Московский Государственный Университет имени

М.В.Ломоносова

Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

Кафедра Исследования Операций

Выпускная квалификаионная работа

Исследование модельной игры преподавателя и студента с применением свёртки Гермейера у студента

Автор:

группа 411

Кононов Сергей Владиславович

Научный руководитель:

к.ф.-м.н

Поспелова Ирина Игоревна

Москва, 2019

Аннотация

Исследование модельной игры преподавателя и студента с применением свёртки Гермейера у студента

Кононов Сергей Владиславович

В данной работе проводится исследование в области применения разных сверток в игре с векторным выигрышем. Анализируются и сопоставляются решения игры при различной дискретизации непрерывной игры.

Содержание

1 Введение

Теорией игр называется математическая теория принятия решений в конфликтных ситуациях. В простейших моделях рассматривается *лицо принимающее решение* (ЛПР), которое выбирает своё действие из некоторого множества стратегий. Считается, что задана *целевая функция*, которая отражает интересы ЛПР и зависит от выбранной им стратегий. Задача принятия решений состоит в том, чтобы найти стратегию, при которой достигается максимум целевой функции. Отличие конфликтной ситуации заключается в том, что решения принимаются не одним лицом, а всеми участниками конфликтной ситуации и функция выигрыша каждого индивида зависит не только от его решения, но и от решения остальных участников. Модель такого вида называется – игрой, а участники конфликта – игроками. В рамках данной работы будет рассмотрена задача из теории *некооперативных игр* – игр, в которых игроки действуют самостоятельно, независимо друг от друга. Определим формально модель игры с несколькими участниками в общем виде.

Есть конечное *множество игроков* $A = \{1, 2, ..., m\}$. Каждый игрок $a \in A$ имеет *множество чистых стратегий* $S_a = \{1, 2, ..., n_a\}$, при этом *игровой ситуацией* или просто *ситуацией* называется m-мерный вектор:

$$\mathbf{s} = (s_1,\, s_2, \ldots,\, s_m) \in S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_m, \tag{1}$$

где $X \times Y$ обозначает декартово произведение множеств X и Y. *Функция выигрыша* F_a, $a \in A$ обозначает выигрыш игрока при конкретной ситуации в игре. Она определена для каждого игрока и имеет вид:

$$F_a : S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_m \to \mathbb{R},\ a \in A \tag{2}$$

Определение 1. *Игрой в нормальной форме называется совокупность:*

$$G = \big\langle A, S, F \big\rangle \tag{3}$$

где:

$A = \{1,\, 2, ..., \, m\}$ *- множество игроков,*

$S = \{S_1,\, S_2, ..., \, S_m\}$ *- множество наборов чистых стратегий игроков,*

$F = \{F_1,\, F_2, ..., \, F_m\}$ *- множество функций выигрыша игроков. [1]*

Теперь введём фундаментальное понятие в теории игр – *равновесие по Нэшу*:

Определение 2. *Ситуация* $\boldsymbol{s} = (s_1^0,\, s_2^0, ..., \, s_m^0)$ *называется [1] равновесием по Нэшу в игре* (3)*, если:*

$$\max_{s_a \in S_a} F_a(s_1^0, ..., s_{a-1}^0, s_a, s_{a+1}^0 ..., s_m^0) = F_a(s_1^0, ..., s_{a-1}^0, s_a^0, s_{a+1}^0 ..., s_m^0),\ \forall\, a \in A. \quad (4)$$

Смысл этого определения заключается в том, что при ситуации в игре, которая является равновесием по Нэшу, ни одному игроку индивидуально не выгодно отклоняться от своей текущей стратегии.

До этого мы рассматривали функции выигрыша игроков, которые имели вид (2), т.е. каждому игроку соответствовало одно значение, зависящее от ситуации игры. Однако, не всегда интересы могут быть выражены одним критерием. Часто возникают разные оценки качества принимаемого решения, причем они могут быть противоречивыми и их нельзя свести друг у другу. Например характеристиками решения могут быть такие значения как *(время, деньги)* или *(математическое ожидание, дисперсия)*. Следуя этим рассуждениям рассмотрим такое обобщение игры (3), что функция выигрыша игроков имеет вид:

$$F : S_1 \times S_2 \times ... \times S_m \to \mathbb{R}^n,\ n \in \mathbb{N} \quad (5)$$

Такое обобщение ближе к реальным ситуациям в которых критерием выбора представляет собой несколько значимых параметров. Для примера такой игры можно привести задачу выбора машины: допустим покупателю важно чтобы машина имела большую мощность, достаточный уровень безопасности и мало стоила, продавцу же важно, чтобы она стоила как можно дороже и кроме того следует продавать те машины, которые плохо покупают. Таким образом мы получили игру, в которой игроки имеют три и два критерия соответственно, которые важны для них при выборе стратегии. Пока что мы допустили существование игры с функцией выигрыша вида (5). Формализация и подробное описание будет позже.

Приведённые выше обобщения приводят нас к другому разделу математики, а именно – *многокритериальной оптимизации*. Рассмотрим следующую задачу которая относится к этой области.

$$\operatorname*{Max}_{x \in X} F(x),\ F(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)),\ X \subseteq \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

где $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, m$. Это задача заключается в том, что у нас есть n-мерная функция, которая представляет собой множество значений критериев, зависящих от параметров, которые принадлежат некоторому множеству. Особенность заключается в том, что правило сравнения двух векторов не определено однозначно, т.е. в общей задаче не всегда можно точно сказать, какой из двух векторов значений функции предпочтительнее. В примере про покупку автомобиля можно сказать, что если одна машина более мощная и менее дорогая чем вторая, то она предпочтительнее, однако, если она более мощная, но при этом и стоит дороже, то правило их сравнения не определено. Введём понятие *оптимальных (эффективных) по Парето* и *оптимальных (эффективных) по Слейтеру* векторов в задаче (6). И значением максимума в задаче (6), который в отличие от скалярного максимума записывается с заглавной буквы, будем считать *множество Слейтера* в критериальном пространстве $\mathbb{R}^m$.

Определение 3. *Допустимое решение $\hat{x} \in X$ называется оптимальным по Слейтеру (оптимальным по Парето) для задачи* (6)*, если **не** существует $x \in X$ такого, что $f_k(x) > f_k(\hat{x})$ ($f_k(x) \geqslant f_k(\hat{x})$) для всех $k = 1, \ldots, m$. Множество всех оптимальных по Слейтеру (оптимальных по Парето) решений задачи* (6) *называется множеством Слейтера (множеством Парето) задачи* (6). *[2]*

Другими словами это такое множество значений, при котором значение каждого частного показателя, характеризующего систему, не может быть улучшено без ухудшения других.

Для поиска множества Слейтера существуют разные методы [2], [3], в текущей работе исследуется *метод свёрток* [4]. Метод заключается в том, что задача (6) заменяется параметрическим семейством скалярных задач:

$$\max_{x \in X} C(\{f_i\}_{i=1}^m, \lambda, x),\ \lambda \in \Lambda$$

где:

C – функция свертки частных критериев $\{f_i\}_{i=1}^m$ задачи (6) в единый скалярный критерий,

λ – параметр свертки заданный на некоторой области определения Λ.

В текущей работе рассмотрены две различные свёртки – *линейная свёртка* и *обратная логическая свёртка*:

Определение 4. *Линейной свёрткой с параметром λ для функции критериев задачи* (6) *называется [2] функция:*

$$L(\{f_i\}_{i=1}^m, \lambda, x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i, \tag{7}$$

где

$$\lambda \in \Lambda = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \mid \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0\ i = 1, \ldots m\}. \tag{8}$$

Определение 5. *Свёрткой Гермейера с параметром μ для функции критериев задачи* (6) *называется [4] функция:*

$$G(\{f_i\}_{i=1}^m, \mu, x) = \min_{i:\mu_i > 0} \mu_i f_i, \tag{9}$$

где

$$\mu \in M = \{(\mu_1, \ldots, \mu_m) \mid \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1,\ \mu_i \geq 0\ i = 1, \ldots m\}. \tag{10}$$

Применение линейной свёртки в задачах вида (6) обосновывается теоремой Карлина:

Теорема 1 (Карлин)**.** *Рассмотрим задачу* (6)*. Пусть множество* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *выпукло, а функции* $f_1, \dots, f_m$ *- вогнуты на нём. Если* x^* *– эффективная по Парето точка, тогда существует вектор* $\lambda \in \Lambda$ *из* (8) *такой, что* x^* *является точкой максимума функции* (7) *по переменной* x*. [5]*

Гермейером была предложена свертка, которая также аппроксимирует множество Слейтера. Её применение в многокритериальных задачах обосновывается следующей теоремой Гермейера:

Теорема 2 (Гермейер)**.** *Рассмотрим задачу* (6)*. Пусть* x^* *- эффективная по Слейтеру точка, причем* $f_1(x^*) > 0, \dots, f_m(x^*) > 0$*. Тогда существует вектор* $\mu \in M$ *из* (10) *и* x^* *является точкой максимума функции* (9) *по переменной* x*. [4]*

В работе будет использоваться модификация свёртки Гермейера - *обратная логическая свертка.* Она отличается только тем, что веса (параметры свёртки) стоят в знаменателе, а не в числителе.

Определение 6. *Обратной логической свёрткой с параметром* μ *для функции критериев задачи* (6) *называется функция:*

$$G(\{f_i\}_{i=1}^m, \mu, x) = \min_{i:\mu_i > 0} \frac{f_i}{\mu_i}, \tag{11}$$

где $\mu \in M$ *определено в* (10)*.*

Вернёмся к рассмотрению некооперативных игр. Если множество чистых стратегий у игроков конечно, то игра называется *конечная.* Для конечной игры определим обобщение модели, а именно - *смешанное расширение игры.* Смысл смешанного расширения игры заключается в том, что каждый игрок выбирает любую из своих чистых стратегий с некоторой фиксированной вероятностью, и его стратегией является не одна чистая стратегия, а вероятностное распределение над множеством его чистых стратегий. Выигрышем игрока в таком случае считаем взвешенный выигрыш по всем ситуациям с весами соответствующими вероятностям данной ситуации. Определим эти понятия формально.

Пусть в игре $G = \langle A, S, F \rangle$. A – конечное множество игроков, $A = \{1, 2, ..., m\}$, причём множества чистых стратегии $S_a = \{1, 2, ..., n_a\}$ $a \in A$ конечны. *Смешанной стратегией* игрока $a \in A$ называется вероятностное распределение над множеством чистых стратегий S_a игрока $a \in A$:

$$\pi^a \in P_a = \{(\pi_1^a, \pi_2^a, ..., \pi_{n_a}^a) \in [0,1]^{n_a} \mid \sum_{i=1}^{n_a} \pi_i^a = 1\}$$

где π_i^a - это вероятность выбора игроком $a \in A$ чистой стратегии s_i^a в качестве реальной стратегии игрока, а $[0,1]^n$ обозначает n-ую декартову степень отрезка $[0,1]$. Симплекс P_a называется *множеством смешанных стратегий игрока.* Введём обозначение для заданного набора стратегий:

$$\pi = (\pi^1, \ldots, \pi^m) \in P = P_1 \times \ldots \times P_m,$$

и вероятности реализации ситуации $\mathbf{s}$ из (1):

$$p(s|\pi) = \prod_{a \in A} \pi_{s_a}^a.$$

Тогда математическое ожидание выигрыша игрока $a \in A$ задаётся функцией:

$$\overline{F}_a(\pi) = \sum_{s \in S} p(s|\pi) F_a(s),$$

где функция F_a - определена в (3). Таким образом смешанное расширение игры в нормальной форме определяется следующим образом:

Определение 7. *Смешанным расширением игры в нормальной форме называется совокупность:*

$$\overline{G} = \{A, P, \overline{F}\} \tag{12}$$

где:

$A = \{1, 2, ..., m\}$ *– множество игроков,*

$P = P_1 \times \ldots \times P_m$ *– множество наборов смешанных стратегий игроков,*

$\overline{F} = \{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_m\}$ *– множество функций выигрыша игроков.*

Ситуации равновесия (4) игры $\overline{G}$ будем называть *ситуациями равновесия в смешанных стратегиях игры G* или *смешанными равновесиями по Нэшу.*

Теперь в игре (12) будем считать, что функции выигрыша $F_a,\ a \in A$ имеют вид (5). Обозначим через $S_a(\pi||a),\ a \in A$ множество Слейтера задачи $\underset{\pi\,:\,\pi^a \in P^a}{\mathrm{Max}} \overline{F}_a(\pi)$, в которой все координаты π, кроме a фиксированы.

Определение 8. *Решением игры* (12) *согласно [3] является множество ситуаций P^*:*

$$P^* = \{\pi = (\pi^1, \ldots, \pi^m) \in P \mid \pi^a \in S_a(\pi||a),\ a \in A\} \tag{13}$$

В случае конечных многокритериальных игр Шепли свел [6] описание данного множества к семейству задач поиска значений скалярных игр с функциями выигрышей – ЛС частных критериев при произвольном наборе весовых коэффициентов, своих у каждого игрока. В случае скалярной игры осреднение однозначно, а для скаляризованной вектор-функции могут быть разные варианты.

Целью данной выпускной квалификационной работы является исследование применения разных сверток в игре с векторным выигрышем.

2 Общая постановка задачи

Рассматриваются два игрока – Студент, далее обозначается **С**, и Преподаватель, далее обозначается **П**, которые имеют противоположные интересы. Критерий интересов составляют две величины, первая из которых является эффективностью работы **С** в научной сфере, а вторая – его эффективностью на подработке.

С выбирает долю x рабочего времени, которую он тратит на подготовку диплома, оставшееся рабочее время $1 - x$ он тратит на подработку. Считается, что производительность **С** при любых занятий падает с увеличением отводимого на них времени, поэтому эффективность труда **С** зададим функцией $\sqrt{x}$ и $\sqrt{1-x}$ соответственно. **С** может распределять свое время между двумя видами деятельности, т.е. имеет множество стратегий $x \in X = [0, 1]$, причём он может использовать смешанные стратегии.

П выбирает – относиться к **С** требовательно, способствуя написанию диплома и мешая подработке или же не мешать подработке и не помогать **С**с дипломом. **П** имеет множество стратегий $y \in Y = \{1, 2\}$, причём тоже может использовать смешанные стратегии.

Определим вектор-функцию выигрыша следующим образом:

$$F(x, y) = \big(f_1(x, y), f_2(x, y)\big) = \Big(\frac{y\sqrt{x}}{2}, \frac{\sqrt{1-x}}{y}\Big) \tag{14}$$

П стремится минимизировать (выбирая $y \in Y = \{1, 2\}$) вектор-функцию выигрыша $F(x, y)$, а игрок **С** - максимизировать (выбирая $x \in X = [0, 1]$).

Мы будем рассматривать конечную игру **С** — **П**, полученную из исходной дискретизацией множества X конечным множеством точек:

$$X^T = \{0,\ \frac{1}{T},\ \frac{2}{T},\ \dots,\ \frac{T-1}{T},\ 1\},\ \ T \in \mathbb{N}$$

Поскольку игроки используют смешанные стратегии, определим допустимые распределения q и p зависимые от параметра дискретизации T для игрока **С** и

П соответственно:

$$q \in Q(T) = \{(q_1, \ldots, q_{T+1}) \in [0,1]^{T+1} \mid \sum_{i=1}^{T+1} q_i = 1\} \tag{15}$$

$$p \in P = \{(p_1, p_2) \in [0,1]^2 \mid p_1 + p_2 = 1\} \tag{16}$$

Теперь задачу можно представить в виде многокритериальной игры двух лиц с противоположными интересами:

$$G = \left\langle A, S, \mathbf{F} \right\rangle \tag{17}$$

где:

A ={**С**, **П**} – множество игроков,

S = $\{Q(T),\ T\}$ – множество наборов смешанных стратегий игроков,

$\mathbf{F} = \{F,\ -F\}$ – множество вектор-функций выигрыша игроков.

В работе исследуются случаи дискретизации, когда $T = 1$ и тогда множество $X^1 = \{0, 1\}$, и когда $T = 2$, тогда множество чистых стратегий **С** принимает вид $X^2 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. В каждом случае необходимо решить игру, т.е. найти равновесия Нэша в смешанных стратегиях. Составим план, по которому будет проходить поиск решений (12).

(1) Игроки используют смешанные стратегии, поэтому стратегий **С** и **П** будет распределение вероятностей $q \in Q(T)$ и $p \in P$ над множествами X^T и Y соответственно. Где $Q(T)$ и P – все допустимые распределения над этими множествами. Следовательно заменим вектор-функцию выигрыша каждого игрока на математическое ожидание этой функции по распределению вероятностей его стратегии. Для **С** и **П** функции принимают вид $\mathbb{E}_x[F(x,y)]$ и $\mathbb{E}_y[-F(x,y)]$:

$$\mathbb{E}_x[F(x,y)] = \left\langle \mathbb{E}_x[f_1(x,y)], \mathbb{E}_x[f_2(x,y)] \right\rangle$$
$$\mathbb{E}_y[-F(x,y)] = \left\langle \mathbb{E}_y[-f_1(x,y)], \mathbb{E}_y[-f_2(x,y)] \right\rangle$$

(2) Каждый игрок выбирает функцию свёртки, которая будет аппроксимировать его множество Слейтера S_a. В данной работе исследуется случай, когда игрок **С** выбирает *обратную логическую свёртку*, а игрок **П** *линейную свёртку*. После чего игроки применяют свёртку к осреднённой вектор-функции выигрыша. Для **С** и **П** скаляризованные функции выигрыша принимают вид:

$$G(\mathbb{E}_x[F(x,y)], q, y, \mu)$$
$$L(\mathbb{E}_y[-F(x,y)], x, p, \lambda).$$

(3) Далее игроки получают скалярный критерий, который зависит от чистых стратегий противника. Поскольку игроки используют смешанные стратегии, то и рассчитывать на средний выигрыш, поэтому теперь каждый осредняет скаляризованные критерии по стратегиям противника. Мы получили функции выигрыша игроков, которые зависят от их смешанных стратегий. Для **С** и **П** функции выигрыша принимают вид

$$\overline{G}(p,q,\mu) = \mathbb{E}_y[G(\mathbb{E}_x[F(x,y)], q, y, \mu)]$$
$$\overline{L}(p,q,\lambda) = \mathbb{E}_x[L(\mathbb{E}_y[-F(x,y)], x, p, \lambda)].$$

(4) Мы получили игру в смешанных стратегиях и теперь необходимо найти все возможные равновесия Нэша (4) при фиксированных параметрах свёртки. Стратегии, которые являются решениями будем называть *оптимальными стратегиями*. В конкретном случае они определяются следующим образом:

Определение 9. *Пара стратегий* $(p^0, q^0) \in P(T) \times Q$ *называется оптимальными, если для некоторой пары параметров* $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M$ *верно:*

$$\begin{cases} p^0(q^0, \lambda) = \arg\min\limits_{p \in P} \overline{L}(p, q^0, \lambda) \\ q^0(p^0, \mu) = \arg\min\limits_{q \in Q} \overline{G}(p^0, q, \mu) \end{cases} \tag{18}$$

Использованы следующие обозначения:

$$\arg\max_{x \in X} f(x) = \{x^* \in X \mid f(x^*) = \max_{x \in X} f(x)\}$$
$$\arg\min_{x \in X} f(x) = \{x^* \in X \mid f(x^*) = \min_{x \in X} f(x)\}$$

Множество всех оптимальных пар обозначим через $\mathbb{O}_T$, *где* T *– означает степень дискретизации для конкретной задачи.*

3 Постановка задачи. Параметр дискретизации T=1

Сначала рассмотри случай с параметром $T = 1$. Тогда множество $X^1 = \{0, 1\}$. Игроки используют смешанные стратегии, т.е. распределение над своими чистыми стратегиями. Чистыми стратегиями игроков **С** и **П** являются $X^1 = \{0, 1\}$ и $Y = \{1, 2\}$ соответственно. Эти множества дискретны и равномощны, поэтому распределения задаются в виде векторов:

$$(p_1, p_2) \in P = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid p_1 + p_2 = 1)\}$$
$$(q_1, q_2) \in Q(1) = P$$

где $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geqslant 0 \;\; i = 1, \dots n\}$. Обозначим $Q_1 := Q(1)$. Смешанные стратеги игроков **С** и **П** будем обозначать $q = (q_0, q_1) \in Q_1$ и $p = (p_0, p_1) \in P$ соответственно, причём:

$$\begin{aligned} &P(X = 0) = q_0 \qquad\qquad &&P(Y = 1) = p_0 \\ &P(X = 1) = q_1 &&P(Y = 2) = p_1 \end{aligned} \tag{19}$$

Введём обозначения $q := q_1$ и $p := p_1$, тогда $q_0 = 1 - q$ и $p_0 = 1 - p$. Игрок **С** использует смешанную стратегию (q_0, q_1), тогда его вектор-функция выигрыша (14) приобретает вид:

$$F_{\text{С}}(q, y) = \left\langle q_0 \frac{y\sqrt{0}}{2} + q_1 \frac{y\sqrt{1}}{2}; q_0 \frac{\sqrt{1}}{y} + q_1 \frac{\sqrt{0}}{y} \right\rangle = \left\langle \frac{q_1 y}{2}; \frac{q_0}{y} \right\rangle$$

Игрок **П** использует смешанную стратегию (p_0, p_1), тогда его вектор-функция выигрыша (14) приобретает вид:

$$F_{\Pi}(x, p) = \left\langle (1-p)\frac{1 \cdot \sqrt{x}}{2} + p\frac{2 \cdot \sqrt{x}}{2};\; (1-p)\frac{\sqrt{1-x}}{1} + p\frac{\sqrt{1-x}}{2} \right\rangle =$$
$$= \frac{1}{2}\left\langle (p+1)\sqrt{x};\; (2-p)\sqrt{1-x} \right\rangle$$

Далее игрок **С** использует *обратную логическую свёртку* (11):

$$G(y,q,\mu) = \min_{i:\mu_i>0}\{\frac{q_1 y}{2\mu_0};\frac{q_0}{y\mu_1}\},$$

а игрок **П** использует *линейную свёртку* (7):

$$L(p,x,\lambda) = \lambda_0(p+1)\sqrt{x} + \lambda_1(2-p)\sqrt{1-x}.$$

После чего игрок **С** осредняет свёртку критерия по стратегиям игрока **П**, т.е. по переменной y:

$$\overline{G}(p,q,\mu) = p\min\{\frac{q}{\mu};\frac{1-q}{2(1-\mu)}\} + (1-p)\min\{\frac{q}{2\mu};\frac{1-q}{1-\mu}\},$$

а игрок **П** осредняет свёртку критерия по стратегиям игрока **С**, т.е. по переменной x:

$$\overline{L}(p,q,\lambda) = \frac{1}{2}\big\{q(3\lambda+p-2) + (2-p)(1-\lambda)\big\}.$$

Мы определили функции выигрыша игроков. Теперь задачу можно формализовать и представить как семейство игр двух игроков в нормальный форме:

$$\Big\langle\{\mathbf{C},\,\mathbf{\Pi}\},\{Q_1,\ P\},\{\overline{G}(p,q,\mu),-\overline{L}(p,q,\lambda)\}\Big\rangle,\ (\lambda,\mu)\in\Lambda\times M$$

Область определения параметров λ и μ задана в определении свёрток (7) и (11). Знак минус перед второй функцией выигрыша означает, что игрок стремится её минимизировать. Для нас представляет интерес множество оптимальных точек (18).

4 Постановка задачи. Параметр дискретизации T=2

Теперь рассмотрим случай с параметром дискретизации $T = 2$. Тогда множество X^T принимает вид $X^2 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Игроки используют смешанные стратегии, т.е. вероятностные распределения над своими чистыми стратегиями. Чистыми стратегиями игроков **С** и **П** являются $X^2 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ и $Y = \{1, 2\}$ соответственно. Эти множества дискретны, поэтому вероятностные распределения над ними задаются в виде векторов:

$$(q_0, q_1, q_2) \in Q(2) = \{(q_0, q_1, q_2) \in [0, 1]^3 \mid q_0 + q_1 + q_2 = 1)\},$$
$$(p_1, p_2) \in P = \{(p_1, p_2) \in [0, 1]^2 \mid p_1 + p_2 = 1).\}$$

Смешанные стратеги игроков **С** и **П** будем обозначать $q = (q_0, q_1, q_2) \in Q(2)$ и $p = (p_0, p_1) \in P$ соответственно, причём:

$$\begin{aligned} &P(X = 0) = q_0 && P(Y = 1) = p_0 \\ &P(X = \tfrac{1}{2}) = q_1 && P(Y = 2) = p_1 \\ &P(X = 1) = q_2 && \end{aligned} \tag{20}$$

Введём обозначения $p := p_1$, тогда $p_0 = 1 - p$. Поскольку верно, что одна из переменных выражается через две другие: $q_1 = 1-q_0-q_2$, то будем рассматривать задачу на соответствующем от двух переменных $q = (q_0, q_2) \in Q$:

$$Q = \{(q_0, q_2) \in [0, 1]^2 \mid q_0 + q_2 \leqslant 1\}.$$

Сначала определим функции выигрыша $\overline{G}(p, q, \mu)$ и $\overline{L}(p, q, \lambda)$, а затем найдём их найти точки максимума и минимума при фиксированных параметрах свёрток:

$$q^*(p, \mu) = \arg\max_{q \in Q} \overline{G}(p, q, \mu)$$
$$p^*(q, \lambda) = \arg\min_{p \in P} \overline{L}(p, q, \lambda).$$

Затем найдём множество оптимальных стратегий (18).

5 Решение игры. Параметр дискретизации T=2

5.1 Оптимальная стратегия преподавателя

Игрок **П** стремится минимизировать вектор-функцию выигрыша (14):

$$F(x,y) = \Big\langle \frac{y\sqrt{x}}{2}, \frac{\sqrt{1-x}}{y} \Big\rangle$$

Он использует смешанную стратегию, т.е. его стратегией является распределение $p = (p_0, p_1) \in P$ над множеством чистых стратегий $Y = \{1, 2\}$. Его вектор-функция выигрыша (14) приобретает вид:

$$\begin{aligned} F_\Pi(p,x) = \Big\langle (1-p)\frac{1\cdot\sqrt{x}}{2} + p\frac{2\cdot\sqrt{x}}{2};\ (1-p)\frac{\sqrt{1-x}}{1} + p\frac{\sqrt{1-x}}{2} \Big\rangle = \\ = \frac{1}{2}\big\langle (p+1)\sqrt{x};\ (2-p)\sqrt{1-x} \big\rangle. \end{aligned}$$

Затем использует **ЛС** (7):

$$L(p,x,\lambda) = \frac{1}{2}\big(\lambda(p+1)\sqrt{x} + (1-\lambda)(2-p)\sqrt{1-x}\big)$$

Далее осредняем функцию $L(p,x,\lambda)$ по стратегиям противника $x \in X = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ с вероятностями $q = (q_0, q_1, q_2)$:

$$\begin{aligned} \overline{L}(p,q,\lambda) = \frac{1}{2}\Big(q_0(1-\lambda)(2-p)\sqrt{1} + q_1\big(\lambda(p+1)\frac{1}{\sqrt{2}} + \\ + (1-\lambda)(2-p)\frac{1}{\sqrt{2}}\big) + q_2\lambda(p+1)\sqrt{1}\Big) = \\ = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\big(\lambda(q_1+\sqrt{2}q_2) - (1-\lambda)(q_1+\sqrt{2}q_0)\big)p + \big(\lambda(q_1+\sqrt{2}q_2) + 2(1-\lambda)(q_1+\sqrt{2}q_0)\big)\Big). \end{aligned}$$

Функция является линейной по переменной p:

$$\overline{L}(p,q,\lambda) = k(\lambda,q)p + b(\lambda,q),$$

где:

$$k(q,\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\big(\lambda(q_1+\sqrt{2}q_2) - (1-\lambda)(q_1+\sqrt{2}q_0)\big),$$
$$b(q,\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\big(\lambda(q_1+\sqrt{2}q_2) + 2(1-\lambda)(q_1+\sqrt{2}q_0)\big).$$

Наша задача – найти $p^*(q,\lambda) = \arg\min\limits_{p\in[0,1]} \overline{L}(p,q,\lambda)$. Поскольку функция $\overline{L}(p,q,\lambda)$ линейна по переменной p, следовательно:

$$p^*(q,\lambda) = \arg\min_{p\in[0,1]} \overline{L}(p,q,\lambda) = \begin{cases} 0, & k(\lambda,q) > 0 \\ 1, & k(\lambda,q) < 0 \\ [0,1], & k(\lambda,q) = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $k(q,\lambda)$:

$$k(q,\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\lambda\big(2+(\sqrt{2}-2)(q_0-q_2)\big) - \big(1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0\big)\Big)$$

Нас интересует знак это функции при различных значениях аргументов. Введём обозначения:

$$\ell(q) = \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{2+(\sqrt{2}-2)(q_0-q_2)}$$

Напомним, что множество Q имеет следующий вид:

$$Q = \{(q_0,q_2)\in\mathbb{R}^2_+ \mid q_0+q_2 \leqslant 1\}$$

Поскольку для $q\in Q$ верно:

$$2+(\sqrt{2}-2)(q_0-q_2) > 0$$
$$1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0 \geqslant 0$$
$$q_0+(\sqrt{2}-3)q_2-1 \leqslant 0$$

Следовательно:

$$k(q,\lambda)\vee 0 \Leftrightarrow \lambda \vee \ell(q) \text{ где } \vee \text{ это один из знаков } >,<,= .$$

Более того верно что $\forall\ q \in Q:\ \ 0 \leqslant \ell(q) \leqslant 1$. Проиллюстрируем это на рисунке 1. В плоскости $q = (q_0, q_2)$ изображены прямые $\ell_1(q)$ и $\ell_2(q)$ такие, что:

$$\ell_1(q):\ \ell(q) = 0$$
$$\ell_2(q):\ \ell(q) = 1$$

Зелёным цветом изображена область в которой $0 \leqslant \ell(q) \leqslant 1$. Видно, что квадрат $q = [0,1]^2$ а следовательно и множество Q полностью принадлежит этой области.

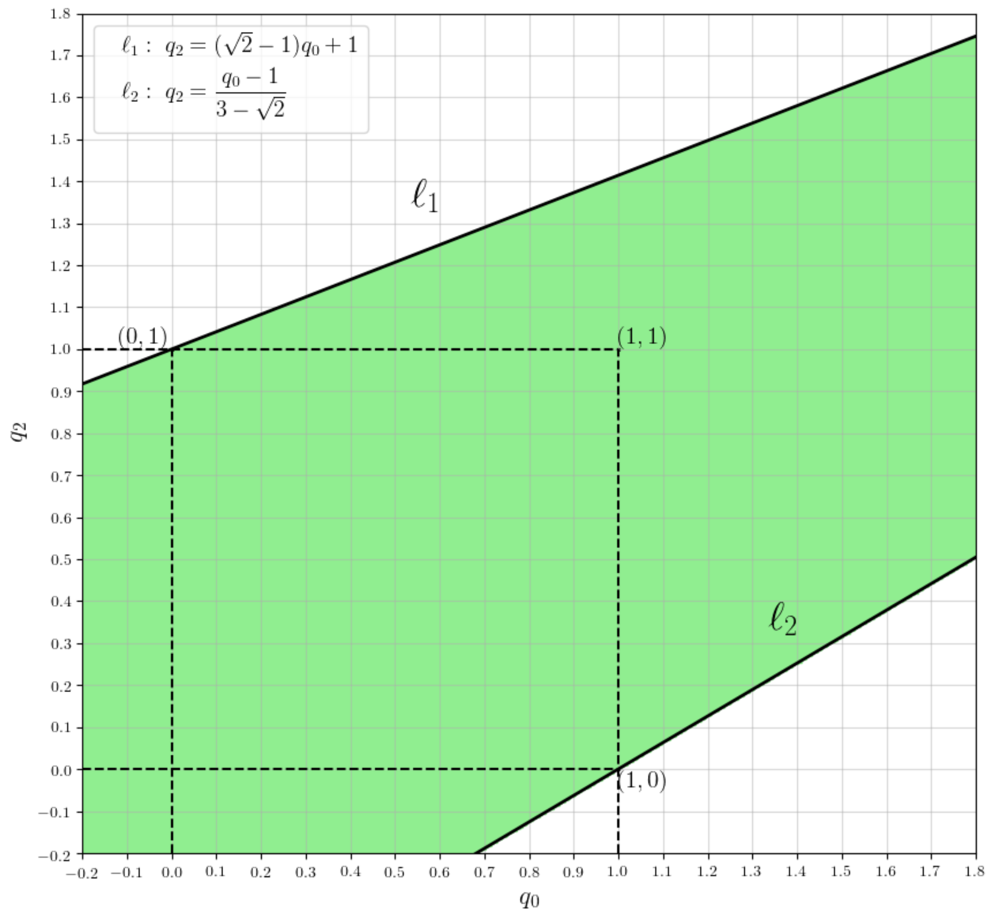

Рис. 1

Следовательно $\forall\, q = (q_0, q_2) \in Q\ \exists\, \lambda \in [0,1]:\ k(\lambda, q) = 0.$

$$p^*(\lambda, q) = \arg\min_{p\in[0,1]} \overline{L}(p, q, \lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \in \big(\ell(q), 1\big] \\ 1, & \lambda \in \big[0, \ell(q)\big) \\ [0,1], & \lambda = \ell(q) \end{cases}, \tag{21}$$

где $\ell(q) = \dfrac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{2 + (\sqrt{2}-2)(q_0 - q_2)}$.

Список литературы

[1] *Vasin A. A., Morozov V. V.* Game theory and mathematical economics models. — M.: MAKS Press, 2005.

[2] *Ehrgott M.* Multicriterial optimization. — Springer, 2005.

[3] *David B.* An analog of the minimax theorem for vector payoffs // *Pacific Journal of Mathematics.* — 1959. — Vol. 6.

[4] *Germejer Y. B.* Introduction into operations research. — M.: Nauka, 1971.

[5] *Karlin S.* Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics. — Dover Publications, 1992.

[6] *Shapley L. S.* Equilibrium points in games with vector payoffs // *Naval Research Logistics.* — 1959. — March. — Vol. 6.