Свойства свёртки Гермейера в векторных играх

Кононов Сергей

7 мая 2019 г.

Содержание

1 Введение

В работе рассматриваются различные способы решения модельной задачи которая представляет собой игру двух лиц с противоположными интересами и двумерной функцией выигрыша. Для решения задачи применяется модифицированный метод свёрток предложенный Л.С. Шепли, который как правило используется в подобных задачах.

1.1 Игровая модель

Рассматриваются два игрока - Студент, далее обозначается **С**, и Преподаватель, далее обозначается **П**, которые имеют противоположные интересы. Критерий интересов составляют две велечины, первая из которых является эффективностью работы **С** в научной сфере, а второй его эффективностью на подработке.

С выбирает долю x рабочего времени, которую он тратит на подготовку диплома, оставшееся рабочее время $1-x$ он тратит на подработку. Считается, что производительность **С** при любых занятий падает с увеличением отводимого на них времени, эффективность труда **С** зададим функцией $\sqrt{x}$ и $\sqrt{1-x}$ соответственно. **С** может распределять свое время между двумя видами деятельности, т.е. имеет множетсво стратегий $x \in X = \{0, 1\}$, причём он может использовать смешанные стратегии.

П выбирает - отностится к **С** требовательно, способствую написанию диплома и мешая подработке или же не обращать на него внимания не мешая подработке и не помогая с дипломом. **П** имеет множество стратегий $y \in Y = \{1, 2\}$, причём тоже может использовать смешаные стратегии.

Получаем следующий функциональный критерий:

$$F(x,y) = \big(f_1(x,y), f_2(x,y)\big) = \left(\frac{y\sqrt{x}}{2}, \frac{\sqrt{1-x}}{y}\right)$$

П стремится минимизировать (выборая $y \in Y = \{1, 2\}$) критерий $F(x,y)$, а игрок **С** - максимизировать (выбирая $x \in X = [0, 1]$).

Задачу можно представить в виде многокритериальную игру двух лиц с противоположными интересамив

$$\Big\langle F(x,y), X, Y \Big\rangle,\ y \in Y = \{1,2\},\ x \in X = [0,1] \tag{1}$$

Определение 1 *Допустимое решение $\hat{x} \in X$ называется строго эффективным (эффективным по Слейтеру) для задачи*

$$\max_{x \in X} F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \tag{2}$$

*если **не** существует $x \in X$ такого, что $f_k(x) > f_k(\hat{x})$ для всех $k = \{1, ..., n\}$. Множетсво всех эффективных по Слейтеру решений называаетcя множеством Слейтера задачи (2).*

Для задачи (1) введём следующие частные случаи:

$$S_x(y^*) \text{ - множество Слейтера задачи } \max_{x \in X} F(x, y^*)$$
$$S_y(x^*) \text{ - множество Слейтера задачи } \min_{y \in Y} F(x^*, y)$$

Определение 2 *Решением*[1] *(1) является множество точек (x^*, y^*) таких, что $x^* \in S_x(y^*)$ и $y^* \in S_y(x^*)$,*

Для параметризации множеств Слейтера будем использовать метод свёрток. Он заключается в том, что задача $\max_{x \in X} F(x)$ заменяется параметрическим семейством скалярных задач $\max_{x \in X} C(\{f_i\}, \lambda, x)$, где C – функция свертки частных критериев $\{f_i\}_{i=1}^m$ задачи (2) в единый скалярный критерий, λ – параметр свертки.

Определение 3 *Линейной свёрткой с параметром λ для функции критериев задачи (2) называется функция:*

$$L(\{f_i\}, \lambda, x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i,\ \textit{где}\ \lambda \in \Lambda = \{\lambda_i \geq 0 | \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}, \tag{3}$$

[1] Согласно *Blackwell D.* An analog of the minimax theorem for vector payoffs // Pac. J. of Math. 1956. No 6.

свёрткой Гермейера или обратной логической свёрткой с параметром μ *для функции критериев задачи* (2) *называется функция:*

$$G(\{f_i\}, \mu, x) = \min_{i:\mu_i>0} \frac{f_i}{\mu_i}, \text{ где } \mu \in M = \{\mu_i \geq 0 | \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1\}. \tag{4}$$

В случае конечных X и Y Шепли свел [4] описание данного множества к семейству задач поиска значений скалярных игр с функциями выигрышей – ЛС частных критериев при произвольном наборе весовых коэффициентов, своих у каждого игрока. Применение линейной свертки в многокритериальных задачах обосновывается леммой Карлина

Теорема 1 (Карлин (5)) *Пусть* x_0 *– эффективная точка, Тогда существуют неотрицательные числа* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *такие, что* $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ *и* x_0 *является точкой максимума функции* $L(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f^j(x)$

Гермейером была предложена свертка, которая также аппроксимирует множество Слейтера. В работе используется ее модификация - обратная логическая свертка, она отличается тем, что веса стоят в знаменателе.

Теорема 2 (Гермейер (5)) *Пусть* x_0 *– эффективная точка, причем* $f^i(x_0) > 0$ *для всех* $i = 1, \ldots, m$*. Тогда существуют положительные числа* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *такие, что* $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ *и* x_0 *является точкой максимума функции* $G(x) = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} \lambda_j f^j(x)$.

Рассмотрим случай, когда **C** использует обратную логическую свертку, с парамером μ, а **П** использует линейную свертку с параметром λ. Тогда множество оптимальных решений:

$$\begin{cases} x^* = \arg\max\limits_x G(\{f_1, f_2\}, \mu, x, y^*) \\ y^* = \arg\min\limits_y L(\{f_1, f_2\}, \lambda, x^*, y) \end{cases}$$

Поскольку игроки используют смешанные стратегии т.е. распределения вероятностей $\rho_x(x)$ и $\rho_y(y)$ над чистыми стратегиями $x \in X$ и $y \in Y$.

Далее каждый игрок осредняет свою функцию выигрыша по стратегиям противника

$$\overline{G}(\{f_1, f_2\}, \mu, q, p) = \iint\limits_{PQ} G(\{f_1, f_2\}, \mu, q, p)\rho_x(x)\rho_y(y)dxdy$$

$$\overline{L}(\{f_1, f_2\}, \lambda, q, p) = \iint\limits_{PQ} L(\{f_1, f_2\}, \lambda, q, p)\rho_x(x)\rho_y(y)dxdy$$

Определение 4 *Пара стратегий* (p^0, q^0) *называется оптимальными, если для некоторых* λ, μ *верно:*

$$\begin{cases} p^0(q^0, \lambda) = \operatorname*{argmin}_{p \in P} \overline{L}(p, q^0, \lambda) \\ q^0(p^0, \mu) = \operatorname*{argmin}_{q \in Q} \overline{G}(p^0, q, \mu) \end{cases} \tag{5}$$

Мы будем рассматривать конечную игру **С — П**, полученную из исходной заменой множества $X = [0, 1]$ конечным множеством точек

$$X^T = \{0,\ \frac{1}{T},\ \frac{2}{T},\ \dots,\ \frac{T-1}{T},\ 1\},\ \ T \in \mathbb{N}$$

В работе исследуются случаи $T = 1$: $X^1 = \{0, 1\}$, и $T = 2$: $X^2 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

2 Постановка задача

Функциональный критерий: $F(x,y) = (\frac{y\sqrt{x}}{2}, \frac{\sqrt{1-x}}{y})$

С: $F(x,y) \to \max\limits_{x \in X}$	П: $F(x,y) \to \min\limits_{y \in Y}$
$X = \{0; \frac{1}{2}; 1\}$	$Y = \{1, 2\}$
$P(X=0) = q_0$	$P(Y=1) = p_0$
$P(X=\frac{1}{2}) = q_1$	$P(Y=2) = p_1$
$P(X=1) = q_2$	
$\sum\limits_{i=0}^{2} q_i = 1$	$\sum\limits_{i=0}^{1} p_i = 1$
$0 \leqslant q_i \leqslant 1\ ,\quad i = \overline{0,2}$	$0 \leqslant p_i \leqslant 1\ ,\quad i = \overline{0,1}$
Следровательно $q_1 = 1 - q_0 - q_2$	Пусть $p := p_1,$ тогда $p_0 = 1 - p$

Введём множество

$$Q = \{(q_0, q_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant q_i \leqslant 1\ i \in \{0,2\};\ q_0 + q_2 \leqslant 1\} \tag{6}$$

Студент выбирет X и использует **ОЛС**.
Преподаватель выбирает Y и использует **ЛС**.

3 Оптимальные значения

3.1 Рассмотрим игру за преподавателя

Игрое **П** стремится минимизировать функциональный критерий:

$$F(x,y) = (\frac{y\sqrt{x}}{2}, \frac{\sqrt{1-x}}{y})$$

Игрок **П** использует смешанную стратегию, т.е. его стратегией является распределение $p = (p_0, p_1)$ над множеством чистых стратегий $Y = \{1, 2\}$:

$$F_{\Pi}(p,x) = \Big\langle (1-p)\frac{1\cdot\sqrt{x}}{2} + p\frac{2\cdot\sqrt{x}}{2};\ (1-p)\frac{\sqrt{1-x}}{1} + p\frac{\sqrt{1-x}}{2}\Big\rangle = \frac{1}{2}\Big\langle (p+1)\sqrt{x};\ (2-p)\sqrt{1-}$$

Затем использует **ЛС** (1):

$$L(p,x,\lambda) = \frac{1}{2}\big(\lambda(p+1)\sqrt{x} + (1-\lambda)(2-p)\sqrt{1-x}\big)$$

Введём обозначение $q = (q_0, q_1, q_2)$. Далеем осредняем функцию $L(p,x,\lambda)$ по стратегиям противника $x \in X = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ с вероятностями $q = (q_0, q_1, q_2)$:

$$\overline{L}(p,q,\lambda) = \frac{1}{2}\Big(q_0(1-\lambda)(2-p)\sqrt{1} + q_1\big(\lambda(p+1)\frac{1}{\sqrt{2}} + (1-\lambda)(2-p)\frac{1}{\sqrt{2}}\big) + q_2\lambda(p+1)\sqrt{}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\big(\lambda(q_1+\sqrt{2}q_2) - (1-\lambda)(q_1+\sqrt{2}q_0)\big)p + \big(\lambda(q_1+\sqrt{2}q_2) + 2(1-\lambda)(q_1+\sqrt{2}q_0)\big)\Big)$$

Функция является линейной по переменной p:

$$\overline{L}(p,q,\lambda) = k(\lambda,q)p + b(\lambda,q)$$

где

$$k(q,\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\big(\lambda(q_1+\sqrt{2}q_2) - (1-\lambda)(q_1+\sqrt{2}q_0)\big)$$

$$b(q,\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\big(\lambda(q_1+\sqrt{2}q_2) + 2(1-\lambda)(q_1+\sqrt{2}q_0)\big)$$

Наша задача найти $p^*(q,\lambda) = \arg\min\limits_{p\in[0,1]} \overline{L}(p,q,\lambda)$. Поскольку функция $\overline{L}(p,q,\lambda)$ линейна по переменной p, следовательно:

$$p^*(q,\lambda) = \arg\min_{p\in[0,1]} \overline{L}(p,q,\lambda) = \begin{cases} 0, & k(\lambda,q) > 0 \\ 1, & k(\lambda,q) < 0 \\ [0,1], & k(\lambda,q) = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим функцию
$k(q,\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\lambda\big(2+(\sqrt{2}-2)(q_0-q_2)\big) - \big(1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0\big)\Big)$
Нас интересует знакт это функции при различных значениях аргументов. Введём обозначения:

$$\ell(q) = \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{2+(\sqrt{2}-2)(q_0-q_2)}$$

Напомним, что множестово Q имеет следующий вид:

$$Q = \{(q_0,q_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant q_i \leqslant 1 \; i \in \{0,2\};\; q_0+q_2 \leqslant 1\}$$

Поскольку для $q \in Q$ верно:

$$\begin{gathered} 2+(\sqrt{2}-2)(q_0-q_2) > 0 \\ 1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0 \geqslant 0 \\ q_0+(\sqrt{2}-3)q_2-1 \leqslant 0 \end{gathered}$$

Следовательно:

$$k(q,\lambda) \vee 0 \Leftrightarrow \lambda \vee \ell(q) \text{ где } \vee \text{ это один из знаков } >,<,=.$$

Более того верно что $\forall q \in Q\; 0 \leqslant \ell(q) \leqslant 1$. Проиллюстрируем это на графике. В плоскости $q = (q_0, q_2)$ изображены прямые $\ell_1(q)$ и $\ell_2(q)$ такие, что:

$$\begin{gathered} \ell_1(q):\; \ell(q) = 0 \\ \ell_2(q):\; \ell(q) = 1 \end{gathered}$$

зелёным цветом изображена область в которой $0 \leqslant \ell(q) \leqslant 1$. Видно, что квадрат $q = [0,1]^2$ а следовательно и множетсво Q полностью принадлежит этой области.

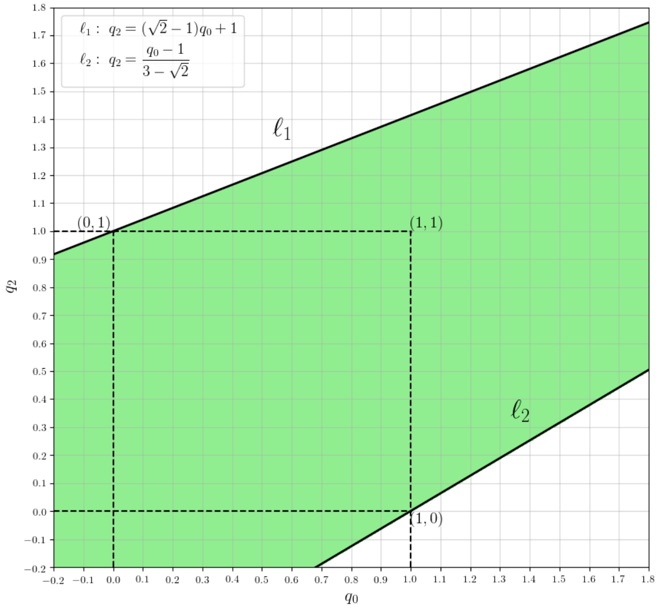


Рис. 1

Следовательно $\forall q = (q_0, q_2) \in Q\ \exists\ \lambda \in [0,1]:\ k(\lambda, q) = 0.$

$$p^*(\lambda, q) = \arg\min_{p\in[0,1]} \overline{L}(p,q,\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \in \big(\ell(q), 1\big] \\ 1, & \lambda \in \big[0, \ell(q)\big) \\ [0,1], & \lambda = \ell(q) \end{cases}\ , \text{ где } \ell(q) = \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{2 + (\sqrt{2}-2)(q_0 - q_2)}$$

3.2 Рассмотрим игру за студента

Игрок **С** стремится максимизировать функциональный критерий:

$$F(x,y) = (\frac{y\sqrt{x}}{2}, \frac{\sqrt{1-x}}{y})$$

Игрок **С** использует смешанную стратегию, т.е. его стратегией является распределение $q = (q_0, q_1, q_2)$ над множеством чистых стратегий $X = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$:

$$F_{\text{C}} = \langle q_0 \frac{y\sqrt{0}}{2} + q_1 \frac{y}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} + q_2 \frac{y\sqrt{1}}{2}; q_0 \frac{\sqrt{1}}{y} + q_1 \frac{1}{y}\sqrt{\frac{1}{2}} + q_2 \frac{\sqrt{0}}{y} \rangle =$$

$$= \langle \frac{y}{2} \cdot \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{\sqrt{2}}; \frac{1}{y} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{\sqrt{2}} \rangle$$

Затем использует **ОЛС** (2). Сначала рассмотрим вырожденные случаи когда $\mu = 0$ и $\mu = 1$.
(1) Если $\mu = 0$:

$$G(y,q,0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{y}$$

Далеем осредняем функцию $G(y,q,\mu)$ по стратегиям противника $y \in Y = \{1, 2\}$ с вероятностями $(1-p, p)$:

$$\overline{G}(p,q,0) = \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{1} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{2} =$$

$$= \frac{(2-p)(1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0)}{2\sqrt{2}}$$

Найдём частные производную по переменным q_0 и q_2, при этом введём следующие обозначения для сокращения записи:

$$\frac{\partial \overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q} = \langle \frac{\partial \overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q_0}; \frac{\partial \overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q_2} \rangle = \langle g_1(p,q,\mu), g_2(p,q,\mu) \rangle \qquad (7)$$

$$\frac{\partial \overline{G}(p,q,0)}{\partial q} = \frac{2-p}{2\sqrt{2}} \langle \sqrt{2} - 1; -1 \rangle$$

Поскольку $p \leqslant 1$, то $\dfrac{2-p}{2\sqrt{2}} > 0$. Мы рассматриваем задачу максимизации на множестве (3). Следовательно:

$$q^* = \arg\max_{q\in Q} \overline{G}(p,q,0) = (1,0).$$

(2) Если $\mu = 1$:

$$G(y,q,1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{y}$$

Далеем осредняем функцию $G(y,q,\mu)$ по стратегиям противника $y \in Y = \{1,2\}$ с вероятностями $(1-p,p)$:

$$\overline{G}(p,q,1) = \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{2} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{1} = \\ = \frac{(p+1)(1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2)}{2\sqrt{2}}$$

Найдём частные производную по переменным q_0 и q_2:

$$\frac{\partial \overline{G}(p,q,1)}{\partial q} = \frac{p+1}{2\sqrt{2}} \langle -1; \sqrt{2}-1 \rangle$$

Поскольку $p \geqslant 0$, то $\dfrac{p+1}{2\sqrt{2}} > 0$. Мы рассматриваем задачу максимизации на множестве (3). Следовательно:

$$q^* = \arg\max_{q\in Q} \overline{G}(p,q,1) = (0,1).$$

(3) Теперь $\mu \neq 0,1$:

$$G(y,q,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}} \min_{0<\mu<1} \Big\langle \frac{y}{2} \cdot \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}; \frac{1}{y} \cdot \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu} \Big\rangle$$

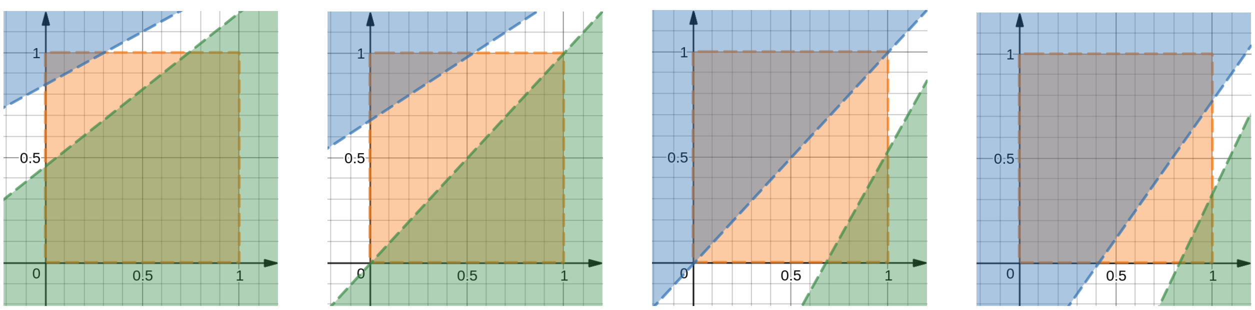
Далеем осредняем функцию $G(y,q,\mu)$ по стратегиям противника $y \in Y = \{1,2\}$ с вероятностями $(1-p,p)$:

$$\overline{G}(p,q,\mu) = \frac{1-p}{\sqrt{2}} \min_{0<\mu<1} \Big\langle \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu}; \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu} \Big\rangle + \\ + \frac{p}{\sqrt{2}} \min_{0<\mu<1} \Big\langle \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}; \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)} \Big\rangle \quad (8)$$

Введём вспомогательные обозначения:

$$\ell_1(q,\mu) = \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu}$$
$$\ell_2(q,\mu) = \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu}$$
$$\ell_3(q,\mu) = \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}$$
$$\ell_4(q,\mu) = \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)}$$

Для различных значений переменной μ рассмотрим взаимные расположения множеств $\ell_1 > \ell_2$ и $\ell_3 > \ell_4$ на плоскости (q_0, q_2). Другими словами для фиксированного значения $\mu \in [0,1]$ найдём области плоскости, в которых достигается минимум одного из выражений в (5):



(a) $\mu = 0.8$ (b) $\mu = \frac{2}{3}$ (c) $\mu = \frac{1}{3}$ (d) $\mu = 0.1$

Поясним график. Синяя область - это множество $\ell_1 > \ell_2$.
Зелёная область на графике - это множнство $\ell_3 < \ell_4$.
Область между ними - это множество $\{\ell_1 < \ell_2 \cap \ell_3 > \ell_4\}$. Исходя из графиков $\{\ell_1 > \ell_2 \cap \ell_3 < \ell_4\} = \emptyset$ при $(\mu, q) \in (0,1) \times [0,1]^2$. Поскольку граничные случаи для параметра μ были рассмотрены в первых двух пунктах, то квадрат $[0,1]^2$ на плоскости (q_0, q_2) делится на 3 не пересекающихся множества.

Добавить доказательство того, что всего три возможных варианта

(1) Рассмотрим полуплоскость, которая определяется системой

$$\begin{cases} \ell_1 > \ell_2 \\ \ell_3 > \ell_4 \end{cases} \sim \; l_1 > l_2$$

Выражение (8) на этом множестве принимает следующий вид:

$$\overline{G}(p,q,\mu)=\frac{1-p}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu}+\frac{p}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)}=$$
$$=\frac{2-p}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu}$$

(2) Рассмотрим полуплоскость, которая определяется системой

$$\begin{cases}\ell_1<\ell_2\\ \ell_3<\ell_4\end{cases}\sim\ l_3<l_4$$

Выражение (8) на этом множестве принимает следующий вид:

$$\overline{G}(p,q,\mu)=\frac{1-p}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu}+\frac{p}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}=$$
$$=\frac{1+p}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}$$

(3) Рассмотрим область, которая определяется системой $\begin{cases}\ell_1<\ell_2\\ \ell_3>\ell_4\end{cases}$

Выражение (8) на этом множестве принимает следующий вид:

$$\overline{G}(p,q,\mu)=\frac{1-p}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu}+\frac{p}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)}=$$
$$=\frac{(1-p)(1-\mu)(1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2)+p\mu(1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0)}{2\sqrt{2}\mu(1-\mu)}$$

Итого:

$$\overline{G}(p,q,\mu)=\begin{cases}\dfrac{2-p}{2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu}, & \ell_1\geqslant\ell_2\\ \dfrac{1+p}{2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}, & \ell_3\leqslant\ell_4\\ \dfrac{(1-p)(1-\mu)(1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2)+p\mu(1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0)}{2\sqrt{2}\mu(1-\mu)}, & \begin{cases}\ell_1\leqslant\ell_2\\ \ell_3\geqslant\ell_4\end{cases}\end{cases}$$

Тогда производная от функции имеет:

$$\frac{\partial \overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q} = \begin{cases} \frac{2-p}{2\sqrt{2}(1-\mu)}\langle\sqrt{2}-1;-1\rangle, \;\; \ell_1 \geqslant \ell_2 \\ \frac{1+p}{2\sqrt{2}\mu}\langle -1;\sqrt{2}-1\rangle, \;\; \ell_3 \leqslant \ell_4 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}\mu(1-\mu)}\big\langle(\sqrt{2}-1)p\mu-(1-p)(1-\mu);(\sqrt{2}-1)(1-p)(1-\mu)-p\mu \end{cases}$$

(1) Рассмотрим $\ell_1 \geqslant \ell_2$. Производная в области имеет вид:

$$\frac{\partial \overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q} = \frac{2-p}{2\sqrt{2}(1-\mu)}\langle\sqrt{2}-1;-1\rangle$$

Введём вспомогалетльную функцию $\ell_B(q,\mu) := (\ell_1-\ell_2)\cdot\mu(1-\mu)$, множество, на котором она принимает неотрицательные значения составляют интересующую нас область. Множитель $\mu(1-\mu)$ является строго положительным на $\mu \in (0,1)$, поэтому не влияет на знак. Функция является линейной по переменным q_0 и q_2:

$$\ell_B(q,\mu) = (1+\mu(2\sqrt{2}-3))q_0 + (1-\sqrt{2}+\mu(\sqrt{2}-3))q_2 + 3\mu - 1$$

Параметр μ изменяется в диапазоне $(0,1)$, причём

$$\ell_B(q,\mu) \xrightarrow[\mu\to 1]{} 1 - q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2$$
$$\ell_B(q,\mu) \xrightarrow[\mu\to 0]{} 1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0$$

Предельные положения $\ell_B(q,\mu)=0$ изображены на графике (3).

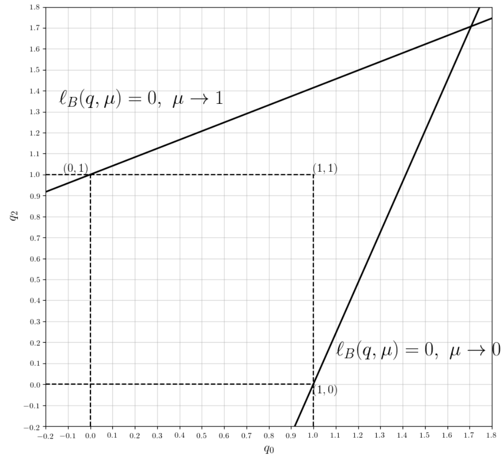


Рис. 3

Найдём значение μ при котором прямая $\ell_B(q,\mu)$ проходит через точку $q=(0,0)$:

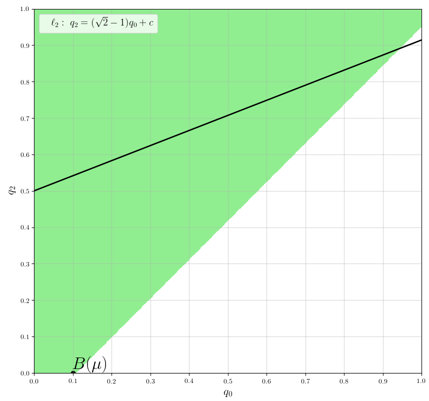
$$\ell_B(0,0,\hat{\mu})=0 \Rightarrow \hat{\mu}=\frac{1}{3}$$

Очевидно, что на полиэдре $P_B(\mu)$:

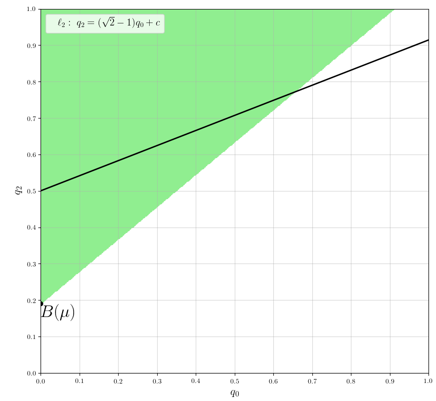
$$P_B(\mu)=\{q\in Q \mid \ell_B(q,\mu)\geqslant 0\},\ \mu\in(0,1)$$

функция $\overline{G}(p,q,\mu)$ достигает максимума в точке $B(\mu)$:

$$q^*=\arg\max_{q\in P_B(\mu)}\overline{G}(y,q,\mu)=B(\mu)=\begin{cases}(0,q_2):\ell_B(0,q_2,\mu)=0, & \frac{1}{3}\leqslant\mu<1\\ (q_0,0):\ell_B(q_0,0,\mu)=0, & 0<\mu\leqslant\frac{1}{3}\end{cases}$$



(a) $\mu = 0.1 < \frac{1}{3}$



(b) $\mu = 0.4 > \frac{1}{3}$

На графике зелёным цветом изображена область $P_B(\mu)$, чёрным цветом обозначены линии уровня и стрелкой соответсвенно градиент функции. Рассмотрим эти два случая и найдём явное выражение для точки $B(\mu)$:
(a) Если $\frac{1}{3} \leqslant \mu \leqslant 1$ то координата q_2 точки максимума определяется из условия:

$$\ell_B(0, q_2, \mu) = 0$$

$$(1 - \sqrt{2} + \mu(\sqrt{2} - 3))q_2 + 3\mu - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_2 = \frac{3\mu - 1}{\sqrt{2} - 1 + (3 - \sqrt{2})\mu}$$

$$q^* = (0; \frac{3\mu - 1}{\sqrt{2} - 1 + (3 - \sqrt{2})\mu}), \quad \frac{1}{3} \leqslant \mu \leqslant 1$$

(b) Если $0 \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{3}$ то координата q_0 точки максимума определяется из условия:

$$\ell_B(q_0, 0, \mu) = 0$$

$$(1 + \mu(2\sqrt{2} - 3))q_0 + 3\mu - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_0 = \frac{1 - 3\mu}{1 + (2\sqrt{2} - 3\mu)}$$

$$q^* = (\frac{1 - 3\mu}{1 + (2\sqrt{2} - 3\mu)}; 0), \quad 0 \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{3}$$

Следовательно:

$$B(\mu) = \arg\max_{q \in P_B(\mu)} \overline{G}(y,q,\mu) = \begin{cases} (0; \dfrac{3\mu - 1}{\sqrt{2} - 1 + (3-\sqrt{2})\mu}), & \frac{1}{3} \leqslant \mu \leqslant 1 \\ (\dfrac{1-3\mu}{1+(2\sqrt{2}-3\mu)}; 0), & 0 \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{3} \end{cases} \tag{9}$$

(2) Рассмотрим $\ell_3 \leqslant \ell_4$. Производная в области имеет вид:

$$\frac{\partial \overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q} = \frac{1+p}{2\sqrt{2}\mu} \langle -1; \sqrt{2}-1 \rangle$$

Введём вспомогалетльную функцию $\ell_A(q,\mu) := (\ell_3 - \ell_4) \cdot \mu(1-\mu)$, множество, на котором она принимает неотрицательные значения составляют интересующую нас область. Множитель $\mu(1-\mu)$ является строго положительным на $\mu \in (0,1)$, поэтому не влияет на знак. Функция является линейной по переменным q_0 и q_2:

$$\ell_A(q,\mu) = -(2 + (\sqrt{2}-3)\mu)q_0 - (2 - 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2}-3)\mu)q_2 - 3\mu + 2$$

Параметр μ изменяется в диапазоне $(0,1)$, причём

$$\ell_A(q,\mu) \xrightarrow[\mu \to 1]{} 1 - q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2$$
$$\ell_A(q,\mu) \xrightarrow[\mu \to 0]{} 1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0$$

Предельные положения $\ell_B(q,\mu) = 0$ изображены на графике (3). Найдём значение μ при котором прямая $\ell(q,\mu)$ проходит через точку $q = (0,0)$:

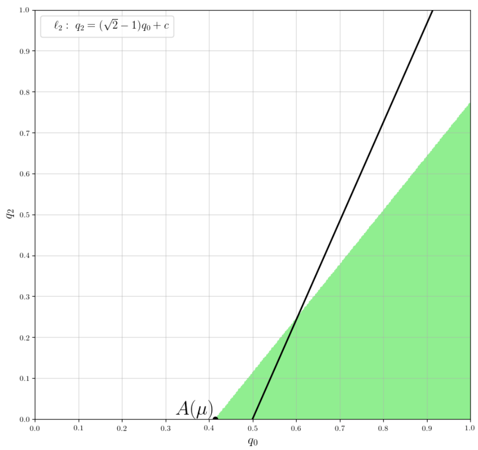
$$\ell_A(0,0,\hat{\mu}) = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{2}{3}$$

Очевидно, что на полиэдре $P_2(\mu)$:

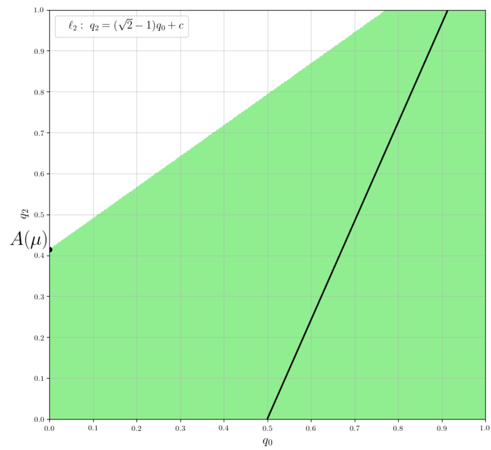
$$P_A(\mu) = \{q \in Q \mid \ell_3(q,\mu) \leqslant \ell_4(q,\mu)\},\ \mu \in (0,1)$$

функция $\overline{G}(p,q,\mu)$ достигает максимума в точке $A(\mu)$:

$$A(\mu) = \arg \max_{q \in P_A(\mu)} \overline{G}(p, q, \mu) = \begin{cases} (0, q_2) : \ell_A(0, q_2, \mu) = 0, & \frac{2}{3} \leqslant \mu \leqslant 1 \\ (q_0, 0) : \ell_A(q_0, 0, \mu) = 0, & 0 \leqslant \mu \leqslant \frac{2}{3} \end{cases}$$



(a) $\mu = 0.1 < \frac{2}{3}$



(b) $\mu = 0.8 > \frac{2}{3}$

На графике зелёным цветом изображена область $P_A(\mu)$, чёрным цветом обозначены линии уровня и стрелкой соответсвенно градиент функции. Рассмотрим эти два случая и найдём явное выражение для точки $A(\mu)$:
(a) Если $\frac{2}{3} \leqslant \mu \leqslant 1$ то координата q_2 точки максимума определяется из условия:

$$\ell_A(0, q_2, \mu) = 0$$

$$-(2 - 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2} - 3)\mu)q_2 - 3\mu + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_2 = \frac{3\mu - 2}{2(\sqrt{2} - 1) + (3 - 2\sqrt{2})\mu}$$

$$q^* = (0; \frac{3\mu - 2}{2(\sqrt{2} - 1) + (3 - 2\sqrt{2})\mu}), \quad \frac{2}{3} \leqslant \mu \leqslant 1$$

(b) Если $0 \leqslant \mu \leqslant \frac{2}{3}$ то координата q_0 точки максимума определяется из условия:

$$\ell_A(q_0,0,\mu)=0$$
$$-(2+(\sqrt{2}-3)\mu)q_0-3\mu+2=0 \quad\Rightarrow\quad q_0=\frac{2-3\mu}{2+(\sqrt{2}-3)\mu}$$
$$q^*=(\frac{2-3\mu}{2+(\sqrt{2}-3)\mu};0),\quad 0\leqslant\mu\leqslant\frac{2}{3}$$

Следовательно:

$$A(\mu)=\arg\max_{q\in P_A(\mu)}\overline{G}(p,q,\mu)=\begin{cases}(0;\dfrac{3\mu-2}{2(\sqrt{2}-1)+(3-2\sqrt{2})\mu}), & \frac{2}{3}\leqslant\mu\leqslant 1\\ (\dfrac{2-3\mu}{2+(\sqrt{2}-3)\mu};0), & 0\leqslant\mu\leqslant\frac{2}{3}\end{cases} \tag{10}$$

(3) Рассмотрим область в которой $\begin{cases}\ell_1\leqslant\ell_2\\ \ell_3\geqslant\ell_4\end{cases}$

Частные производные имеют следующий види в данной области.
$\dfrac{\partial\overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q}=$
$\dfrac{1}{2\sqrt{2}\mu(1-\mu)}\left\langle(\sqrt{2}-1)p\mu-(1-p)(1-\mu);(\sqrt{2}-1)(1-p)(1-\mu)-p\mu\right\rangle$

$$g_1=(\sqrt{2}-1)p\mu-(1-p)(1-\mu)$$
$$g_2=(\sqrt{2}-1)(1-p)(1-\mu)-p\mu$$

Заметим, что функция $\overline{G}(p,q,\mu)$ является линейной по переменным q_0 и q_2 т.е.:

$$\overline{G}(p,q,\mu)=g_0(p,\mu)\,q_0+g_2(p,\mu)\,q_2+c(p,\mu)$$
и
$$\overline{G}(p,q,\mu)=0\sim q_2=k(p,\mu)\cdot q_0+c(p,\mu)$$

Рассматриваем функцию на полиэдре $P_{AB}(\mu)$:

$$P_{AB}(\mu)=\{q\in Q\mid \ell_A(q,\mu)\geqslant 0\cap\ell_B(q,\mu)\leqslant 0\},\ \mu\in(0,1)$$

Ограничение $\ell_A(q,\mu) = 0$ и $\ell_B(q,\mu) = 0$ представимы в эквивалентном виде:

$$\ell_A(q,\mu) = 0 \sim \ q_2 = k_A(\mu)q_0 + c_A(\mu)$$
$$\ell_B(q,\mu) = 0 \sim \ q_2 = k_B(\mu)q_0 + c_B(\mu)$$

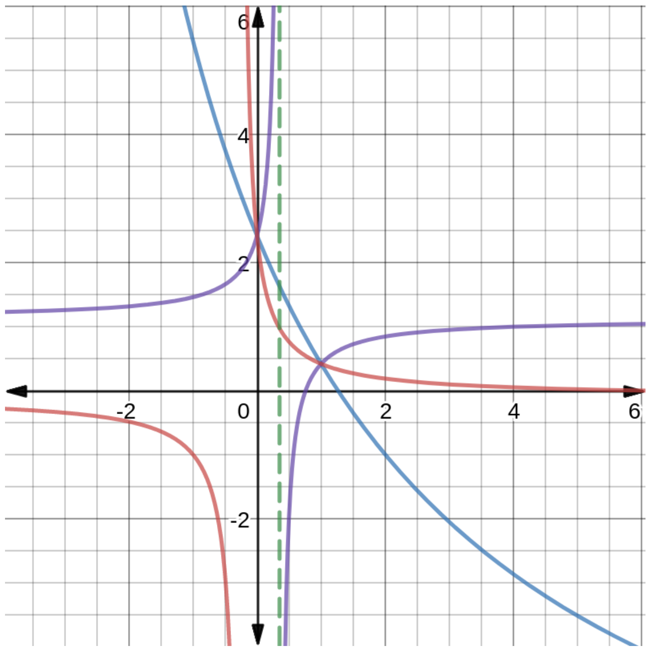


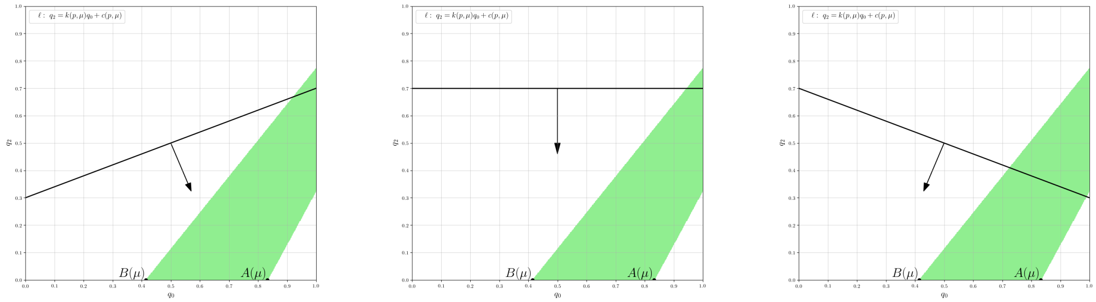
Рис. 6: Коэффициенты $k_A(\mu)$, $k_B(\mu)$ и $k(p,\mu)$ при фиксированном p

Рассмотрим график 6, на котором изображены значения коэффициетов при фиксированном значении $p \in [0,1]$. $k_B(\mu)$ изображены красной кривой, $k_A(\mu)$ синей и фиолетовой - кривая $k(p,\mu)$. Пунктирная вертикальная линия обозначает точку x в которой выражение $g_1 = 0$. Имеет место неравенство $k_A(\mu) > k_B(\mu)$ при $\mu \in (0,1)$.

$$\begin{cases} k(\mu) < k_B(\mu) \text{ при } g_1(\mu,p) < 0 \\ k(\mu) > k_A(\mu) \text{ при } g_1(\mu,p) > 0 \end{cases}$$

Следовательно точки максимума функции $\overline{G}(p,q,\mu)$ при фикисированных значениях μ и p могут быть точки: $\{A\}, \{B\}, (0,0)$ и отрезки $[B,A], [0,A], [0,B]$. Где точки $A(\mu)$ и $B(\mu)$ определны в 10 и 9.
Рассмотрим три подслучая:

(a) $0 \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{3}$.

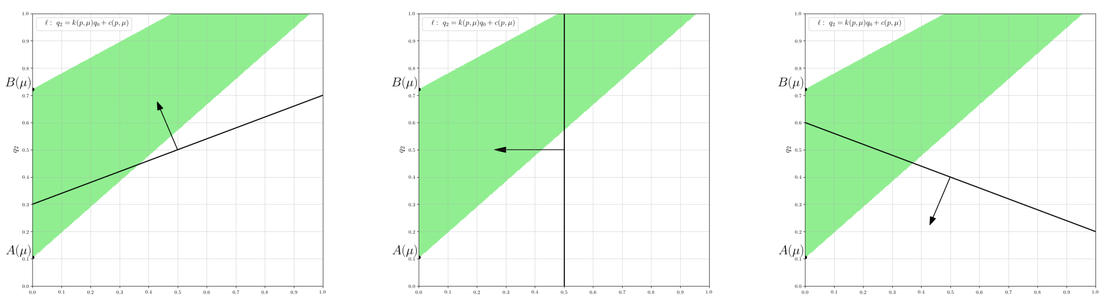


(a) $g_1 > 0 \Rightarrow q^* = A$ (b) $g_1 = 0 \Rightarrow q^* = [B, A]$ (c) $g_1 < 0 \Rightarrow q^* = B$

Рис. 7

$$\begin{cases} g_1 > 0 \Rightarrow q^* = A \\ g_1 = 0 \Rightarrow q^* = [B, A] \\ g_1 < 0 \Rightarrow q^* = B \end{cases}$$

(b) $\frac{2}{3} \leqslant \mu \leqslant 1$

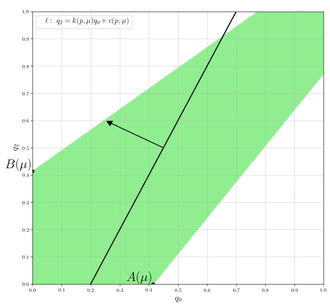


(a) $g_2 > 0 \Rightarrow q^* = B$ (b) $g_2 = 0 \Rightarrow q^* = [B, A]$ (c) $g_2 < 0 \Rightarrow q^* = A$

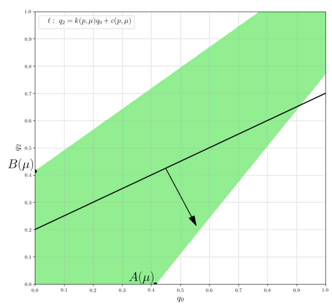
Рис. 8

$$\left[\begin{array}{c} g_2 > 0 \Rightarrow q^* = B \\ g_2 = 0 \Rightarrow q^* = [B, A] \\ g_2 < 0 \Rightarrow q^* = A \end{array} \right.$$

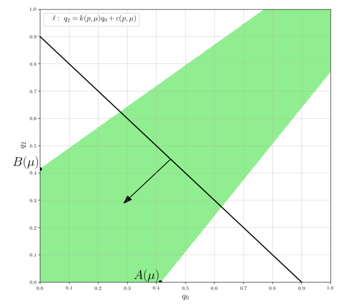
(c) $\frac{1}{3} \leqslant \mu \leqslant \frac{2}{3}$



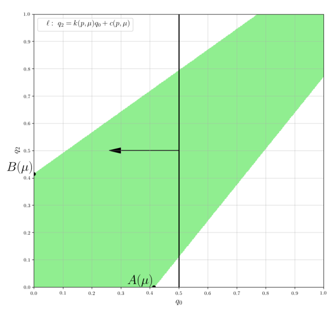
(a) $g_2 > 0 \Rightarrow q^* = B$



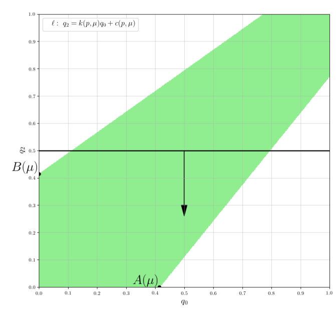
(b) $g_1 > 0 \Rightarrow q^* = A$



(c) $\begin{cases} g_2 < 0 \\ g_1 < 0 \end{cases} \Rightarrow q^* = (0,0)$



(d) $g_2 = 0 \Rightarrow q^* = [0, B]$



(e) $g_1 = 0 \Rightarrow q^* = [0, A]$

$$\left[\begin{array}{c} g_1 > 0 \Rightarrow q^* = A \\ g_2 > 0 \Rightarrow q^* = B \\ g_1 = 0 \Rightarrow q^* = [0, A] \\ g_2 = 0 \Rightarrow q^* = [0, B] \\ \begin{cases} g_2 < 0 \\ g_1 < 0 \end{cases} \Rightarrow q^* = (0,0) \end{array}\right.$$

Итого получим следующие
$C(p, \mu) =$

$$\arg\max_{P_{AB}} \overline{G}(p,q,\mu) \begin{cases} A(\mu), & g_2(p,\mu) < 0 \cup \mu \leqslant \frac{1}{3} \cap g_2 < 0 \\ B(\mu), & g_1(p,\mu) > 0 \cup \mu \geqslant \frac{2}{3} \cap g_1 > 0 \\ (0,0), & g_1(p,\mu) < 0 \cap g_2(p,\mu) < 0 \\ [A(\mu), B(\mu)], & g_1(\mu) = 0 \cap \mu < \frac{1}{3} \cup g_1(\mu) = 0 \cap \mu > \frac{2}{3} \\ [0, A(\mu)], & g_2(\mu) = 0 \cap \mu \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ [0, B(\mu)], & g_1(\mu) = 0 \cap \mu \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \end{cases}$$

Но кроме того точки $A(\mu)$ и $B(\mu)$ являются оптимальными $\forall\ p$ и μ поскольку являются таковыми в **(1)** и **(2)**. Итого в области P_B оптимальной является точка $B(\mu)$, в области P_A оптимальной является точка $A(\mu)$, и в области P_{AB} оптимальной является точка $C(p,\mu)$. Поскольку если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на множестве X, то и $min(f(x), g(x))$ непрерывна на X, то максимум достигается в точке C.
$q^*(p,\mu) =$

$$\arg\max_{Q} \overline{G}(p,q,\mu) \begin{cases} A(\mu), & g_2(p,\mu) < 0 \cup \mu \leqslant \frac{1}{3} \cap g_2 < 0 \\ B(\mu), & g_1(p,\mu) > 0 \cup \mu \geqslant \frac{2}{3} \cap g_1 > 0 \\ (0,0), & g_1(p,\mu) < 0 \cap g_2(p,\mu) < 0 \\ [A(\mu), B(\mu)], & g_1(\mu) = 0 \cap \mu < \frac{1}{3} \cup g_1(\mu) = 0 \cap \mu > \frac{2}{3} \\ [0, A(\mu)], & g_2(\mu) = 0 \cap \mu \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ [0, B(\mu)], & g_1(\mu) = 0 \cap \mu \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ (0,1), & \mu = 0 \\ (1,0), & \mu = 1 \end{cases}$$

Поскольку в пункте 3.1 мы установили, что

$$p^*(q, \lambda(q)) = \arg\max_{p \in [0,1]} \overline{L}(p, q, \lambda(q)) = [0,1]$$

Нас интересуют оптимальные пары (p^0, q^0) такие, что $\exists (\lambda, \mu) \in [0,1]^2$:

$$\begin{cases} p^0 = p^*(q^0, \lambda) \\ q^0 = q^*(p^0, \mu) \end{cases}$$

Введём следующие множества:

$$P_0 = [0,1],\ Q_0 = \{(q_0, q_2) \in Q \mid q_0 = 0 \text{ или } q_2 = 0\}$$

Следующие точки являются оптимальными:

$$(p,q) \in P_0 \times Q_0$$

4 Оптимальные значения

4.1 Заключение

Заключение

5 Ссылки на источники

[1] Matthais Ehrgott. *Multicriterial optimization. page 38, Defenition 2.24*
[2] Н.М. Новикова, И.И. Поспелова. *Смешанные стратегии в векторной оптимизациий и свёртка Гермейера.*
[3] С.В. Кононов. *Смешанные стратегии в векторной оптимизации и свертка Гермейера.*
[4] Ю.Б. Гермейер *Введение в теорию исслежования операций*
[5] Карлин С. *Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.*