Свойства свёртки Гермейера в векторных играх

Кононов Сергей

9 мая 2019 г.

Содержание

1 Введение

В работе рассматриваются различные способы решения модельной задачи которая представляет собой игру двух лиц с противоположными интересами и двумерной функцией выигрыша. Для решения задачи применяется модифицированный метод свёрток предложенный Л.С. Шепли [1], который как правило используется в подобных задачах.

1.1 Игровая модель

Рассматриваются два игрока - Студент, далее обозначается **С**, и Преподаватель, далее обозначается **П**, которые имеют противоположные интересы. Критерий интересов составляют две велечины, первая из которых является эффективностью работы **С** в научной сфере, а второй его эффективностью на подработке.

С выбирает долю x рабочего времени, которую он тратит на подготовку диплома, оставшееся рабочее время $1 - x$ он тратит на подработку. Считается, что производительность **С** при любых занятий падает с увеличением отводимого на них времени, эффективность труда **С** зададим функцией $\sqrt{x}$ и $\sqrt{1-x}$ соответственно. **С** может распределять свое время между двумя видами деятельности, т.е. имеет множетсво стратегий $x \in X = \{0, 1\}$, причём он может использовать смешанные стратегии.

П выбирает - отностится к **С** требовательно, способствую написанию диплома и мешая подработке или же не обращать на него внимания не мешая подработке и не помогая с дипломом. **П** имеет множество стратегий $y \in Y = \{1, 2\}$, причём тоже может использовать смешаные стратегии.

Получаем следующий функциональный критерий:

$$F(x, y) = \big(f_1(x, y), f_2(x, y)\big) = \left(\frac{y\sqrt{x}}{2}, \frac{\sqrt{1-x}}{y}\right) \tag{1}$$

П стремится минимизировать (выборая $y \in Y = \{1, 2\}$) критерий $F(x, y)$, а игрок **С** - максимизировать (выбирая $x \in X = [0, 1]$).

Задачу можно представить в виде многокритериальную игру двух лиц с противоположными интересамив

$$\Big\langle F(x, y), X, Y \Big\rangle,\ y \in Y = \{1, 2\},\ x \in X = [0, 1] \tag{2}$$

Определение 1 *Допустимое решение $\hat{x} \in X$ называется строго эффективным (эффективным по Слейтеру) для задачи*

$$\max_{x \in X} F(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \tag{3}$$

*если **не** существует $x \in X$ такого, что $f_k(x) > f_k(\hat{x})$ для всех $k = \{1, ..., n\}$. Множетсво всех эффективных по Слейтеру решений называаeтся множеством Слейтера задачи (3).*

Для задачи (2) введём следующие частные случаи:

$$S_x(y^*) \text{ - множество Слейтера задачи } \max_{x \in X} F(x, y^*)$$
$$S_y(x^*) \text{ - множество Слейтера задачи } \min_{y \in Y} F(x^*, y)$$

Определение 2 *Решением*[1] *(2) является множество точек (x^*, y^*) таких, что $x^* \in S_x(y^*)$ и $y^* \in S_y(x^*)$,*

Для параметризации множеств Слейтера будем использовать метод свёрток. Он заключается в том, что задача $\max\limits_{x \in X} F(x)$ заменяется параметрическим семейством скалярных задач $\max\limits_{x \in X} C(\{f_i\}, \lambda, x)$, где C – функция свертки частных критериев $\{f_i\}_{i=1}^m$ задачи (3) в единый скалярный критерий, λ – параметр свертки.

Определение 3 *Линейной свёрткой с параметром λ для функции критериев задачи (3) называется функция:*

$$L(\{f_i\}, \lambda, x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i, \text{ где } \lambda \in \Lambda = \{\lambda_i \geq 0 | \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}, \tag{4}$$

свёрткой Гермейера или обратной логической свёрткой с параметром μ для функции критериев задачи (3) называется функция:

$$G(\{f_i\}, \mu, x) = \min_{i:\mu_i > 0} \frac{f_i}{\mu_i}, \text{ где } \mu \in M = \{\mu_i \geq 0 | \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1\}. \tag{5}$$

[1] Согласно *Blackwell D.* An analog of the minimax theorem for vector payoffs // Pac. J. of Math. 1956. No 6.

В случае конечных X и Y Шепли свел [1] описание данного множества к семейству задач поиска значений скалярных игр с функциями выигрышей – ЛС частных критериев при произвольном наборе весовых коэффициентов, своих у каждого игрока. Применение линейной свертки в многокритериальных задачах обосновывается леммой Карлина

Теорема 1 (Карлин [4]) *Пусть x_0 – эффективная точка, Тогда существуют неотрицательные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ такие, что $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ и x_0 является точкой максимума функции $L(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f^j(x)$*

Гермейером была предложена свертка, которая также аппроксимирует множество Слейтера. В работе используется ее модификация - обратная логическая свертка, она отличается тем, что веса стоят в знаменателе.

Теорема 2 (Гермейер [2]) *Пусть x_0 – эффективная точка, причем $f^i(x_0) > 0$ для всех $i = 1, \ldots, m$. Тогда существуют положительные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ такие, что $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ и x_0 является точкой максимума функции $G(x) = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} \lambda_j f^j(x)$.*

Рассмотрим случай, когда **С** использует обратную логическую свертку, с парамером μ, а **П** использует линейную свертку с параметром λ. Тогда множество оптимальных решений:

$$\begin{cases} x^* = \arg\max\limits_{x} G(\{f_1, f_2\}, \mu, x, y^*) \\ y^* = \arg\min\limits_{y} L(\{f_1, f_2\}, \lambda, x^*, y) \end{cases}$$

Поскольку игроки используют смешанные стратегии т.е. распределения вероятностей $\rho_x(x)$ и $\rho_y(y)$ над чистыми стратегиями $x \in X$ и $y \in Y$. Далее каждый игрок осредняет свою функцию выигрыша по стратегиям противника

$$\overline{G}(\{f_1, f_2\}, \mu, q, p) = \iint\limits_{PQ} G(\{f_1, f_2\}, \mu, q, p)\rho_x(x)\rho_y(y)dxdy$$

$$\overline{L}(\{f_1, f_2\}, \lambda, q, p) = \iint\limits_{PQ} L(\{f_1, f_2\}, \lambda, q, p)\rho_x(x)\rho_y(y)dxdy$$

Определение 4 *Пара стратегий* (p^0, q^0) *называется оптимальными, если для некоторых* λ, μ *верно:*

$$\begin{cases} p^0(q^0, \lambda) = \operatorname*{argmin}_{p \in P} \overline{L}(p, q^0, \lambda) \\ q^0(p^0, \mu) = \operatorname*{argmin}_{q \in Q} \overline{G}(p^0, q, \mu) \end{cases} \tag{6}$$

Мы будем рассматривать конечную игру $\mathbf{C} - \mathbf{\Pi}$, полученную из исходной заменой множества $X = [0, 1]$ конечным множеством точек

$$X^T = \{0,\ \frac{1}{T},\ \frac{2}{T},\ \ldots,\ \frac{T-1}{T},\ 1\},\ \ T \in \mathbb{N}$$

В работе исследуются случаи $T = 1$: $X^1 = \{0, 1\}$, и $T = 2$: $X^2 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

2 Постановка задачи (значение параметра T=1)

Сначала рассмотри случай с параметром $T = 1$. Тогда множество $X = \{0,1\}$. Игроки используют смешанные стратегии т.е. распределение над своими чистыми стратегиями. Чистыми стратегиями игроков **С** и **П** являются $X = \{0,1\}$ и $Y = \{1,2\}$ соответсвенно. Эти множества дискретны, поэтому распределения задаются в виде векторов вида:

$$(p_1, p_2) \in P = \{(p_1, p_2) \in R_+^2 \mid p_1 + p_2 = 1)$$

Множество $Q = P$, введено для наглядности. Смешанные стратеги игроков **С** и **П** будем обозначать $q = (q_0, q_1) \in Q$ и $p = (p_0, p_1) \in P$ соответсвенно, причём:

$$\begin{array}{ll} P(X=0) = q_0 & \qquad P(Y=1) = p_0 \\ P(X=1) = q_1 & \qquad P(Y=2) = p_1 \end{array} \tag{7}$$

Введём обозначения $q := q_1$ и $p := p_1$, тогда $q_0 = 1-q$ и $p_0 = 1-p$. Игрок **С** использует смешаную стратегию (q_0, q_1), тогда его векторный критерий (1) приобретает вид:

$$F_{\text{С}}(q,y) = \left\langle q_0 \frac{y\sqrt{0}}{2} + q_1 \frac{y\sqrt{1}}{2}; q_0 \frac{\sqrt{1}}{y} + q_1 \frac{\sqrt{0}}{y} \right\rangle = \left\langle \frac{q_1 y}{2}; \frac{q_0}{y} \right\rangle$$

Игрок **П** использует смешаную стратегию (p_0, p_1), тогда его векторный критерий (1) приобретает вид:

$$F_{\Pi}(x,p) = \left\langle (1-p)\frac{1\cdot\sqrt{x}}{2} + p\frac{2\cdot\sqrt{x}}{2};\ (1-p)\frac{\sqrt{1-x}}{1} + p\frac{\sqrt{1-x}}{2} \right\rangle = \\ = \frac{1}{2}\left\langle (p+1)\sqrt{x};\ (2-p)\sqrt{1-x} \right\rangle$$

Далее игрок **С** использует *обратную логическую свёртку* (5):

$$G(y,q,\mu) = \min_{i:\mu_i>0} \{ \frac{q_1 y}{2\mu_0}; \frac{q_0}{y\mu_1} \},$$

а игрок **П** использует *линейную свёртку* (4):

$$L(p,x,\lambda) = \lambda_0 (p+1)\sqrt{x} + \lambda_1 (2-p)\sqrt{1-x}$$

После чего игрок **С** осредняет свёртку критерия по стратегиям игрока **П**, т.е. по переменной y:

$$\overline{G}(p,q,\mu) = p\min\{\frac{q}{\mu}; \frac{1-q}{2(1-\mu)}\} + (1-p)\min\{\frac{q}{2\mu}; \frac{1-q}{1-\mu}\},$$

а игрок **П** осредняет свёртку критерия по стратегиям игрока **С**, т.е. по переменной x:

$$\overline{L}(p,q,\lambda) = \frac{1}{2}\big\{q(3\lambda+p-2)+(2-p)(1-\lambda)\big\}.$$

Мы установили функции выигрыша игроков. Теперь задачу можно формализовать и представить как семейство игр двух игроков в нормальный форме:

$$\Big\langle \{\mathbf{С}, \mathbf{П}\}, \{Q,\ P\}, \{\overline{L}(p,q,\lambda), -\overline{G}(p,q,\mu)\}\Big\rangle,\ (\lambda,\mu)\in\Lambda\times M$$

Для нас представляет интерес множество оптимальных точек (4).

3 Множество оптимальных стратегий

Для поиска оптимальных стратегий сначала необходимо найти точки максимума и минимума функций выигрыша **С** и **П** соответсвенно:

$$q^*(p,\mu) = \arg\max_{q\in Q} \overline{G}(p,q,\mu) \text{ и } p^*(q,\lambda) = \arg\min_{p\in P} \overline{L}(p,q,\lambda).$$

Из статьи [3] следует, что:

$$p^*(q,\lambda) = \arg\min_{p\in P} \overline{L}(p,q,\lambda) = \begin{cases} 0, & q > 1-\lambda \\ 1, & q < 1-\lambda \\ [0,1], & q = 1-\lambda \end{cases} \tag{8}$$

Из пункта **[ещё не написано]** следует, что

$$q^*(p,\mu) = \arg\max_{q\in Q} \overline{G}(p,q,\mu) = \begin{cases} \dfrac{\mu}{2-\mu}, & p \geqslant 1-\mu \\ \dfrac{2\mu}{1+\mu}, & p \leqslant 1-\mu \end{cases} \tag{9}$$

Докажем утверждение характерезующее множество оптимальных пар данной игры.

Утверждение 1 *Любая пара* $(p^*,q^*) \in [0,1]^2$ *является оптимальной, т.е.* $\forall\, (p^*,q^*) \in [0,1]^2\ \exists\, (\mu,\lambda) \in M \times \Lambda$ *такие, что верно* (4).

Доказательство

Зафиксируем некоторую пару $(p^*,q^*) \in [0,1]^2$ и найдём такие $\hat{\mu}(p^*,q^*) \in M$ и $\hat{\lambda}(p^*,q^*) \in \Lambda$ что верно (4) т.е. что пара стратегий является оптимальной.

(1) Определим $\hat{\lambda}(p^*,q^*)$ и покажем что $p^* \in \arg\min_{p\in P} \overline{L}(p,q^*,\hat{\lambda})$. Возьмём $\hat{\lambda} := 1-q^*$ тогда поскольку $\arg\min_{p\in P} \overline{L}(p,q^*,\hat{\lambda}) = [0,1]$ при $q^* = 1-\hat{\lambda}$, то $p^* \in \arg\min_{p\in P} \overline{L}(p,q^*,\hat{\lambda})$.

(2) Определим $\hat{\mu}(p^*,q^*)$ и покажем что $q^* \in \arg\max_{q\in Q} \overline{G}(p^*,q,\hat{\mu})$. По имеющемуся q^* решим уравнения $\dfrac{\mu}{2-\mu} = q^*$ и $\dfrac{2\mu}{1+\mu} = q^*$, относительно переменной μ:

$$q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} \Rightarrow \mu = \frac{q^*}{2-q^*} \qquad\qquad q^* = \frac{\mu}{2-\mu} \Rightarrow \mu = \frac{2q^*}{1+q^*}$$

Введём обозначения $\mu_1(q) = \dfrac{q}{2-q}$ и $\mu_2(q) = \dfrac{2q}{1+q}$. Заметим, что при $q^* \in [0,1]$ верно $0 \leqslant \mu_2(q^*) \leqslant \mu_1(q^*) \leqslant 1$. В таком случае поскольку $1-p^* \in [0,1]$, то при фиксированных переменных (p^*, q^*) будет реализован один и только один из 3-х вариантов:

(a) $1 - p^* \leqslant \mu_2(q^*)$, т.е. $1 - p^* \leqslant \dfrac{q^*}{2-q^*}$. Возьмём $\hat{\mu} := \mu_1 = \dfrac{2q^*}{1+q^*}$.

Действительно, при таком выборе $\hat{\mu}$ имеем:

$$1 - p^* \leqslant \mu_2 \leqslant \mu_1 = \hat{\mu} \Rightarrow p^* \geqslant 1 - \hat{\mu} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \arg\max_{q\in Q} \overline{G}(p^*, q, \hat{\mu}) = \frac{\hat{\mu}}{2-\hat{\mu}} = \frac{\frac{2q^*}{1+q^*}}{2 - \frac{2q^*}{1+q^*}} = q^*$$

(b) $\mu_2(q^*) < 1 - p^* \leqslant \mu_1(q^*)$, т.е. $\dfrac{q^*}{2-q^*} < 1 - p^* \leqslant \dfrac{2q^*}{1+q^*}$. Возьмём $\hat{\mu} := \mu_1 = \dfrac{2q^*}{1+q^*}$. Действительно, при таком выборе $\hat{\mu}$ имеем:

$$1 - p^* \leq \mu_1 = \hat{\mu} \ \Rightarrow \ p^* \geqslant 1 - \hat{\mu} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \arg\max_{q\in Q} \overline{G}(p^*, q, \hat{\mu}) = \frac{\hat{\mu}}{2-\hat{\mu}} = \frac{\frac{2q^*}{1+q^*}}{2 - \frac{2q^*}{1+q^*}} = q^* \Rightarrow$$

(c) $\mu_1(q^*) < 1 - p^*$ т.е. $\dfrac{2q^*}{1+q^*} < 1 - p^*$. Возьмём $\hat{\mu} := \mu_2 = \dfrac{q^*}{2-q^*}$ Действительно, при таком выборе $\hat{\mu}$ имеем:

$$1 - p^* > \mu_1 \geqslant \mu_2 = \hat{\mu} \Rightarrow p^* \leqslant 1 - \hat{\mu} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \arg\max_{q\in Q} \overline{G}(p^*, q, \hat{\mu}) = \frac{2\hat{\mu}}{1+\hat{\mu}} = \frac{2\frac{q^*}{2-q^*}}{1 + \frac{q^*}{2-q^*}} = q^*.$$

Теперь для любой точки $(p^*, q^*) \in [0,1]^2$ можем указать $(\hat{\mu}(p^*, q^*), \hat{\lambda}(p^*, q^*))$ такие, что верно (4), а именно:

$$(\hat{\mu}(p^*, q^*), \hat{\lambda}(p^*, q^*)) = \begin{cases} \left(\dfrac{q^*}{2-q^*},\, 1-q^*\right), & \dfrac{2q^*}{1+q^*} < 1-p^* \\ \left(\dfrac{2q^*}{1+q^*},\, 1-q^*\right), & 1-p^* \leqslant \dfrac{q^*}{2-q^*} \\ \left(\dfrac{2q^*}{1+q^*},\, 1-q^*\right), & \dfrac{q^*}{2-q^*} < 1-p^* \leqslant \dfrac{2q^*}{1+q^*} \end{cases}$$

Утверждение доказано.

4 Графическое изображение матожидания критерия

Вычислим матожидание от имеющегося векторного критерия (1) , где x и y возьмём как случайные величины с распределениями (7) и соответсвующими обозначениями велечин p и q. В таком случае имеем:

$$\mathbb{E}_x[F(x,y)] = \Big(\frac{yq}{2}; \frac{1-q}{y}\Big)$$
$$\mathbb{E}_{xy}[F(x,y)] = \Big(\frac{q(1+p)}{2}; \frac{(1-q)(2-p)}{2}\Big)$$

Рассмотрим это как множество точек на плоскости X, Y зависящие от двух параметров $(p,q) \in [0,1]^2$

$$\begin{cases} x = \dfrac{q(1+p)}{2} \\ y = \dfrac{(1-q)(2-p)}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \dfrac{2x}{1+p} \\ y = \dfrac{(1-\dfrac{2x}{1+p})(2-p)}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \dfrac{2x}{1+p} \\ y = \dfrac{(1+p-2x)(2-p)}{2(1+p)} \end{cases}$$

Найдём максимальные значения, которые может принимать $y(x,p)$ при фиксированном x:

$$\frac{\partial y(x,p)}{\partial p} = \frac{3x}{(p+1)^2} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow p = \sqrt{6x} - 1$$

Введём обозначение $p_0 = \sqrt{6x} - 1$. Поскольку область определения $p_0 \in [0,1]$, то $p_0 = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ и $p_0 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{6}$

$$y_{max}(x) = \begin{cases} \max\{y(x,0),\ y(x,1),\ y(x,p_0)\}, & x \in \left[\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right] \\ \max\{y(x,0),\ y(x,1)\}, & x \in \left[0, \frac{1}{6}\right] \cap \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}$$

учитывая, что $y(x,0) = 1-2x,\ y(x,1) = \dfrac{1-x}{2},\ y(x,p_0) = \dfrac{(\sqrt{6x}-2x)(3-\sqrt{6x})}{2\sqrt{6x}}$ получим уравнения верхней и нижней огибающей области на графике ниже.

$$y_{min}(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{2}, & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 1-2x, & x \in (\frac{1}{3}, 1] \end{cases}$$

$$y_{max}(x) = \begin{cases} 1-2x, & x \in [0, \frac{1}{6}] \\ \dfrac{(\sqrt{6x}-2x)(3-\sqrt{6x})}{2\sqrt{6x}}, & x \in (\frac{1}{6}, \frac{2}{3}] \\ \dfrac{1-x}{2}, & x \in (\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

В предыдущем пункте мы установили (3) что любая пара $(p^*, q^*) \in [0,1]^2$ является оптимальной. Теперь для всех оптимальных стратегий т.е. пар $(p^*, q^*) \in [0,1]^2$ изобразим на графике значения матожидания векторного критерия в этой точке.

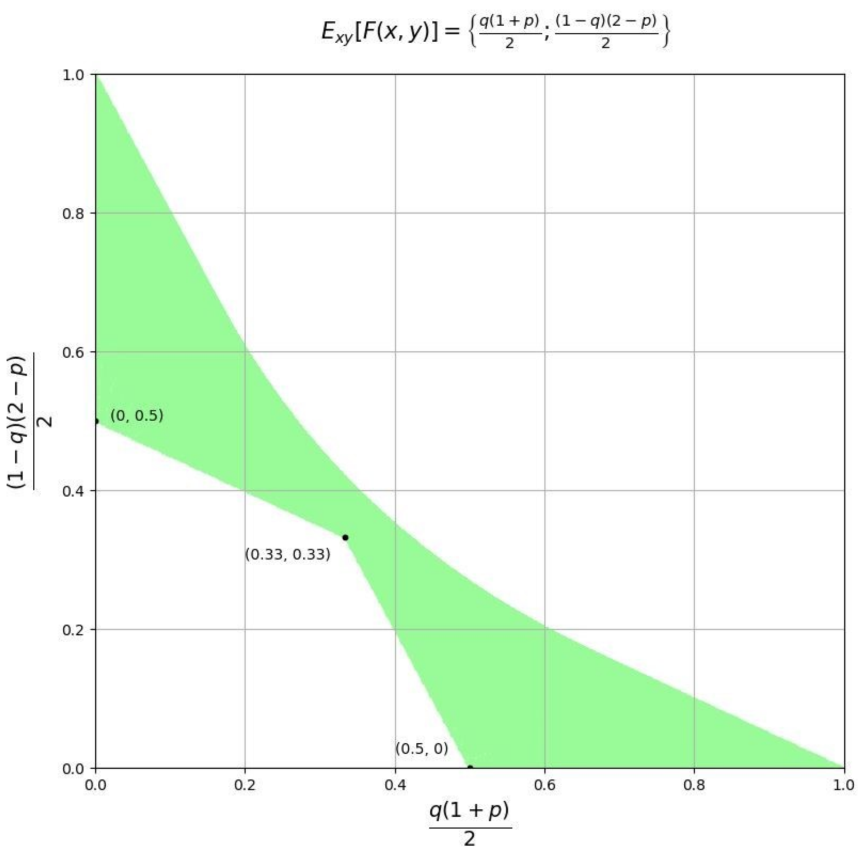


Рис. 1: Матожидание векторного критерия

5 Оптимальные результаты для игрока C

Теперь рассмотрим игру с точки зрения игрока C. Для каждой пары параметров $(\hat{\mu}, \hat{\lambda})$ найдём множество соответсвующих оптимальных пар $(p^*(\hat{\mu}, \hat{\lambda}), q^*(\hat{\mu}, \hat{\lambda}))$. Далее найдём значение свёртки для игрока C в этих точка:

$$M(p^*, q^*, \hat{\mu}) = p^* \min\{\frac{q^*}{\hat{\mu}}; \frac{1-q^*}{2(1-\hat{\mu})}\} + (1-p^*) \min\{\frac{q^*}{2\hat{\mu}}; \frac{1-q^*}{1-\hat{\mu}}\}$$

И изобразим множество значений функции в этих точках.

Рассмотрим все возможные сочетания значений для p^* и q^* в системах (7) и (8), что даст нам 6 следующих систем:

Напомню, что переменные имеют следующих области ограничений:

$$p \in [0,1], \quad q \in [0,1], \quad \mu \in [0,1], \quad \lambda \in [0,1]$$

(1)

$$\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \\ q^* > 1-\lambda \\ p^* + \mu - 1 \geqslant 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \\ \dfrac{\mu}{2-\mu} > 1-\lambda \\ \mu \geqslant 1 \quad \Rightarrow \quad \mu = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = 1 \\ \lambda > 0 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

Значит при $\mu = 1, \lambda \in (0,1]$ имеем следующие оптимальные пары $\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = 1 \end{cases}$

(2)

$$\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \\ q^* > 1-\lambda \\ p^* + \mu - 1 \leqslant 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \\ \dfrac{2\mu}{1+\mu} > 1-\lambda \\ \mu \leqslant 1 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \\ \lambda > \dfrac{1-\mu}{1+\mu} \\ \mu \leqslant 1 \end{cases}$$

Значит при $\mu \in [0,1], \lambda \in (\dfrac{1-\mu}{1+\mu}, 1]$ имеем следующие оптимальные пары $\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \end{cases}$

(3)

$$\begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \\ q^* < 1-\lambda \\ p^* + \mu - 1 \geqslant 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \\ \dfrac{\mu}{2-\mu} < 1-\lambda \\ \mu \geqslant 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \\ \lambda < 2\dfrac{1-\mu}{2-\mu} \\ \mu \geqslant 0 \end{cases}$$

Значит при $\mu \in [0,1], \lambda \in [0, 2\dfrac{1-\mu}{2-\mu})$ имеем следующие оптимальные пары $\begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \end{cases}$

(4)

$$\begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \\ q^* < 1-\lambda \\ p^* + \mu - 1 \leqslant 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \\ \dfrac{2\mu}{1+\mu} < 1-\lambda \\ \mu \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = 0 \\ \lambda < 1 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

Значит при $\mu = 0, \lambda \in [0,1)$ имеем следующие оптимальные пары $\begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = 0 \end{cases}$

(5)

$$\begin{cases} p^* \in [0,1] \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \\ q^* = 1-\lambda \\ p^* + \mu - 1 \geqslant 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* \in [0,1] \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \\ \dfrac{\mu}{2-\mu} = 1-\lambda \\ p^* \geqslant 1-\mu \end{cases} \sim \begin{cases} p^* \in [1-\mu,1] \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \\ \lambda = 2\dfrac{1-\mu}{2-\mu} \end{cases}$$

Значит при $\lambda = 2\dfrac{1-\mu}{2-\mu}, \mu \in [0,1]$ имеем следующие оптимальные пары

$$\begin{cases} p^* \in [1-\mu,1] \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \end{cases}$$

(6)

$$\begin{cases} p^* \in [0,1] \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \\ q^* = 1-\lambda \\ p^* + \mu - 1 \leqslant 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* \in [0,1] \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \\ \dfrac{2\mu}{1+\mu} = 1-\lambda \\ p^* \leqslant 1-\mu \end{cases} \sim \begin{cases} p^* \in [0,1-\mu] \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \\ \lambda = \dfrac{1-\mu}{1+\mu} \end{cases}$$

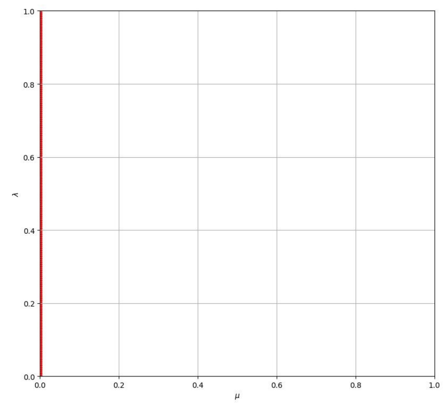
Значит при $\mu \in [0,1], \lambda = \dfrac{1-\mu}{1+\mu}$ имеем следующие оптимальные пары

$$\begin{cases} p^* \in [0,1-\mu] \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \end{cases}$$

Теперь на квадрате $(p,q) \in [0,1]^2$ рассмотрим все области, в которых множества оптимальных пар постоянны. И найдём множества значений функции

$$\overline{G}(p,q,\mu) = p\min\{\frac{q}{\mu};\frac{1-q}{2(1-\mu)}\} + (1-p)\min\{\frac{q}{2\mu};\frac{1-q}{1-\mu}\},$$

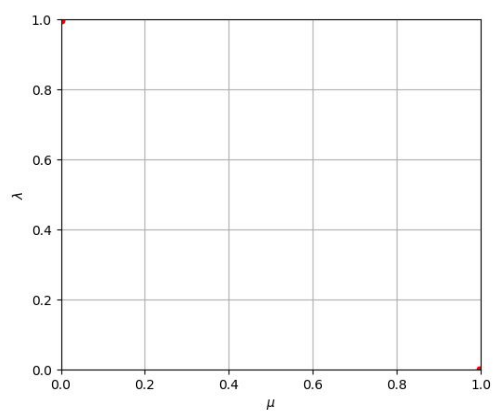
В этих областях



1) $\mu = 0, \lambda \in [0,1)$: $\begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} = \{\mu = 0\} = 0 \end{cases}$

Получаем множества оптимальных стратегий
$(P^* \times Q^*) = (\{1\} \times \{0\})$, где $\times$ - это декартово произведение, тогда

$$\overline{G}(1,0,0) = \frac{1}{2}$$



2.1) $\mu = 0, \lambda = 1$: $\begin{cases} p^* \geqslant 1 - \mu = \{\mu = 0\} = 1 \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} = \{\mu = 0\} = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} p^* \leqslant 1 - \mu = \{\mu = 0\} = 1 \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} = \{\mu = 0\} = 0 \end{cases}$

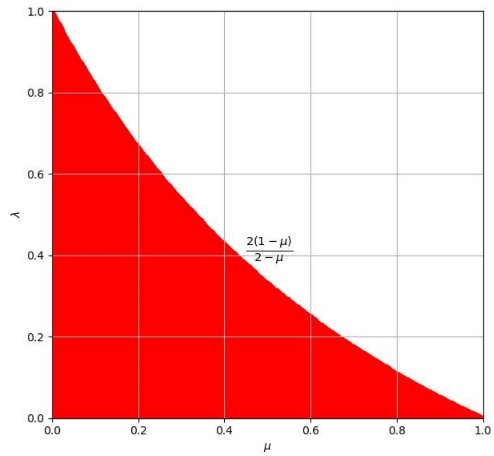
Получаем множества оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = ([0,1] \times \{0\})$ тогда

$$\overline{G}([0,1],0,0) = [0.5,1]$$

2.2) $\mu = 1, \lambda = 0$: $\begin{cases} p^* \geqslant 1 - \mu = \{\mu = 1\} = 0 \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} = \{\mu = 1\} = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} p^* \leqslant 1 - \mu = \{\mu = 1\} = 0 \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} = \{\mu = 1\} = 1 \end{cases}$

Получаем множества оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = ([0,1] \times \{1\})$ тогда

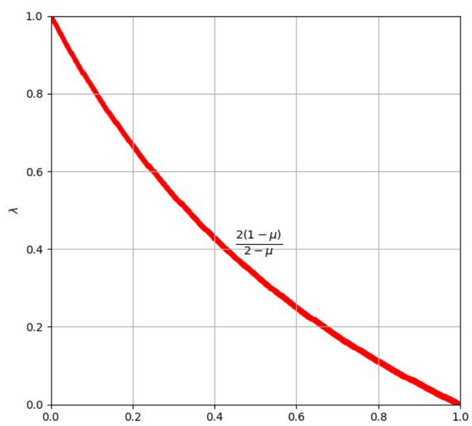
$$\overline{G}([0,1], 1, 1) = [0.5, 1]$$



3) $\mu \in (0,1), \lambda \in (0, \dfrac{1-\mu}{1+\mu}]$: $\begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \end{cases}$

Получаем множества оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = (\{1\} \times \{\dfrac{\mu}{2-\mu}\})$ тогда

$$\overline{G}(1, \frac{\mu}{2-\mu}, \mu) = \min\{\frac{\mu}{2-\mu}; \frac{1 - \dfrac{\mu}{2-\mu}}{2(1-\mu)}\} = \frac{1}{2-\mu}$$



4) $\mu \in (0,1), \lambda = \dfrac{1-\mu}{1+\mu}$: $\begin{cases} p^* \in [0, 1-\mu] \cup \{1\} \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \end{cases}$

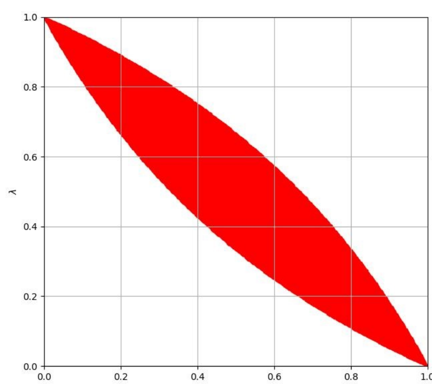
4.1) Получаем множества оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = (\{1\} \times \{\dfrac{\mu}{2-\mu}\})$ тогда

$$\overline{G}(1, \frac{\mu}{2-\mu}, \mu) = \frac{1}{2-\mu}$$

4.2) Получаем множества оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = ([0, 1-\mu] \times \{\dfrac{2\mu}{1+\mu}\})$ тогда

$$\overline{G}(p, \frac{2\mu}{1+\mu}, \mu) = p\frac{1}{2(1+\mu)} + (1-p)\frac{1}{1+\mu} = \frac{2-p}{2(1+\mu)} \geqslant \frac{2-(1-\mu)}{2(1+\mu)} = \frac{1+\mu}{2(1+\mu)} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{G}(p, \frac{2\mu}{1+\mu}, \mu) \leqslant \frac{1}{1+\mu} \Rightarrow \overline{G}(p, \frac{2\mu}{1+\mu}, \mu) = [0.5, \frac{1}{1+\mu}]$$



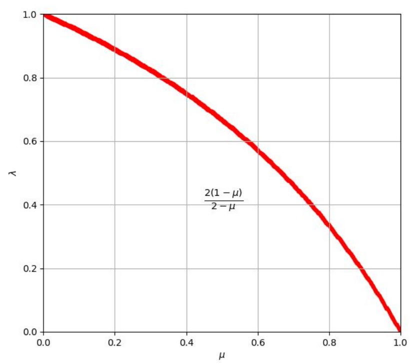
5) $\mu \in [(,1), \lambda \in [0, 2\dfrac{1-\mu}{2-\mu}] \cap (\dfrac{1-\mu}{1+\mu}, 1]$: $\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \end{cases}$; $\begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \end{cases}$

5.1) Получаем множества оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = (\{0\} \times \{\dfrac{2\mu}{1+\mu}\})$ тогда

$$\overline{G}(0, \frac{2\mu}{1+\mu}, \mu) = \frac{1}{1+\mu}$$

5.2) Получаем множества оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = (\{1\} \times \{\frac{\mu}{2-\mu}\})$ тогда

$$\overline{G}(1, \frac{\mu}{2-\mu}, \mu) = \frac{1}{2-\mu}$$



6) $\mu \in (0,1), \lambda = 2\frac{1-\mu}{2-\mu}$: $\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \end{cases}$; $\begin{cases} p^* \in [0, 1-\mu] \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \end{cases}$

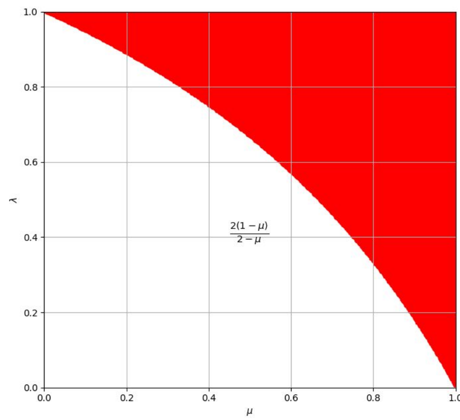
6.1) Получаем множества оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = (\{0\} \times \{\frac{2\mu}{1+\mu}\})$ тогда

$$\overline{G}(0, \frac{2\mu}{1+\mu}, \mu) = \frac{1}{1+\mu}$$

6.2) Получаем множество оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = ([1-\mu, 1] \times \{\frac{\mu}{2-\mu}\})$ тогда

$$\overline{G}(p, \frac{\mu}{2-\mu}, \mu) = p\frac{1}{2-\mu} + (1-p)\frac{1}{2(2-\mu)} = \frac{1+p}{2(2-\mu)} \geqslant \frac{2-\mu}{2(2-\mu)} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{G}(p, \frac{\mu}{2-\mu}, \mu) \leqslant \frac{1}{2-\mu} \Rightarrow \overline{G}(p, \frac{\mu}{2-\mu}, \mu) = [0.5, \frac{1}{2-\mu}]$$

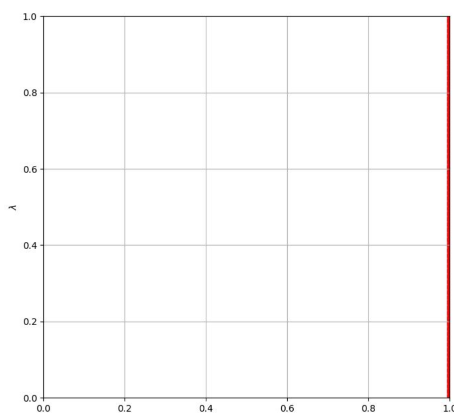


ntheorem

7) $\mu \in (0,1), \lambda \in (2\dfrac{1-\mu}{2-\mu}, 1]$: $\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \end{cases}$

Получаем множества оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = (\{0\} \times \{\dfrac{2\mu}{1+\mu}\})$ тогда

$$\overline{G}(0, \frac{2\mu}{1+\mu}, \mu) = \min\{\frac{1}{\mu}\frac{2\mu}{1+\mu}; \frac{1-\dfrac{2\mu}{1+\mu}}{1-\mu}\} = \frac{1}{1+\mu}$$

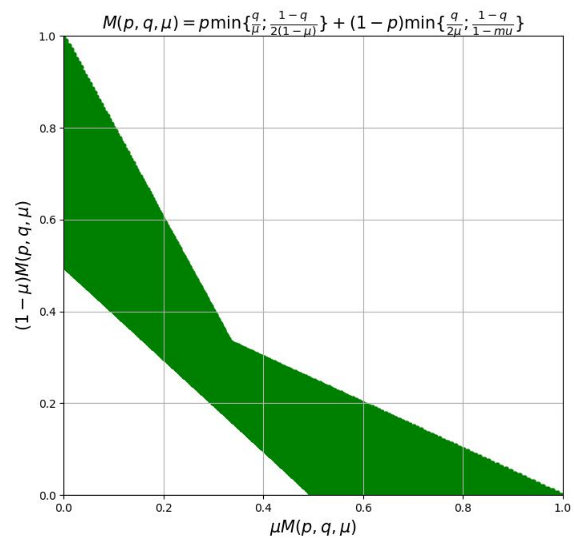


8) $\mu = 1, \lambda \in (0,1]$: $\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} = \{\mu = 1\} = 1 \end{cases}$

Получаем множества оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = (\{0\} \times \{1\})$ тогда

$$\overline{G}(0,1,1) = \frac{1}{2}$$

Теперь на квадрате $(\mu, \lambda) \in [0,1]^2$ мы рассмотрели все точки и для каждой нашли оптимальные пары $p^*(\mu, \lambda)$ и $q^*(\mu, \lambda)$ и соответсвующие значения функции $M(p^*(\mu, \lambda), q^*(\mu, \lambda), \mu)$. Далее на квадрате $[0,1]^2$ изобразим все точки, которые принимает вектор $(\mu M(p^*, q^*, \mu), (1-\mu) M(p^*, q^*, \mu))$ при $(\mu, \lambda) \in [0,1]^2$



Поясним график:

нижняя огибающая в координатах X, Y: $y = \dfrac{1}{2} - x$,

верхняя огибающая в координатах X, Y: $y = \begin{cases} 1 - 2x, & x \in [0, \frac{1}{3}) \\ \dfrac{1-x}{2}, & x \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases}$.

Список литературы

[1] Shapley L.S. Equilibrium points in games with vector payoffs. 1959.

[2] Ю.Б. Гермейер. Введение в теорию исслежования операций.

[3] И.И. Поспелова Н.М. Новикова. Смешанные стратегии в векторной оптимизациий и свёртка Гермейера.

[4] Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. 1964.