4x-1) \to$
$V'(x) = -e^{-x}(3x^2-2x-5)$
Il dominio di $V'(x)$ è $\mathbb{R}$. Studiamo il suo segno.
$V'(x) = 0 \to 3x^2-2x-5\,x = 0 \to x = -1 \lor x = \frac{5}{3}$
$V'(x) > 0 \to 3x^2-2x-5 < 0 \to -1 < x < \frac{5}{3}$
$V(x)$ ha un minimo relativo in $x = -1$ e un massimo relativo in $x = \frac{5}{3}$.



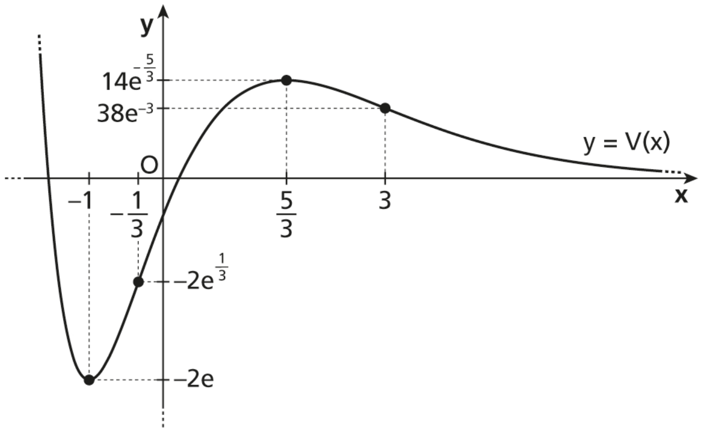
$V(-1) = -2e, \quad V\left(\frac{5}{3}\right) = 14e^{-\frac{5}{3}}.$
$x = -1$ è anche il punto di minimo assoluto.

$V''(x) = e^{-x}(3x^2-2x-5) - e^{-x}(6x-2) \to$
$V''(x) = e^{-x}(3x^2-8x-3)$
Il dominio di $V''(x)$ è $\mathbb{R}$. Studiamo il suo segno.
$V''(x) = 0 \to 3x^2-8x-3 = 0 \to x = -\frac{1}{3} \lor x = 3$
$V''(x) > 0 \to 3x^2-8x-3 > 0 \to x < -\frac{1}{3} \lor x > 3$
$V(x)$ ha due punti di flesso in $x = -\frac{1}{3}$ e in $x = 3$.
$V\left(-\frac{1}{3}\right) = -2e^{\frac{1}{3}}, \quad V(3) = 38e^{-3}.$



Prosegue >>

3. **Grafico di $V(x)$.**



4. **Significato punti di flesso di $V(x)$ per $V'(x)$.**
   $V(x)$ ha concavità rivolta verso l'alto per $x < -\frac{1}{3} \vee x > 3$, mentre la sua concavità è rivolta verso il basso per $-\frac{1}{3} < x < 3$. Pertanto, $V'(x)$ è crescente per $x < -\frac{1}{3} \vee x > 3$ e decrescente per $-\frac{1}{3} < x < 3$. Inoltre, in $x = -\frac{1}{3}$ e $x = 3$ la funzione $V''(x)$ si annulla. Quindi, i punti di flesso di $V(x)$ sono rispettivamente un massimo relativo di $V'(x)$ per $x = -\frac{1}{3}$ e un minimo relativo di $V'(x)$ per $x = 3$.
5. **Significato fisico di $V'(x)$.**
   Se $V(x)$ rappresenta, con le opportune unità di misura, il potenziale elettrico di una carica vincolata a muoversi lungo l'asse x, allora $V'(x) = \frac{dV}{dx}$ rappresenta l'opposto dell'intensità del campo elettrico a cui è sottoposta la carica, infatti $E(x) = -\frac{dV}{dx}$.
6. **Punti di equilibrio del campo.**
   I punti di equilibrio del campo sono gli zeri della funzione $E(x)$, ovvero i punti in cui l'intensità della forza applicata alla carica di prova è nulla. I punti di equilibrio, quindi, corrispondono ai punti stazionari di $V(x)$: $x = -1$ e $x = \frac{5}{3}$.
7. **Equilibrio stabile o instabile.**
   Poiché $x = -1$ è un minimo relativo per il potenziale l'equilibrio è stabile, mentre per $x = \frac{5}{3}$ il potenziale ammette un massimo relativo e quindi in questo punto l'equilibrio è instabile.