Свойства свёртки Гермейера в векторных играх

Кононов Сергей

9 мая 2019 г.

Содержание

1 Введение **3**

1.1 Игровая модель 3

2 Подробное рассмотрение множества оптимальных стратегий **7**

3 Выигрыш игрока Студент **13**

1 Введение

В работе рассматриваются различные способы решения модельной задачи которая представляет собой игру двух лиц с противоположными интересами и двумерной функцией выигрыша. Для решения задачи применяется модифицированный метод свёрток предложенный Л.С. Шепли [1], который как правило используется в подобных задачах.

1.1 Игровая модель

Рассматриваются два игрока - Студент, далее обозначается **С**, и Преподаватель, далее обозначается **П**, которые имеют противоположные интересы. Критерий интересов составляют две велечины, первая из которых является эффективностью работы **С** в научной сфере, а второй его эффективностью на подработке.

С выбирает долю x рабочего времени, которую он тратит на подготовку диплома, оставшееся рабочее время $1 - x$ он тратит на подработку. Считается, что производительность **С** при любых занятий падает с увеличением отводимого на них времени, эффективность труда **С** зададим функцией $\sqrt{x}$ и $\sqrt{1-x}$ соответственно. **С** может распределять свое время между двумя видами деятельности, т.е. имеет множетсво стратегий $x \in X = \{0, 1\}$, причём он может использовать смешанные стратегии.

П выбирает - отностится к **С** требовательно, способствую написанию диплома и мешая подработке или же не обращать на него внимания не мешая подработке и не помогая с дипломом. **П** имеет множество стратегий $y \in Y = \{1, 2\}$, причём тоже может использовать смешаные стратегии.

Получаем следующий функциональный критерий:

$$F(x, y) = \big(f_1(x, y), f_2(x, y)\big) = \Big(\frac{y\sqrt{x}}{2}, \frac{\sqrt{1-x}}{y}\Big) \tag{1}$$

П стремится минимизировать (выборая $y \in Y = \{1, 2\}$) критерий $F(x, y)$, а игрок **С** - максимизировать (выбирая $x \in X = [0, 1]$).

Задачу можно представить в виде многокритериальную игру двух лиц с противоположными интересамив

$$\Big\langle F(x, y), X, Y \Big\rangle,\ y \in Y = \{1, 2\},\ x \in X = [0, 1] \tag{2}$$

Определение 1 *Допустимое решение $\hat{x} \in X$ называется строго эффективным (эффективным по Слейтеру) для задачи*

$$\max_{x \in X} F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \tag{3}$$

если ***не*** *существует $x \in X$ такого, что $f_k(x) > f_k(\hat{x})$ для всех $k = \{1, ..., n\}$. Множетсво всех эффективных по Слейтеру решений называается множеством Слейтера задачи (3).*

Для задачи (2) введём следующие частные случаи:

$$S_x(y^*) \text{ - множество Слейтера задачи } \max_{x \in X} F(x, y^*)$$
$$S_y(x^*) \text{ - множество Слейтера задачи } \min_{y \in Y} F(x^*, y)$$

Определение 2 *Решением*[1] *(2) является множество точек (x^*, y^*) таких, что $x^* \in S_x(y^*)$ и $y^* \in S_y(x^*)$,*

Для параметризации множеств Слейтера будем использовать метод свёрток. Он заключается в том, что задача $\max\limits_{x \in X} F(x)$ заменяется параметрическим семейством скалярных задач $\max\limits_{x \in X} C(\{f_i\}, \lambda, x)$, где C – функция свертки частных критериев $\{f_i\}_{i=1}^m$ задачи (3) в единый скалярный критерий, λ – параметр свертки.

Определение 3 *Линейной свёрткой с параметром λ для функции критериев задачи (3) называется функция:*

$$L(\{f_i\}, \lambda, x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i, \text{ где } \lambda \in \Lambda = \{\lambda_i \geq 0 | \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}, \tag{4}$$

свёрткой Гермейера или обратной логической свёрткой с параметром μ для функции критериев задачи (3) называется функция:

$$G(\{f_i\}, \mu, x) = \min_{i:\mu_i > 0} \frac{f_i}{\mu_i}, \text{ где } \mu \in M = \{\mu_i \geq 0 | \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1\}. \tag{5}$$

[1] Согласно *Blackwell D.* An analog of the minimax theorem for vector payoffs // Pac. J. of Math. 1956. No 6.

В случае конечных X и Y Шепли свел [1] описание данного множества к семейству задач поиска значений скалярных игр с функциями выигрышей – ЛС частных критериев при произвольном наборе весовых коэффициентов, своих у каждого игрока. Применение линейной свертки в многокритериальных задачах обосновывается леммой Карлина

Теорема 1 (Карлин [3]) *Пусть x_0 – эффективная точка, Тогда существуют неотрицательные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ такие, что $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ и x_0 является точкой максимума функции $L(x) = \sum_{j=1}^m \lambda_j f^j(x)$*

Гермейером была предложена свертка, которая также аппроксимирует множество Слейтера. В работе используется ее модификация - обратная логическая свертка, она отличается тем, что веса стоят в знаменателе.

Теорема 2 (Гермейер [2]) *Пусть x_0 – эффективная точка, причем $f^i(x_0) > 0$ для всех $i = 1, \ldots, m$. Тогда существуют положительные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ такие, что $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ и x_0 является точкой максимума функции $G(x) = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} \lambda_j f^j(x)$.*

Рассмотрим случай, когда **С** использует обратную логическую свертку, с парамером μ, а **П** использует линейную свертку с параметром λ. Тогда множество оптимальных решений:

$$\begin{cases} x^* = \arg\max\limits_x G(\{f_1, f_2\}, \mu, x, y^*) \\ y^* = \arg\min\limits_y L(\{f_1, f_2\}, \lambda, x^*, y) \end{cases}$$

Поскольку игроки используют смешанные стратегии т.е. распределения вероятностей $\rho_x(x)$ и $\rho_y(y)$ над чистыми стратегиями $x \in X$ и $y \in Y$. Далее каждый игрок осредняет свою функцию выигрыша по стратегиям противника

$$\overline{G}(\{f_1, f_2\}, \mu, q, p) = \iint\limits_{PQ} G(\{f_1, f_2\}, \mu, q, p) \rho_x(x) \rho_y(y) dx dy$$

$$\overline{L}(\{f_1, f_2\}, \lambda, q, p) = \iint\limits_{PQ} L(\{f_1, f_2\}, \lambda, q, p) \rho_x(x) \rho_y(y) dx dy$$

Определение 4 *Пара стратегий* (p^0, q^0) *называется оптимальными, если для некоторых* λ, μ *верно:*

$$\begin{cases} p^0(q^0, \lambda) = \operatorname*{argmin}_{p \in P} \overline{L}(p, q^0, \lambda) \\ q^0(p^0, \mu) = \operatorname*{argmin}_{q \in Q} \overline{G}(p^0, q, \mu) \end{cases} \tag{6}$$

Мы будем рассматривать конечную игру **С — П**, полученную из исходной заменой множества $X = [0, 1]$ конечным множеством точек

$$X^T = \{0,\ \frac{1}{T},\ \frac{2}{T},\ \dots,\ \frac{T-1}{T},\ 1\},\ \ T \in \mathbb{N}$$

В работе исследуются случаи $T = 1$: $X^1 = \{0, 1\}$, и $T = 2$: $X^2 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

2 Подробное рассмотрение множества оптимальных стратегий

Для каждой пары параметров $(\hat{\mu}, \hat{\lambda})$ найдём множество соответсвующих оптимальных пар $(p^*(\hat{\mu}, \hat{\lambda}), q^*(\hat{\mu}, \hat{\lambda})) \in P \times Q$. Рассмотрим все возможные сочетания значений для p^* и q^* в системах (**??**) и (**??**), что даст нам 6 следующих систем:

Учтём, что переменные p, q, μ и λ определены на отрезке $[0, 1]$.

(1)

$$\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \\ q^* > 1 - \lambda \\ p^* + \mu - 1 \geqslant 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \\ \dfrac{\mu}{2-\mu} > 1 - \lambda \\ \mu \geqslant 1 \quad \Rightarrow \quad \mu = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = 1 \\ \lambda > 0 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

Значит при $\mu = 1$ и $\lambda \in (0, 1]$ имеем следующие оптимальные пары: $(p^*, q^*) \in (0, 1)$

(2)

$$\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \\ q^* > 1 - \lambda \\ p^* + \mu - 1 \leqslant 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \\ \dfrac{2\mu}{1+\mu} > 1 - \lambda \\ \mu \leqslant 1 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \\ \lambda > \dfrac{1-\mu}{1+\mu} \\ \mu \leqslant 1 \end{cases}$$

Значит при $\mu \in [0, 1]$ и $\lambda \in (\frac{1-\mu}{1+\mu}, 1]$ имеем следующие оптимальные пары $(p^*, q^*) \in (0, \dfrac{2\mu}{1+\mu})$

(3)

$$\begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \\ q^* < 1-\lambda \\ p^* + \mu - 1 \geqslant 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \\ \dfrac{\mu}{2-\mu} < 1-\lambda \\ \mu \geqslant 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \\ \lambda < 2\dfrac{1-\mu}{2-\mu} \\ \mu \geqslant 0 \end{cases}$$

Значит при $\mu \in [0,1]$ и $\lambda \in [0, 2\frac{1-\mu}{2-\mu})$ имеем следующие оптимальные пары $(p^*, q^*) \in (1, \frac{\mu}{2-\mu})$

(4)

$$\begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \\ q^* < 1-\lambda \\ p^* + \mu - 1 \leqslant 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \\ \dfrac{2\mu}{1+\mu} < 1-\lambda \\ \mu \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = 0 \\ \lambda < 1 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

Значит при $\mu = 0$ и $\lambda \in [0, 1)$ имеем следующие оптимальные пары $(p^*, q^*) \in (1, 0)$

(5)

$$\begin{cases} p^* \in [0,1] \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \\ q^* = 1-\lambda \\ p^* + \mu - 1 \geqslant 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* \in [0,1] \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \\ \dfrac{\mu}{2-\mu} = 1-\lambda \\ p^* \geqslant 1-\mu \end{cases} \sim \begin{cases} p^* \in [1-\mu, 1] \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \\ \lambda = 2\dfrac{1-\mu}{2-\mu} \end{cases}$$

Значит при $\mu \in [0,1]$ и $\lambda = 2\dfrac{1-\mu}{2-\mu}$ имеем следующие оптимальные пары $(p^*, q^*) \in [1-\mu, 1] \times \{\frac{\mu}{2-\mu}\}$

(6)

$$\begin{cases} p^* \in [0,1] \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \\ q^* = 1-\lambda \\ p^* + \mu - 1 \leqslant 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* \in [0,1] \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \\ \dfrac{2\mu}{1+\mu} = 1-\lambda \\ p^* \leqslant 1-\mu \end{cases} \sim \begin{cases} p^* \in [0,1-\mu] \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \\ \lambda = \dfrac{1-\mu}{1+\mu} \end{cases}$$

Значит при $\mu \in [0,1]$ и $\lambda = \dfrac{1-\mu}{1+\mu}$ имеем следующие оптимальные пары $(p^*, q^*) \in [0, 1-\mu] \times \{\frac{2\mu}{1+\mu}\}$.

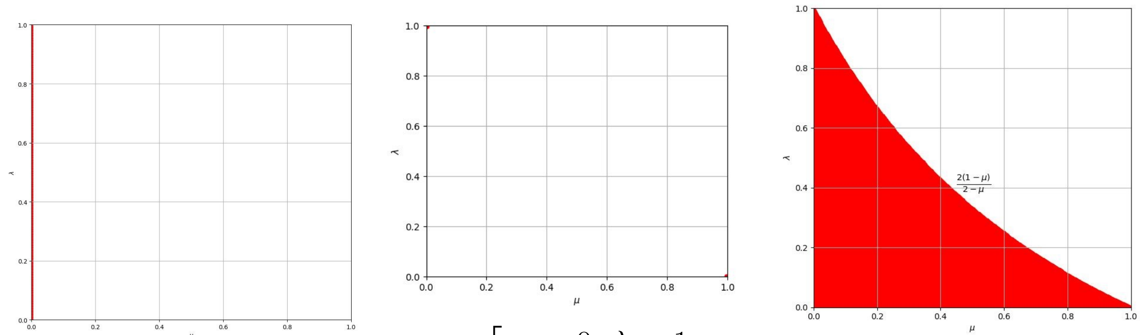
Итого получаем:

$$(p^*(\mu,\lambda), q^*(\mu,\lambda)) = \begin{cases} (0,\ 1), & \mu = 1,\ \lambda \in (0,1] \\ (0,\ \dfrac{2\mu}{1+\mu}), & \mu \in [0,1],\ \lambda \in (\dfrac{1-\mu}{1+\mu}, 1] \\ (1,\ \dfrac{\mu}{2-\mu}), & \mu \in [0,1],\ \lambda \in [0, 2\dfrac{1-\mu}{2-\mu}) \\ (1,\ 0), & \mu = 0,\ \lambda \in [0,1) \\ [1-\mu, 1] \times \left\{\dfrac{\mu}{2-\mu}\right\}, & \mu \in [0,1],\ \lambda = 2\dfrac{1-\mu}{2-\mu} \\ [0, 1-\mu] \times \left\{\dfrac{2\mu}{1+\mu}\right\}, & \mu \in [0,1],\ \lambda = \dfrac{1-\mu}{1+\mu} \end{cases}$$

Некоторые условия оптимальных пар пересекаются, поэтому сагрегируем систему по условиям таким образом, чтобы множества (μ, λ) которые они задают имели пустое пересечение.

Теперь на квадрате $(p,q) \in [0,1]^2$ рассмотрим все области, в которых множества оптимальных пар постоянны. Введём обозначения для множества оптимальных стратегий:

$$\mathbb{O} = \{(p,q) \mid p \in P, q \in Q \text{ такие что верно } (4)\}$$



(a) $\mu = 0,\ \lambda \in [0, 1)$ (b) $\left[\begin{array}{l} \mu = 0,\ \lambda = 1 \\ \mu = 1,\ \lambda = 0 \end{array}\right.$ (c) $\mu \in (0, 1),\ \lambda \in (0, \frac{1-\mu}{1+\mu}]$

Рис. 1

(1) $\mu = 0, \lambda \in [0, 1)$:

$$\begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = 0 \end{cases} \cup \quad \begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} = \{\mu = 0\} = 0 \end{cases}$$

Множество оптимальных стратегий $\mathbb{O} = \{(1, 0)\}$

(2.1) $\mu = 0, \lambda = 1$:

$$\begin{cases} p^* \geqslant 1 - \mu = \{\mu = 0\} = 1 \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} = \{\mu = 0\} = 0 \end{cases} \cup \quad \begin{cases} p^* \leqslant 1 - \mu = \{\mu = 0\} = 1 \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} = \{\mu = 0\} = 0 \end{cases}$$

Множество оптимальных стратегий $\mathbb{O} = [0, 1] \times \{0\}$, где $\times$ - это декартово произведение.

(2.2) $\mu = 1, \lambda = 0$:

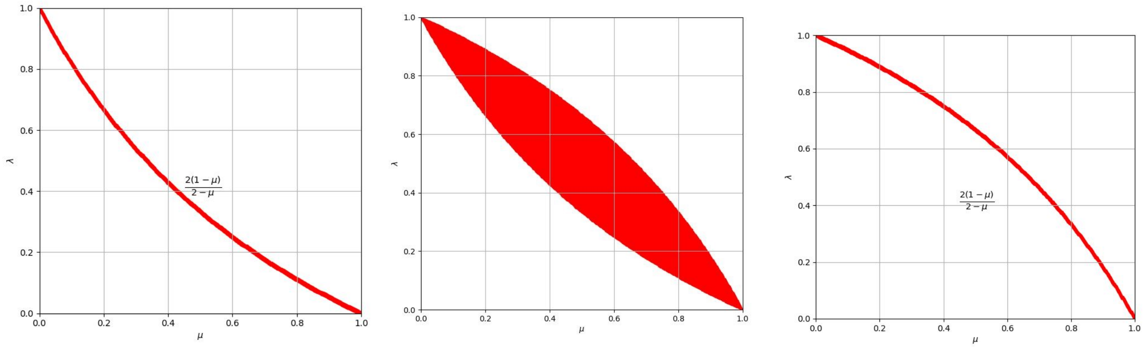
$$\begin{cases} p^* \geqslant 1 - \mu = \{\mu = 1\} = 0 \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} = \{\mu = 1\} = 1 \end{cases} \cup \quad \begin{cases} p^* \leqslant 1 - \mu = \{\mu = 1\} = 0 \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} = \{\mu = 1\} = 1 \end{cases}$$

Множество оптимальных стратегий $\mathbb{O} = [0, 1] \times \{1\}$

(3) $\mu \in (0, 1), \lambda \in (0, \dfrac{1-\mu}{1+\mu}]$:

$$\begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \end{cases}$$

Множество оптимальных стратегий $\mathbb{O} = \{1\} \times \{\dfrac{\mu}{2-\mu}\}$



(a) $\mu \in (0,1), \lambda = \dfrac{1-\mu}{1+\mu}$ (b) $\mu \in [(,1)$, $\lambda \in [0, 2\frac{1-\mu}{2-\mu}] \cap (\frac{1-\mu}{1+\mu}, 1]$ (c) $\mu \in (0,1), \lambda = 2\dfrac{1-\mu}{2-\mu}$:

Рис. 2

(4) $\mu \in (0,1), \lambda = \dfrac{1-\mu}{1+\mu}$:

$$\begin{cases} p^* \in [0, 1-\mu] \cup \{1\} \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \end{cases}$$

Множество оптимальных стратегий $\mathbb{O} = \{1\} \times \{\frac{\mu}{2-\mu}\} \cup [0, 1-\mu] \times \{\frac{2\mu}{1+\mu}\}$

(5) $\mu \in [(,1), \lambda \in [0, 2\dfrac{1-\mu}{2-\mu}] \cap (\dfrac{1-\mu}{1+\mu}, 1]$:

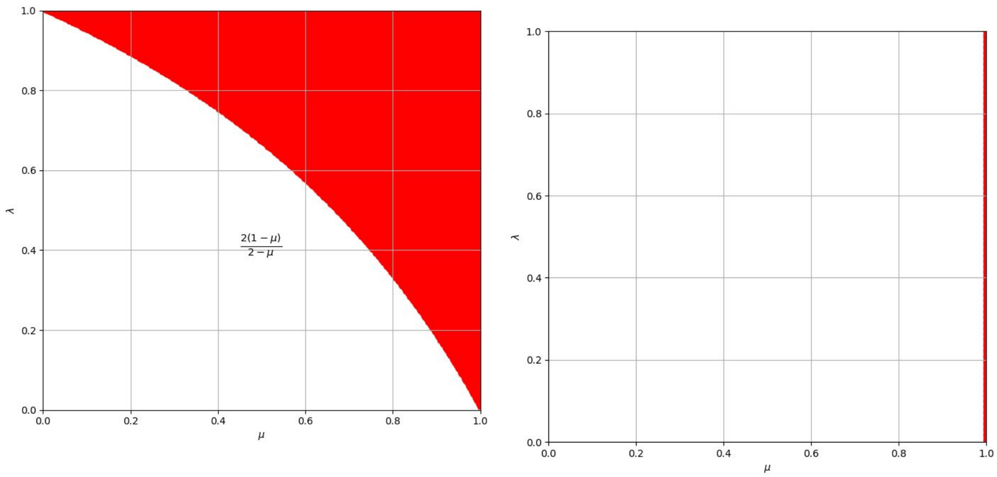
$$\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \end{cases}$$

Множество оптимальных стратегий $\mathbb{O} = (0, \dfrac{2\mu}{1+\mu}) \cup (1, \dfrac{\mu}{2-\mu})$

(6) $\mu \in (0,1), \lambda = 2\dfrac{1-\mu}{2-\mu}$:

$$\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} p^* \in [0, 1-\mu] \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \end{cases}$$

Множество оптимальных стратегий $\mathbb{O} = (0, \dfrac{2\mu}{1+\mu}) \cup [1-\mu, 1] \times \{\dfrac{\mu}{2-\mu}\}$



(a) $\mu \in (0,1), \lambda \in (2\dfrac{1-\mu}{2-\mu}, 1]$

(b) $\mu = 1, \lambda \in (0,1]$

Рис. 3

(7) $\mu \in (0,1), \lambda \in (2\dfrac{1-\mu}{2-\mu}, 1]$:

$$\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \end{cases}$$

Множество оптимальных стратегий $\mathbb{O} = (0, \dfrac{2\mu}{1+\mu})$

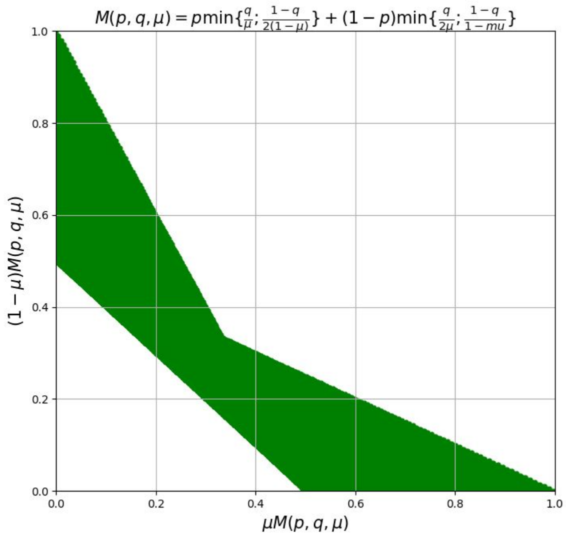
(8) $\mu = 1, \lambda \in (0,1]$:

$$\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = 1 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} = \{\mu = 1\} = 1 \end{cases}$$

Множество оптимальных стратегий $\mathbb{O} = (0, 1)$

3 Выигрыш игрока Студент

Теперь на квадрате $(\mu, \lambda) \in [0,1]^2$ мы рассмотрели все точки и для каждой нашли оптимальные пары $p^*(\mu, \lambda)$ и $q^*(\mu, \lambda)$ и соответсвующие значения функции $M(p^*(\mu, \lambda), q^*(\mu, \lambda), \mu)$. Далее на квадрате $[0,1]^2$ изобразим все точки, которые принимает вектор $(\mu M(p^*, q^*, \mu), (1-\mu)M(p^*, q^*, \mu))$ при $(\mu, \lambda) \in [0,1]^2$



Поясним график:
нижняя огибающая в координатах X, Y: $y = \dfrac{1}{2} - x$,
верхняя огибающая в координатах X, Y: $y = \begin{cases} 1-2x, & x \in [0, \frac{1}{3}) \\ \dfrac{1-x}{2}, & x \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases}$.

И найдём множества значений функции

$$\overline{G}(p,q,\mu) = p\min\{\frac{q}{\mu}; \frac{1-q}{2(1-\mu)}\} + (1-p)\min\{\frac{q}{2\mu}; \frac{1-q}{1-\mu}\},$$

В этих областях Далее рассмотрим игру с точки зрения игрока С. найдём значение свёртки для игрока С в этих точка:

, тогда
$\overline{G}(1,0,0) = \dfrac{1}{2}$
$\overline{G}([0,1],0,0) = [0.5,1]$
$\overline{G}([0,1],1,1) = [0.5,1]$

$$\overline{G}(1,\frac{\mu}{2-\mu},\mu)=\min\{\frac{\mu}{2-\mu};\frac{1-\frac{\mu}{2-\mu}}{2(1-\mu)}\}=\frac{1}{2-\mu}$$

$$\overline{G}(1,\frac{\mu}{2-\mu},\mu)=\frac{1}{2-\mu}$$

$$\overline{G}(p,\frac{2\mu}{1+\mu},\mu)=p\frac{1}{2(1+\mu)}+(1-p)\frac{1}{1+\mu}=\frac{2-p}{2(1+\mu)}\geqslant\frac{2-(1-\mu)}{2(1+\mu)}=\frac{1+\mu}{2(1+\mu)}=\frac{1}{2}$$

$$\overline{G}(p,\frac{2\mu}{1+\mu},\mu)\leqslant\frac{1}{1+\mu}\Rightarrow\overline{G}(p,\frac{2\mu}{1+\mu},\mu)=[0.5,\frac{1}{1+\mu}]$$

$$\overline{G}(0,\frac{2\mu}{1+\mu},\mu)=\frac{1}{1+\mu}$$

$$\overline{G}(1,\frac{\mu}{2-\mu},\mu)=\frac{1}{2-\mu}$$

$$\overline{G}(0,\frac{2\mu}{1+\mu},\mu)=\frac{1}{1+\mu}$$

$$\overline{G}(p,\frac{\mu}{2-\mu},\mu)=p\frac{1}{2-\mu}+(1-p)\frac{1}{2(2-\mu)}=\frac{1+p}{2(2-\mu)}\geqslant\frac{2-\mu}{2(2-\mu)}=\frac{1}{2}$$

$$\overline{G}(p,\frac{\mu}{2-\mu},\mu)\leqslant\frac{1}{2-\mu}\Rightarrow\overline{G}(p,\frac{\mu}{2-\mu},\mu)=[0.5,\frac{1}{2-\mu}]$$

$$\overline{G}(0,\frac{2\mu}{1+\mu},\mu)=\min\{\frac{1}{\mu}\frac{2\mu}{1+\mu};\frac{1-\frac{2\mu}{1+\mu}}{1-\mu}\}=\frac{1}{1+\mu}$$

$$\overline{G}(0,1,1)=\frac{1}{2}$$

Список литературы

[1] Shapley L.S. Equilibrium points in games with vector payoffs. 1959.

[2] Ю.Б. Гермейер. Введение в теорию исслежования операций.

[3] Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. 1964.