Свойства свёртки Гермейера в векторных играх

Кононов Сергей

6 мая 2019 г.

Содержание

1 Введение

Определение [1]
Мы рассмотрим ***линейную свёртку* (ЛС)**:

$$L(\{f_i\},\lambda)(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i, \text{ где } \lambda \in \Lambda = \{\lambda_i \geqslant 0 \mid \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}, \tag{1}$$

и ***свёртку Гермейера***, или ***обратную логическую свёртку* (ОЛС)**:

$$G(\{f_i\},\lambda)(x) = \min_{\lambda_i > 0} \frac{f_i}{\lambda_i}, \text{ где } \lambda \in \Lambda = \{\lambda_i \geq 0 | \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}. \tag{2}$$

2 Постановка задача

Функциональный критерий: $F(x,y) = (\frac{y\sqrt{x}}{2}, \frac{\sqrt{1-x}}{y})$

С: $F(x,y) \to \max\limits_{x \in X}$	П: $F(x,y) \to \min\limits_{y \in Y}$
$X = \{0; \frac{1}{2}; 1\}$	$Y = \{1, 2\}$
$P(X=0) = q_0$	$P(Y=1) = p_0$
$P(X=\frac{1}{2}) = q_1$	$P(Y=2) = p_1$
$P(X=1) = q_2$	
$\sum\limits_{i=0}^{2} q_i = 1$	$\sum\limits_{i=0}^{1} p_i = 1$
$0 \leqslant q_i \leqslant 1\ ,\ \ i = \overline{0,2}$	$0 \leqslant p_i \leqslant 1\ ,\ \ i = \overline{0,1}$

Следровательно $q_1 = 1 - q_0 - q_2$ Пусть $p := p_1$, тогда $p_0 = 1 - p$

Введём множество

$$Q = \{(q_0, q_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant q_i \leqslant 1\ i \in \{0,2\};\ q_0 + q_2 \leqslant 1\} \tag{3}$$

Студент выбирет X и использует **ОЛС**.
Преподаватель выбирает Y и использует **ЛС**.

3 Оптимальные значения

3.1 Рассмотрим игру за преподавателя

Игрое **П** стремится минимизировать функциональный критерий:

$$F(x,y) = (\frac{y\sqrt{x}}{2}, \frac{\sqrt{1-x}}{y})$$

Игрок **П** использует смешанную стратегию, т.е. его стратегией является распределение $p = (p_0, p_1)$ над множеством чистых стратегий $Y = \{1, 2\}$:

$$F_{\Pi}(p, x) = \Big\langle (1-p)\frac{1 \cdot \sqrt{x}}{2} + p\frac{2 \cdot \sqrt{x}}{2};\ (1-p)\frac{\sqrt{1-x}}{1} + p\frac{\sqrt{1-x}}{2} \Big\rangle = \frac{1}{2}\Big\langle (p+1)\sqrt{x};\ (2-p)\sqrt{1-x} \Big\rangle$$

Затем использует **ЛС** (1):

$$L(p, x, \lambda) = \frac{1}{2}\big(\lambda(p+1)\sqrt{x} + (1-\lambda)(2-p)\sqrt{1-x}\big)$$

Введём обозначение $q = (q_0, q_1, q_2)$. Далеем осредняем функцию $L(p, x, \lambda)$ по стратегиям противника $x \in X = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ с вероятностями $q = (q_0, q_1, q_2)$:

$$\overline{L}(p, q, \lambda) = \frac{1}{2}\Big(q_0(1-\lambda)(2-p)\sqrt{1} + q_1\big(\lambda(p+1)\frac{1}{\sqrt{2}} + (1-\lambda)(2-p)\frac{1}{\sqrt{2}}\big) + q_2\lambda(p+1)\sqrt{1}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\big(\lambda(q_1 + \sqrt{2}q_2) - (1-\lambda)(q_1 + \sqrt{2}q_0)\big)p + \big(\lambda(q_1 + \sqrt{2}q_2) + 2(1-\lambda)(q_1 + \sqrt{2}q_0)\big)\Big)$$

Функция является линейной по переменной p:

$$\overline{L}(p, q, \lambda) = k(\lambda, q)p + b(\lambda, q)$$

где

$$k(q, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\big(\lambda(q_1 + \sqrt{2}q_2) - (1-\lambda)(q_1 + \sqrt{2}q_0)\big)$$

$$b(q, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\big(\lambda(q_1 + \sqrt{2}q_2) + 2(1-\lambda)(q_1 + \sqrt{2}q_0)\big)$$

Наша задача найти $p^*(q, \lambda) = \arg\min\limits_{p \in [0,1]} \overline{L}(p, q, \lambda)$. Поскольку функция $\overline{L}(p, q, \lambda)$ линейна по переменной p, следовательно:

$$p^*(q, \lambda) = \arg\min_{p \in [0,1]} \overline{L}(p, q, \lambda) = \begin{cases} 0, & k(\lambda, q) > 0 \\ 1, & k(\lambda, q) < 0 \\ [0, 1], & k(\lambda, q) = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $k(q, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\lambda\big(2 + (\sqrt{2}-2)(q_0 - q_2)\big) - \big(1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0\big)\Big)$
Нас интересует знакт это функции при различных значениях аргументов. Введём обозначения:

$$\ell(q) = \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{2 + (\sqrt{2}-2)(q_0 - q_2)}$$

Напомним, что множестово Q имеет следующий вид:

$$Q = \{(q_0, q_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant q_i \leqslant 1\ i \in \{0, 2\};\ q_0 + q_2 \leqslant 1\}$$

Поскольку для $q \in Q$ верно:

$$
\begin{gathered}
2 + (\sqrt{2} - 2)(q_0 - q_2) > 0 \\
1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0 \geqslant 0 \\
q_0 + (\sqrt{2} - 3)q_2 - 1 \leqslant 0
\end{gathered}
$$

Следовательно:

$$k(q, \lambda) \vee 0 \Leftrightarrow \lambda \vee \ell(q) \text{ где } \vee \text{ это один из знаков } >, <, = .$$

Более того верно что $\forall q \in Q \; 0 \leqslant \ell(q) \leqslant 1$. Проиллюстрируем это на графике. В плоскости $q = (q_0, q_2)$ изображены прямые $\ell_1(q)$ и $\ell_2(q)$ такие, что:

$$
\begin{gathered}
\ell_1(q): \; \ell(q) = 0 \\
\ell_2(q): \; \ell(q) = 1
\end{gathered}
$$

зелёным цветом изображена область в которой $0 \leqslant \ell(q) \leqslant 1$. Видно, что квадрат $q = [0, 1]^2$ а следовательно и множетсво Q полностью принадлежит этой области.

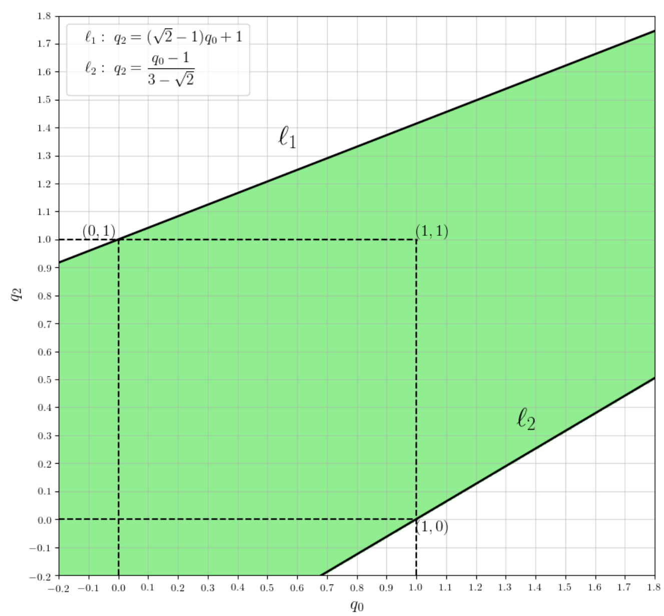


Рис. 1

Следовательно $\forall q = (q_0, q_2) \in Q \; \exists \; \lambda \in [0, 1]: \; k(\lambda, q) = 0$.

$$p^*(\lambda, q) = \arg\min_{p \in [0,1]} \overline{L}(p, q, \lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \in \big(\ell(q), 1\big] \\ 1, & \lambda \in \big[0, \ell(q)\big) \\ [0, 1], & \lambda = \ell(q) \end{cases}, \text{ где } \ell(q) = \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0}{2 + (\sqrt{2} - 2)(q_0 - q_2)}$$

3.2 Рассмотрим игру за студента

Игрок **С** стремится максимизировать функциональный критерий:

$$F(x,y) = (\frac{y\sqrt{x}}{2}, \frac{\sqrt{1-x}}{y})$$

Игрок **С** использует смешанную стратегию, т.е. его стратегией является распределение $q = (q_0, q_1, q_2)$ над множеством чистых стратегий $X = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$:

$$F_{\text{C}} = \langle q_0\frac{y\sqrt{0}}{2} + q_1\frac{y}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} + q_2\frac{y\sqrt{1}}{2}; q_0\frac{\sqrt{1}}{y} + q_1\frac{1}{y}\sqrt{\frac{1}{2}} + q_2\frac{\sqrt{0}}{y}\rangle =$$

$$= \langle \frac{y}{2}\cdot\frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{\sqrt{2}}; \frac{1}{y}\cdot\frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{\sqrt{2}}\rangle$$

Затем использует **ОЛС** (2). Сначала рассмотрим вырожденные случаи когда $\mu = 0$ и $\mu = 1$.
(1) Если $\mu = 0$:

$$G(y,q,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{y}$$

Далеем осредняем функцию $G(y,q,\mu)$ по стратегиям противника $y \in Y = \{1,2\}$ с вероятностями $(1-p,p)$:

$$\overline{G}(p,q,0) = \frac{1-p}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{1} + \frac{p}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{2} =$$

$$= \frac{(2-p)(1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0)}{2\sqrt{2}}$$

Найдём частные производную по переменным q_0 и q_2, при этом введём следующие обозначения для сокращения записи:

$$\frac{\partial\overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q} = \langle\frac{\partial\overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q_0}; \frac{\partial\overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q_2}\rangle = \langle g_1(p,q,\mu), g_2(p,q,\mu)\rangle \tag{4}$$

$$\frac{\partial\overline{G}(p,q,0)}{\partial q} = \frac{2-p}{2\sqrt{2}}\langle\sqrt{2}-1; -1\rangle$$

Поскольку $p \leqslant 1$, то $\dfrac{2-p}{2\sqrt{2}} > 0$. Мы рассматриваем задачу максимизации на множестве (3). Следовательно:

$$q^* = \arg\max_{q\in Q}\overline{G}(p,q,0) = (1,0).$$

(2) Если $\mu = 1$:

$$G(y,q,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{y}$$

Далеем осредняем функцию $G(y,q,\mu)$ по стратегиям противника $y \in Y = \{1,2\}$ с вероятностями $(1-p,p)$:

$$\overline{G}(p,q,1) = \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{2} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{1} = \\ = \frac{(p+1)(1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2)}{2\sqrt{2}}$$

Найдём частные производную по переменным q_0 и q_2:

$$\frac{\partial \overline{G}(p,q,1)}{\partial q} = \frac{p+1}{2\sqrt{2}} \langle -1; \sqrt{2}-1 \rangle$$

Поскольку $p \geqslant 0$, то $\dfrac{p+1}{2\sqrt{2}} > 0$. Мы рассматриваем задачу максимизации на множестве (3). Следовательно:

$$q^* = \arg\max_{q \in Q} \overline{G}(p,q,1) = (0,1).$$

(3) Теперь $\mu \neq 0,1$:

$$G(y,q,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}} \min_{0<\mu<1} \left\langle \frac{y}{2} \cdot \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}; \frac{1}{y} \cdot \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu} \right\rangle$$

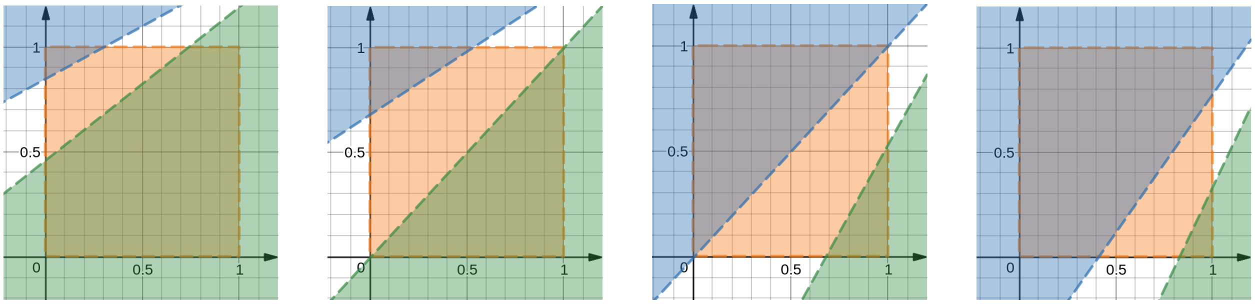
Далеем осредняем функцию $G(y,q,\mu)$ по стратегиям противника $y \in Y = \{1,2\}$ с вероятностями $(1-p,p)$:

$$\overline{G}(p,q,\mu) = \frac{1-p}{\sqrt{2}} \min_{0<\mu<1} \left\langle \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu}; \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu} \right\rangle + \\ + \frac{p}{\sqrt{2}} \min_{0<\mu<1} \left\langle \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}; \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)} \right\rangle \quad (5)$$

Введём вспомогательные обозначения:

$$\ell_1(q,\mu) = \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu}$$
$$\ell_2(q,\mu) = \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu}$$
$$\ell_3(q,\mu) = \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}$$
$$\ell_4(q,\mu) = \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)}$$

Для различных значений переменной μ рассмотрим взаимные расположения множеств $\ell_1 > \ell_2$ и $\ell_3 > \ell_4$ на плоскости (q_0, q_2). Другими словами для фиксированного значения $\mu \in [0,1]$ найдём области плоскости, в которых достигается минимум одного из выражений в (5):



(a) $\mu = 0.8$ (b) $\mu = \frac{2}{3}$ (c) $\mu = \frac{1}{3}$ (d) $\mu = 0.1$

Поясним график. Синяя область - это множество $\ell_1 > \ell_2$.
Зелёная область на графике - это множнство $\ell_3 < \ell_4$.
Область между ними - это множество $\{\ell_1 < \ell_2 \cap \ell_3 > \ell_4\}$. Исходя из графиков $\{\ell_1 > \ell_2 \cap \ell_3 < \ell_4\} = \emptyset$ при $(\mu, q) \in (0,1) \times [0,1]^2$. Поскольку граничные случаи для параметра μ были рассмотрены в первых двух пунктах, то квадрат $[0,1]^2$ на плоскости (q_0, q_2) делится на 3 не пересекающихся множества.
Добавить доказательство того, что всего три возможных варианта

(1) Рассмотрим полуплоскость, которая определяется системой $\begin{cases} \ell_1 > \ell_2 \\ \ell_3 > \ell_4 \end{cases} \sim \ l_1 > l_2$

Выражение (5) на этом множестве принимает следующий вид:

$$\overline{G}(p,q,\mu) = \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)} =$$
$$= \frac{2-p}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu}$$

(2) Рассмотрим полуплоскость, которая определяется системой $\begin{cases} \ell_1 < \ell_2 \\ \ell_3 < \ell_4 \end{cases} \sim \ l_3 < l_4$

Выражение (5) на этом множестве принимает следующий вид:

$$\overline{G}(p,q,\mu) = \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{\mu} =$$
$$= \frac{1+p}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}$$

(3) Рассмотрим область, которая определяется системой $\begin{cases} \ell_1 < \ell_2 \\ \ell_3 > \ell_4 \end{cases}$

Выражение (5) на этом множестве принимает следующий вид:

$$\overline{G}(p,q,\mu) = \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)} =$$
$$= \frac{(1-p)(1-\mu)(1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2)+p\mu(1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0)}{2\sqrt{2}\mu(1-\mu)}$$

Итого:

$$\overline{G}(p,q,\mu) = \begin{cases} \dfrac{2-p}{2\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu}, & \ell_1 \geqslant \ell_2 \\ \dfrac{1+p}{2\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}, & \ell_3 \leqslant \ell_4 \\ \dfrac{(1-p)(1-\mu)(1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2)+p\mu(1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0)}{2\sqrt{2}\mu(1-\mu)}, & \begin{cases} \ell_1 \leqslant \ell_2 \\ \ell_3 \geqslant \ell_4 \end{cases} \end{cases}$$

Тогда производная от функции имеет:

$$\frac{\partial \overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q} = \begin{cases} \dfrac{2-p}{2\sqrt{2}(1-\mu)}\langle \sqrt{2}-1; -1\rangle, & \ell_1 \geqslant \ell_2 \\ \dfrac{1+p}{2\sqrt{2}\mu}\langle -1; \sqrt{2}-1\rangle, & \ell_3 \leqslant \ell_4 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{2}\mu(1-\mu)}\big\langle (\sqrt{2}-1)p\mu-(1-p)(1-\mu); (\sqrt{2}-1)(1-p)(1-\mu)-p\mu\big\rangle, & \begin{cases} \ell_1 \leqslant \ell_2 \\ \ell_3 \geqslant \ell_4 \end{cases} \end{cases}$$

(1) Рассмотрим $\ell_1 \geqslant \ell_2$. Производная в области имеет вид:

$$\frac{\partial \overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q} = \frac{2-p}{2\sqrt{2}(1-\mu)}\langle \sqrt{2}-1; -1\rangle$$

Введём вспомогалетльную функцию $\ell_B(q,\mu) := (\ell_1-\ell_2)\cdot\mu(1-\mu)$, множество, на котором она принимает неотрицательные значения составляют интересующую нас область. Множитель $\mu(1-\mu)$ является строго положительным на $\mu \in (0,1)$, поэтому не влияет на знак. Функция является линейной по переменным q_0 и q_2:

$$\ell_B(q,\mu) = (1+\mu(2\sqrt{2}-3))q_0 + (1-\sqrt{2}+\mu(\sqrt{2}-3))q_2 + 3\mu - 1$$

Параметр μ изменяется в диапазоне $(0,1)$, причём

$$\ell_B(q,\mu) \xrightarrow[\mu\to 1]{} 1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2$$
$$\ell_B(q,\mu) \xrightarrow[\mu\to 0]{} 1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0$$

Предельные положения $\ell_B(q, \mu) = 0$ изображены на графике (3).

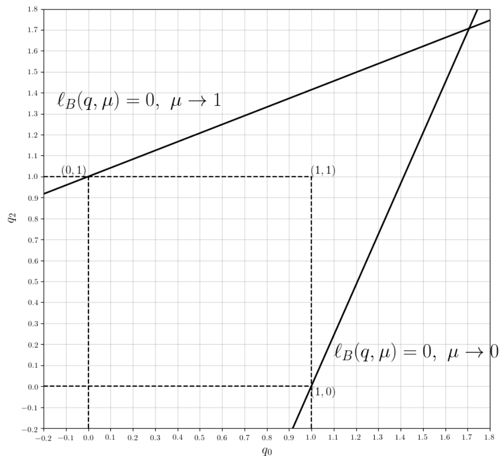


Рис. 3

Найдём значение μ при котором прямая $\ell_B(q, \mu)$ проходит через точку $q = (0, 0)$:

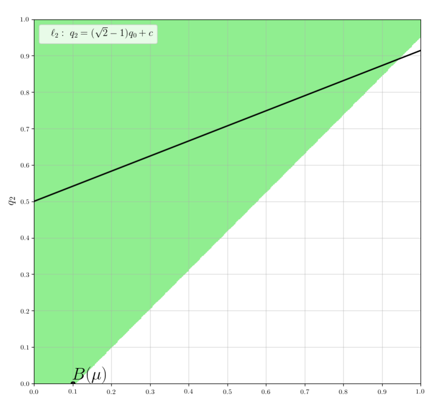
$$\ell_B(0, 0, \hat{\mu}) = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{3}$$

Очевидно, что на полиэдре $P_B(\mu)$:

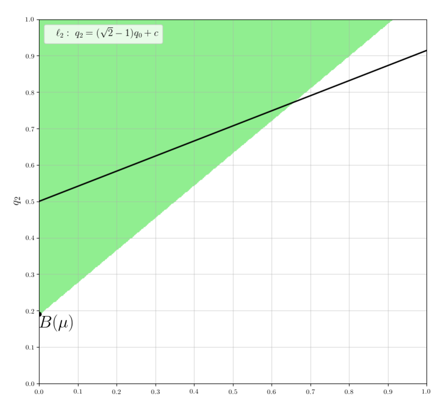
$$P_B(\mu) = \{q \in Q \mid \ell_B(q, \mu) \geqslant 0\},\ \mu \in (0, 1)$$

функция $\overline{G}(p, q, \mu)$ достигает максимума в точке $B(\mu)$:

$$q^* = \arg \max_{q \in P_B(\mu)} \overline{G}(y, q, \mu) = B(\mu) = \begin{cases} (0, q_2) : \ell_B(0, q_2, \mu) = 0, & \frac{1}{3} \leqslant \mu < 1 \\ (q_0, 0) : \ell_B(q_0, 0, \mu) = 0, & 0 < \mu \leqslant \frac{1}{3} \end{cases}$$



(a) $\mu = 0.1 < \frac{1}{3}$



(b) $\mu = 0.4 > \frac{1}{3}$

На графике зелёным цветом изображена область $P_B(\mu)$, чёрным цветом обозначены линии уровня и стрелкой соответсвенно градиент функции. Рассмотрим эти два случая и найдём явное выражение для точки $B(\mu)$:
(a) Если $\frac{1}{3} \leqslant \mu \leqslant 1$ то координата q_2 точки максимума определяется из условия:

$$\ell_B(0, q_2, \mu) = 0$$
$$(1-\sqrt{2}+\mu(\sqrt{2}-3))q_2 + 3\mu - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_2 = \frac{3\mu - 1}{\sqrt{2}-1+(3-\sqrt{2})\mu}$$
$$q^* = (0; \frac{3\mu-1}{\sqrt{2}-1+(3-\sqrt{2})\mu}), \quad \frac{1}{3} \leqslant \mu \leqslant 1$$

(b) Если $0 \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{3}$ то координата q_0 точки максимума определяется из условия:

$$\ell_B(q_0, 0, \mu) = 0$$
$$(1+\mu(2\sqrt{2}-3))q_0 + 3\mu - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_0 = \frac{1-3\mu}{1+(2\sqrt{2}-3\mu)}$$
$$q^* = (\frac{1-3\mu}{1+(2\sqrt{2}-3\mu)}; 0), \quad 0 \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{3}$$

Следовательно:

$$B(\mu) = \arg\max_{q \in P_B(\mu)} \overline{G}(y, q, \mu) = \begin{cases} (0; \dfrac{3\mu-1}{\sqrt{2}-1+(3-\sqrt{2})\mu}), & \frac{1}{3} \leqslant \mu \leqslant 1 \\ (\dfrac{1-3\mu}{1+(2\sqrt{2}-3\mu)}; 0), & 0 \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{3} \end{cases} \tag{6}$$

(2) Рассмотрим $\ell_3 \leqslant \ell_4$. Производная в области имеет вид:

$$\frac{\partial \overline{G}(p, q, \mu)}{\partial q} = \frac{1+p}{2\sqrt{2}\mu}\langle -1; \sqrt{2}-1 \rangle$$

Введём вспомогалетльную функцию $\ell_A(q, \mu) := (\ell_3 - \ell_4) \cdot \mu(1-\mu)$, множество, на котором она принимает неотрицательные значения составляют интересующую нас область. Множитель $\mu(1-\mu)$ является строго положительным на $\mu \in (0, 1)$, поэтому не влияет на знак. Функция является линейной по переменным q_0 и q_2:

$$\ell_A(q, \mu) = -(2+(\sqrt{2}-3)\mu)q_0 - (2-2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}-3)\mu)q_2 - 3\mu + 2$$

Параметр μ изменяется в диапазоне $(0, 1)$, причём

$$\ell_A(q, \mu) \xrightarrow[\mu \to 1]{} 1 - q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2$$
$$\ell_A(q, \mu) \xrightarrow[\mu \to 0]{} 1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0$$

Предельные положения $\ell_B(q, \mu) = 0$ изображены на графике (3). Найдём значение μ при котором прямая $\ell(q, \mu)$ проходит через точку $q = (0, 0)$:

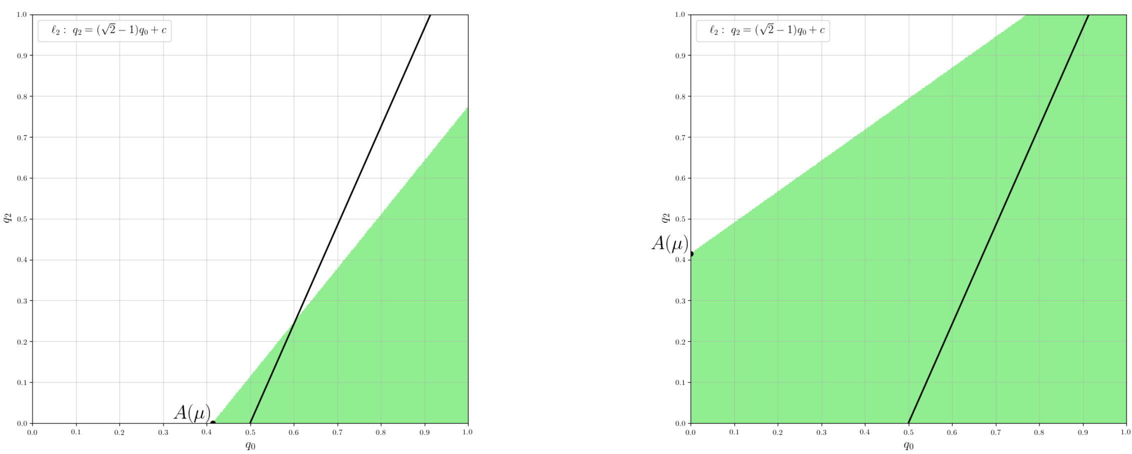
$$\ell_A(0, 0, \hat{\mu}) = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{2}{3}$$

Очевидно, что на полиэдре $P_2(\mu)$:

$$P_A(\mu) = \{q \in Q \mid \ell_3(q, \mu) \leqslant \ell_4(q, \mu)\},\ \mu \in (0, 1)$$

функция $\overline{G}(p, q, \mu)$ достигает максимума в точке $A(\mu)$:

$$A(\mu) = \arg\max_{q \in P_A(\mu)} \overline{G}(p, q, \mu) = \begin{cases} (0, q_2) : \ell_A(0, q_2, \mu) = 0, & \frac{2}{3} \leqslant \mu \leqslant 1 \\ (q_0, 0) : \ell_A(q_0, 0, \mu) = 0, & 0 \leqslant \mu \leqslant \frac{2}{3} \end{cases}$$



(a) $\mu = 0.1 < \frac{2}{3}$

(b) $\mu = 0.8 > \frac{2}{3}$

На графике зелёным цветом изображена область $P_A(\mu)$, чёрным цветом обозначены линии уровня и стрелкой соответсвенно градиент функции. Рассмотрим эти два случая и найдём явное выражение для точки $A(\mu)$:

(a) Если $\frac{2}{3} \leqslant \mu \leqslant 1$ то координата q_2 точки максимума определяется из условия:

$$\ell_A(0, q_2, \mu) = 0$$

$$-(2 - 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2} - 3)\mu)q_2 - 3\mu + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_2 = \frac{3\mu - 2}{2(\sqrt{2} - 1) + (3 - 2\sqrt{2})\mu}$$

$$q^* = (0; \frac{3\mu - 2}{2(\sqrt{2} - 1) + (3 - 2\sqrt{2})\mu}), \quad \frac{2}{3} \leqslant \mu \leqslant 1$$

(b) Если $0 \leqslant \mu \leqslant \frac{2}{3}$ то координата q_0 точки максимума определяется из условия:

$$\ell_A(q_0,0,\mu)=0$$
$$-(2+(\sqrt{2}-3)\mu)q_0-3\mu+2=0 \quad\Rightarrow\quad q_0=\frac{2-3\mu}{2+(\sqrt{2}-3)\mu}$$
$$q^*=(\frac{2-3\mu}{2+(\sqrt{2}-3)\mu};0), \qquad 0\leqslant\mu\leqslant\frac{2}{3}$$

Следовательно:

$$A(\mu)=\arg\max_{q\in P_A(\mu)}\overline{G}(p,q,\mu)=\begin{cases}(0;\dfrac{3\mu-2}{2(\sqrt{2}-1)+(3-2\sqrt{2})\mu}), & \frac{2}{3}\leqslant\mu\leqslant 1\\ (\dfrac{2-3\mu}{2+(\sqrt{2}-3)\mu};0), & 0\leqslant\mu\leqslant\frac{2}{3}\end{cases} \tag{7}$$

(3) Рассмотрим область в которой $\begin{cases}\ell_1\leqslant\ell_2\\ \ell_3\geqslant\ell_4\end{cases}$
Частные производные имеют следующий види в данной области.
$$\frac{\partial\overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q}=\frac{1}{2\sqrt{2}\mu(1-\mu)}\big\langle(\sqrt{2}-1)p\mu-(1-p)(1-\mu);(\sqrt{2}-1)(1-p)(1-\mu)-p\mu\big\rangle$$

$$g_1=(\sqrt{2}-1)p\mu-(1-p)(1-\mu)$$
$$g_2=(\sqrt{2}-1)(1-p)(1-\mu)-p\mu$$

Заметим, что функция $\overline{G}(p,q,\mu)$ является линейной по переменным q_0 и q_2 т.е.:

$$\overline{G}(p,q,\mu)=g_0(p,\mu)\,q_0+g_2(p,\mu)\,q_2+c(p,\mu)$$
и
$$\overline{G}(p,q,\mu)=0\sim q_2=k(p,\mu)\cdot q_0+c(p,\mu)$$

Рассматриваем функцию на полиэдре $P_{AB}(\mu)$:

$$P_{AB}(\mu)=\{q\in Q\mid \ell_A(q,\mu)\geqslant 0\cap\ell_B(q,\mu)\leqslant 0\},\ \mu\in(0,1)$$

Ограничение $\ell_A(q,\mu)=0$ и $\ell_B(q,\mu)=0$ представимы в эквивалентном виде:

$$\ell_A(q,\mu)=0\sim\ q_2=k_A(\mu)q_0+c_A(\mu)$$
$$\ell_B(q,\mu)=0\sim\ q_2=k_B(\mu)q_0+c_B(\mu)$$

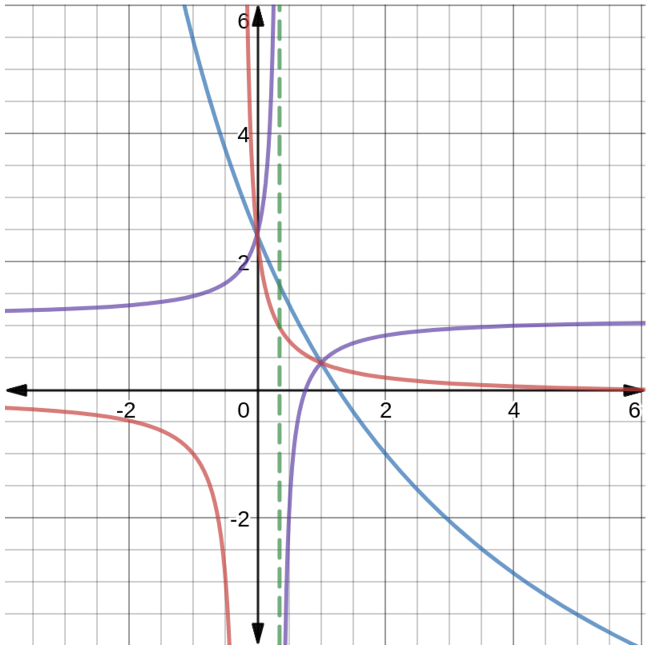


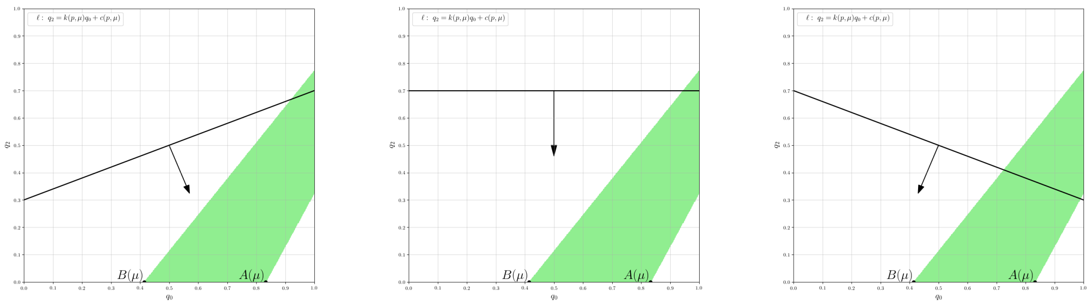
Рис. 6: Коэффициенты $k_A(\mu)$, $k_B(\mu)$ и $k(p,\mu)$ при фиксированном p

Рассмотрим график 6, на котором изображены значения коэффициетов при фиксированном значении $p \in [0,1]$. $k_B(\mu)$ изображены красной кривой, $k_A(\mu)$ синей и фиолетовой - кривая $k(p,\mu)$. Пунктирная вертикальная линия обозначает точку x в которой выражение $g_1 = 0$. Имеет место неравенство $k_A(\mu) > k_B(\mu)$ при $\mu \in (0,1)$.

$$\begin{cases} k(\mu) < k_B(\mu) \text{ при } g_1(\mu,p) < 0 \\ k(\mu) > k_A(\mu) \text{ при } g_1(\mu,p) > 0 \end{cases}$$

Следовательно точки максимума функции $\overline{G}(p,q,\mu)$ при фикисированных значениях μ и p могут быть точки: $\{A\},\{B\},(0,0)$ и отрезки $[B,A],[0,A],[0,B]$. Где точки $A(\mu)$ и $B(\mu)$ определны в 7 и 6. Рассмотрим три подслучая:

(a) $0 \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{3}$.

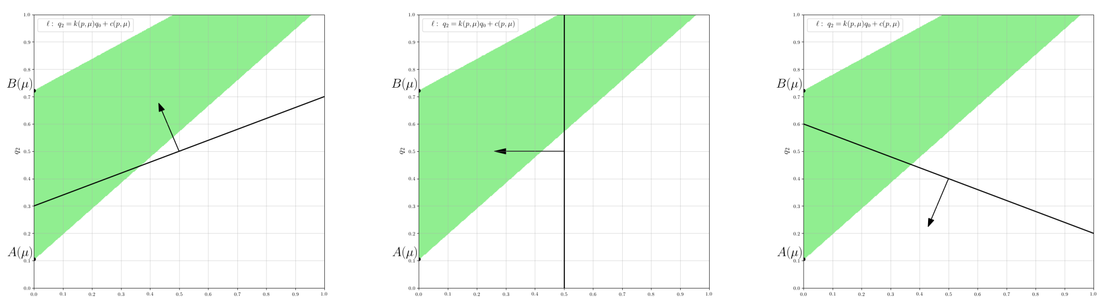


(a) $g_1 > 0 \Rightarrow q^* = A$ (b) $g_1 = 0 \Rightarrow q^* = [B, A]$ (c) $g_1 < 0 \Rightarrow q^* = B$

Рис. 7

$$\begin{cases} g_1 > 0 \Rightarrow q^* = A \\ g_1 = 0 \Rightarrow q^* = [B, A] \\ g_1 < 0 \Rightarrow q^* = B \end{cases}$$

(b) $\frac{2}{3} \leqslant \mu \leqslant 1$

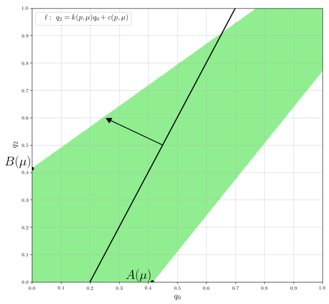


(a) $g_2 > 0 \Rightarrow q^* = B$ (b) $g_2 = 0 \Rightarrow q^* = [B, A]$ (c) $g_2 < 0 \Rightarrow q^* = A$

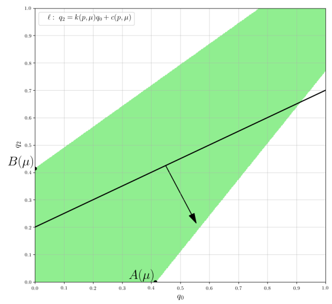
Рис. 8

$$\left[\begin{array}{c} g_2 > 0 \Rightarrow q^* = B \\ g_2 = 0 \Rightarrow q^* = [B, A] \\ g_2 < 0 \Rightarrow q^* = A \end{array} \right.$$

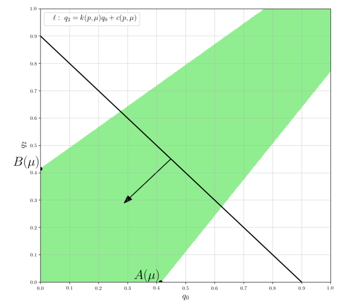
(c) $\frac{1}{3} \leqslant \mu \leqslant \frac{2}{3}$



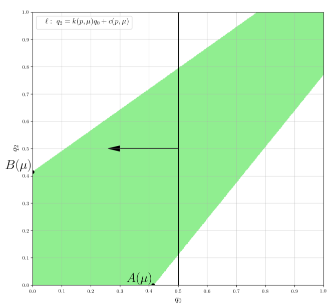
(a) $g_2 > 0 \Rightarrow q^* = B$



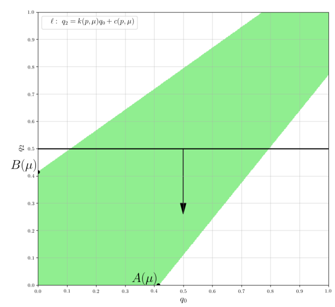
(b) $g_1 > 0 \Rightarrow q^* = A$



(c) $\begin{cases} g_2 < 0 \\ g_1 < 0 \end{cases} \Rightarrow q^* = (0,0)$



(d) $g_2 = 0 \Rightarrow q^* = [0, B]$



(e) $g_1 = 0 \Rightarrow q^* = [0, A]$

$$\left[\begin{array}{l} g_1 > 0 \Rightarrow q^* = A \\ g_2 > 0 \Rightarrow q^* = B \\ g_1 = 0 \Rightarrow q^* = [0, A] \\ g_2 = 0 \Rightarrow q^* = [0, B] \\ \begin{cases} g_2 < 0 \\ g_1 < 0 \end{cases} \Rightarrow q^* = (0,0) \end{array}\right.$$

Итого получим следующие

$$C(p,\mu) = \arg\max_{P_{AB}} \overline{G}(p,q,\mu) \begin{cases} A(\mu), & g_2(p,\mu) < 0 \cup \mu \leqslant \frac{1}{3} \cap g_2 < 0 \\ B(\mu), & g_1(p,\mu) > 0 \cup \mu \geqslant \frac{2}{3} \cap g_1 > 0 \\ (0,0), & g_1(p,\mu) < 0 \cap g_2(p,\mu) < 0 \\ [A(\mu), B(\mu)], & g_1(\mu) = 0 \cap \mu < \frac{1}{3} \cup g_1(\mu) = 0 \cap \mu > \frac{2}{3} \\ [0, A(\mu)], & g_2(\mu) = 0 \cap \mu \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ [0, B(\mu)], & g_1(\mu) = 0 \cap \mu \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \end{cases}$$

Но кроме того точки $A(\mu)$ и $B(\mu)$ являются оптимальными $\forall$ p и μ поскольку являются таковыми в **(1)** и **(2)**. Итого в области P_B оптимальной является точка $B(\mu)$, в области P_A оптимальной является точка $A(\mu)$, и в области P_{AB} оптимальной является точка $C(p,\mu)$. Поскольку если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на множестве X, то и $min(f(x),g(x))$ непрерывна на X, то максимум достигается в точке C.

$$q^*(p,\mu) = \arg\max_{Q} \overline{G}(p,q,\mu) \begin{cases} A(\mu), & g_2(p,\mu) < 0 \cup \mu \leqslant \frac{1}{3} \cap g_2 < 0 \\ B(\mu), & g_1(p,\mu) > 0 \cup \mu \geqslant \frac{2}{3} \cap g_1 > 0 \\ (0,0), & g_1(p,\mu) < 0 \cap g_2(p,\mu) < 0 \\ [A(\mu), B(\mu)], & g_1(\mu) = 0 \cap \mu < \frac{1}{3} \cup g_1(\mu) = 0 \cap \mu > \frac{2}{3} \\ [0, A(\mu)], & g_2(\mu) = 0 \cap \mu \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ [0, B(\mu)], & g_1(\mu) = 0 \cap \mu \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ (0,1), & \mu = 0 \\ (1,0), & \mu = 1 \end{cases}$$

Поскольку в пункте 3.1 мы установили, что

$$p^*(q,\lambda(q)) = \arg\max_{p\in[0,1]} \overline{L}(p,q,\lambda(q)) = [0,1]$$

Нас интересуют оптимальные пары (p^0,q^0) такие, что $\exists(\lambda,\mu)\in[0,1]^2$:

$$\begin{cases} p^0 = p^*(q^0,\lambda) \\ q^0 = q^*(p^0,\mu) \end{cases}$$

Введём следующие множества:

$$P_0 = [0,1],\ Q_0 = \{(q_0,q_2)\in Q \mid q_0 = 0 \text{ или } q_2 = 0\}$$

Следующие точки являются оптимальными:

$$(p,q) \in P_0 \times Q_0$$