



Московский Государственный Университет имени

М.В.Ломоносова

Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

Кафедра Исследования Операций

Выпускная квалификационная работа

**Исследование модельной игры преподавателя и студента
с применением свёртки Гермейера у студента**

Автор:

группа 411

Кононов Сергей Владиславович

Научный руководитель:

д-р физ.-мат. наук

Новикова Наталья Михайловна

Москва, 2019

Аннотация

Исследование модельной игры преподавателя и студента
с применением свёртки Гермейера у студента

Кононов Сергей Владиславович

В данной работе проводится исследование в области применения разных сверток в игре с векторным выигрышем. Анализируются и сопоставляются решения игры при различной дискретизации непрерывной игры.

Содержание

1	Введение	3
2	Постановка задачи	11
3	Постановка задачи при параметре дискретизации $T=1$	14
4	Решения игры при параметре дискретизации $T=1$	16
5	Постановка задачи при параметре дискретизации $T=2$	19
6	Решение игры при параметре $T=2$	20
6.1	Рассмотрим игру за преподавателя	20
6.2	Рассмотрим игру за студента	23
7	Графическое изображение матожидания критерия	40
8	Выигрыш игрока Студент	43
	Список литературы	45

1 Введение

Теорией игр называется математическая теория принятия решений в конфликтных ситуациях. В простейших моделях рассматривается *лицо принимающее решение* (ЛПР), которое выбирает своё действие из некоторого множества стратегий. Считается, что задана целевая функция, которая отражает интересы ЛПР и зависит от выбранных им стратегий. Задача принятия решений состоит в том, чтобы найти стратегию, доставляющую максимум целевой функции. Отличие конфликтной ситуации заключается в том, что решения принимаются не одним лицом, а всеми участниками конфликтной ситуации и функция выигрыша ка-

дого индивида зависит не только от его решения, но и от решения остальных участников. Модель такого вида называется - игрой, а учаастики конфликта - игроками. В рамках данной работы будет рассмотрена задача из теории *некооперативных игр* - игр, в которых игроки действуют самостоятельно, независимо друг от друга. Определим формально модель игры с несколькими участниками в общем виде.

Есть конечное *множество игроков* A , которые перенумерованы $1, 2, \dots, m$. Каждый игрок $a \in A$ имеет *множество чистых стратегий* $S_a = \{1, 2, \dots, n_a\}$, при этом *игровой ситуацией* или просто *ситуацией* называется m -мерный вектор:

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_m) \in \bigotimes_{a \in A} S_a \quad (1)$$

Функция выигрыша обозначает выигрыша игрока при конкретной ситуации в игре. Она определена для каждого игрока из A и имеет вид:

$$F : S_1 \times S_2 \times \dots \times S_m \rightarrow \mathbb{R} \quad (2)$$

Определение 1 *Игрой в нормальной форме называется совокупность:*

$$G = \langle A, S, F \rangle \quad (3)$$

где:

$A = \{1, 2, \dots, m\}$ - *множество игроков*,

$S = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ - *множество наборов чистых стратегий игроков*,

$F = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ - *множество функций выигрыша игроков*.

Теперь введём фундаментальное понятие в теории игр - *равновесие по Нэшу*:

Определение 2 *Ситуация $\mathbf{s} = (s_1^0, s_2^0, \dots, s_m^0)$ называется равновесием по Нэшу игры $G = \langle A, S, F \rangle$, если:*

$$\max_{s_a \in S_a} F_a(s_1^0, \dots, s_{a-1}^0, s_a, s_{a+1}^0, \dots, s_m^0) = F_a(s_1^0, \dots, s_{a-1}^0, s_a^0, s_{a+1}^0, \dots, s_m^0), \quad a \in A \quad (4)$$

Смысл этого определения заключается в том, что при ситуации в игре, которая является равновесием по Нэшу, одному игроку индивидуально не выгодно отклоняться от своей стратегии.

До этого мы рассматривали функции выигрыша игроков, которые имели вид: (2), т.е. каждому игроку соответствовало одно значение, зависящее от ситуации в игре. Однако не всегда интересы могут быть выражены одним критерием. Часто возникают разные оценки качества принимаемого решения, причем они могут быть противоречивыми и их нельзя свести друг у другу. Например характеристиками решения могут быть значения (*время, деньги*) или (*математическое ожидание, дисперсия*). Следуя этим рассуждениям рассмотрим обобщение игры (3) такое, что функция выигрыша игроков имеет вид:

$$F : S_1 \times S_2 \times \dots \times S_m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad m \in \mathbb{N} \quad (5)$$

Такое обобщение ближе к реальным ситуациям в которых рассматриваются несколько значимых параметров. Для примера такой игры можно привести задачу выбора машины: допустим покупателю важно чтобы машина имела большую мощность, достаточный уровень безопасности и мало стоила, продавцу же важно, чтобы она стоила как можно дороже и кроме того следует продавать машины из которых плохо покупают. Таким образом мы получили игру, в которой игроки имеют два и три критерия соответственно, которые важны для них при выборе стратегии. Пока что мы допустили существование игры с такой функцией выигрыша, формализацию и подробное описание будет позже.

Приведённые выше обобщения приводят нас к другому разделу математики, а именно – *многокритериальной оптимизации*. Рассмотрим следующую задачу которая относится к этой области.

$$\max_{x \in X} F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)), \quad X \subseteq \mathbb{R}^n \quad (6)$$

Это задача заключается в том, что у нас есть n -мерная функция, которая

представляет собой множество значений критериев, зависящая от параметров, которые принадлежат некоторому множеству. Особенность заключается в том, что правило сравнения двух векторов не определено однозначно, т.е. в общей задаче не всегда можно точно сказать, какой из двух векторов значений функции предпочтительнее. Для внесения определённости в задачу, введём понятие *оптимальных по Парето* и *оптимальных по Слейтеру* векторов в задаче (6).

Определение 3 Допустимое решение $\hat{x} \in X$ называется *эффективным по Слейтеру* (эффективным по Парето) для задачи

$$\max_{x \in X} F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)), \quad X \subseteq \mathbb{R}^n$$

если **не** существует $x \in X$ такого, что $f_k(x) > f_k(\hat{x})$ ($f_k(x) \geq f_k(\hat{x})$) для всех $k = \{1, \dots, n\}$. Множество всех эффективных по Слейтеру (эффективных по Парето) решений задачи (6) называется *множеством Слейтера* (множеством Парето) задачи (6).

Другими словами это такое множество значений, при котором значение каждого частного показателя, характеризующего систему, не может быть улучшено без ухудшения других.

Обычно в задача многокритериальной оптимизации требуется (???) найти множество Слейтера. Для этих целей существуют разные методы, в работе далее исследуется *метод свёрток*, изначально предложенный Л.С. Шепли [1]. Он заключается в том, что задача (6) заменяется параметрическим семейством скалярных задач

$$\max_{x \in X} C(\{f_i\}_{i=1}^n, \lambda, x), \quad \lambda \in \Lambda$$

где:

C – функция свертки частных критериев $\{f_i\}_{i=1}^n$ задачи (6) в единый скалярный критерий,

λ – параметр свертки заданный на некоторой области определения Λ .

В текущей работе рассмотрены две различные свёртки – *линейная свёртка* и *обратная логическая свёртка*:

Определение 4 *Линейной свёрткой с параметром λ для функции критериев задачи (6) называется функция:*

$$L(\{f_i\}_{i=1}^n, \lambda, x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i, \quad (7)$$

где

$$\lambda \in \Lambda = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \ i = 1, \dots, n\}. \quad (8)$$

Определение 5 *свёрткой Гермейера с параметром μ для функции критериев задачи (6) называется функция:*

$$G(\{f_i\}, \mu, x) = \min_{i: \mu_i > 0} \mu_i f_i, \quad (9)$$

где

$$\mu \in M = \{(\mu_1, \dots, \mu_n) \mid \sum_{i=1}^n \mu_i = 1, \mu_i \geq 0 \ i = 1, \dots, n\}. \quad (10)$$

Применение линейной свертки в задачах вида (6) обосновывается теоремой Карлина:

Теорема 1 (Карлин [2]) *Рассмотрим задачу (6). Пусть множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ выпукло, а функции f_1, \dots, f_n - вогнуты на нём. Если x^* – эффективная по Парето точка, тогда существует вектор $\lambda \in \Lambda$ из (8) такой, что x^* является точкой максимума функции (7) по переменной x .*

Гермейером была предложена свертка, которая также аппроксимирует множество Слейтера. Её применение в многокритериальных задачах обосновывается следующей теоремой:

Теорема 2 (Гермейер [3]) Рассмотрим задачу (6). Пусть x^* - эффективная по Слейтеру точка, причем $f_i(x^*) > 0, \dots, f_n(x^*) > 0$. Тогда существует вектор $\mu \in M$ из (12) и x^* является точкой максимума функции (11) по переменной x .

В работе будет использоваться модификация свёртки Гермейера - *обратная логическая свертка*. Она отличается только тем, что веса стоят в знаменателе, а не в числителе.

Определение 6 Обратной логической свёрткой с параметром μ для функции критериев задачи (6) называется функция:

$$G(\{f_i\}, \mu, x) = \min_{i: \mu_i > 0} \frac{f_i}{\mu_i}, \quad (11)$$

где

$$\mu \in M = \{(\mu_1, \dots, \mu_n) \mid \sum_{i=1}^n \mu_i = 1, \mu_i \geq 0 \ i = 1, \dots, n\}. \quad (12)$$

Теперь вернёмся к рассмотрению некооперативных игр. Если множество чистых стратегий у игроков конечно, то игра называется *конечная*. Для конечной игры можно определить обобщение модели, а именно - *смешанное расширение игры*. Смысл смешанного расширения игры заключается в том все игроки выбирают каждую из своих чистых стратегий с некоторой фиксированной то вероятностью, и его стратегией является не одна чистая стратегия, а вероятностное распределение над множеством его чистых стратегий. Выигрышем игрока в таком случае считаем взвешенный выигрыш по всем ситуациям с весами соответствующими вероятностям данной ситуации. Определим эти понятия формально.

Пусть в игре $G = \langle A, S, F \rangle$. A – конечное множество игроков, которые перенумерованы $1, 2, \dots, t$, причём множества стратегии $S_a = \{1, 2, \dots, n_a\}$ $a \in A$ конечны. *Смешанной стратегией* игрока $a \in P$ называется вероятностное распределение над множеством чистых стратегий S_a игрока $a \in A$:

$$\pi^a = (\pi_1^a, \pi_2^a, \dots, \pi_{n_a}^a),$$

где π_i^a - это вероятность выбора игроком $a \in A$ чистой стратегии s_i^a в качестве реальной стратегии игрока. Распределение является элементом симплекса:

$$P^a = \{\pi^a = (\pi_1^a, \pi_2^a, \dots, \pi_{n_a}^a) \mid \sum_{i=1}^{n_a} \pi_i^a = 1, \pi_i^a \in [0, 1] \ i = 1, 2, \dots, n_a\}$$

которое называется *множество смешанных стратегий игрока*. Введём обозначение для заданного набора стратегий:

$$\pi = (\pi^1, \dots, \pi^m) \in P = \bigotimes_{a \in A} P^a,$$

и вероятности реализации ситуации \mathbf{s} из (1):

$$p(s|\pi) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{a \in A} \pi_{s_a}^a$$

Тогда математическое ожидание выигрыша игрока $a \in A$ задаётся функцией:

$$\bar{F}_a(\pi) = \sum_{s \in S} p(s|\pi) F_a(s),$$

где функция F_a - определена в (3). Таким образом смешанное расширение игры в нормальной форме определяется следующим образом.

Определение 7 *Смешанным расширением игры в нормальной форме называется совокупность:*

$$\bar{G} = \{A, S, \bar{F}\} \tag{13}$$

где:

$A = \{1, 2, \dots, m\}$ - множество игроков,

$P = \bigotimes_{a \in A} P^a$ - множество наборов смешанных стратегий игроков,

$\bar{F} = \{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_m\}$ - множество функций выигрыша игроков.

Ситуации равновесия (4) игры \bar{G} будем называть ситуациями равновесия в смешанных стратегиях игры G или смешанными равновесиями по Нэшу.

Теперь в игре (13) будем считать, что функция выигрыша имеет вид (5). Обозначим через $S_a(\pi \setminus \pi^a)$, где $a \in A$ множество Слейтера задачи $\max_{\pi \in P : \pi^a \in P^a} \bar{F}_a(\pi)$ где F_a имеет вид (5).

Определение 8 *Решением игры (13) согласно [4] является множество ситуаций*

$$P^* = \{\pi = (\pi^1, \dots, \pi^m) \in P = \bigotimes_{a \in A} P^a \mid \pi^a \in S_a(\pi \setminus \pi^a), a \in A\} \quad (14)$$

В случае конечных многокритериальных игр Шепли свел [1] описание данного множества к семейству задач поиска значений скалярных игр с функциями выигрышей – ЛС частных критериев при произвольном наборе весовых коэффициентов, своих у каждого игрока. В случае скалярной игры осреднение однозначно, а для скаляризованной вектор-функции могут быть разные варианты.

Целью данной выпускной квалификационной работы является исследование применения разных сверток в игре с векторным выигрышем.

2 Постановка задачи

Рассматриваются два игрока - Студент, далее обозначается **С**, и Преподаватель, далее обозначается **П**, которые имеют противоположные интересы. Критерий интересов составляют две величины, первая из которых является эффективностью работы **С** в научной сфере, а второй его эффективностью на подработке.

С выбирает долю x рабочего времени, которую он тратит на подготовку диплома, оставшееся рабочее время $1 - x$ он тратит на подработку. Считается, что производительность **С** при любых занятиях падает с увеличением отводимого на них времени, эффективность труда **С** зададим функцией \sqrt{x} и $\sqrt{1 - x}$ соответственно. **С** может распределять свое время между двумя видами деятельности, т.е. имеет множество стратегий $x \in X = \{0, 1\}$, причём он может использовать смешанные стратегии.

П выбирает - отнестись к **С** требовательно, способствуя написанию диплома и мешая подработке или же не обращать на него внимания не мешая подработке и не помогая с дипломом. **П** имеет множество стратегий $y \in Y = \{1, 2\}$, причём тоже может использовать смешанные стратегии.

Получаем следующую вектор-функцию выигрыша:

$$F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = \left(\frac{y\sqrt{x}}{2}, \frac{\sqrt{1-x}}{y} \right) \quad (15)$$

П стремится минимизировать (выбирая $y \in Y = \{1, 2\}$) вектор-функцию выигрыша $F(x, y)$, а игрок **С** - максимизировать (выбирая $x \in X = [0, 1]$).

Мы будем рассматривать конечную игру **С** — **П**, полученную из исходной дисеретизацией множества X конечным множеством точек:

$$X^T = \{0, \frac{1}{T}, \frac{2}{T}, \dots, \frac{T-1}{T}, 1\}, \quad T \in \mathbb{N}$$

Теперь задачу можно представить в виде многокритериальной игры двух лиц с противоположными интересами:

$$G = \langle A, P, \mathbf{F} \rangle \quad (16)$$

где:

$A = \{\mathbf{C}, \mathbf{П}\}$ - множество игроков,

$P = \{X^T, Y\}$ - множество наборов чистых стратегий игроков,

$\mathbf{F} = \{F, -F\}$ - множество вектор-функций выигрыша игроков.

Игра записана в чистых старатегиях. Мы же допустим, что игроки будут использовать смешанные стратегии. В работе исследуются случаи дискретизации, когда $T = 1$ и в этом случае множество $X^1 = \{0, 1\}$, и когда $T = 2$, тогда множество чистых стратегий \mathbf{C} примнмет вид $X^2 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. В каждом случае необходимо решить игру. Составим план, по которому будет проходить поиск решений (1).

(1) Игроки используют смешанные стратегии, поэтому стратегий \mathbf{C} и $\mathbf{П}$ будет распределение вероятностей $p \in P$ и $q \in Q$ над множествами X^T и Y соответственно. Где P и Q – все допустимые распределения над этими множествами. Следовательно заменим вектор-функцию выигрыша каждого игрока на матожидание этой функции по распределению вероятностей его стартегии. Для \mathbf{C} и $\mathbf{П}$ функции принимают вид $\mathbb{E}_x[F(x, y)]$ и $\mathbb{E}_y[-F(x, y)]$.

(2) Каждый игрок выбирает функцию свёртки, которая будет аппроксимировать его множество слейтера S_a . В данной работе исследуется случай, когда игрок \mathbf{C} выберет *обратную логическую свёртку*, а игрок $\mathbf{П}$ *линейную свёртку*. После чего игроки применяют свёртку к осреднённой вектор-функции выигрыша. Для \mathbf{C} и $\mathbf{П}$ функции принимают вид $G(\mathbb{E}_x[F(x, y)], p, y)$ и $L(\mathbb{E}_y[-F(x, y)], x, q)$.

(3) Далее игроки получают скалярный критерий, который зависит от чистых стратегий противника. Поскольку игроки используют смешанные стратегии, то

на 3 – ем этапе игроки осредняют скаляризованные критерии по стратегиям противника. Мы получили функции выигрыша игроков, которые зависят от их смешанных стратегий. Для **C** и **П** функции принимают вид

$$\overline{G}(p, q, \mu) = \mathbb{E}_y[G(\mathbb{E}_x[F(x, y)], p, y, \mu)]$$

и

$$\overline{L}(p, q, \lambda) = \mathbb{E}_x[L(\mathbb{E}_y[-F(x, y)], x, q, \lambda)]$$

.

(4) Теперь мы получили игру в смешанных стратегиях и нам необходимо решить игру т.е. найти все возможные равновесия Нэша (4) при фиксированных параметрах свёртки. Стратегии, которые являются решениями будем называть *оптимальными стратегиями*. В конкретном случае они имеют вид:

Определение 9 Пара стратегий $(p^0, q^0) \in P \times Q$ называется *оптимальными*, если для некоторых λ, μ верно:

$$\begin{cases} p^0(q^0, \lambda) = \arg \min_{p \in P} \overline{L}(p, q^0, \lambda) \\ q^0(p^0, \mu) = \arg \min_{q \in Q} \overline{G}(p^0, q, \mu) \end{cases} \quad (17)$$

Введены следующие обозначения:

$$\arg \max_{x \in X} f(x) = \{x^* \in X \mid f(x^*) = \max_{x \in X} f(x)\}$$

$$\arg \min_{x \in X} f(x) = \{x^* \in X \mid f(x^*) = \min_{x \in X} f(x)\}$$

3 Постановка задачи при параметре дискретизации $T=1$

Сначала рассмотрим случай с параметром $T = 1$. Тогда множество $X^1 = \{0, 1\}$. Игроки используют смешанные стратегии т.е. распределение над своими чистыми стратегиями. Чистыми стратегиями игроков **С** и **П** являются $X^1 = \{0, 1\}$ и $Y = \{1, 2\}$ соответственно. Эти множества дискретны и равномощны, поэтому распределения задаются в виде векторов:

$$(p_1, p_2) \in P_2 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid p_1 + p_2 = 1\},$$

где $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \ i = 1, \dots, n\}$. Множество $Q_2 = P_2$, введено для наглядности. Смешанные стратегии игроков **С** и **П** будем обозначать $q = (q_0, q_1) \in Q_2$ и $p = (p_0, p_1) \in P_2$ соответственно, причём:

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= q_0 & P(Y = 1) &= p_0 \\ P(X = 1) &= q_1 & P(Y = 2) &= p_1 \end{aligned} \tag{18}$$

Введём обозначения $q := q_1$ и $p := p_1$, тогда $q_0 = 1 - q$ и $p_0 = 1 - p$. Игрок **С** использует смешанную стратегию (q_0, q_1) , тогда его векторный критерий (15) приобретает вид:

$$F_C(q, y) = \left\langle q_0 \frac{y\sqrt{0}}{2} + q_1 \frac{y\sqrt{1}}{2}; q_0 \frac{\sqrt{1}}{y} + q_1 \frac{\sqrt{0}}{y} \right\rangle = \left\langle \frac{q_1 y}{2}; \frac{q_0}{y} \right\rangle$$

Игрок **П** использует смешанную стратегию (p_0, p_1) , тогда его векторный критерий (15) приобретает вид:

$$\begin{aligned} F_\Pi(x, p) &= \left\langle (1-p) \frac{1 \cdot \sqrt{x}}{2} + p \frac{2 \cdot \sqrt{x}}{2}; (1-p) \frac{\sqrt{1-x}}{1} + p \frac{\sqrt{1-x}}{2} \right\rangle = \\ &= \frac{1}{2} \left\langle (p+1)\sqrt{x}; (2-p)\sqrt{1-x} \right\rangle \end{aligned}$$

Далее игрок **С** использует *обратную логическую свёртку* (11):

$$G(y, q, \mu) = \min_{i: \mu_i > 0} \left\{ \frac{q_1 y}{2\mu_0}; \frac{q_0}{y\mu_1} \right\},$$

а игрок **П** использует *линейную свёртку* (7):

$$L(p, x, \lambda) = \lambda_0(p+1)\sqrt{x} + \lambda_1(2-p)\sqrt{1-x}$$

После чего игрок **С** осредняет свёртку критерия по стратегиям игрока **П**, т.е. по переменной y :

$$\bar{G}(p, q, \mu) = p \min \left\{ \frac{q}{\mu}; \frac{1-q}{2(1-\mu)} \right\} + (1-p) \min \left\{ \frac{q}{2\mu}; \frac{1-q}{1-\mu} \right\},$$

а игрок **П** осредняет свёртку критерия по стратегиям игрока **С**, т.е. по переменной x :

$$\bar{L}(p, q, \lambda) = \frac{1}{2} \left\{ q(3\lambda + p - 2) + (2-p)(1-\lambda) \right\}.$$

Мы установили функции выигрыша игроков. Теперь задачу можно формализовать и представить как семейство игр двух игроков в нормальный форме:

$$\left\langle \{ \mathbf{C}, \mathbf{П} \}, \{ Q, P \}, \{ \bar{G}(p, q, \mu), -\bar{L}(p, q, \lambda) \} \right\rangle, (\lambda, \mu) \in \Lambda \times M$$

Для нас представляет интерес множество оптимальных точек (17).

4 Решения игры при параметре дискретизации $T=1$

Для поиска оптимальных стратегий сначала необходимо найти точки максимума и минимума функций выигрыша \mathbf{C} и $\mathbf{\Pi}$ соответственно:

$$q^*(p, \mu) = \arg \max_{q \in Q} \bar{G}(p, q, \mu) \text{ и } p^*(q, \lambda) = \arg \min_{p \in P} \bar{L}(p, q, \lambda).$$

Из статьи [5] следует, что:

$$p^*(q, \lambda) = \arg \min_{p \in P} \bar{L}(p, q, \lambda) = \begin{cases} 0, & q > 1 - \lambda \\ 1, & q < 1 - \lambda \\ [0, 1], & q = 1 - \lambda \end{cases} \quad (19)$$

Из пункта [ещё не написано] следует, что

$$q^*(p, \mu) = \arg \max_{q \in Q} \bar{G}(p, q, \mu) = \begin{cases} \frac{\mu}{2 - \mu}, & p \geq 1 - \mu \\ \frac{2\mu}{1 + \mu}, & p \leq 1 - \mu \end{cases} \quad (20)$$

Докажем утверждение характеризующее множество оптимальных пар данной игры.

Утверждение 1 Любая пара $(p^*, q^*) \in [0, 1]^2$ является оптимальной, т.е. $\forall (p^*, q^*) \in [0, 1]^2 \exists (\mu, \lambda) \in M \times \Lambda$ такие, что верно (17).

Доказательство

Зафиксируем некоторую пару $(p^*, q^*) \in [0, 1]^2$ и найдём такие $\hat{\mu}(p^*, q^*) \in M$ и $\hat{\lambda}(p^*, q^*) \in \Lambda$ что верно (17) т.е. что пара стратегий является оптимальной.

(1) Определим $\hat{\lambda}(p^*, q^*)$ и покажем что $p^* \in \arg \min_{p \in P} \bar{L}(p, q^*, \hat{\lambda})$. Возьмём $\hat{\lambda} := 1 - q^*$ тогда поскольку $\arg \min_{p \in P} \bar{L}(p, q^*, \hat{\lambda}) = [0, 1]$ при $q^* = 1 - \hat{\lambda}$, то $p^* \in \arg \min_{p \in P} \bar{L}(p, q^*, \hat{\lambda})$.

(2) Определим $\hat{\mu}(p^*, q^*)$ и покажем что $q^* \in \arg \max_{q \in Q} \bar{G}(p^*, q, \hat{\mu})$. По имеющемуся q^* решим уравнения $\frac{\mu}{2 - \mu} = q^*$ и $\frac{2\mu}{1 + \mu} = q^*$, относительно переменной μ :

$$q^* = \frac{2\mu}{1 + \mu} \Rightarrow \mu = \frac{q^*}{2 - q^*} \quad q^* = \frac{\mu}{2 - \mu} \Rightarrow \mu = \frac{2q^*}{1 + q^*}$$

Введём обозначения $\mu_1(q) = \frac{q}{2 - q}$ и $\mu_2(q) = \frac{2q}{1 + q}$. Заметим, что при $q^* \in [0, 1]$ верно $0 \leq \mu_2(q^*) \leq \mu_1(q^*) \leq 1$. В таком случае поскольку $1 - p^* \in [0, 1]$, то при фиксированных переменных (p^*, q^*) будет реализован один и только один из 3-х вариантов:

(a) $1 - p^* \leq \mu_2(q^*)$, т.е. $1 - p^* \leq \frac{q^*}{2 - q^*}$. Возьмём $\hat{\mu} := \mu_1 = \frac{2q^*}{1 + q^*}$.

Действительно, при таком выборе $\hat{\mu}$ имеем:

$$1 - p^* \leq \mu_2 \leq \mu_1 = \hat{\mu} \Rightarrow p^* \geq 1 - \hat{\mu} \Rightarrow \\ \Rightarrow \arg \max_{q \in Q} \bar{G}(p^*, q, \hat{\mu}) = \frac{\hat{\mu}}{2 - \hat{\mu}} = \frac{\frac{2q^*}{1 + q^*}}{2 - \frac{2q^*}{1 + q^*}} = q^*$$

(b) $\mu_2(q^*) < 1 - p^* \leq \mu_1(q^*)$, т.е. $\frac{q^*}{2 - q^*} < 1 - p^* \leq \frac{2q^*}{1 + q^*}$. Возьмём $\hat{\mu} := \mu_1 = \frac{2q^*}{1 + q^*}$. Действительно, при таком выборе $\hat{\mu}$ имеем:

$$1 - p^* \leq \mu_1 = \hat{\mu} \Rightarrow p^* \geq 1 - \hat{\mu} \Rightarrow \\ \Rightarrow \arg \max_{q \in Q} \bar{G}(p^*, q, \hat{\mu}) = \frac{\hat{\mu}}{2 - \hat{\mu}} = \frac{\frac{2q^*}{1 + q^*}}{2 - \frac{2q^*}{1 + q^*}} = q^* \Rightarrow$$

(c) $\mu_1(q^*) < 1 - p^*$ т.е. $\frac{2q^*}{1 + q^*} < 1 - p^*$. Возьмём $\hat{\mu} := \mu_2 = \frac{q^*}{2 - q^*}$. Действительно, при таком выборе $\hat{\mu}$ имеем:

$$\begin{aligned}
1 - p^* > \mu_1 \geq \mu_2 = \hat{\mu} &\Rightarrow p^* \leq 1 - \hat{\mu} \Rightarrow \\
\Rightarrow \arg \max_{q \in Q} \overline{G}(p^*, q, \hat{\mu}) &= \frac{2\hat{\mu}}{1 + \hat{\mu}} = \frac{2\frac{q^*}{2 - q^*}}{1 + \frac{q^*}{2 - q^*}} = q^*.
\end{aligned}$$

Теперь для любой точки $(p^*, q^*) \in [0, 1]^2$ можем указать $(\hat{\mu}(p^*, q^*), \hat{\lambda}(p^*, q^*))$ такие, что верно (17), а именно:

$$(\hat{\mu}(p^*, q^*), \hat{\lambda}(p^*, q^*)) = \begin{cases} \left(\frac{q^*}{2 - q^*}, 1 - q^* \right), & \frac{2q^*}{1 + q^*} < 1 - p^* \\ \left(\frac{2q^*}{1 + q^*}, 1 - q^* \right), & 1 - p^* \leq \frac{q^*}{2 - q^*} \\ \left(\frac{2q^*}{1 + q^*}, 1 - q^* \right), & \frac{q^*}{2 - q^*} < 1 - p^* \leq \frac{2q^*}{1 + q^*} \end{cases}$$

Утверждение доказано.

5 Постановка задачи при параметре дискретизации $T=2$

Теперь рассмотрим случай с параметром дискретизации $T = 2$. Тогда множество $X^2 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Игроки используют смешанные стратегии т.е. распределение над своими чистыми стратегиями. Чистыми стратегиями игроков **С** и **П** являются $X^2 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ и $Y = \{1, 2\}$ соответственно. Эти множества дискретны, поэтому вероятностные распределения над ними задаются в виде векторов:

$$(p_1, p_2, p_3) \in P_3 = \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}_+^3 \mid p_1 + p_2 + p_3 = 1\},$$

$$(q_1, q_2) \in Q_2 = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid q_1 + q_2 = 1\}$$

Смешанные стратегии игроков **С** и **П** будем обозначать $q = (q_0, q_1) \in Q_2$ и $p = (p_0, p_1, p_2) \in P_3$ соответственно, причём:

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= q_0 & P(Y = 1) &= p_0 \\ P(X = \frac{1}{2}) &= q_1 & P(Y = 2) &= p_1 \\ P(X = 1) &= q_2 \end{aligned} \tag{21}$$

Введём обозначения $p := p_1$, тогда $q_1 = 1 - q_0 - q_2$ и $p_0 = 1 - p$.

Сначала определим функции выигрыша $\bar{G}(p, q, \mu)$ и $\bar{L}(p, q, \lambda)$, а затем найдём их найти точки максимума и минимума при фиксированных параметрах свёрток:

$$q^*(p, \mu) = \arg \max_{q \in Q} \bar{G}(p, q, \mu)$$

$$p^*(q, \lambda) = \arg \min_{p \in P} \bar{L}(p, q, \lambda).$$

6 Решение игры при параметре $\Gamma=2$

6.1 Рассмотрим игру за преподавателя

Игрок **П** стремится минимизировать функциональный критерий:

$$F(x, y) = \left(\frac{y\sqrt{x}}{2}, \frac{\sqrt{1-x}}{y} \right)$$

Игрок **П** использует смешанную стратегию, т.е. его стратегией является распределение $p = (p_0, p_1)$ над множеством чистых стратегий $Y = \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned} F_{\Pi}(p, x) &= \left\langle (1-p)\frac{1 \cdot \sqrt{x}}{2} + p\frac{2 \cdot \sqrt{x}}{2}; (1-p)\frac{\sqrt{1-x}}{1} + p\frac{\sqrt{1-x}}{2} \right\rangle = \\ &= \frac{1}{2} \left\langle (p+1)\sqrt{x}; (2-p)\sqrt{1-x} \right\rangle \end{aligned}$$

Затем использует **ЛС** (1):

$$L(p, x, \lambda) = \frac{1}{2} (\lambda(p+1)\sqrt{x} + (1-\lambda)(2-p)\sqrt{1-x})$$

Введём обозначение $q = (q_0, q_1, q_2)$. Далее осредняем функцию $L(p, x, \lambda)$ по стратегиям противника $x \in X = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ с вероятностями $q = (q_0, q_1, q_2)$:

$$\begin{aligned} \bar{L}(p, q, \lambda) &= \frac{1}{2} \left(q_0(1-\lambda)(2-p)\sqrt{1} + q_1(\lambda(p+1)\frac{1}{\sqrt{2}} + \right. \\ &\quad \left. + (1-\lambda)(2-p)\frac{1}{\sqrt{2}}) + q_2\lambda(p+1)\sqrt{1} \right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((\lambda(q_1 + \sqrt{2}q_2) - (1-\lambda)(q_1 + \sqrt{2}q_0))p + (\lambda(q_1 + \sqrt{2}q_2) + 2(1-\lambda)(q_1 + \sqrt{2}q_0)) \right) \end{aligned}$$

Функция является линейной по переменной p :

$$\bar{L}(p, q, \lambda) = k(\lambda, q)p + b(\lambda, q),$$

где

$$k(q, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2}} (\lambda(q_1 + \sqrt{2}q_2) - (1-\lambda)(q_1 + \sqrt{2}q_0))$$

$$b(q, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\lambda(q_1 + \sqrt{2}q_2) + 2(1 - \lambda)(q_1 + \sqrt{2}q_0))$$

Наша задача найти $p^*(q, \lambda) = \arg \min_{p \in [0,1]} \bar{L}(p, q, \lambda)$. Поскольку функция $\bar{L}(p, q, \lambda)$ линейна по переменной p , следовательно:

$$p^*(q, \lambda) = \arg \min_{p \in [0,1]} \bar{L}(p, q, \lambda) = \begin{cases} 0, & k(\lambda, q) > 0 \\ 1, & k(\lambda, q) < 0 \\ [0, 1], & k(\lambda, q) = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$k(q, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\lambda(2 + (\sqrt{2} - 2)(q_0 - q_2)) - (1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0) \right)$$

Нас интересует знак этой функции при различных значениях аргументов.

Введём обозначения:

$$\ell(q) = \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0}{2 + (\sqrt{2} - 2)(q_0 - q_2)}$$

Напомним, что множество Q имеет следующий вид:

$$Q = \{(q_0, q_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq q_i \leq 1 \ i \in \{0, 2\}; \ q_0 + q_2 \leq 1\}$$

Поскольку для $q \in Q$ верно:

$$2 + (\sqrt{2} - 2)(q_0 - q_2) > 0$$

$$1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0 \geq 0$$

$$q_0 + (\sqrt{2} - 3)q_2 - 1 \leq 0$$

Следовательно:

$$k(q, \lambda) \vee 0 \Leftrightarrow \lambda \vee \ell(q) \text{ где } \vee \text{ это один из знаков } >, <, = .$$

Более того верно что $\forall q \in Q \ 0 \leq \ell(q) \leq 1$. Проиллюстрируем это на графике. В плоскости $q = (q_0, q_2)$ изображены прямые $\ell_1(q)$ и $\ell_2(q)$ такие, что:

$$\ell_1(q) : \ell(q) = 0$$

$$\ell_2(q) : \ell(q) = 1$$

зелёным цветом изображена область в которой $0 \leq \ell(q) \leq 1$. Видно, что квадрат $q = [0, 1]^2$ а следовательно и множество Q полностью принадлежит этой области.

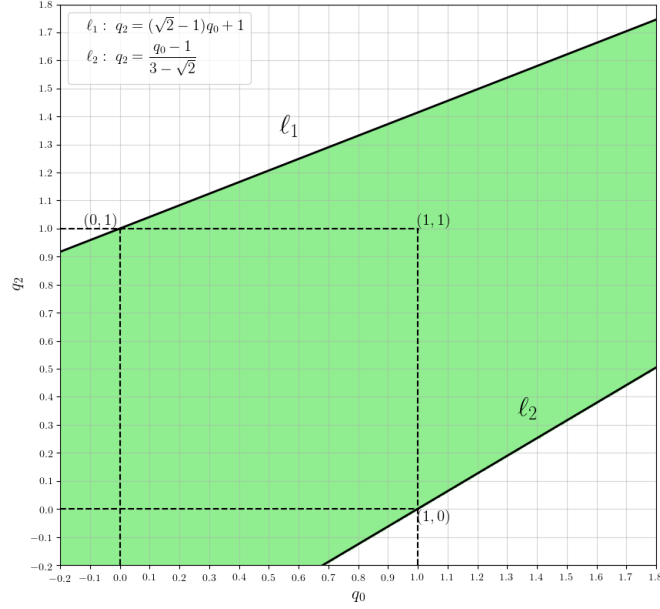


Рис. 1

Следовательно $\forall q = (q_0, q_2) \in Q \exists \lambda \in [0, 1] : k(\lambda, q) = 0$.

$$p^*(\lambda, q) = \arg \min_{p \in [0,1]} \bar{L}(p, q, \lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \in (\ell(q), 1] \\ 1, & \lambda \in [0, \ell(q)) , \\ [0, 1], & \lambda = \ell(q) \end{cases}$$

$$\text{где } \ell(q) = \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0}{2 + (\sqrt{2} - 2)(q_0 - q_2)}$$

6.2 Рассмотрим игру за студента

Игрок С стремится максимизировать функциональный критерий:

$$F(x, y) = \left(\frac{y\sqrt{x}}{2}, \frac{\sqrt{1-x}}{y} \right)$$

Игрок С использует смешанную стратегию, т.е. его стратегией является распределение $q = (q_0, q_1, q_2)$ над множеством чистых стратегий $X = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$:

$$\begin{aligned} F_C &= \left\langle q_0 \frac{y\sqrt{0}}{2} + q_1 \frac{y}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} + q_2 \frac{y\sqrt{1}}{2}; q_0 \frac{\sqrt{1}}{y} + q_1 \frac{1}{y} \sqrt{\frac{1}{2}} + q_2 \frac{\sqrt{0}}{y} \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{y}{2} \cdot \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2} - 1)q_2}{\sqrt{2}}; \frac{1}{y} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0}{\sqrt{2}} \right\rangle \end{aligned}$$

Затем использует **ОЛС** (2). Сначала рассмотрим вырожденные случаи когда $\mu = 0$ и $\mu = 1$.

(1) Если $\mu = 0$:

$$G(y, q, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0}{y}$$

Далее осредняем функцию $G(y, q, \mu)$ по стратегиям противника $y \in Y = \{1, 2\}$ с вероятностями $(1 - p, p)$:

$$\begin{aligned} \bar{G}(p, q, 0) &= \frac{1 - p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0}{1} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0}{2} = \\ &= \frac{(2 - p)(1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0)}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Найдём частные производную по переменным q_0 и q_2 , при этом введём следующие обозначения для сокращения записи:

$$\frac{\partial \bar{G}(p, q, \mu)}{\partial q} = \left\langle \frac{\partial \bar{G}(p, q, \mu)}{\partial q_0}; \frac{\partial \bar{G}(p, q, \mu)}{\partial q_2} \right\rangle = \langle g_1(p, q, \mu), g_2(p, q, \mu) \rangle \quad (22)$$

$$\frac{\partial \bar{G}(p, q, 0)}{\partial q} = \frac{2 - p}{2\sqrt{2}} \langle \sqrt{2} - 1; -1 \rangle$$

Поскольку $p \leq 1$, то $\frac{2-p}{2\sqrt{2}} > 0$. Мы рассматриваем задачу максимизации на множестве (3). Следовательно:

$$q^* = \arg \max_{q \in Q} \bar{G}(p, q, 0) = (1, 0).$$

(2) Если $\mu = 1$:

$$G(y, q, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0}{y}$$

Далее осредняем функцию $G(y, q, \mu)$ по стратегиям противника $y \in Y = \{1, 2\}$ с вероятностями $(1 - p, p)$:

$$\begin{aligned} \bar{G}(p, q, 1) &= \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2} - 1)q_2}{2} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2} - 1)q_2}{1} = \\ &= \frac{(p+1)(1 - q_0 + (\sqrt{2} - 1)q_2)}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Найдём частные производную по переменным q_0 и q_2 :

$$\frac{\partial \bar{G}(p, q, 1)}{\partial q} = \frac{p+1}{2\sqrt{2}} \langle -1; \sqrt{2} - 1 \rangle$$

Поскольку $p \geq 0$, то $\frac{p+1}{2\sqrt{2}} > 0$. Мы рассматриваем задачу максимизации на множестве (3). Следовательно:

$$q^* = \arg \max_{q \in Q} \bar{G}(p, q, 1) = (0, 1).$$

(3) Теперь $\mu \neq 0, 1$:

$$G(y, q, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2}} \min_{0 < \mu < 1} \left\langle \frac{y}{2} \cdot \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2} - 1)q_2}{\mu}; \frac{1}{y} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0}{1 - \mu} \right\rangle$$

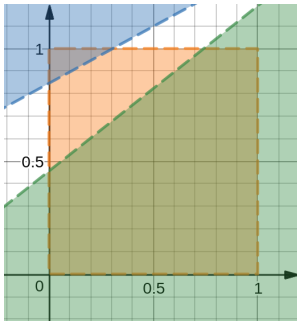
Далее осредняем функцию $G(y, q, \mu)$ по стратегиям противника $y \in Y = \{1, 2\}$ с вероятностями $(1 - p, p)$:

$$\begin{aligned} \bar{G}(p, q, \mu) = & \frac{1-p}{\sqrt{2}} \min_{0 < \mu < 1} \left\langle \frac{1-q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu}; \frac{1-q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu} \right\rangle + \\ & + \frac{p}{\sqrt{2}} \min_{0 < \mu < 1} \left\langle \frac{1-q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}; \frac{1-q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)} \right\rangle \quad (23) \end{aligned}$$

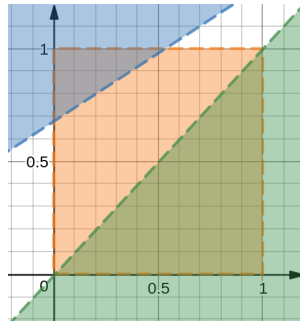
Введём вспомогательные обозначения:

$$\begin{aligned} \ell_1(q, \mu) &= \frac{1-q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu} \\ \ell_2(q, \mu) &= \frac{1-q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu} \\ \ell_3(q, \mu) &= \frac{1-q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{\mu} \\ \ell_4(q, \mu) &= \frac{1-q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)} \end{aligned}$$

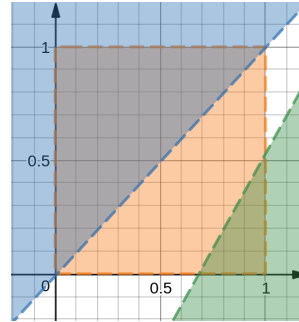
Для различных значений переменной μ рассмотрим взаимные расположения множеств $\ell_1 > \ell_2$ и $\ell_3 > \ell_4$ на плоскости (q_0, q_2) . Другими словами для фиксированного значения $\mu \in [0, 1]$ найдём области плоскости, в которых достигается минимум одного из выражений в (5):



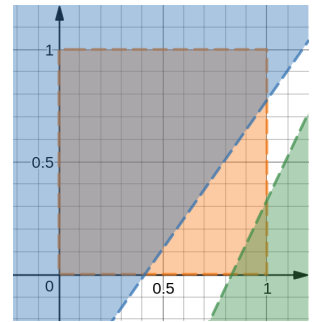
(a) $\mu = 0.8$



(b) $\mu = \frac{2}{3}$



(c) $\mu = \frac{1}{3}$



(d) $\mu = 0.1$

Поясним график. Синяя область - это множество $\ell_1 > \ell_2$.

Зелёная область на графике - это множество $\ell_3 < \ell_4$.

Область между ними - это множество $\{\ell_1 < \ell_2 \cap \ell_3 > \ell_4\}$. Исходя из графиков $\{\ell_1 > \ell_2 \cap \ell_3 < \ell_4\} = \emptyset$ при $(\mu, q) \in (0, 1) \times [0, 1]^2$. Поскольку граничные случаи для параметра μ были рассмотрены в первых двух пунктах, то квадрат $[0, 1]^2$ на плоскости (q_0, q_2) делится на 3 не пересекающихся множества.

Добавить доказательство того, что всего три возможных варианта

(1) Рассмотрим полуплоскость, которая определяется системой

$$\begin{cases} \ell_1 > \ell_2 \\ \ell_3 > \ell_4 \end{cases} \sim l_1 > l_2$$

Выражение (23) на этом множестве принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \overline{G}(p, q, \mu) &= \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)} = \\ &= \frac{2-p}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu} \end{aligned}$$

(2) Рассмотрим полуплоскость, которая определяется системой

$$\begin{cases} \ell_1 < \ell_2 \\ \ell_3 < \ell_4 \end{cases} \sim l_3 < l_4$$

Выражение (23) на этом множестве принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \overline{G}(p, q, \mu) &= \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{\mu} = \\ &= \frac{1+p}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{\mu} \end{aligned}$$

(3) Рассмотрим область, которая определяется системой $\begin{cases} \ell_1 < \ell_2 \\ \ell_3 > \ell_4 \end{cases}$

Выражение (23) на этом множестве принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}\bar{G}(p, q, \mu) &= \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)} = \\ &= \frac{(1-p)(1-\mu)(1-q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2) + p\mu(1-q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0)}{2\sqrt{2}\mu(1-\mu)}\end{aligned}$$

Итого:

$$\bar{G}(p, q, \mu) = \begin{cases} \frac{2-p}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu}, & \ell_1 \geq \ell_2 \\ \frac{1+p}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}, & \ell_3 \leq \ell_4 \\ \frac{(1-p)(1-\mu)(1-q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2) + p\mu(1-q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0)}{2\sqrt{2}\mu(1-\mu)}, & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда производная от функции имеет:

$$\frac{\partial \bar{G}(p, q, \mu)}{\partial q} = \begin{cases} \frac{2-p}{2\sqrt{2}(1-\mu)} \langle \sqrt{2}-1; -1 \rangle, & \ell_1 \geq \ell_2 \\ \frac{1+p}{2\sqrt{2}\mu} \langle -1; \sqrt{2}-1 \rangle, & \ell_3 \leq \ell_4 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}\mu(1-\mu)} \langle (\sqrt{2}-1)p\mu - (1-p)(1-\mu); (\sqrt{2}-1)(1-p)(1-\mu) - p\mu \rangle, & \text{иначе} \end{cases}$$

(1) Рассмотрим $\ell_1 \geq \ell_2$. Производная в области имеет вид:

$$\frac{\partial \bar{G}(p, q, \mu)}{\partial q} = \frac{2-p}{2\sqrt{2}(1-\mu)} \langle \sqrt{2}-1; -1 \rangle$$

Введём вспомогательную функцию $\ell_B(q, \mu) := (\ell_1 - \ell_2) \cdot \mu(1-\mu)$, множество, на котором она принимает неотрицательные значения составляют интересующую нас область. Множитель $\mu(1-\mu)$ является строго положительным на $\mu \in (0, 1)$, поэтому не влияет на знак. Функция является линейной по переменным q_0 и q_2 :

$$\ell_B(q, \mu) = (1 + \mu(2\sqrt{2} - 3))q_0 + (1 - \sqrt{2} + \mu(\sqrt{2} - 3))q_2 + 3\mu - 1$$

Параметр μ изменяется в диапазоне $(0, 1)$, причём

$$\begin{aligned}\ell_B(q, \mu) &\xrightarrow{\mu \rightarrow 1} 1 - q_0 + (\sqrt{2} - 1)q_2 \\ \ell_B(q, \mu) &\xrightarrow{\mu \rightarrow 0} 1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0\end{aligned}$$

Предельные положения $\ell_B(q, \mu) = 0$ изображены на графике (3).

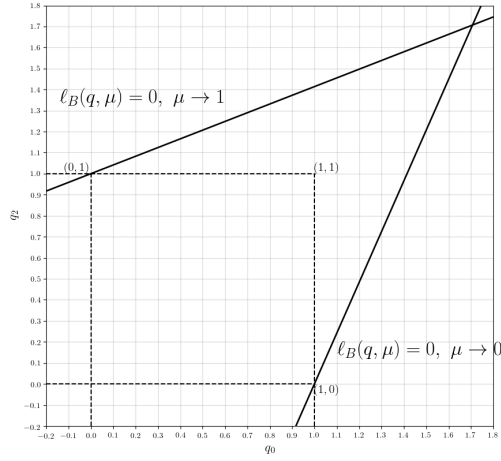


Рис. 3

Найдём значение μ при котором прямая $\ell_B(q, \mu)$ проходит через точку $q = (0, 0)$:

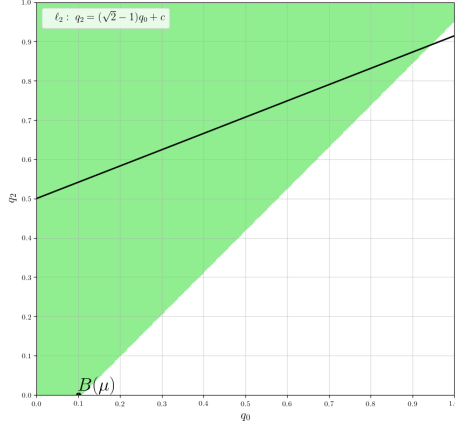
$$\ell_B(0, 0, \hat{\mu}) = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{3}$$

Очевидно, что на полиэдре $P_B(\mu)$:

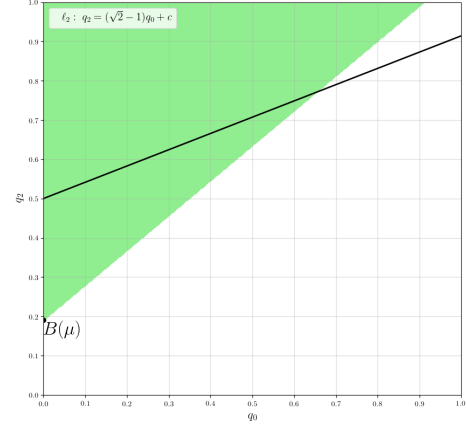
$$P_B(\mu) = \{q \in Q \mid \ell_B(q, \mu) \geq 0\}, \mu \in (0, 1)$$

функция $\overline{G}(p, q, \mu)$ достигает максимума в точке $B(\mu)$:

$$q^* = \arg \max_{q \in P_B(\mu)} \bar{G}(y, q, \mu) = B(\mu) = \begin{cases} (0, q_2) : \ell_B(0, q_2, \mu) = 0, & \frac{1}{3} \leq \mu < 1 \\ (q_0, 0) : \ell_B(q_0, 0, \mu) = 0, & 0 < \mu \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$



(a) $\mu = 0.1 < \frac{1}{3}$



(b) $\mu = 0.4 > \frac{1}{3}$

На графике зелёным цветом изображена область $P_B(\mu)$, чёрным цветом обозначены линии уровня и стрелкой соответственно градиент функции.

Рассмотрим эти два случая и найдём явное выражение для точки $B(\mu)$:

(a) Если $\frac{1}{3} \leq \mu \leq 1$ то координата q_2 точки максимума определяется из условия:

$$\begin{aligned} \ell_B(0, q_2, \mu) &= 0 \\ (1 - \sqrt{2} + \mu(\sqrt{2} - 3))q_2 + 3\mu - 1 &= 0 \Rightarrow q_2 = \frac{3\mu - 1}{\sqrt{2} - 1 + (3 - \sqrt{2})\mu} \\ q^* &= (0; \frac{3\mu - 1}{\sqrt{2} - 1 + (3 - \sqrt{2})\mu}), \quad \frac{1}{3} \leq \mu \leq 1 \end{aligned}$$

(b) Если $0 \leq \mu \leq \frac{1}{3}$ то координата q_0 точки максимума определяется из условия:

$$\begin{aligned}\ell_B(q_0, 0, \mu) &= 0 \\ (1 + \mu(2\sqrt{2} - 3))q_0 + 3\mu - 1 &= 0 \Rightarrow q_0 = \frac{1 - 3\mu}{1 + (2\sqrt{2} - 3\mu)} \\ q^* &= \left(\frac{1 - 3\mu}{1 + (2\sqrt{2} - 3\mu)}; 0 \right), \quad 0 \leq \mu \leq \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Следовательно:

$$B(\mu) = \arg \max_{q \in P_B(\mu)} \bar{G}(y, q, \mu) = \begin{cases} (0; \frac{3\mu - 1}{\sqrt{2} - 1 + (3 - \sqrt{2})\mu}), & \frac{1}{3} \leq \mu \leq 1 \\ (\frac{1 - 3\mu}{1 + (2\sqrt{2} - 3\mu)}; 0), & 0 \leq \mu \leq \frac{1}{3} \end{cases} \quad (24)$$

(2) Рассмотрим $\ell_3 \leq \ell_4$. Производная в области имеет вид:

$$\frac{\partial \bar{G}(p, q, \mu)}{\partial q} = \frac{1 + p}{2\sqrt{2}\mu} \langle -1; \sqrt{2} - 1 \rangle$$

Введём вспомогательную функцию $\ell_A(q, \mu) := (\ell_3 - \ell_4) \cdot \mu(1 - \mu)$, множество, на котором она принимает неотрицательные значения составляют интересующую нас область. Множитель $\mu(1 - \mu)$ является строго положительным на $\mu \in (0, 1)$, поэтому не влияет на знак. Функция является линейной по переменным q_0 и q_2 :

$$\ell_A(q, \mu) = -(2 + (\sqrt{2} - 3)\mu)q_0 - (2 - 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2} - 3)\mu)q_2 - 3\mu + 2$$

Параметр μ изменяется в диапазоне $(0, 1)$, причём

$$\begin{aligned}\ell_A(q, \mu) &\xrightarrow{\mu \rightarrow 1} 1 - q_0 + (\sqrt{2} - 1)q_2 \\ \ell_A(q, \mu) &\xrightarrow{\mu \rightarrow 0} 1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0\end{aligned}$$

Предельные положения $\ell_B(q, \mu) = 0$ изображены на графике (3). Найдём значение μ при котором прямая $\ell(q, \mu)$ проходит через точку $q = (0, 0)$:

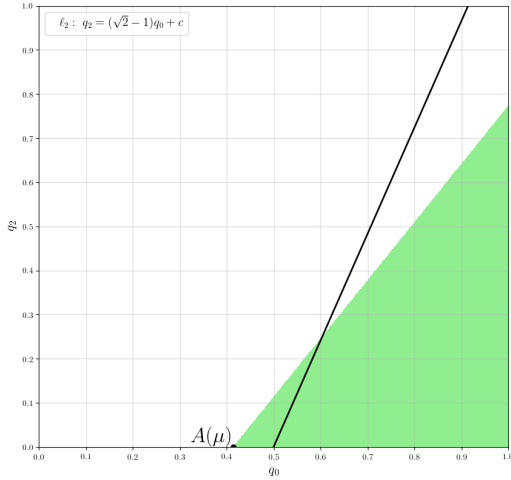
$$\ell_A(0, 0, \hat{\mu}) = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{2}{3}$$

Очевидно, что на полиэдре $P_2(\mu)$:

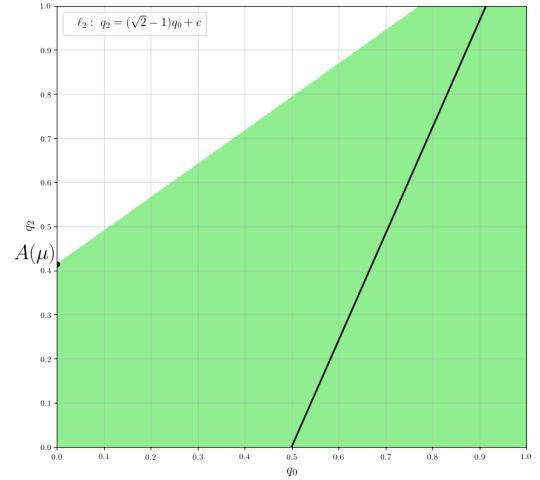
$$P_A(\mu) = \{q \in Q \mid \ell_3(q, \mu) \leq \ell_4(q, \mu)\}, \quad \mu \in (0, 1)$$

функция $\overline{G}(p, q, \mu)$ достигает максимума в точке $A(\mu)$:

$$A(\mu) = \arg \max_{q \in P_A(\mu)} \overline{G}(p, q, \mu) = \begin{cases} (0, q_2) : \ell_A(0, q_2, \mu) = 0, & \frac{2}{3} \leq \mu \leq 1 \\ (q_0, 0) : \ell_A(q_0, 0, \mu) = 0, & 0 \leq \mu \leq \frac{2}{3} \end{cases}$$



(a) $\mu = 0.1 < \frac{2}{3}$



(b) $\mu = 0.8 > \frac{2}{3}$

На графике зелёным цветом изображена область $P_A(\mu)$, чёрным цветом обозначены линии уровня и стрелкой соответственно градиент функции.

Рассмотрим эти два случая и найдём явное выражение для точки $A(\mu)$:

(а) Если $\frac{2}{3} \leq \mu \leq 1$ то координата q_2 точки максимума определяется из условия:

$$\ell_A(0, q_2, \mu) = 0$$

$$-(2 - 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2} - 3)\mu)q_2 - 3\mu + 2 = 0 \Rightarrow q_2 = \frac{3\mu - 2}{2(\sqrt{2} - 1) + (3 - 2\sqrt{2})\mu}$$

$$q^* = (0; \frac{3\mu - 2}{2(\sqrt{2} - 1) + (3 - 2\sqrt{2})\mu}), \quad \frac{2}{3} \leq \mu \leq 1$$

(b) Если $0 \leq \mu \leq \frac{2}{3}$ то координата q_0 точки максимума определяется из условия:

$$\ell_A(q_0, 0, \mu) = 0$$

$$-(2 + (\sqrt{2} - 3)\mu)q_0 - 3\mu + 2 = 0 \Rightarrow q_0 = \frac{2 - 3\mu}{2 + (\sqrt{2} - 3)\mu}$$

$$q^* = (\frac{2 - 3\mu}{2 + (\sqrt{2} - 3)\mu}; 0), \quad 0 \leq \mu \leq \frac{2}{3}$$

Следовательно:

$$A(\mu) = \arg \max_{q \in P_A(\mu)} \bar{G}(p, q, \mu) = \begin{cases} (0; \frac{3\mu - 2}{2(\sqrt{2} - 1) + (3 - 2\sqrt{2})\mu}), & \frac{2}{3} \leq \mu \leq 1 \\ (\frac{2 - 3\mu}{2 + (\sqrt{2} - 3)\mu}; 0), & 0 \leq \mu \leq \frac{2}{3} \end{cases} \quad (25)$$

(3) Рассмотрим область в которой $\begin{cases} \ell_1 \leq \ell_2 \\ \ell_3 \geq \ell_4 \end{cases}$

Частные производные имеют следующий вид в данной области.

$$\frac{\partial \bar{G}(p, q, \mu)}{\partial q} = \frac{1}{2\sqrt{2}\mu(1 - \mu)} \langle (\sqrt{2} - 1)p\mu - (1 - p)(1 - \mu); (\sqrt{2} - 1)(1 - p)(1 - \mu) - p\mu \rangle$$

$$g_1 = (\sqrt{2} - 1)p\mu - (1 - p)(1 - \mu)$$

$$g_2 = (\sqrt{2} - 1)(1 - p)(1 - \mu) - p\mu$$

Заметим, что функция $\bar{G}(p, q, \mu)$ является линейной по переменным q_0 и q_2 т.е.:

$$\overline{G}(p, q, \mu) = g_0(p, \mu) q_0 + g_2(p, \mu) q_2 + c(p, \mu)$$

и

$$\overline{G}(p, q, \mu) = 0 \sim q_2 = k(p, \mu) \cdot q_0 + c(p, \mu)$$

Рассматриваем функцию на полиэдре $P_{AB}(\mu)$:

$$P_{AB}(\mu) = \{q \in Q \mid \ell_A(q, \mu) \geq 0 \cap \ell_B(q, \mu) \leq 0\}, \mu \in (0, 1)$$

Ограничение $\ell_A(q, \mu) = 0$ и $\ell_B(q, \mu) = 0$ представимы в эквивалентном виде:

$$\ell_A(q, \mu) = 0 \sim q_2 = k_A(\mu)q_0 + c_A(\mu)$$

$$\ell_B(q, \mu) = 0 \sim q_2 = k_B(\mu)q_0 + c_B(\mu)$$

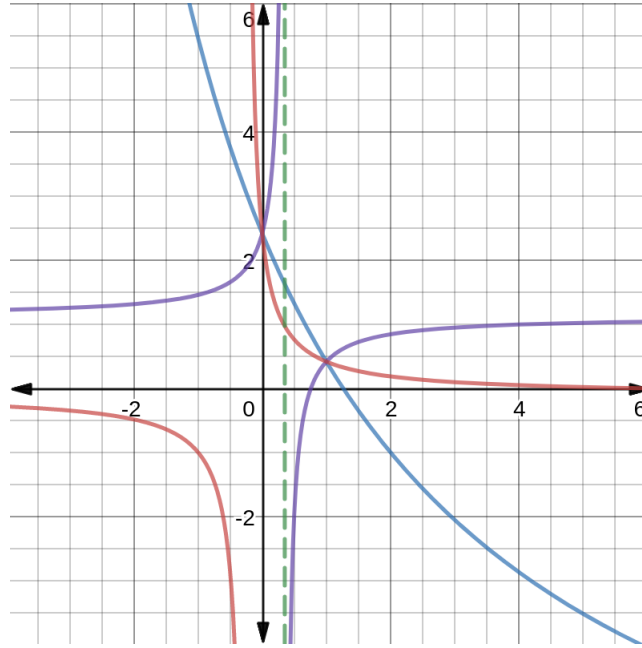


Рис. 6: Коэффициенты $k_A(\mu)$, $k_B(\mu)$ и $k(p, \mu)$ при фиксированном p

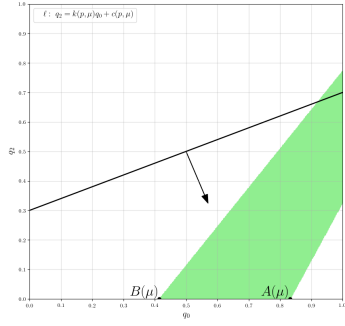
Рассмотрим график 6, на котором изображены значения коэффициентов при фиксированном значении $p \in [0, 1]$. $k_B(\mu)$ изображены красной кривой, $k_A(\mu)$

синей и фиолетовой - кривая $k(p, \mu)$. Пунктирная вертикальная линия обозначает точку x в которой выражение $g_1 = 0$. Имеет место неравенство $k_A(\mu) > k_B(\mu)$ при $\mu \in (0, 1)$.

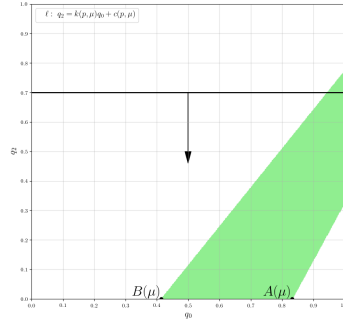
$$\begin{cases} k(\mu) < k_B(\mu) \text{ при } g_1(\mu, p) < 0 \\ k(\mu) > k_A(\mu) \text{ при } g_1(\mu, p) > 0 \end{cases}$$

Следовательно точки максимума функции $\overline{G}(p, q, \mu)$ при фиксированных значениях μ и p могут быть точки: $\{A\}$, $\{B\}$, $(0, 0)$ и отрезки $[B, A]$, $[0, A]$, $[0, B]$. Где точки $A(\mu)$ и $B(\mu)$ определены в 25 и 24. Рассмотрим три подслучая:

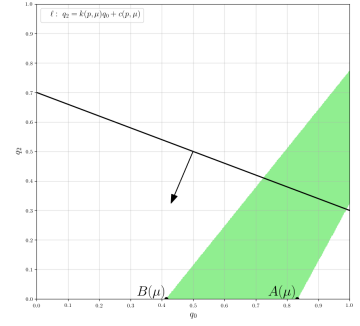
(a) $0 \leq \mu \leq \frac{1}{3}$.



(a) $g_1 > 0 \Rightarrow q^* = A$



(b) $g_1 = 0 \Rightarrow q^* = [B, A]$

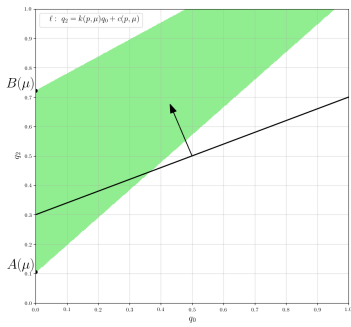


(c) $g_1 < 0 \Rightarrow q^* = B$

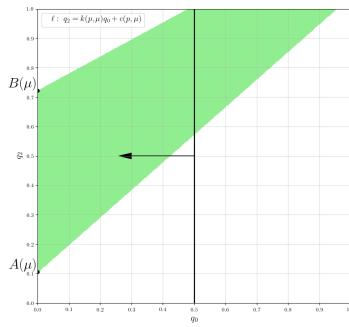
Рис. 7

$$\begin{cases} g_1 > 0 \Rightarrow q^* = A \\ g_1 = 0 \Rightarrow q^* = [B, A] \\ g_1 < 0 \Rightarrow q^* = B \end{cases}$$

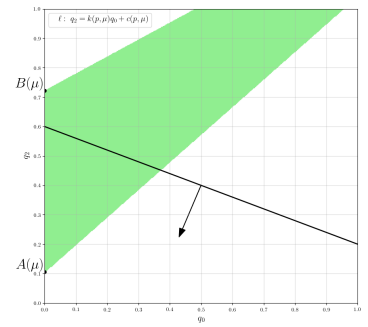
(b) $\frac{2}{3} \leq \mu \leq 1$



(a) $g_2 > 0 \Rightarrow q^* = B$



(b) $g_2 = 0 \Rightarrow q^* = [B, A]$

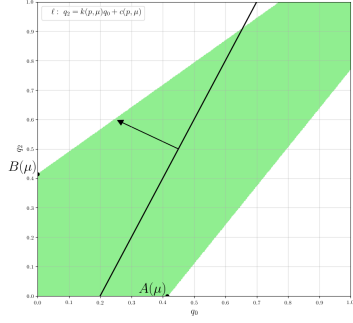


(c) $g_2 < 0 \Rightarrow q^* = A$

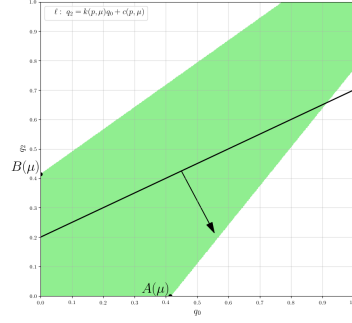
Рис. 8

$$\left[\begin{array}{l} g_2 > 0 \Rightarrow q^* = B \\ g_2 = 0 \Rightarrow q^* = [B, A] \\ g_2 < 0 \Rightarrow q^* = A \end{array} \right.$$

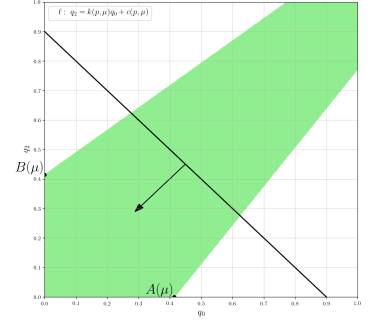
(c) $\frac{1}{3} \leq \mu \leq \frac{2}{3}$



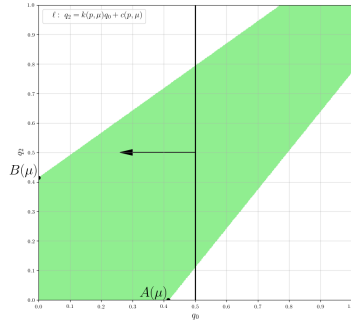
(a) $g_2 > 0 \Rightarrow q^* = B$



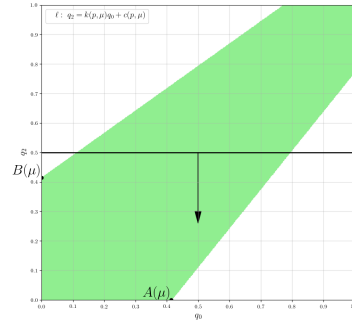
(b) $g_1 > 0 \Rightarrow q^* = A$



$$(c) \begin{cases} g_2 < 0 \\ g_1 < 0 \end{cases} \Rightarrow q^* = (0, 0)$$



(d) $g_2 = 0 \Rightarrow q^* = [0, B]$



(e) $g_1 = 0 \Rightarrow q^* = [0, A]$

$$\left[\begin{array}{l} g_1 > 0 \Rightarrow q^* = A \\ g_2 > 0 \Rightarrow q^* = B \\ g_1 = 0 \Rightarrow q^* = [0, A] \\ g_2 = 0 \Rightarrow q^* = [0, B] \\ \begin{cases} g_2 < 0 \\ g_1 < 0 \end{cases} \Rightarrow q^* = (0, 0) \end{array} \right.$$

Итого получим следующие

$$C(p, \mu) =$$

$$\arg \max_{P_{AB}} \bar{G}(p, q, \mu) \begin{cases} A(\mu), & g_2(p, \mu) < 0 \cup \mu \leq \frac{1}{3} \cap g_2 < 0 \\ B(\mu), & g_1(p, \mu) > 0 \cup \mu \geq \frac{2}{3} \cap g_1 > 0 \\ (0, 0), & g_1(p, \mu) < 0 \cap g_2(p, \mu) < 0 \\ [A(\mu), B(\mu)], & g_1(\mu) = 0 \cap \mu < \frac{1}{3} \cup g_1(\mu) = 0 \cap \mu > \frac{2}{3} \\ [0, A(\mu)], & g_2(\mu) = 0 \cap \mu \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ [0, B(\mu)], & g_1(\mu) = 0 \cap \mu \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \end{cases}$$

Но кроме того точки $A(\mu)$ и $B(\mu)$ являются оптимальными $\forall p$ и μ поскольку являются таковыми в **(1)** и **(2)**. Итого в области P_B оптимальной является точка $B(\mu)$, в области P_A оптимальной является точка $A(\mu)$, и в области P_{AB} оптимальной является точка $C(p, \mu)$. Поскольку если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на множестве X , то и $\min(f(x), g(x))$ непрерывна на X , то максимум достигается в точке C .

$$q^*(p, \mu) =$$

$$\arg \max_Q \bar{G}(p, q, \mu) \begin{cases} A(\mu), & g_2(p, \mu) < 0 \cup \mu \leq \frac{1}{3} \cap g_2 < 0 \\ B(\mu), & g_1(p, \mu) > 0 \cup \mu \geq \frac{2}{3} \cap g_1 > 0 \\ (0, 0), & g_1(p, \mu) < 0 \cap g_2(p, \mu) < 0 \\ [A(\mu), B(\mu)], & g_1(\mu) = 0 \cap \mu < \frac{1}{3} \cup g_1(\mu) = 0 \cap \mu > \frac{2}{3} \\ [0, A(\mu)], & g_2(\mu) = 0 \cap \mu \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ [0, B(\mu)], & g_1(\mu) = 0 \cap \mu \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ (0, 1), & \mu = 0 \\ (1, 0), & \mu = 1 \end{cases}$$

Поскольку в пункте 3.1 мы установили, что

$$p^*(q, \lambda(q)) = \arg \max_{p \in [0, 1]} \bar{L}(p, q, \lambda(q)) = [0, 1]$$

Нас интересуют оптимальные пары (p^0, q^0) такие, что $\exists(\lambda, \mu) \in [0, 1]^2$:

$$\begin{cases} p^0 = p^*(q^0, \lambda) \\ q^0 = q^*(p^0, \mu) \end{cases}$$

Введём следующие множества:

$$P_0 = [0, 1], \quad Q_0 = [0, 1] \times \{0\} \cup \{1\} \times [0, 1]$$

Следующие точки являются оптимальными:

$$(p, q) \in P_0 \times Q_0$$

7 Графическое изображение матожидания критерия

Вычислим матожидание от имеющегося векторного критерия (15), где x и y возьмём как случайные величины с распределениями (21) и соответствующими обозначениями величин p и q . В таком случае имеем:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x[F(x, y)] &= \left(\frac{yq}{2}; \frac{1-q}{y}\right) \\ \mathbb{E}_{xy}[F(x, y)] &= \left(\frac{q(1+p)}{2}; \frac{(1-q)(2-p)}{2}\right)\end{aligned}$$

Рассмотрим это как множество точек на плоскости X, Y зависящие от двух параметров $(p, q) \in [0, 1]^2$

$$\begin{cases} x = \frac{q(1+p)}{2} \\ y = \frac{(1-q)(2-p)}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{2x}{1+p} \\ y = \frac{(1 - \frac{2x}{1+p})(2-p)}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{2x}{1+p} \\ y = \frac{(1+p-2x)(2-p)}{2(1+p)} \end{cases}$$

Найдём максимальные значения, которые может принимать $y(x, p)$ при фиксированном x :

$$\frac{\partial y(x, p)}{\partial p} = \frac{3x}{(p+1)^2} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow p = \sqrt{6x} - 1$$

Введём обозначение $p_0 = \sqrt{6x} - 1$. Поскольку область определения $p_0 \in [0, 1]$, то $p_0 = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ и $p_0 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{6}$

$$y_{max}(x) = \begin{cases} \max\{y(x, 0), y(x, 1), y(x, p_0)\}, & x \in [\frac{1}{6}, \frac{2}{3}] \\ \max\{y(x, 0), y(x, 1)\}, & x \in [0, \frac{1}{6}] \cup [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

учитывая, что $y(x, 0) = 1 - 2x$, $y(x, 1) = \frac{1 - x}{2}$, $y(x, p_0) = \frac{(\sqrt{6x} - 2x)(3 - \sqrt{6x})}{2\sqrt{6x}}$ получим уравнения верхней и нижней огибающей области на графике ниже.

$$y_{min}(x) = \begin{cases} \frac{1 - x}{2}, & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 1 - 2x, & x \in (\frac{1}{3}, 1] \end{cases}$$

$$y_{max}(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & x \in [0, \frac{1}{6}] \\ \frac{(\sqrt{6x} - 2x)(3 - \sqrt{6x})}{2\sqrt{6x}}, & x \in (\frac{1}{6}, \frac{2}{3}] \\ \frac{1 - x}{2}, & x \in (\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

В предыдущем пункте мы установили (4) что любая пара $(p^*, q^*) \in [0, 1]^2$ является оптимальной. Теперь для всех оптимальных стратегий т.е. пар $(p^*, q^*) \in [0, 1]^2$ изобразим на графике значения матожидания векторного критерия в этой точке.

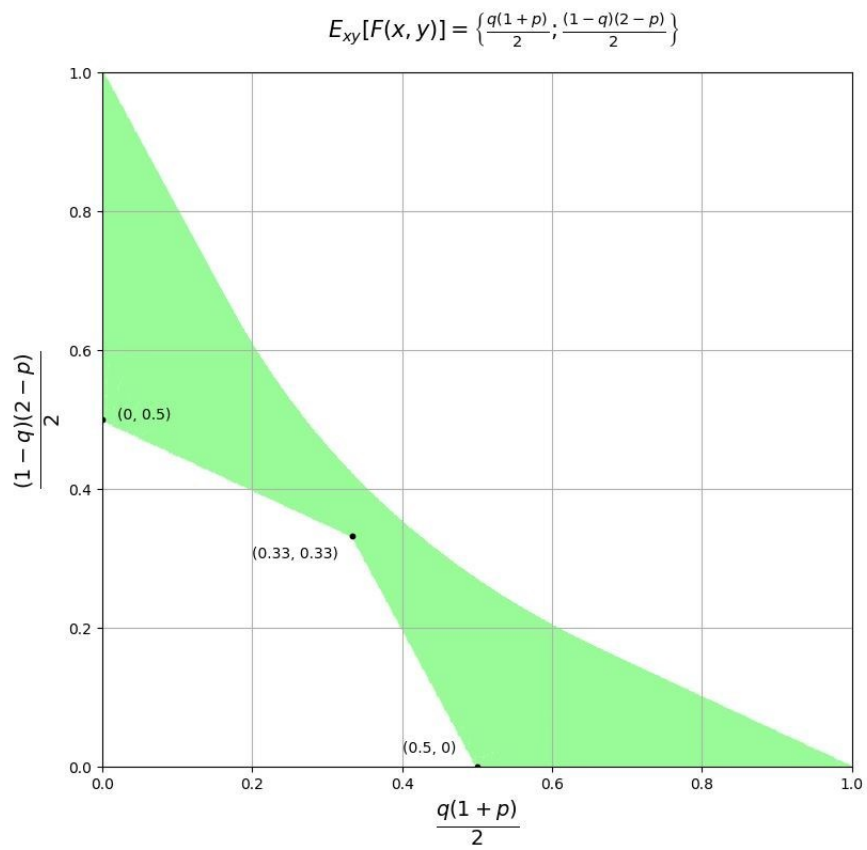


Рис. 10: Матожидание векторного критерия

8 Выигрыш игрока Студент

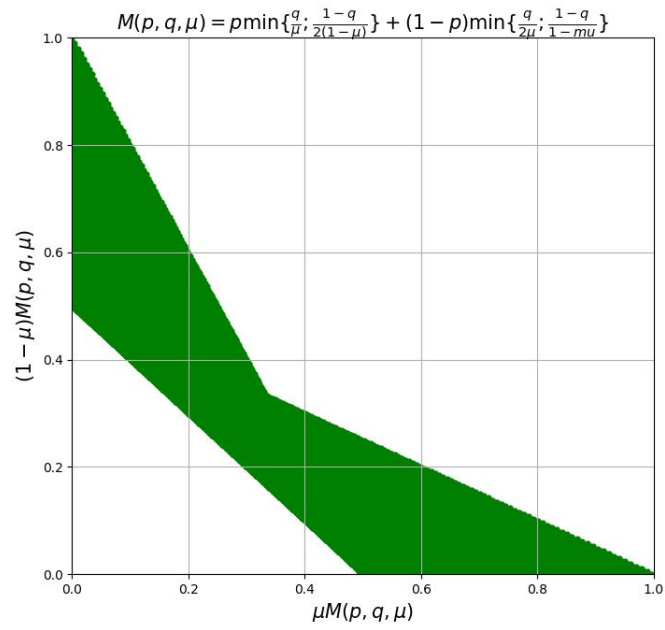
Теперь на квадрате $(\mu, \lambda) \in [0, 1]^2$ мы рассмотрели все точки и для каждой нашли оптимальные пары $(p^*(\mu, \lambda), q^*(\mu, \lambda))$. Теперь для всех возможных пар из квадрата $(\mu, \lambda) \in [0, 1]^2$ в соответствующих оптимальных парах найдём значения функции:

$$\overline{G}(p^*(\mu, \lambda), q^*(\mu, \lambda), \mu) = p \min \left\{ \frac{q}{\mu}; \frac{1-q}{2(1-\mu)} \right\} + (1-p) \min \left\{ \frac{q}{2\mu}; \frac{1-q}{1-\mu} \right\}$$

Получим следующую систему в зависимости от значений μ и λ :

$$\overline{G}(p, q, \mu) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \mu = \{0, 1\}, \lambda \in [0, 1] \\ [\frac{1}{2}, 1], & \mu = 0, \lambda = 1 \cup \mu = 1, \lambda = 0 \\ \frac{1}{2-\mu}, & \mu \in (0, 1), \lambda \in (0, 2\frac{1-\mu}{2-\mu}) \\ \frac{1}{1+\mu}, & \mu \in (0, 1), \lambda \in (\frac{1-\mu}{1+\mu}, 1] \\ [\frac{1}{2}, \frac{1}{2-\mu}], & \mu \in (0, 1), \lambda \in 2\frac{1-\mu}{2-\mu} \\ [\frac{1}{2}, \frac{1}{1+\mu}], & \mu \in (0, 1), \lambda = \frac{1-\mu}{1+\mu} \end{cases}$$

Изобразим графически множество значений выигрыша в оптимальных точках. Для этого на квадрате $[0, 1]^2$ изобразим все точки, которые принимает вектор $(\mu \overline{G}(p^*, q^*, \mu), (1-\mu) \overline{G}(p^*, q^*, \mu))$ при $(\mu, \lambda) \in [0, 1]^2$.



Поясним график:

нижняя огибающая в координатах X, Y : $y = \frac{1}{2} - x$,

верхняя огибающая в координатах X, Y : $y = \begin{cases} 1 - 2x, & x \in [0, \frac{1}{3}) \\ \frac{1-x}{2}, & x \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases}$.

Список литературы

- [1] *Shapley L. S.* Equilibrium points in games with vector payoffs. — 1959.
- [2] *Karlin S.* Mathematical methods and theory in games, programming, and economics. — 1992.
- [3] *Germejer Y. B.* Introduction into operations research.
- [4] *David B.* An analog of the minimax theorem for vector payoffs. — 1959.
- [5] *Novikova N. M., Pospelova I. I.* Mixed strategy in vector optimization and germejer convolution.