Свойства свёртки Гермейера в векторных играх

Кононов Сеергей

6 мая 2019 г.

Содержание

1 Введение **3**

2 Множество оптимальных стратегий **5**

3 Графическое изображение матожидания критерия **6**

4 Оптимальные результаты для игрока C **8**

5 Заключение **12**

6 Введение **12**

7 Постановка задача **12**

8 Оптимальные значения **13**

8.1 Рассмотрим игру за преподавателя 13

8.2 Рассмотрим игру за студента 15

9 Ссылки на источники **25**

1 Введение

Рассмотрим задачу многокритериальной или векторной, оптимизации:

$$\text{Найти } \max_x F(x), \text{ где } F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)), \quad x \in X \text{ конечно} \tag{1}$$

Определение [1]
Допустимое решение $\hat{x} \in X$ называется *строго эффективным (эффективным по Слейтеру)*, если не существует $x \in X$ такого, что $f(x) > f(\hat{x})$ т.е. $f_k(x) > f_k(\hat{x})$ для всех $k = 1, ..., n$. Множетсво всех эффективных по Слейтеру решений называаается *множеством Слейтера* задачи (1).

Для параметризации задачи и поиска множества Слейтера используется метод свёрток, согласно которому МК-задача $\max\limits_x F(x)$ заменяется параметрическим семейством скалярных задач $\max\limits_x C(\{f_i\}, \lambda)(x)$ где C – функция свертки частных критериев $\{f_i\}_{i=1}^m$ МК-задачи в единый скалярный критерий (монотонна по f), λ – параметр свертки.

Мы рассмотрим *линейную свёртку* (ЛС):

$$L(\{f_i\}, \lambda)(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i, \text{ где } \lambda \in \Lambda = \{\lambda_i \geq 0 | \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}, \tag{2}$$

и *свёртку Гермейера*, или обратную логическую свёртку (ОЛС):

$$G(\{f_i\}, \lambda)(x) = \min_{\lambda_i > 0} \frac{f_i}{\lambda_i}, \text{ где } \lambda \in \Lambda = \{\lambda_i \geq 0 | \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}. \tag{3}$$

Игровая модель
Студент (С) выбирает долю x рабочего времени, которую он тратит на подготовку диплома. Допустим, что эффективность подготовки пропорциональна $\sqrt{x}$. Оставшееся рабочее время $1 - x$ он тратит на подработку, и его второй критерий пропорционален $\sqrt{1-x}$. Считается, что производительность любых занятий С падает с увеличением отводимого на них времени, обусловливая вогнутость по x частных критериев. Допустим, что Студент не может распределять свое время между двумя видами деятельности, т.е. имеет множетсво стратегий $x \in X = \{0, 1\}$, причём может использовать смешанные стратегии. Преподаватель (П) имеет множество стратегий $y \in Y = \{1, 2\}$, причём тоже может использовать смешаные стратегии. При этом П стремится минимизировать, а С максимизировать следующий векторный критерий:

$$F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = (\frac{y\sqrt{x}}{2}, \frac{\sqrt{1-x}}{y}) \tag{4}$$

Для введём обозначения для вероятностей:

$$\begin{cases} P(X = 0) = 1 - q \\ P(X = 1) = q \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} P(Y = 1) = 1 - p \\ P(Y = 2) = p \end{cases}$$

И укажем области определения переменных, используемых ниже:

$$p \in [0,1], \quad q \in [0,1], \quad \mu \in [0,1], \quad \lambda \in [0,1]$$

И предположим, что Студент осредняет свой критерий по переменной x и получает:

$$F(q,y) = (f_1(q,y), f_2(q,y)) = \big(\frac{qy}{2}, \frac{1-q}{y}\big),$$

а Преподователь осредняет свой критерий по переменной y и получает

$$F(x,p) = (f_1(x,p), f_2(x,p)) = \big(\frac{(1+p)\sqrt{x}}{2}, \frac{(2-p)\sqrt{1-x}}{2}\big)$$

Рассмотрим вариант, когда Студент использует обратную логическую свёртку и осредняет её по переменной y:

$$M(p,q,\mu) = p\min\{\frac{q}{\mu}; \frac{1-q}{2(1-\mu)}\} + (1-p)\min\{\frac{q}{2\mu}; \frac{1-q}{1-\mu}\}, \tag{5}$$

а Преподаватель использует линейную свёртку и осредняет её по переменной x:

$$L(p,q,\lambda) = \frac{1}{2}\big\{q(3\lambda + p - 2) + (2-p)(1-\lambda)\big\}. \tag{6}$$

Игроки пытаются максимизировать или минимизировать сответствующие функции с помощью выбора своей стратегии

$$\begin{cases} M(p,q,\mu) \to \max\limits_q \\ L(p,q,\lambda) \to \min\limits_p \end{cases}$$

Определение

Пара стратегий (p^*, q^*) называется *оптимальной*, если для некоторых λ, μ верно:

$$\begin{cases} p^* = p^*(q^*, \lambda) = \operatorname*{argmin}\limits_p L(p, q^*, \lambda) \\ q^* = q^*(p^*, \mu) = \operatorname*{argmin}\limits_q M(p^*, q, \mu) \end{cases} \tag{7}$$

Для исследования оптимальных стратегий необходимо установить значения p и q, при которых эти функции достигают минимума и максимума соответственно. Этот вопрос уже был исследован. Из статьи [3] следует, что:

$$p^*(q,\lambda) = \operatorname*{argmin}\limits_p L(p,q,\lambda) = \begin{cases} 0, & q > 1-\lambda \\ 1, & q < 1-\lambda \\ \forall, & q = 1-\lambda \end{cases} \tag{8}$$

Из курсовой [2] следует, что

$$q^*(p,\mu) = \operatorname*{argmax}\limits_q M(p,q,\mu) = \begin{cases} \frac{\mu}{2-\mu}, & p+\mu-1 \geq 0 \\ \frac{2\mu}{1+\mu}, & p+\mu-1 \leq 0 \end{cases} \tag{9}$$

2 Множество оптимальных стратегий

Утверждение

Любая пара $(p^*, q^*) \in [0,1]^2$ является оптимальной, т.е. $\forall\ (p^*, q^*) \in [0,1]^2 \quad \exists\ \mu, \lambda$: верно (7).

Доказательство

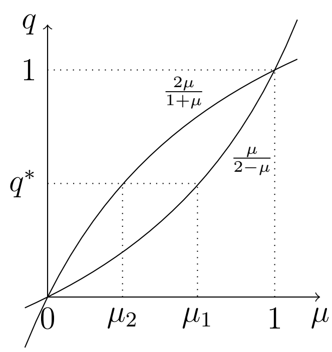
Зафиксируем некоторую пару $(p^*, q^*) \in [0,1]^2$ и найдя соответсвующие $\hat{\mu}(p^*, q^*)$ и $\hat{\lambda}(p^*, q^*)$ покажем, что она является оптимальной.

1 Покажем оптимальность p^*:

Возьмём $\hat{\lambda} := 1 - q^* \quad \Rightarrow$ поскольку $\operatorname*{argmin}_p L(p, q^*, \hat{\lambda}) = \forall$ при $q^* = 1 - \hat{\lambda}$,

то и $p^* \in \operatorname*{argmin}_p L(p, q^*, \hat{\lambda})$

2 Покажем оптимальность q^*:



По имеющемуся q^* решим уравнения $f_1(\mu_1) = q^*$ и $f_2(\mu_2) = q^*$, где $f_1 = \frac{\mu}{2-\mu}$ и $f_2 = \frac{2\mu}{1+\mu}$:

$$q^* = \frac{2\mu_2}{1+\mu_2} \Rightarrow \mu_2 = \frac{q^*}{2-q^*}$$

$$q^* = \frac{\mu_1}{2-\mu_1} \Rightarrow \mu_1 = \frac{2q^*}{1+q^*}$$

Заметим, что при $q^* \in [0,1] \quad \mu_2 \le \mu_1$

В таком случае поскольку $1 - p^* \in [0,1]$, то при фиксированных переменных (p^*, q^*) будет реализован один и только один из 3-х вариантов:

1) $1 - p^* \le \mu_2$

2) $\mu_2 < 1 - p^* \le \mu_1$

3) $\mu_1 < 1 - p^*$

1) $1 - p^* \le \mu_2$, т.е. $1 - p^* \le \frac{q^*}{2-q^*}$, в таком случае $\hat{\mu} := \mu_1 = \frac{2q^*}{1+q^*}$.

Действительно, при таком выборе $\hat{\mu}$ имеем: $1 - p^* \le \mu_2 \le \mu_1 = \hat{\mu} \Rightarrow$

$p^* + \hat{\mu} - 1 \geq 0 \Rightarrow \underset{q}{\operatorname{argmax}} M(p^*, q, \hat{\mu}) = \frac{\hat{\mu}}{2-\hat{\mu}} = \frac{\mu_1}{2-\mu_1} = \frac{\frac{2q^*}{1+q^*}}{2-\frac{2q^*}{1+q^*}} = q^* \Rightarrow$

$$\text{при} \begin{cases} \hat{\mu} = \frac{2q^*}{1+q^*} \\ \hat{\lambda} = 1 - q^* \\ 1 - p^* \leq \frac{q^*}{2-q^*} \end{cases} \quad (p^*, q^*) - \text{оптимальная пара}$$

2) $\mu_2 < 1 - p^* \leq \mu_1$, т.е. $\frac{q^*}{2-q^*} < 1 - p^* \leq \frac{2q^*}{1+q^*}$, в таком случае $\hat{\mu} := \mu_1 = \frac{2q^*}{1+q^*}$.
Действительно, при таком выборе $\hat{\mu}$ имеем :$1 - p^* \leq \mu_1 = \hat{\mu} \Rightarrow$
$p^* + \hat{\mu} - 1 \geq 0 \Rightarrow \underset{q}{\operatorname{argmax}} M(p^*, q, \hat{\mu}) = \frac{\hat{\mu}}{2-\hat{\mu}} = \frac{\mu_1}{2-\mu_1} = \frac{\frac{2q^*}{1+q^*}}{2-\frac{2q^*}{1+q^*}} = q^* \Rightarrow$

$$\text{при} \begin{cases} \hat{\mu} = \frac{2q^*}{1+q^*} \\ \hat{\lambda} = 1 - q^* \\ \frac{q^*}{2-1^*} < 1 - p^* \leq \frac{2q^*}{1+q^*} \end{cases} \quad (p^*, q^*) - \text{оптимальная пара}$$

3) $\mu_1 \leq 1 - p^*$ т.е. $\frac{2q^*}{1+q^*} < 1 - p^*$ в таком случае $\hat{\mu} = \mu_2 = \frac{q^*}{2-q^*}$
действительно, при таком выборе $\hat{\mu}$ имеем $1 - p^* \geq \mu_2 = \hat{\mu} \Rightarrow$
$p^* + \mu - 1 \leq 0 \Rightarrow \underset{q}{\operatorname{argmax}} M(p^*, q, \hat{\mu}) = \frac{2\hat{\mu}}{1+\hat{\mu}} = \frac{2\mu_2}{1+\mu_2} = \frac{2\frac{q^*}{2-q^*}}{1+\frac{q^*}{2-q^*}} = q^* \Rightarrow$

$$\text{при} \begin{cases} \hat{\mu} = \frac{q^*}{2-q^*} \\ \hat{\lambda} = 1 - q^* \\ \frac{2q^*}{1+q^*} < 1 - p^* \end{cases} \quad (p^*, q^*) - \text{оптимальная пара}$$

Таким образом при имеющихся (p^*, q^*) сначала надо определить в какой из вариантов 1-3 пара попадает, затем по соответсвующим равенствам найти $\hat{\mu}$ и $\hat{\lambda}$.
Утверждение доказано.

3 Графическое изображение матожидания критерия

Вычислим матожидание от имеющегося векторного критерия для игрока П
$F(X, Y) = \left(\frac{Y\sqrt{X}}{2}; \frac{\sqrt{1-X}}{Y}\right)$, где X и Y - случайные величины, причём

$$\begin{cases} P(X = 0) = 1 - q \\ P(X = 1) = q \end{cases} \quad \begin{cases} P(Y = 1) = 1 - p \\ P(Y = 2) = p \end{cases}$$

В таком случае имеем:

$$\underset{x}{\mathbb{E}}[F(x, y)] = \left(\frac{yq}{2}; \frac{1-q}{y}\right) \tag{10}$$

$$\underset{xy}{\mathbb{E}}[F(x, y)] = \left(\frac{q(1+p)}{2}; \frac{(1-q)(2-p)}{2}\right) \tag{11}$$

Рассмотрим это как множество точек на плоскости X, Y зависящие от двух параметров $(p, q) \in [0,1]^2$

$$\begin{cases} y = \frac{q(1+p)}{2} \\ x = \frac{(1-q)(2-p)}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{2x}{1+p} \\ y = (1 - \frac{2x}{1+p})\frac{2-p}{2} = \frac{(1+p-2x)(2-p)}{2(1+p)} \end{cases}$$

Найдём максимальные значения, которые может принимать $y(x, p)$ при фиксированном x:

$$\frac{\partial y(x,p)}{\partial p} = \frac{3x}{(p+1)^2} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow p_0 = \sqrt{6x} - 1$$

Поскольку область определения $p_0 \in [0, 1]$, и

$$p_0 = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ и } p_0 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{6}$$

$$y_{max}(x) = \begin{cases} \max(y(x,0), y(x,1), y(x,p_0)), & x \in [\frac{1}{6}, \frac{2}{3}] \\ \max(y(x,0), y(x,1)), & x \in [0, \frac{1}{6}] \cap [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

учитывая, что

$$y(x,0) = 1 - 2x$$

$$y(x,1) = \frac{1-x}{2}$$

$$y(x,p_0) = \frac{(\sqrt{6x} - 2x)(3 - \sqrt{6x})}{2\sqrt{6x}}$$

$$y_{min}(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{2}, & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 1 - 2x, & x \in (\frac{1}{3}, 1] \end{cases} \quad y_{max}(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & x \in [0, \frac{1}{6}] \\ \frac{(\sqrt{6x}-2x)(3-\sqrt{6x})}{2\sqrt{6x}}, & x \in (\frac{1}{6}, \frac{2}{3}] \\ \frac{1-x}{2}, & x \in (\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

В предыдущем пункте мы установили что любая пара $(p^*, q^*) \in [0,1]^2$ является оптимальной. Теперь для всех оптимальных стратегий т.е. пар $(p^*, q^*) \in [0,1]^2$ изобразим на графике значения матожидания векторного критерия в этой точке.

4 Оптимальные результаты для игрока C

Теперь рассмотрим игру с точки зрения игрока C. Для каждой пары параметров $(\hat{\mu}, \hat{\lambda})$ найдём множество соответсвующих оптимальных пар $(p^*(\hat{\mu}, \hat{\lambda}), q^*(\hat{\mu}, \hat{\lambda}))$. Далее найдём значение свёртки для игрока C в этих точка:

$$M(p^*, q^*, \hat{\mu}) = p^* \min\{\frac{q^*}{\hat{\mu}}; \frac{1-q^*}{2(1-\hat{\mu})}\} + (1-p^*) \min\{\frac{q^*}{2\hat{\mu}}; \frac{1-q^*}{1-\hat{\mu}}\}$$

И изобразим множество значений функции в этих точках.

Рассмотрим все возможные сочетания значений для p^* и q^* в системах (7) и (8), что даст нам 6 следующих систем:

Напомню, что переменные имеют следующих области ограничений:

$$p \in [0,1], \quad q \in [0,1], \quad \mu \in [0,1], \quad \lambda \in [0,1]$$

1

$$\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} \\ q^* > 1-\lambda \\ p^* + \mu - 1 \geq 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} \\ \frac{\mu}{2-\mu} > 1-\lambda \\ \mu \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \mu = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = 1 \\ \lambda > 0 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

Значит при $\mu = 1$, $\lambda \in (0,1]$ имеем следующие оптимальные пары $\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = 1 \end{cases}$

2

$$\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} \\ q^* > 1-\lambda \\ p^* + \mu - 1 \leq 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} \\ \frac{2\mu}{1+\mu} > 1-\lambda \\ \mu \leq 1 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} \\ \lambda > \frac{1-\mu}{1+\mu} \\ \mu \leq 1 \end{cases}$$

Значит при $\mu \in [0,1]$, $\lambda \in (\frac{1-\mu}{1+\mu}, 1]$ имеем следующие оптимальные пары $\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} \end{cases}$

3

$$\begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} \\ q^* < 1-\lambda \\ p^* + \mu - 1 \geq 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} \\ \frac{\mu}{2-\mu} < 1-\lambda \\ \mu \geq 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} \\ \lambda < 2\frac{1-\mu}{2-\mu} \\ \mu \geq 0 \end{cases}$$

Значит при $\mu \in [0,1]$, $\lambda \in [0, 2\frac{1-\mu}{2-\mu})$ имеем следующие оптимальные пары $\begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} \end{cases}$

④

$$\begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} \\ q^* < 1 - \lambda \\ p^* + \mu - 1 \leq 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} \\ \frac{2\mu}{1+\mu} < 1 - \lambda \\ \mu \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = 0 \\ \lambda < 1 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

Значит при $\mu = 0$, $\lambda \in [0, 1)$ имеем следующие оптимальные пары $\begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = 0 \end{cases}$

⑤

$$\begin{cases} p^* \in [0,1] \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} \\ q^* = 1 - \lambda \\ p^* + \mu - 1 \geq 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* \in [0,1] \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} \\ \frac{\mu}{2-\mu} = 1 - \lambda \\ p^* \geq 1 - \mu \end{cases} \sim \begin{cases} p^* \in [1-\mu, 1] \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} \\ \lambda = 2\frac{1-\mu}{2-\mu} \end{cases}$$

Значит при $\lambda = 2\frac{1-\mu}{2-\mu}$, $\mu \in [0,1]$ имеем следующие оптимальные пары $\begin{cases} p^* \in [1-\mu, 1] \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} \end{cases}$

⑥

$$\begin{cases} p^* \in [0,1] \\ q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} \\ q^* = 1 - \lambda \\ p^* + \mu - 1 \leq 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* \in [0,1] \\ q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} \\ \frac{2\mu}{1+\mu} = 1 - \lambda \\ p^* \leq 1 - \mu \end{cases} \sim \begin{cases} p^* \in [0, 1-\mu] \\ q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} \\ \lambda = \frac{1-\mu}{1+\mu} \end{cases}$$

Значит при $\mu \in [0,1]$, $\lambda = \frac{1-\mu}{1+\mu}$ имеем следующие оптимальные пары $\begin{cases} p^* \in [0, 1-\mu] \\ q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} \end{cases}$

Теперь на квадрате $(p,q) \in [0,1]^2$ рассмотрим все области, в которых множества оптимальных пар постоянны. И найдём множества значений функции

$$M(p,q,\mu) = p \min\{\frac{q}{\mu}; \frac{1-q}{2(1-\mu)}\} + (1-p)\min\{\frac{q}{2\mu}; \frac{1-q}{1-\mu}\}$$

В этих областях

1) $\mu = 0,\ \lambda \in [0,1)$: $\begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} = \{\mu = 0\} = 0 \end{cases}$

Получаем множества оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = (\{1\} \times \{0\})$, где $\times$ - это декартово произведение, тогда

$$M(1,0,0) = \frac{1}{2}$$

2.1) $\mu = 0,\ \lambda = 1$: $\begin{cases} p^* \geq 1 - \mu = \{\mu = 0\} = 1 \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} = \{\mu = 0\} = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} p^* \leq 1 - \mu = \{\mu = 0\} = 1 \\ q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} = \{\mu = 0\} = 0 \end{cases}$

Получаем множества оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = ([0,1] \times \{0\})$ тогда

$$M([0,1],0,0) = [0.5, 1]$$

2.2) $\mu = 1,\ \lambda = 0$: $\begin{cases} p^* \geq 1 - \mu = \{\mu = 1\} = 0 \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} = \{\mu = 1\} = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} p^* \leq 1 - \mu = \{\mu = 1\} = 0 \\ q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} = \{\mu = 1\} = 1 \end{cases}$

Получаем множества оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = ([0,1] \times \{1\})$ тогда

$$M([0,1],1,1) = [0.5, 1]$$

3) $\mu \in (0,1),\ \lambda \in (0, \frac{1-\mu}{1+\mu}]$: $\begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} \end{cases}$

Получаем множества оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = (\{1\} \times \{\frac{\mu}{2-\mu}\})$ тогда

$$M(1, \frac{\mu}{2-\mu}, \mu) = \min\{\frac{\mu}{2-\mu}; \frac{1 - \frac{\mu}{2-\mu}}{2(1-\mu)}\} = \frac{1}{2-\mu}$$

4) $\mu \in (0,1),\ \lambda = \frac{1-\mu}{1+\mu}$: $\begin{cases} p^* \in [0, 1-\mu] \cup \{1\} \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} \end{cases}$

4.1) Получаем множества оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = (\{1\} \times \{\frac{\mu}{2-\mu}\})$ тогда

$$M(1, \frac{\mu}{2-\mu}, \mu) = \frac{1}{2-\mu}$$

4.2) Получаем множества оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = ([0, 1-\mu] \times \{\frac{2\mu}{1+\mu}\})$ тогда

$$M(p, \frac{2\mu}{1+\mu}, \mu) = p\frac{1}{2(1+\mu)} + (1-p)\frac{1}{1+\mu} = \frac{2-p}{2(1+\mu)} \geq \frac{2-(1-\mu)}{2(1+\mu)} = \frac{1+\mu}{2(1+\mu)} = \frac{1}{2}$$

$$M(p, \frac{2\mu}{1+\mu}, \mu) \leq \frac{1}{1+\mu} \Rightarrow M(p, \frac{2\mu}{1+\mu}, \mu) = [0.5, \frac{1}{1+\mu}]$$

5) $\mu \in [(,1)$, $\lambda \in [0, 2\frac{1-\mu}{2-\mu}] \cap (\frac{1-\mu}{1+\mu}, 1]$: $\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} \end{cases}$; $\begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} \end{cases}$

5.1) Получаем множества оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = (\{0\} \times \{\frac{2\mu}{1+\mu}\})$ тогда

$$M(0, \frac{2\mu}{1+\mu}, \mu) = \frac{1}{1+\mu}$$

5.2) Получаем множества оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = (\{1\} \times \{\frac{\mu}{2-\mu}\})$ тогда

$$M(1, \frac{\mu}{2-\mu}, \mu) = \frac{1}{2-\mu}$$

6) $\mu \in (0,1)$, $\lambda = 2\frac{1-\mu}{2-\mu}$: $\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} \end{cases}$; $\begin{cases} p^* \in [0, 1-\mu] \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} \end{cases}$

6.1) Получаем множества оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = (\{0\} \times \{\frac{2\mu}{1+\mu}\})$ тогда

$$M(0, \frac{2\mu}{1+\mu}, \mu) = \frac{1}{1+\mu}$$

6.2) Получаем множество оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = ([1-\mu, 1] \times \{\frac{\mu}{2-\mu}\})$ тогда

$$M(p, \frac{\mu}{2-\mu}, \mu) = p\frac{1}{2-\mu} + (1-p)\frac{1}{2(2-\mu)} = \frac{1+p}{2(2-\mu)} \geq \frac{2-\mu}{2(2-\mu)} = \frac{1}{2}$$

$$M(p, \frac{\mu}{2-\mu}, \mu) \leq \frac{1}{2-\mu} \Rightarrow M(p, \frac{\mu}{2-\mu}, \mu) = [0.5, \frac{1}{2-\mu}]$$

7) $\mu \in (0,1), \lambda \in (2\frac{1-\mu}{2-\mu}, 1]$: $\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} \end{cases}$

Получаем множества оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = (\{0\} \times \{\frac{2\mu}{1+\mu}\})$ тогда

$$M(0, \frac{2\mu}{1+\mu}, \mu) = \min\{\frac{1}{\mu}\frac{2\mu}{1+\mu}; \frac{1 - \frac{2\mu}{1+\mu}}{1-\mu}\} = \frac{1}{1+\mu}$$

8) $\mu = 1$, $\lambda \in (0,1]$: $\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} = \{\mu = 1\} = 1 \end{cases}$

Получаем множества оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = (\{0\} \times \{1\})$ тогда

$$M(0, 1, 1) = \frac{1}{2}$$

Теперь на квадрате $(\mu,\lambda)\in[0,1]^2$ мы рассмотрели все точки и для каждой нашли оптимальные пары $p^*(\mu,\lambda)$ и $q^*(\mu,\lambda)$ и соответсвующие значения функции $M(p^*(\mu,\lambda),q^*(\mu,\lambda),\mu)$. Далее на квадрате $[0,1]^2$ изобразим все точки, которые принимает вектор $(\mu M(p^*,q^*,\mu),(1-\mu)M(p^*,q^*,\mu))$ при $(\mu,\lambda)\in[0,1]^2$

Поясним график:
нижняя огибающая в координатах X,Y: $y=\frac{1}{2}-x$,
верхняя огибающая в координатах X,Y: $y=\begin{cases}1-2x, & x\in[0,\frac{1}{3})\\ \frac{1-x}{2}, & x\in[\frac{1}{3},1]\end{cases}$.

5 Заключение

Итого мы выполнили поставленную задачу.

6 Введение

Определение [1]
Мы рассмотрим ***линейную свёртку*** **(ЛС)**:

$$L(\{f_i\},\lambda)(x)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i,\text{ где }\lambda\in\Lambda=\{\lambda_i\geqslant 0\,|\,\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1\},\tag{12}$$

и ***свёртку Гермейера***, или ***обратную логическую свёртку*** **(ОЛС)**:

$$G(\{f_i\},\lambda)(x)=\min_{\lambda_i>0}\frac{f_i}{\lambda_i},\text{ где }\lambda\in\Lambda=\{\lambda_i\geq 0|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1\}.\tag{13}$$

7 Постановка задача

Функциональный критерий: $F(x,y)=(\frac{y\sqrt{x}}{2},\frac{\sqrt{1-x}}{y})$

$$\text{С: } F(x,y) \to \max_{x\in X} \qquad\qquad \text{П: } F(x,y) \to \min_{y\in Y}$$

$$X = \{0; \tfrac{1}{2}; 1\} \qquad\qquad Y = \{1, 2\}$$

$$P(X=0) = q_0 \qquad\qquad P(Y=1) = p_0$$
$$P(X=\tfrac{1}{2}) = q_1 \qquad\qquad P(Y=2) = p_1$$
$$P(X=1) = q_2$$
$$\sum_{i=0}^{2} q_i = 1 \qquad\qquad \sum_{i=0}^{1} p_i = 1$$
$$0 \leqslant q_i \leqslant 1\ , \quad i = \overline{0,2} \qquad\qquad 0 \leqslant p_i \leqslant 1\ , \quad i = \overline{0,1}$$

Следровательно $q_1 = 1 - q_0 - q_2$ Пусть $p := p_1$, тогда $p_0 = 1 - p$

Введём множество

$$Q = \{(q_0, q_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant q_i \leqslant 1\ i \in \{0,2\};\ q_0 + q_2 \leqslant 1\} \tag{14}$$

Студент выбирет X и использует **ОЛС**.
Преподаватель выбирает Y и использует **ЛС**.

8 Оптимальные значения

8.1 Рассмотрим игру за преподавателя

Игрое **П** стремится минимизировать функциональный критерий:

$$F(x,y) = (\frac{y\sqrt{x}}{2}, \frac{\sqrt{1-x}}{y})$$

Игрок **П** использует смешанную стратегию, т.е. его стратегией является распределение $p = (p_0, p_1)$ над множеством чистых стратегий $Y = \{1, 2\}$:

$$F_{\Pi}(p,x) = \Big\langle (1-p)\frac{1\cdot\sqrt{x}}{2} + p\frac{2\cdot\sqrt{x}}{2};\ (1-p)\frac{\sqrt{1-x}}{1} + p\frac{\sqrt{1-x}}{2} \Big\rangle = \frac{1}{2}\Big\langle (p+1)\sqrt{x};\ (2-p)\sqrt{1-x} \Big\rangle$$

Затем использует **ЛС** (1):

$$L(p,x,\lambda) = \frac{1}{2}\big(\lambda(p+1)\sqrt{x} + (1-\lambda)(2-p)\sqrt{1-x}\big)$$

Введём обозначение $q = (q_0, q_1, q_2)$. Далеем осредняем функцию $L(p,x,\lambda)$ по стратегиям противника $x \in X = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ с вероятностями $q = (q_0, q_1, q_2)$:

$$\overline{L}(p,q,\lambda) = \frac{1}{2}\Big(q_0(1-\lambda)(2-p)\sqrt{1} + q_1\big(\lambda(p+1)\frac{1}{\sqrt{2}} + (1-\lambda)(2-p)\frac{1}{\sqrt{2}}\big) + q_2\lambda(p+1)\sqrt{1}\Big) =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\big(\lambda(q_1+\sqrt{2}q_2) - (1-\lambda)(q_1+\sqrt{2}q_0)\big)p + \big(\lambda(q_1+\sqrt{2}q_2) + 2(1-\lambda)(q_1+\sqrt{2}q_0)\big)\Big)$$

Функция является линейной по переменной p:

$$\overline{L}(p,q,\lambda) = k(\lambda,q)p + b(\lambda,q)$$

где

$$k(q,\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\big(\lambda(q_1+\sqrt{2}q_2) - (1-\lambda)(q_1+\sqrt{2}q_0)\big)$$
$$b(q,\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\big(\lambda(q_1+\sqrt{2}q_2) + 2(1-\lambda)(q_1+\sqrt{2}q_0)\big)$$

Наша задача найти $p^*(q,\lambda) = \arg\min\limits_{p\in[0,1]} \overline{L}(p,q,\lambda)$. Поскольку функция $\overline{L}(p,q,\lambda)$ линейна по переменной p, следовательно:

$$p^*(q,\lambda) = \arg\min_{p\in[0,1]} \overline{L}(p,q,\lambda) = \begin{cases} 0, & k(\lambda,q) > 0 \\ 1, & k(\lambda,q) < 0 \\ [0,1], & k(\lambda,q) = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $k(q,\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\lambda\big(2+(\sqrt{2}-2)(q_0-q_2)\big) - \big(1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0\big)\Big)$ Нас интересует знакт это функции при различных значениях аргументов. Введём обозначения:

$$\ell(q) = \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{2+(\sqrt{2}-2)(q_0-q_2)}$$

Напомним, что множестово Q имеет следующий вид:

$$Q = \{(q_0,q_2)\in\mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant q_i \leqslant 1 \; i\in\{0,2\};\; q_0+q_2 \leqslant 1\}$$

Поскольку для $q\in Q$ верно:

$$2+(\sqrt{2}-2)(q_0-q_2) > 0$$
$$1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0 \geqslant 0$$
$$q_0+(\sqrt{2}-3)q_2 - 1 \leqslant 0$$

Следовательно:

$$k(q,\lambda)\vee 0 \Leftrightarrow \lambda \vee \ell(q) \text{ где } \vee \text{ это один из знаков } >,<,= .$$

Более того верно что $\forall q\in Q\; 0\leqslant \ell(q) \leqslant 1$. Проиллюстрируем это на графике. В плоскости $q=(q_0,q_2)$ изображены прямые $\ell_1(q)$ и $\ell_2(q)$ такие, что:

$$\ell_1(q):\; \ell(q) = 0$$

$$\ell_2(q):\; \ell(q) = 1$$

зелёным цветом изображена область в которой $0\leqslant \ell(q)\leqslant 1$. Видно, что квадрат $q=[0,1]^2$ а следовательно и множетсво Q полностью принадлежит этой области.

Рис. 1

Следовательно $\forall q=(q_0,q_2)\in Q\ \exists\ \lambda\in[0,1]:\ k(\lambda,q)=0$.

$$p^*(\lambda,q)=\arg\min_{p\in[0,1]}\overline{L}(p,q,\lambda)=\begin{cases}0, & \lambda\in\big(\ell(q),1\big]\\ 1, & \lambda\in\big[0,\ell(q)\big)\\ [0,1], & \lambda=\ell(q)\end{cases},\ \text{где}\ \ell(q)=\frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{2+(\sqrt{2}-2)(q_0-q_2)}$$

8.2 Рассмотрим игру за студента

Игрок **C** стремится максимизировать функциональный критерий:

$$F(x,y)=(\frac{y\sqrt{x}}{2},\frac{\sqrt{1-x}}{y})$$

Игрок **C** использует смешанную стратегию, т.е. его стратегией является распределение $q=(q_0,q_1,q_2)$ над множеством чистых стратегий $X=\{0,\frac{1}{2},1\}$:

$$F_{\text{C}}=\big\langle q_0\frac{y\sqrt{0}}{2}+q_1\frac{y}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}+q_2\frac{y\sqrt{1}}{2};q_0\frac{\sqrt{1}}{y}+q_1\frac{1}{y}\sqrt{\frac{1}{2}}+q_2\frac{\sqrt{0}}{y}\big\rangle=$$

$$=\big\langle\frac{y}{2}\cdot\frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{\sqrt{2}};\frac{1}{y}\cdot\frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{\sqrt{2}}\big\rangle$$

Затем использует **ОЛС** (2). Сначала рассмотрим вырожденные случаи когда $\mu=0$ и $\mu=1$.

(1) Если $\mu=0$:

$$G(y,q,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{y}$$

Далеем осредняем функцию $G(y,q,\mu)$ по стратегиям противника $y\in Y=\{1,2\}$ с вероятностями $(1-p,p)$:

$$\overline{G}(p,q,0)=\frac{1-p}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{1}+\frac{p}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{2}=$$

$$=\frac{(2-p)(1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0)}{2\sqrt{2}}$$

Найдём частные производную по переменным q_0 и q_2, при этом введём следующие обозначения для сокращения записи:

$$\frac{\partial\overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q}=\langle\frac{\partial\overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q_0};\frac{\partial\overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q_2}\rangle=\langle g_1(p,q,\mu),g_2(p,q,\mu)\rangle \tag{15}$$

$$\frac{\partial\overline{G}(p,q,0)}{\partial q}=\frac{2-p}{2\sqrt{2}}\langle\sqrt{2}-1;-1\rangle$$

Поскольку $p \leqslant 1$, то $\dfrac{2-p}{2\sqrt{2}} > 0$. Мы рассматриваем задачу максимизации на множестве (3). Следовательно:

$$q^* = \arg\max_{q\in Q} \overline{G}(p,q,0) = (1,0).$$

(2) Если $\mu = 1:$

$$G(y,q,1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{y}$$

Далеем осредняем функцию $G(y,q,\mu)$ по стратегиям противника $y \in Y = \{1,2\}$ с вероятностями $(1-p,p)$:

$$\overline{G}(p,q,1) = \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{2} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{1} = \\ = \frac{(p+1)(1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2)}{2\sqrt{2}}$$

Найдём частные производную по переменным q_0 и q_2:

$$\frac{\partial\overline{G}(p,q,1)}{\partial q} = \frac{p+1}{2\sqrt{2}}\langle -1; \sqrt{2}-1\rangle$$

Поскольку $p \geqslant 0$, то $\dfrac{p+1}{2\sqrt{2}} > 0$. Мы рассматриваем задачу максимизации на множестве (3). Следовательно:

$$q^* = \arg\max_{q\in Q} \overline{G}(p,q,1) = (0,1).$$

(3) Теперь $\mu \neq 0, 1$:

$$G(y,q,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}} \min_{0<\mu<1} \Big\langle \frac{y}{2} \cdot \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}; \frac{1}{y} \cdot \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu}\Big\rangle$$

Далеем осредняем функцию $G(y,q,\mu)$ по стратегиям противника $y \in Y = \{1,2\}$ с вероятностями $(1-p,p)$:

$$\overline{G}(p,q,\mu) = \frac{1-p}{\sqrt{2}} \min_{0<\mu<1} \Big\langle \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu}; \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu}\Big\rangle + \\ + \frac{p}{\sqrt{2}} \min_{0<\mu<1} \Big\langle \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}; \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)}\Big\rangle \quad (16)$$

Введём вспомогательные обозначения:

$$\ell_1(q,\mu) = \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu}$$
$$\ell_2(q,\mu) = \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu}$$
$$\ell_3(q,\mu) = \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}$$
$$\ell_4(q,\mu) = \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)}$$

Для различных значений переменной μ рассмотрим взаимные расположения множеств $\ell_1 > \ell_2$ и $\ell_3 > \ell_4$ на плоскости (q_0, q_2). Другими словами для фиксированного значения $\mu \in [0,1]$ найдём области плоскости, в которых достигается минимум одного из выражений в (5):

(a) $\mu = 0.8$ (b) $\mu = \frac{2}{3}$ (c) $\mu = \frac{1}{3}$ (d) $\mu = 0.1$

Поясним график. Синяя область - это множество $\ell_1 > \ell_2$.
Зелёная область на графике - это множнство $\ell_3 < \ell_4$.
Область между ними - это множество $\{\ell_1 < \ell_2 \cap \ell_3 > \ell_4\}$. Исходя из графиков $\{\ell_1 > \ell_2 \cap \ell_3 < \ell_4\} = \emptyset$ при $(\mu, q) \in (0,1) \times [0,1]^2$. Поскольку граничные случаи для параметра μ были рассмотрены в первых двух пунктах, то квадрат $[0,1]^2$ на плоскости (q_0, q_2) делится на 3 не пересекающихся множества.
Добавить доказательство того, что всего три возможных варианта

(1) Рассмотрим полуплоскость, которая определяется системой $\begin{cases} \ell_1 > \ell_2 \\ \ell_3 > \ell_4 \end{cases} \sim\ l_1 > l_2$

Выражение (16) на этом множестве принимает следующий вид:

$$\overline{G}(p,q,\mu) = \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)} =$$
$$= \frac{2-p}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu}$$

(2) Рассмотрим полуплоскость, которая определяется системой $\begin{cases} \ell_1 < \ell_2 \\ \ell_3 < \ell_4 \end{cases} \sim\ l_3 < l_4$

Выражение (16) на этом множестве принимает следующий вид:

$$\overline{G}(p,q,\mu) = \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{\mu} =$$
$$= \frac{1+p}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}$$

(3) Рассмотрим область, которая определяется системой $\begin{cases} \ell_1 < \ell_2 \\ \ell_3 > \ell_4 \end{cases}$

Выражение (16) на этом множестве принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}\overline{G}(p,q,\mu) &= \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)} = \\ &= \frac{(1-p)(1-\mu)(1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2)+p\mu(1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0)}{2\sqrt{2}\mu(1-\mu)}\end{aligned}$$

Итого:

$$\overline{G}(p,q,\mu) = \begin{cases} \dfrac{2-p}{2\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu}, & \ell_1 \geqslant \ell_2 \\ \dfrac{1+p}{2\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}, & \ell_3 \leqslant \ell_4 \\ \dfrac{(1-p)(1-\mu)(1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2)+p\mu(1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0)}{2\sqrt{2}\mu(1-\mu)}, & \begin{cases} \ell_1 \leqslant \ell_2 \\ \ell_3 \geqslant \ell_4 \end{cases} \end{cases}$$

Тогда производная от функции имеет:

$$\frac{\partial\overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q} = \begin{cases} \dfrac{2-p}{2\sqrt{2}(1-\mu)}\langle\sqrt{2}-1; -1\rangle, & \ell_1 \geqslant \ell_2 \\ \dfrac{1+p}{2\sqrt{2}\mu}\langle -1; \sqrt{2}-1\rangle, & \ell_3 \leqslant \ell_4 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{2}\mu(1-\mu)}\big\langle(\sqrt{2}-1)p\mu-(1-p)(1-\mu); (\sqrt{2}-1)(1-p)(1-\mu)-p\mu\big\rangle, & \begin{cases} \ell_1 \leqslant \ell_2 \\ \ell_3 \geqslant \ell_4 \end{cases} \end{cases}$$

(1) Рассмотрим $\ell_1 \geqslant \ell_2$. Производная в области имеет вид:

$$\frac{\partial\overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q} = \frac{2-p}{2\sqrt{2}(1-\mu)}\langle\sqrt{2}-1; -1\rangle$$

Введём вспомогалетльную функцию $\ell_B(q,\mu) := (\ell_1-\ell_2)\cdot\mu(1-\mu)$, множество, на котором она принимает неотрицательные значения составляют интересующую нас область. Множитель $\mu(1-\mu)$ является строго положительным на $\mu \in (0,1)$, поэтому не влияет на знак. Функция является линейной по переменным q_0 и q_2:

$$\ell_B(q,\mu) = (1+\mu(2\sqrt{2}-3))q_0 + (1-\sqrt{2}+\mu(\sqrt{2}-3))q_2 + 3\mu - 1$$

Параметр μ изменяется в диапазоне $(0,1)$, причём

$$\ell_B(q,\mu) \xrightarrow[\mu\to 1]{} 1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2$$
$$\ell_B(q,\mu) \xrightarrow[\mu\to 0]{} 1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0$$

Предельные положения $\ell_B(q,\mu)=0$ изображены на графике (3).

Рис. 3

Найдём значение μ при котором прямая $\ell_B(q,\mu)$ проходит через точку $q=(0,0)$:

$$\ell_B(0,0,\hat{\mu})=0 \Rightarrow \hat{\mu}=\frac{1}{3}$$

Очевидно, что на полиэдре $P_B(\mu)$:

$$P_B(\mu)=\{q\in Q \mid \ell_B(q,\mu)\geqslant 0\},\ \mu\in(0,1)$$

функция $\overline{G}(p,q,\mu)$ достигает максимума в точке $B(\mu)$:

$$q^*=\arg\max_{q\in P_B(\mu)}\overline{G}(y,q,\mu)=B(\mu)=\begin{cases}(0,q_2): \ell_B(0,q_2,\mu)=0, & \frac{1}{3}\leqslant\mu<1\\ (q_0,0): \ell_B(q_0,0,\mu)=0, & 0<\mu\leqslant\frac{1}{3}\end{cases}$$

(a) $\mu=0.1<\frac{1}{3}$

(b) $\mu=0.4>\frac{1}{3}$

На графике зелёным цветом изображена область $P_B(\mu)$, чёрным цветом обозначены линии уровня и стрелкой соответсвенно градиент функции. Рассмотрим эти два случая и найдём явное выражение для точки $B(\mu)$:

(a) Если $\frac{1}{3}\leqslant\mu\leqslant 1$ то координата q_2 точки максимума определяется из условия:

$$\ell_B(0,q_2,\mu)=0$$

$$(1-\sqrt{2}+\mu(\sqrt{2}-3))q_2+3\mu-1=0 \quad\Rightarrow\quad q_2=\frac{3\mu-1}{\sqrt{2}-1+(3-\sqrt{2})\mu}$$

$$q^*=(0;\frac{3\mu-1}{\sqrt{2}-1+(3-\sqrt{2})\mu}),\quad \frac{1}{3}\leqslant\mu\leqslant 1$$

(b) Если $0\leqslant\mu\leqslant\frac{1}{3}$ то координата q_0 точки максимума определяется из условия:

$$\ell_B(q_0,0,\mu)=0$$

$$(1+\mu(2\sqrt{2}-3))q_0+3\mu-1=0 \quad\Rightarrow\quad q_0=\frac{1-3\mu}{1+(2\sqrt{2}-3\mu)}$$

$$q^*=(\frac{1-3\mu}{1+(2\sqrt{2}-3\mu)};0),\quad 0\leqslant\mu\leqslant\frac{1}{3}$$

Следовательно:

$$B(\mu)=\arg\max_{q\in P_B(\mu)}\overline{G}(y,q,\mu)=\begin{cases}(0;\dfrac{3\mu-1}{\sqrt{2}-1+(3-\sqrt{2})\mu}), & \frac{1}{3}\leqslant\mu\leqslant 1\\ (\dfrac{1-3\mu}{1+(2\sqrt{2}-3\mu)};0), & 0\leqslant\mu\leqslant\frac{1}{3}\end{cases}\qquad(17)$$

(2) Рассмотрим $\ell_3 \leqslant \ell_4$. Производная в области имеет вид:

$$\frac{\partial \overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q} = \frac{1+p}{2\sqrt{2}\mu}\langle -1; \sqrt{2}-1 \rangle$$

Введём вспомогалетльную функцию $\ell_A(q,\mu) := (\ell_3 - \ell_4)\cdot \mu(1-\mu)$, множество, на котором она принимает неотрицательные значения составляют интересующую нас область. Множитель $\mu(1-\mu)$ является строго положительным на $\mu \in (0,1)$, поэтому не влияет на знак. Функция является линейной по переменным q_0 и q_2:

$$\ell_A(q,\mu) = -(2 + (\sqrt{2}-3)\mu)q_0 - (2 - 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2}-3)\mu)q_2 - 3\mu + 2$$

Параметр μ изменяется в диапазоне $(0,1)$, причём

$$\ell_A(q,\mu) \xrightarrow[\mu \to 1]{} 1 - q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2$$
$$\ell_A(q,\mu) \xrightarrow[\mu \to 0]{} 1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0$$

Предельные положения $\ell_B(q,\mu) = 0$ изображены на графике (3). Найдём значение μ при котором прямая $\ell(q,\mu)$ проходит через точку $q = (0,0)$:

$$\ell_A(0,0,\hat{\mu}) = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{2}{3}$$

Очевидно, что на полиэдре $P_2(\mu)$:

$$P_A(\mu) = \{q \in Q \mid \ell_3(q,\mu) \leqslant \ell_4(q,\mu)\},\ \mu \in (0,1)$$

функция $\overline{G}(p,q,\mu)$ достигает максимума в точке $A(\mu)$:

$$A(\mu) = \arg\max_{q \in P_A(\mu)} \overline{G}(p,q,\mu) = \begin{cases} (0,q_2) : \ell_A(0,q_2,\mu) = 0, & \frac{2}{3} \leqslant \mu \leqslant 1 \\ (q_0,0) : \ell_A(q_0,0,\mu) = 0, & 0 \leqslant \mu \leqslant \frac{2}{3} \end{cases}$$

(a) $\mu = 0.1 < \frac{2}{3}$

(b) $\mu = 0.8 > \frac{2}{3}$

На графике зелёным цветом изображена область $P_A(\mu)$, чёрным цветом обозначены линии уровня и стрелкой соответсвенно градиент функции. Рассмотрим эти два случая и найдём явное выражение для точки $A(\mu)$:
(a) Если $\frac{2}{3} \leqslant \mu \leqslant 1$ то координата q_2 точки максимума определяется из условия:

$$\ell_A(0,q_2,\mu) = 0$$
$$-(2 - 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2}-3)\mu)q_2 - 3\mu + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_2 = \frac{3\mu - 2}{2(\sqrt{2}-1) + (3-2\sqrt{2})\mu}$$
$$q^* = (0; \frac{3\mu - 2}{2(\sqrt{2}-1) + (3-2\sqrt{2})\mu}), \quad \frac{2}{3} \leqslant \mu \leqslant 1$$

(b) Если $0 \leqslant \mu \leqslant \frac{2}{3}$ то координата q_0 точки максимума определяется из условия:

$$\ell_A(q_0, 0, \mu) = 0$$
$$-(2 + (\sqrt{2} - 3)\mu)q_0 - 3\mu + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_0 = \frac{2 - 3\mu}{2 + (\sqrt{2} - 3)\mu}$$
$$q^* = (\frac{2 - 3\mu}{2 + (\sqrt{2} - 3)\mu}; 0), \quad 0 \leqslant \mu \leqslant \frac{2}{3}$$

Следовательно:

$$A(\mu) = \arg\max_{q \in P_A(\mu)} \overline{G}(p, q, \mu) = \begin{cases} (0; \dfrac{3\mu - 2}{2(\sqrt{2} - 1) + (3 - 2\sqrt{2})\mu}), & \frac{2}{3} \leqslant \mu \leqslant 1 \\ (\dfrac{2 - 3\mu}{2 + (\sqrt{2} - 3)\mu}; 0), & 0 \leqslant \mu \leqslant \frac{2}{3} \end{cases} \tag{18}$$

(3) Рассмотрим область в которой $\begin{cases} \ell_1 \leqslant \ell_2 \\ \ell_3 \geqslant \ell_4 \end{cases}$

Частные производные имеют следующий види в данной области.
$$\frac{\partial \overline{G}(p, q, \mu)}{\partial q} = \frac{1}{2\sqrt{2}\mu(1 - \mu)} \big\langle (\sqrt{2} - 1)p\mu - (1 - p)(1 - \mu); (\sqrt{2} - 1)(1 - p)(1 - \mu) - p\mu \big\rangle$$

$$g_1 = (\sqrt{2} - 1)p\mu - (1 - p)(1 - \mu)$$
$$g_2 = (\sqrt{2} - 1)(1 - p)(1 - \mu) - p\mu$$

Заметим, что функция $\overline{G}(p, q, \mu)$ является линейной по переменным q_0 и q_2 т.е.:

$$\overline{G}(p, q, \mu) = g_0(p, \mu)\, q_0 + g_2(p, \mu)\, q_2 + c(p, \mu)$$
и
$$\overline{G}(p, q, \mu) = 0 \sim q_2 = k(p, \mu) \cdot q_0 + c(p, \mu)$$

Рассматриваем функцию на полиэдре $P_{AB}(\mu)$:

$$P_{AB}(\mu) = \{q \in Q \mid \ell_A(q, \mu) \geqslant 0 \cap \ell_B(q, \mu) \leqslant 0\}, \ \mu \in (0, 1)$$

Ограничение $\ell_A(q, \mu) = 0$ и $\ell_B(q, \mu) = 0$ представимы в эквивалентном виде:

$$\ell_A(q, \mu) = 0 \sim \ q_2 = k_A(\mu)q_0 + c_A(\mu)$$
$$\ell_B(q, \mu) = 0 \sim \ q_2 = k_B(\mu)q_0 + c_B(\mu)$$

Рис. 6: Коэффициенты $k_A(\mu)$, $k_B(\mu)$ и $k(p, \mu)$ при фиксированном p

Рассмотрим график 6, на котором изображены значения коэффициетов при фиксированном значении $p \in [0,1]$. $k_B(\mu)$ изображены красной кривой, $k_A(\mu)$ синей и фиолетовой - кривая $k(p,\mu)$. Пунктирная вертикальная линия обозначает точку x в которой выражение $g_1 = 0$. Имеет место неравенство $k_A(\mu) > k_B(\mu)$ при $\mu \in (0,1)$.

$$\begin{cases} k(\mu) < k_B(\mu) \text{ при } g_1(\mu,p) < 0 \\ k(\mu) > k_A(\mu) \text{ при } g_1(\mu,p) > 0 \end{cases}$$

Следовательно точки максимума функции $\overline{G}(p,q,\mu)$ при фикисированных значениях μ и p могут быть точки: $\{A\}, \{B\}, (0,0)$ и отрезки $[B,A], [0,A], [0,B]$. Где точки $A(\mu)$ и $B(\mu)$ определны в 18 и 17. Рассмотрим три подслучая:

(a) $0 \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{3}$.

(a) $g_1 > 0 \Rightarrow q^* = A$ (b) $g_1 = 0 \Rightarrow q^* = [B, A]$ (c) $g_1 < 0 \Rightarrow q^* = B$

Рис. 7

$$\begin{cases} g_1 > 0 \Rightarrow q^* = A \\ g_1 = 0 \Rightarrow q^* = [B, A] \\ g_1 < 0 \Rightarrow q^* = B \end{cases}$$

(b) $\frac{2}{3} \leqslant \mu \leqslant 1$

(a) $g_2 > 0 \Rightarrow q^* = B$ (b) $g_2 = 0 \Rightarrow q^* = [B, A]$ (c) $g_2 < 0 \Rightarrow q^* = A$

Рис. 8

$$\left[\begin{array}{c} g_2 > 0 \Rightarrow q^* = B \\ g_2 = 0 \Rightarrow q^* = [B, A] \\ g_2 < 0 \Rightarrow q^* = A \end{array}\right.$$

(c) $\frac{1}{3} \leqslant \mu \leqslant \frac{2}{3}$

(a) $g_2 > 0 \Rightarrow q^* = B$ (b) $g_1 > 0 \Rightarrow q^* = A$ (c) $\begin{cases} g_2 < 0 \\ g_1 < 0 \end{cases} \Rightarrow q^* = (0,0)$

(d) $g_2 = 0 \Rightarrow q^* = [0, B]$ (e) $g_1 = 0 \Rightarrow q^* = [0, A]$

$$\left[\begin{array}{c} g_1 > 0 \Rightarrow q^* = A \\ g_2 > 0 \Rightarrow q^* = B \\ g_1 = 0 \Rightarrow q^* = [0, A] \\ g_2 = 0 \Rightarrow q^* = [0, B] \\ \begin{cases} g_2 < 0 \\ g_1 < 0 \end{cases} \Rightarrow q^* = (0,0) \end{array}\right.$$

Итого получим следующие

$$C(p,\mu) = \arg\max_{P_{AB}} \overline{G}(p,q,\mu) \begin{cases} A(\mu), & g_2(p,\mu) < 0 \cup \mu \leqslant \frac{1}{3} \cap g_2 < 0 \\ B(\mu), & g_1(p,\mu) > 0 \cup \mu \geqslant \frac{2}{3} \cap g_1 > 0 \\ (0,0), & g_1(p,\mu) < 0 \cap g_2(p,\mu) < 0 \\ [A(\mu), B(\mu)], & g_1(\mu) = 0 \cap \mu < \frac{1}{3} \cup g_1(\mu) = 0 \cap \mu > \frac{2}{3} \\ [0, A(\mu)], & g_2(\mu) = 0 \cap \mu \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ [0, B(\mu)], & g_1(\mu) = 0 \cap \mu \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \end{cases}$$

Но кроме того точки $A(\mu)$ и $B(\mu)$ являются оптимальными $\forall\ p$ и μ поскольку являются таковыми в **(1)** и **(2)**. Итого в области P_B оптимальной является точка $B(\mu)$, в области P_A оптимальной является точка $A(\mu)$, и в области P_{AB} оптимальной является точка $C(p,\mu)$. Поскольку если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на множестве X, то и $min(f(x), g(x))$ непрерывна на X, то максимум достигается в точке C.

$$q^*(p,\mu) = \arg\max_{Q} \overline{G}(p,q,\mu) \begin{cases} A(\mu), & g_2(p,\mu) < 0 \cup \mu \leqslant \frac{1}{3} \cap g_2 < 0 \\ B(\mu), & g_1(p,\mu) > 0 \cup \mu \geqslant \frac{2}{3} \cap g_1 > 0 \\ (0,0), & g_1(p,\mu) < 0 \cap g_2(p,\mu) < 0 \\ [A(\mu), B(\mu)], & g_1(\mu) = 0 \cap \mu < \frac{1}{3} \cup g_1(\mu) = 0 \cap \mu > \frac{2}{3} \\ [0, A(\mu)], & g_2(\mu) = 0 \cap \mu \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ [0, B(\mu)], & g_1(\mu) = 0 \cap \mu \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ (0,1), & \mu = 0 \\ (1,0), & \mu = 1 \end{cases}$$

Поскольку в пункте 3.1 мы установили, что

$$p^*(q, \lambda(q)) = \arg\max_{p \in [0,1]} \overline{L}(p, q, \lambda(q)) = [0,1]$$

Нас интересуют оптимальные пары (p^0, q^0) такие, что $\exists(\lambda, \mu) \in [0,1]^2$:

$$\begin{cases} p^0 = p^*(q^0, \lambda) \\ q^0 = q^*(p^0, \mu) \end{cases}$$

Введём следующие множества:

$$P_0 = [0, 1],\ Q_0 = \{(q_0, q_2) \in Q \mid q_0 = 0 \text{ или } q_2 = 0\}$$

Следующие точки являются оптимальными:

$$(p, q) \in P_0 \times Q_0$$

9 Ссылки на источники

[1] Matthais Ehrgott. *Multicriterial optimization. page 38, Defenition 2.24*
[2] Н.М. Новикова, И.И. Поспелова. *Смешанные стратегии в векторной оптимизациий и свёртка Гермейера.*
[3] С.В. Кононов. *Смешанные стратегии в векторной оптимизации и свертка Гермейера.*
[4] Ю.Б. Гермейер *Введение в теорию исслежования операций*