

Свойства свёртки Гермейера в векторных играх

Кононов Сеергей

6 мая 2019 г.

Содержание

1	Введение	3
2	Множество оптимальных стратегий	5
3	Графическое изображение матожидания критерия	6
4	Оптимальные результаты для игрока С	8
5	Заключение	18
6	Введение	18
7	Постановка задача	18
8	Оптимальные значения	19
8.1	Рассмотрим игру за преподавателя	19
8.2	Рассмотрим игру за студента	21
9	Ссылки на источники	42

1 Введение

Рассмотрим задачу многокритериальной или векторной, оптимизации:

$$\text{Найти } \max_x F(x), \text{ где } F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)), \quad x \in X \text{ конечно} \quad (1)$$

Определение [1]

Допустимое решение $\hat{x} \in X$ называется *строго эффективным* (*эффективным по Слейтеру*), если не существует $x \in X$ такого, что $f(x) > f(\hat{x})$ т.е. $f_k(x) > f_k(\hat{x})$ для всех $k = 1, \dots, n$. Множество всех эффективных по Слейтеру решений называется *множеством Слейтера* задачи (1).

Для параметризации задачи и поиска множества Слейтера используется метод свёрток, согласно которому МК-задача $\max_x F(x)$ заменяется параметрическим семейством скалярных задач $\max_x C(\{f_i\}, \lambda)(x)$ где C – функция свертки частных критериев $\{f_i\}_{i=1}^m$ МК-задачи в единый скалярный критерий (монотонна по f), λ – параметр свертки.

Мы рассмотрим *линейную свёртку* (ЛС):

$$L(\{f_i\}, \lambda)(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i, \text{ где } \lambda \in \Lambda = \{\lambda_i \geq 0 \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}, \quad (2)$$

и *свёртку Гермейера*, или обратную логическую свёртку (ОЛС):

$$G(\{f_i\}, \lambda)(x) = \min_{\lambda_i > 0} \frac{f_i}{\lambda_i}, \text{ где } \lambda \in \Lambda = \{\lambda_i \geq 0 \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}. \quad (3)$$

Игровая модель

Студент (С) выбирает долю x рабочего времени, которую он тратит на подготовку диплома. Допустим, что эффективность подготовки пропорциональна \sqrt{x} . Оставшееся рабочее время $1 - x$ он тратит на подработку, и его второй критерий пропорционален $\sqrt{1 - x}$. Считается, что производительность любых занятий С падает с увеличением отводимого на них времени, обуславливая вогнутость по x частных критериев.

Допустим, что Студент не может распределять свое время между двумя видами деятельности, т.е. имеет множество стратегий $x \in X = \{0, 1\}$, причём может использовать смешанные стратегии. Преподаватель (П) имеет множество стратегий $y \in Y = \{1, 2\}$, причём тоже может использовать смешанные стратегии. При этом П стремится минимизировать, а С максимизировать следующий векторный критерий:

$$F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = \left(\frac{y\sqrt{x}}{2}, \frac{\sqrt{1-x}}{y} \right) \quad (4)$$

Для введём обозначения для вероятностей:

$$\begin{cases} P(X = 0) = 1 - q \\ P(X = 1) = q \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} P(Y = 1) = 1 - p \\ P(Y = 2) = p \end{cases}$$

И укажем области определения переменных, используемых ниже:

$$p \in [0, 1], \quad q \in [0, 1], \quad \mu \in [0, 1], \quad \lambda \in [0, 1]$$

И предположим, что Студент осредняет свой критерий по переменной x и получает:

$$F(q, y) = (f_1(q, y), f_2(q, y)) = \left(\frac{qy}{2}, \frac{1-q}{y}\right),$$

а Преподаватель осредняет свой критерий по переменной y и получает

$$F(x, p) = (f_1(x, p), f_2(x, p)) = \left(\frac{(1+p)\sqrt{x}}{2}, \frac{(2-p)\sqrt{1-x}}{2}\right)$$

Рассмотрим вариант, когда Студент использует обратную логическую свёртку и осредняет её по переменной y :

$$M(p, q, \mu) = p \min\left\{\frac{q}{\mu}; \frac{1-q}{2(1-\mu)}\right\} + (1-p) \min\left\{\frac{q}{2\mu}; \frac{1-q}{1-\mu}\right\}, \quad (5)$$

а Преподаватель использует линейную свёртку и осредняет её по переменной x :

$$L(p, q, \lambda) = \frac{1}{2}\{q(3\lambda + p - 2) + (2-p)(1-\lambda)\}. \quad (6)$$

Игроки пытаются максимизировать или минимизировать соответствующие функции с помощью выбора своей стратегии

$$\begin{cases} M(p, q, \mu) \rightarrow \max_q \\ L(p, q, \lambda) \rightarrow \min_p \end{cases}$$

Определение

Пара стратегий (p^*, q^*) называется *оптимальной*, если для некоторых λ, μ верно:

$$\begin{cases} p^* = p^*(q^*, \lambda) = \operatorname{argmin}_p L(p, q^*, \lambda) \\ q^* = q^*(p^*, \mu) = \operatorname{argmin}_q M(p^*, q, \mu) \end{cases} \quad (7)$$

Для исследования оптимальных стратегий необходимо установить значения p и q , при которых эти функции достигают минимума и максимума соответственно. Этот вопрос уже был исследован. Из статьи [3] следует, что:

$$p^*(q, \lambda) = \operatorname{argmin}_p L(p, q, \lambda) = \begin{cases} 0, & q > 1 - \lambda \\ 1, & q < 1 - \lambda \\ \forall, & q = 1 - \lambda \end{cases} \quad (8)$$

Из курсовой [2] следует, что

$$q^*(p, \mu) = \operatorname{argmax}_q M(p, q, \mu) = \begin{cases} \frac{\mu}{2-\mu}, & p + \mu - 1 \geq 0 \\ \frac{2\mu}{1+\mu}, & p + \mu - 1 \leq 0 \end{cases} \quad (9)$$

2 Множество оптимальных стратегий

Утверждение

Любая пара $(p^*, q^*) \in [0, 1]^2$ является оптимальной, т.е. $\forall (p^*, q^*) \in [0, 1]^2 \exists \mu, \lambda$: верно (7).

Доказательство

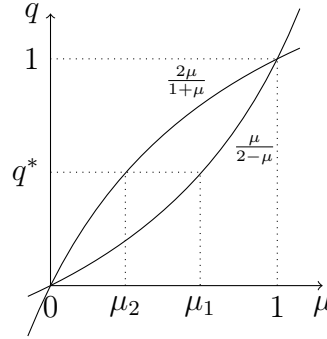
Зафиксируем некоторую пару $(p^*, q^*) \in [0, 1]^2$ и найдя соответствующие $\hat{\mu}(p^*, q^*)$ и $\hat{\lambda}(p^*, q^*)$ покажем, что она является оптимальной.

① Покажем оптимальность p^* :

Возьмём $\hat{\lambda} := 1 - q^* \Rightarrow \operatorname{argmin}_p L(p, q^*, \hat{\lambda}) = \forall$ при $q^* = 1 - \hat{\lambda}$,

то и $p^* \in \operatorname{argmin}_p L(p, q^*, \hat{\lambda})$

② Покажем оптимальность q^* :



По имеющемуся q^* решим уравнения $f_1(\mu_1) = q^*$ и $f_2(\mu_2) = q^*$, где $f_1 = \frac{\mu}{2-\mu}$ и $f_2 = \frac{2\mu}{1+\mu}$:

$$q^* = \frac{2\mu_2}{1+\mu_2} \Rightarrow \mu_2 = \frac{q^*}{2-q^*}$$

$$q^* = \frac{\mu_1}{2-\mu_1} \Rightarrow \mu_1 = \frac{2q^*}{1+q^*}$$

Заметим, что при $q^* \in [0, 1]$ $\mu_2 \leq \mu_1$

В таком случае поскольку $1 - p^* \in [0, 1]$, то при фиксированных переменных (p^*, q^*) будет реализован один и только один из 3-х вариантов:

- 1) $1 - p^* \leq \mu_2$
- 2) $\mu_2 < 1 - p^* \leq \mu_1$
- 3) $\mu_1 < 1 - p^*$

1) $1 - p^* \leq \mu_2$, т.е. $1 - p^* \leq \frac{q^*}{2-q^*}$, в таком случае $\hat{\mu} := \mu_1 = \frac{2q^*}{1+q^*}$.

Действительно, при таком выборе $\hat{\mu}$ имеем: $1 - p^* \leq \mu_2 \leq \mu_1 = \hat{\mu} \Rightarrow$

$$p^* + \hat{\mu} - 1 \geq 0 \Rightarrow \operatorname{argmax}_q M(p^*, q, \hat{\mu}) = \frac{\hat{\mu}}{2 - \hat{\mu}} = \frac{\mu_1}{2 - \mu_1} = \frac{\frac{2q^*}{1+q^*}}{2 - \frac{2q^*}{1+q^*}} = q^* \Rightarrow$$

$$\text{при } \begin{cases} \hat{\mu} = \frac{2q^*}{1+q^*} \\ \hat{\lambda} = 1 - q^* \\ 1 - p^* \leq \frac{q^*}{2 - q^*} \end{cases} \quad (p^*, q^*) - \text{оптимальная пара}$$

2) $\mu_2 < 1 - p^* \leq \mu_1$, т.е. $\frac{q^*}{2 - q^*} < 1 - p^* \leq \frac{2q^*}{1+q^*}$, в таком случае $\hat{\mu} := \mu_1 = \frac{2q^*}{1+q^*}$.

Действительно, при таком выборе $\hat{\mu}$ имеем $1 - p^* \leq \mu_1 = \hat{\mu} \Rightarrow$

$$p^* + \hat{\mu} - 1 \geq 0 \Rightarrow \operatorname{argmax}_q M(p^*, q, \hat{\mu}) = \frac{\hat{\mu}}{2 - \hat{\mu}} = \frac{\mu_1}{2 - \mu_1} = \frac{\frac{2q^*}{1+q^*}}{2 - \frac{2q^*}{1+q^*}} = q^* \Rightarrow$$

$$\text{при } \begin{cases} \hat{\mu} = \frac{2q^*}{1+q^*} \\ \hat{\lambda} = 1 - q^* \\ \frac{q^*}{2 - 1^*} < 1 - p^* \leq \frac{2q^*}{1+q^*} \end{cases} \quad (p^*, q^*) - \text{оптимальная пара}$$

3) $\mu_1 \leq 1 - p^*$ т.е. $\frac{2q^*}{1+q^*} < 1 - p^*$ в таком случае $\hat{\mu} = \mu_2 = \frac{q^*}{2 - q^*}$

действительно, при таком выборе $\hat{\mu}$ имеем $1 - p^* \geq \mu_2 = \hat{\mu} \Rightarrow$

$$p^* + \mu - 1 \leq 0 \Rightarrow \operatorname{argmax}_q M(p^*, q, \hat{\mu}) = \frac{2\hat{\mu}}{1 + \hat{\mu}} = \frac{2\mu_2}{1 + \mu_2} = \frac{\frac{2q^*}{2 - q^*}}{1 + \frac{q^*}{2 - q^*}} = q^* \Rightarrow$$

$$\text{при } \begin{cases} \hat{\mu} = \frac{q^*}{2 - q^*} \\ \hat{\lambda} = 1 - q^* \\ \frac{2q^*}{1+q^*} < 1 - p^* \end{cases} \quad (p^*, q^*) - \text{оптимальная пара}$$

Таким образом при имеющихся (p^*, q^*) сначала надо определить в какой из вариантов 1-3 пара попадает, затем по соответствующим равенствам найти $\hat{\mu}$ и $\hat{\lambda}$.

Утверждение доказано.

3 Графическое изображение матожидания критерия

Вычислим матожидание от имеющегося векторного критерия для игрока П

$F(X, Y) = (\frac{Y\sqrt{X}}{2}; \frac{\sqrt{1-X}}{Y})$, где X и Y - случайные величины, причём

$$\begin{cases} P(X = 0) = 1 - q \\ P(X = 1) = q \end{cases} \quad \begin{cases} P(Y = 1) = 1 - p \\ P(Y = 2) = p \end{cases}$$

В таком случае имеем:

$$\mathbb{E}_x[F(x, y)] = (\frac{yq}{2}; \frac{1 - q}{y}) \tag{10}$$

$$\mathbb{E}_{xy}[F(x, y)] = (\frac{q(1 + p)}{2}; \frac{(1 - q)(2 - p)}{2}) \tag{11}$$

Рассмотрим это как множество точек на плоскости X, Y зависящие от двух параметров $(p, q) \in [0, 1]^2$

$$\begin{cases} y = \frac{q(1+p)}{2} \\ x = \frac{(1-q)(2-p)}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{2x}{1+p} \\ y = (1 - \frac{2x}{1+p}) \frac{2-p}{2} = \frac{(1+p-2x)(2-p)}{2(1+p)} \end{cases}$$

Найдём максимальные значения, которые может принимать $y(x, p)$ при фиксированном x :

$$\frac{\partial y(x, p)}{\partial p} = \frac{3x}{(p+1)^2} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow p_0 = \sqrt{6x} - 1$$

Поскольку область определения $p_0 \in [0, 1]$, и

$$p_0 = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ и } p_0 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{6}$$

$$y_{\max}(x) = \begin{cases} \max(y(x, 0), y(x, 1), y(x, p_0)), & x \in [\frac{1}{6}, \frac{2}{3}] \\ \max(y(x, 0), y(x, 1)), & x \in [0, \frac{1}{6}] \cup [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

учитывая, что

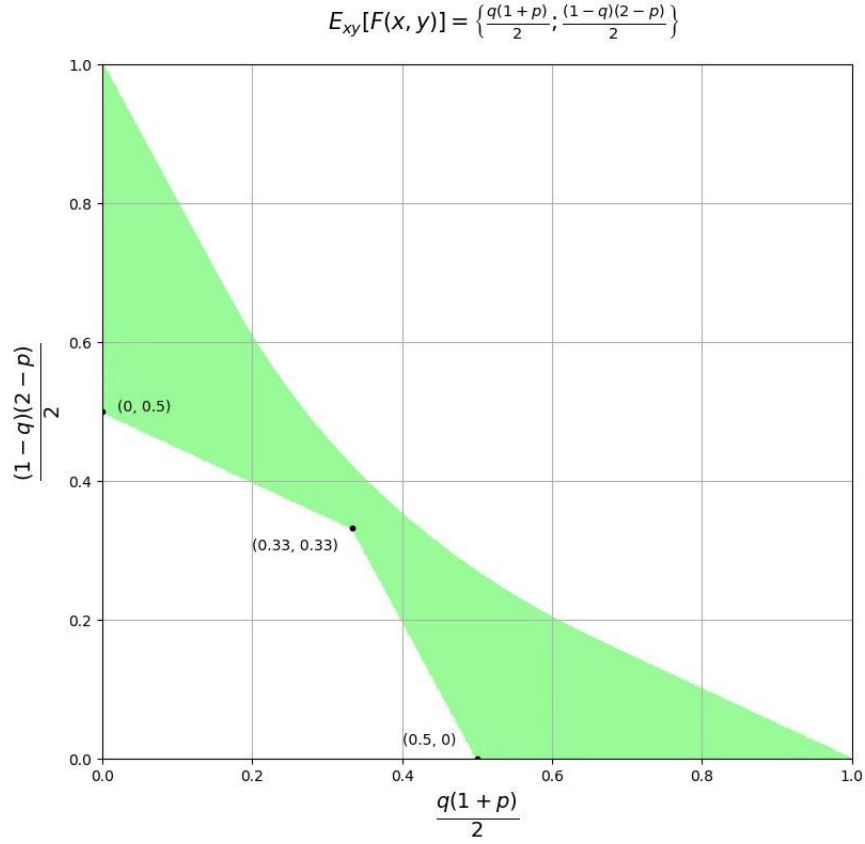
$$y(x, 0) = 1 - 2x$$

$$y(x, 1) = \frac{1-x}{2}$$

$$y(x, p_0) = \frac{(\sqrt{6x} - 2x)(3 - \sqrt{6x})}{2\sqrt{6x}}$$

$$y_{\min}(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{2}, & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 1 - 2x, & x \in (\frac{1}{3}, 1] \end{cases} \quad y_{\max}(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & x \in [0, \frac{1}{6}] \\ \frac{(\sqrt{6x}-2x)(3-\sqrt{6x})}{2\sqrt{6x}}, & x \in (\frac{1}{6}, \frac{2}{3}] \\ \frac{1-x}{2}, & x \in (\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

В предыдущем пункте мы установили что любая пара $(p^*, q^*) \in [0, 1]^2$ является оптимальной. Теперь для всех оптимальных стратегий т.е. пар $(p^*, q^*) \in [0, 1]^2$ изобразим на графике значения матожидания векторного критерия в этой точке.



4 Оптимальные результаты для игрока С

Теперь рассмотрим игру с точки зрения игрока С. Для каждой пары параметров $(\hat{\mu}, \hat{\lambda})$ найдём множество соответствующих оптимальных пар $(p^*(\hat{\mu}, \hat{\lambda}), q^*(\hat{\mu}, \hat{\lambda}))$. Далее найдём значение свёртки для игрока С в этих точка:

$$M(p^*, q^*, \hat{\mu}) = p^* \min \left\{ \frac{q^*}{\hat{\mu}}; \frac{1 - q^*}{2(1 - \hat{\mu})} \right\} + (1 - p^*) \min \left\{ \frac{q^*}{2\hat{\mu}}; \frac{1 - q^*}{1 - \hat{\mu}} \right\}$$

И изобразим множество значений функции в этих точках.

Рассмотрим все возможные сочетания значений для p^* и q^* в системах (7) и (8), что даст нам 6 следующих систем:

Напомню, что переменные имеют следующих области ограничений:

$$p \in [0, 1], \quad q \in [0, 1], \quad \mu \in [0, 1], \quad \lambda \in [0, 1]$$

(1)

$$\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} \\ q^* > 1 - \lambda \\ p^* + \mu - 1 \geq 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} \\ \frac{\mu}{2-\mu} > 1 - \lambda \\ \mu \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \mu = 1 \sim \begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = 1 \\ \lambda > 0 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

Значит при $\mu = 1, \lambda \in (0, 1]$ имеем следующие оптимальные пары $\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = 1 \end{cases}$

(2)

$$\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} \\ q^* > 1 - \lambda \\ p^* + \mu - 1 \leq 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} \\ \frac{2\mu}{1+\mu} > 1 - \lambda \\ \mu \leq 1 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} \\ \lambda > \frac{1-\mu}{1+\mu} \\ \mu \leq 1 \end{cases}$$

Значит при $\mu \in [0, 1], \lambda \in (\frac{1-\mu}{1+\mu}, 1]$ имеем следующие оптимальные пары $\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} \end{cases}$

(3)

$$\begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} \\ q^* < 1 - \lambda \\ p^* + \mu - 1 \geq 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} \\ \frac{\mu}{2-\mu} < 1 - \lambda \\ \mu \geq 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} \\ \lambda < 2\frac{1-\mu}{2-\mu} \\ \mu \geq 0 \end{cases}$$

Значит при $\mu \in [0, 1], \lambda \in [0, 2\frac{1-\mu}{2-\mu})$ имеем следующие оптимальные пары $\begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} \end{cases}$

(4)

$$\begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} \\ q^* < 1 - \lambda \\ p^* + \mu - 1 \leq 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} \\ \frac{2\mu}{1+\mu} < 1 - \lambda \\ \mu \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \mu = 0 \sim \begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = 0 \\ \lambda < 1 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

Значит при $\mu = 0, \lambda \in [0, 1)$ имеем следующие оптимальные пары $\begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = 0 \end{cases}$

(5)

$$\begin{cases} p^* \in [0, 1] \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} \\ q^* = 1 - \lambda \\ p^* + \mu - 1 \geq 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* \in [0, 1] \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} \\ \frac{\mu}{2-\mu} = 1 - \lambda \\ p^* \geq 1 - \mu \end{cases} \sim \begin{cases} p^* \in [1 - \mu, 1] \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} \\ \lambda = 2\frac{1-\mu}{2-\mu} \end{cases}$$

Значит при $\lambda = 2\frac{1-\mu}{2-\mu}$, $\mu \in [0, 1]$ имеем следующие оптимальные пары $\begin{cases} p^* \in [1-\mu, 1] \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} \end{cases}$

(6)

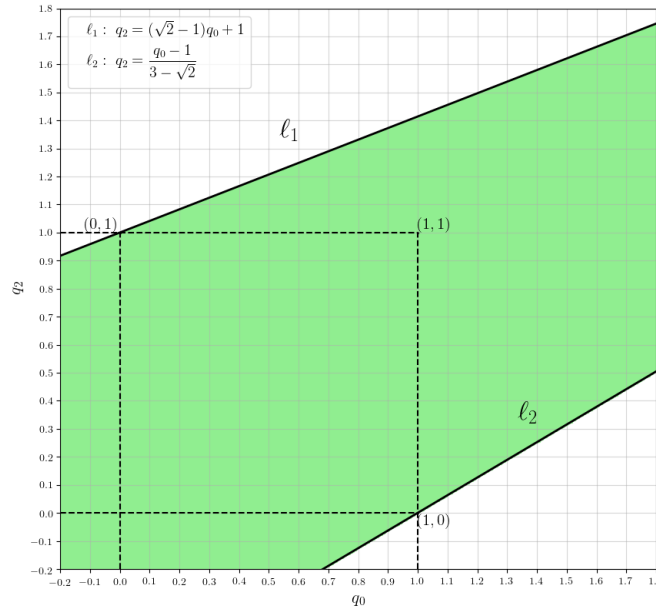
$$\begin{cases} p^* \in [0, 1] \\ q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} \\ q^* = 1-\lambda \\ p^* + \mu - 1 \leq 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* \in [0, 1] \\ q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} \\ \frac{2\mu}{1+\mu} = 1-\lambda \\ p^* \leq 1-\mu \end{cases} \sim \begin{cases} p^* \in [0, 1-\mu] \\ q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} \\ \lambda = \frac{1-\mu}{1+\mu} \end{cases}$$

Значит при $\mu \in [0, 1]$, $\lambda = \frac{1-\mu}{1+\mu}$ имеем следующие оптимальные пары $\begin{cases} p^* \in [0, 1-\mu] \\ q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} \end{cases}$

Теперь на квадрате $(p, q) \in [0, 1]^2$ рассмотрим все области, в которых множества оптимальных пар постоянны. И найдём множества значений функции

$$M(p, q, \mu) = p \min \left\{ \frac{q}{\mu}; \frac{1-q}{2(1-\mu)} \right\} + (1-p) \min \left\{ \frac{q}{2\mu}; \frac{1-q}{1-\mu} \right\}$$

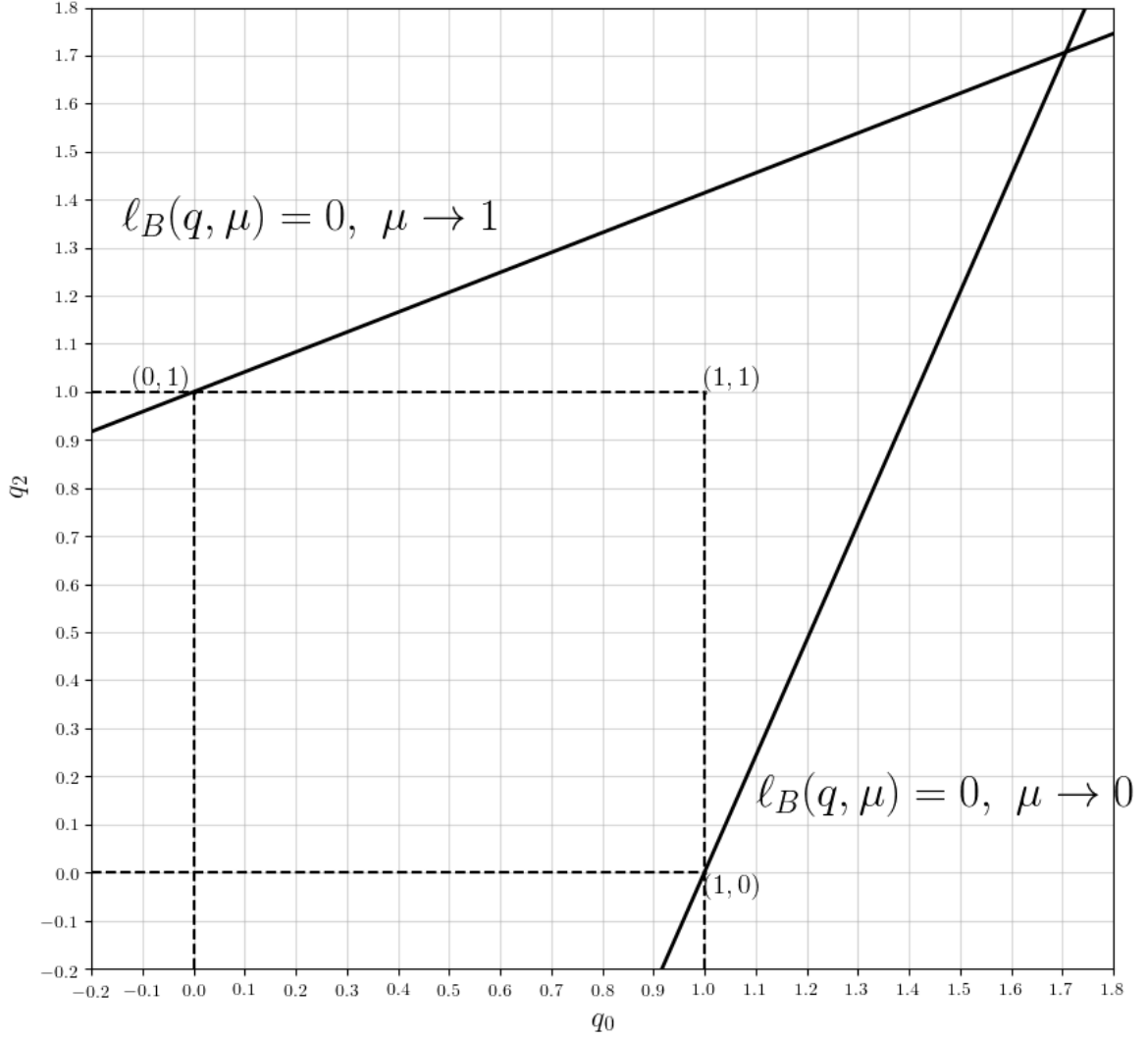
В этих областях



1) $\mu = 0$, $\lambda \in [0, 1)$: $\begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = 0 \end{cases} ; \begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} = \{ \mu = 0 \} = 0 \end{cases}$

Получаем множества оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = (\{1\} \times \{0\})$, где \times - это декартово произведение, тогда

$$M(1, 0, 0) = \frac{1}{2}$$



$$2.1) \mu = 0, \lambda = 1: \begin{cases} p^* \geq 1 - \mu = \{\mu = 0\} = 1 \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} = \{\mu = 0\} = 0 \end{cases} ; \begin{cases} p^* \leq 1 - \mu = \{\mu = 0\} = 1 \\ q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} = \{\mu = 0\} = 0 \end{cases}$$

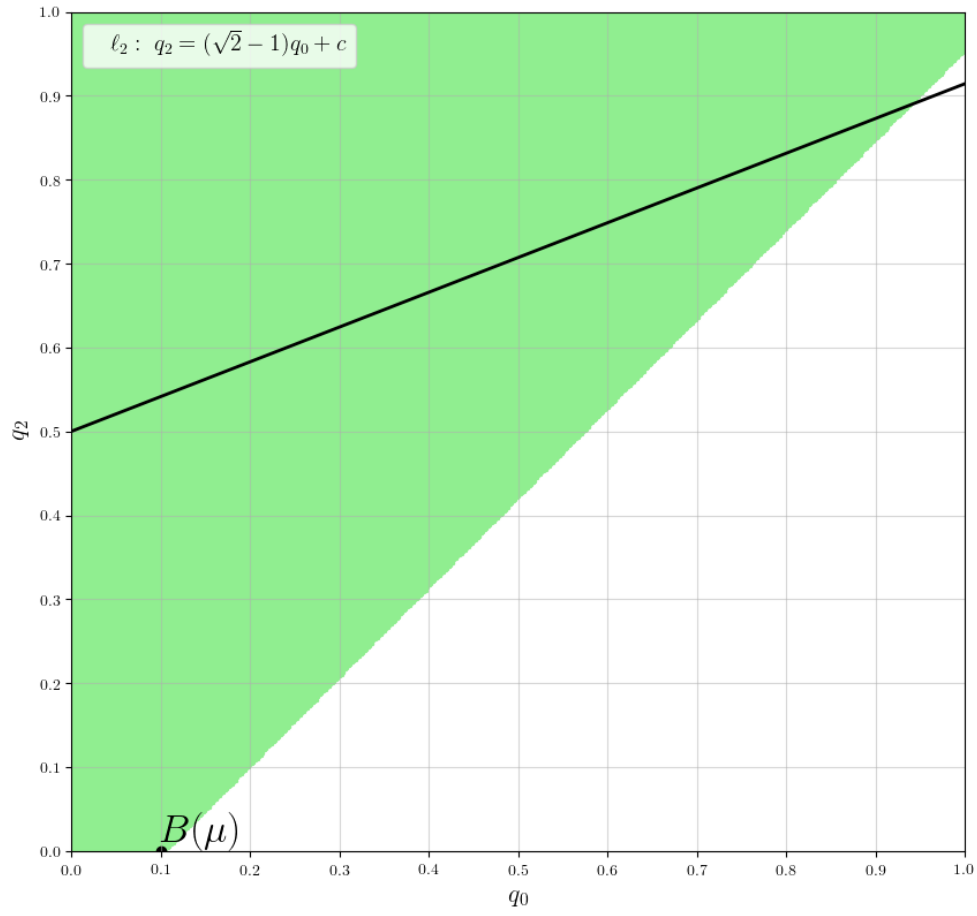
Получаем множества оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = ([0, 1] \times \{0\})$ тогда

$$M([0, 1], 0, 0) = [0.5, 1]$$

$$2.2) \mu = 1, \lambda = 0: \begin{cases} p^* \geq 1 - \mu = \{\mu = 1\} = 0 \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} = \{\mu = 1\} = 1 \end{cases} ; \begin{cases} p^* \leq 1 - \mu = \{\mu = 1\} = 0 \\ q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} = \{\mu = 1\} = 1 \end{cases}$$

Получаем множества оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = ([0, 1] \times \{1\})$ тогда

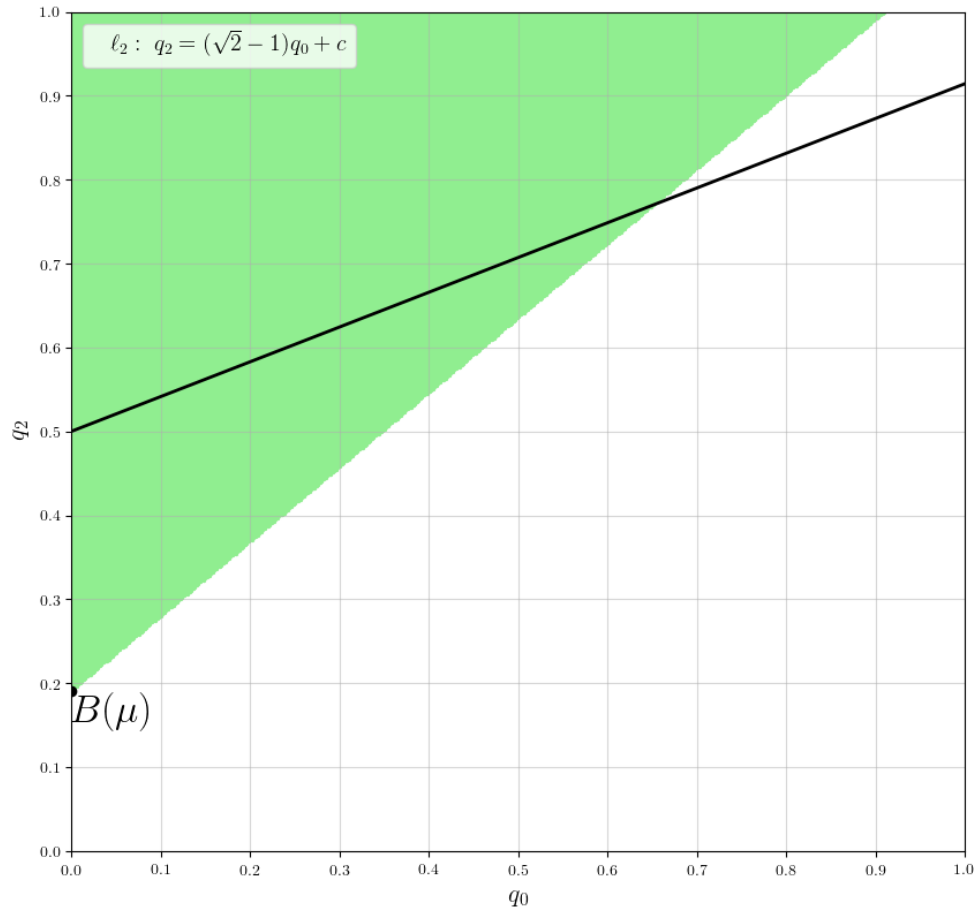
$$M([0, 1], 1, 1) = [0.5, 1]$$



3) $\mu \in (0, 1), \lambda \in (0, \frac{1-\mu}{1+\mu}]$: $\begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} \end{cases}$

Получаем множества оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = (\{1\} \times \{\frac{\mu}{2-\mu}\})$ тогда

$$M(1, \frac{\mu}{2-\mu}, \mu) = \min \left\{ \frac{\mu}{2-\mu}; \frac{1 - \frac{\mu}{2-\mu}}{2(1-\mu)} \right\} = \frac{1}{2-\mu}$$



4) $\mu \in (0, 1)$, $\lambda = \frac{1-\mu}{1+\mu}$: $\begin{cases} p^* \in [0, 1 - \mu] \cup \{1\} \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} \end{cases}$

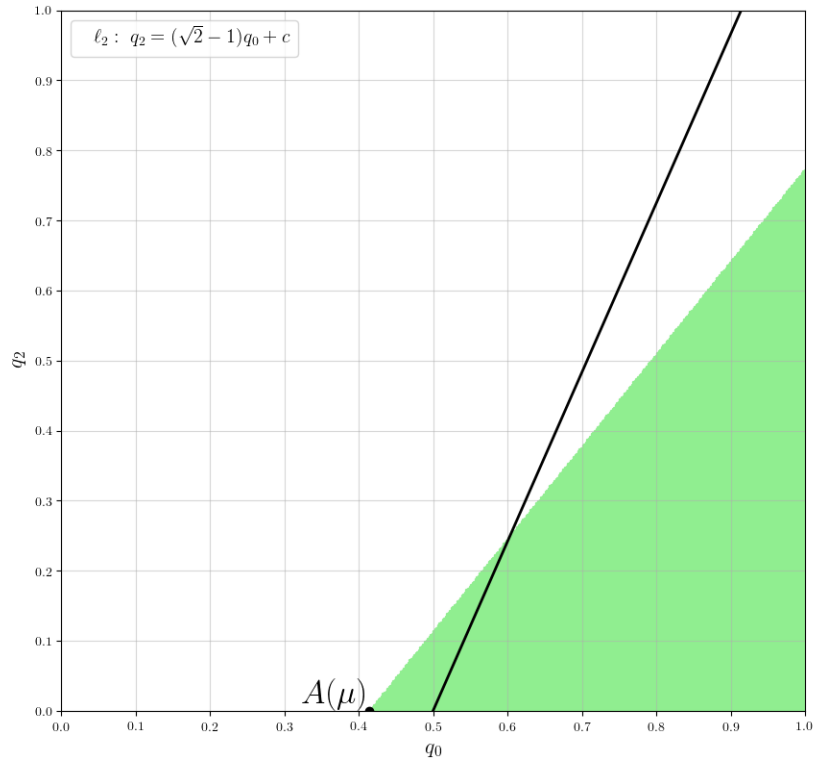
4.1) Получаем множества оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = (\{1\} \times \{\frac{\mu}{2-\mu}\})$ тогда

$$M(1, \frac{\mu}{2-\mu}, \mu) = \frac{1}{2-\mu}$$

4.2) Получаем множества оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = ([0, 1 - \mu] \times \{\frac{2\mu}{1+\mu}\})$ тогда

$$M(p, \frac{2\mu}{1+\mu}, \mu) = p \frac{1}{2(1+\mu)} + (1-p) \frac{1}{1+\mu} = \frac{2-p}{2(1+\mu)} \geq \frac{2-(1-\mu)}{2(1+\mu)} = \frac{1+\mu}{2(1+\mu)} = \frac{1}{2}$$

$$M(p, \frac{2\mu}{1+\mu}, \mu) \leq \frac{1}{1+\mu} \Rightarrow M(p, \frac{2\mu}{1+\mu}, \mu) = [0.5, \frac{1}{1+\mu}]$$



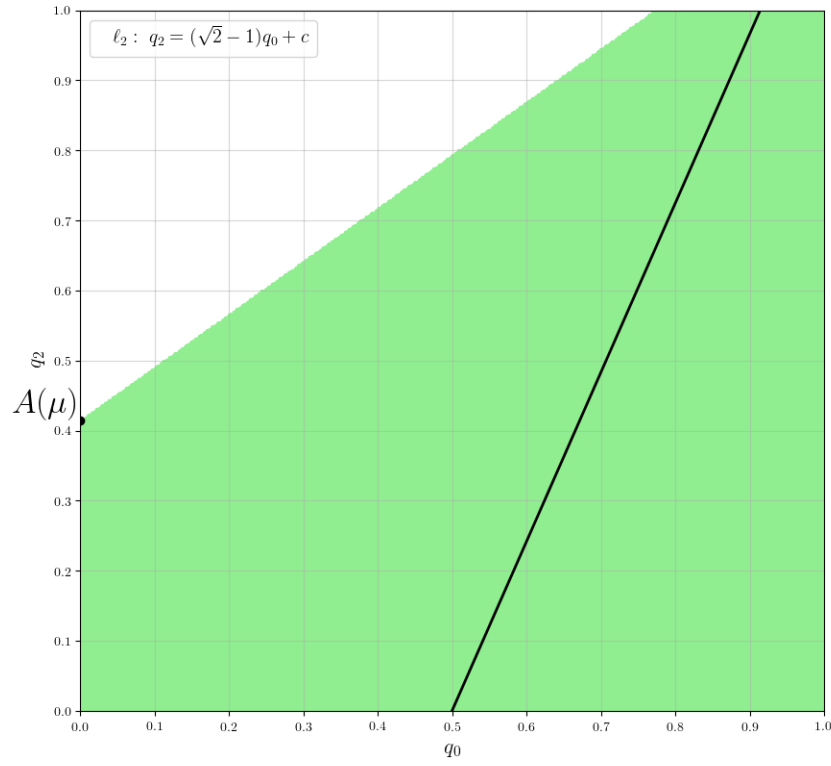
5) $\mu \in [(, 1), \lambda \in [0, 2\frac{1-\mu}{2-\mu}] \cap (\frac{1-\mu}{1+\mu}, 1]: \begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} \end{cases} ; \begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} \end{cases}$

5.1) Получаем множества оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = (\{0\} \times \{\frac{2\mu}{1+\mu}\})$ тогда

$$M(0, \frac{2\mu}{1+\mu}, \mu) = \frac{1}{1+\mu}$$

5.2) Получаем множества оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = (\{1\} \times \{\frac{\mu}{2-\mu}\})$ тогда

$$M(1, \frac{\mu}{2-\mu}, \mu) = \frac{1}{2-\mu}$$



6) $\mu \in (0, 1)$, $\lambda = 2\frac{1-\mu}{2-\mu}$: $\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} \end{cases}$; $\begin{cases} p^* \in [0, 1-\mu] \\ q^* = \frac{\mu}{2-\mu} \end{cases}$

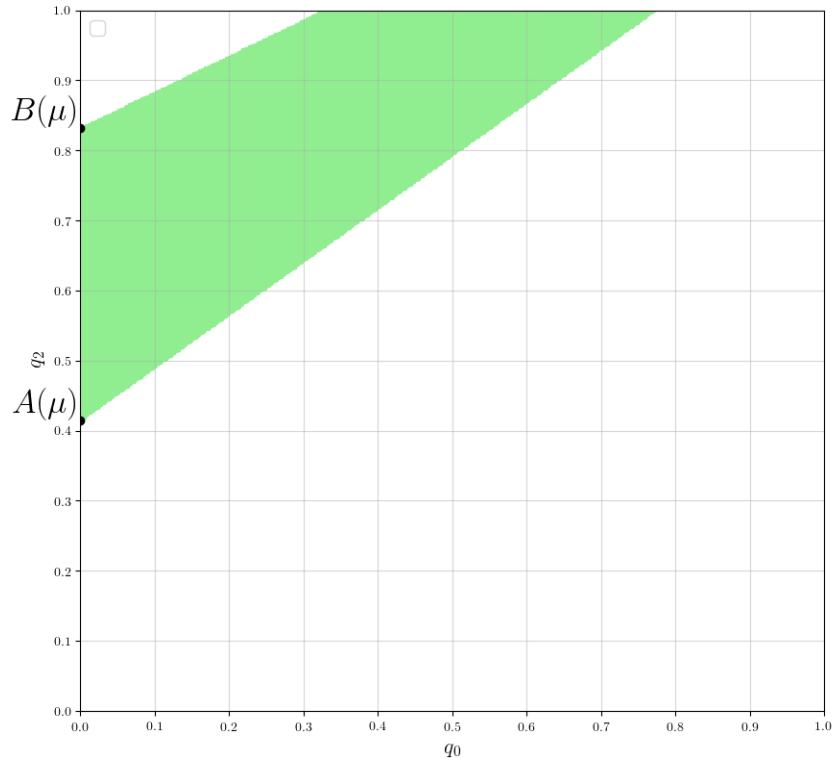
6.1) Получаем множества оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = (\{0\} \times \{\frac{2\mu}{1+\mu}\})$ тогда

$$M(0, \frac{2\mu}{1+\mu}, \mu) = \frac{1}{1+\mu}$$

6.2) Получаем множество оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = ([1-\mu, 1] \times \{\frac{\mu}{2-\mu}\})$ тогда

$$M(p, \frac{\mu}{2-\mu}, \mu) = p\frac{1}{2-\mu} + (1-p)\frac{1}{2(2-\mu)} = \frac{1+p}{2(2-\mu)} \geq \frac{2-\mu}{2(2-\mu)} = \frac{1}{2}$$

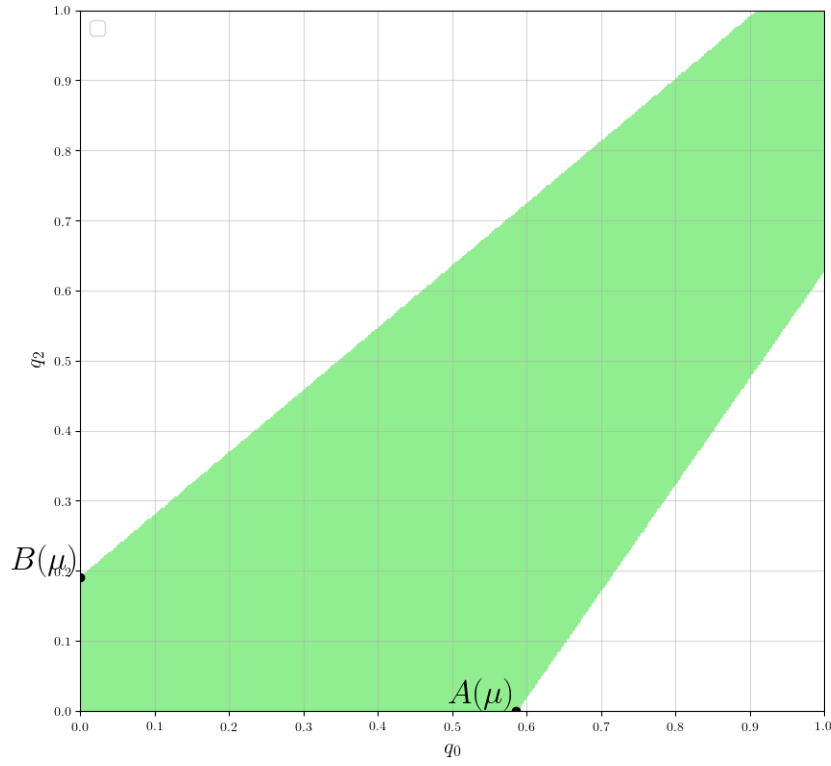
$$M(p, \frac{\mu}{2-\mu}, \mu) \leq \frac{1}{2-\mu} \Rightarrow M(p, \frac{\mu}{2-\mu}, \mu) = [0.5, \frac{1}{2-\mu}]$$



7) $\mu \in (0, 1), \lambda \in (2^{\frac{1-\mu}{2-\mu}}, 1]$: $\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} \end{cases}$

Получаем множества оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = (\{0\} \times \{\frac{2\mu}{1+\mu}\})$ тогда

$$M(0, \frac{2\mu}{1+\mu}, \mu) = \min \left\{ \frac{1}{\mu} \frac{2\mu}{1+\mu}; \frac{1 - \frac{2\mu}{1+\mu}}{1 - \mu} \right\} = \frac{1}{1+\mu}$$

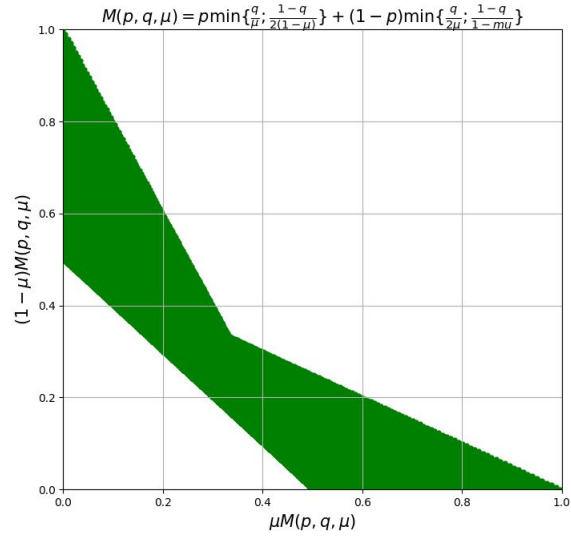


8) $\mu = 1, \lambda \in (0, 1]$: $\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = 1 \end{cases} ; \begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} = \{\mu = 1\} = 1 \end{cases}$

Получаем множества оптимальных стратегий $(P^* \times Q^*) = (\{0\} \times \{1\})$ тогда

$$M(0, 1, 1) = \frac{1}{2}$$

Теперь на квадрате $(\mu, \lambda) \in [0, 1]^2$ мы рассмотрели все точки и для каждой нашли оптимальные пары $p^*(\mu, \lambda)$ и $q^*(\mu, \lambda)$ и соответствующие значения функции $M(p^*(\mu, \lambda), q^*(\mu, \lambda), \mu)$. Далее на квадрате $[0, 1]^2$ изобразим все точки, которые принимает вектор $(\mu M(p^*, q^*, \mu), (1 - \mu)M(p^*, q^*, \mu))$ при $(\mu, \lambda) \in [0, 1]^2$



Поясним график:

нижняя огибающая в координатах X, Y : $y = \frac{1}{2} - x$,

верхняя огибающая в координатах X, Y : $y = \begin{cases} 1 - 2x, & x \in [0, \frac{1}{3}) \\ \frac{1-x}{2}, & x \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases}$.

5 Заключение

Итого мы выполнили поставленную задачу.

6 Введение

Определение [1]

Мы рассмотрим *линейную свёртку* (ЛС):

$$L(\{f_i\}, \lambda)(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i, \text{ где } \lambda \in \Lambda = \{\lambda_i \geq 0 \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}, \quad (12)$$

и *свёртку Гермейера*, или *обратную логическую свёртку* (ОЛС):

$$G(\{f_i\}, \lambda)(x) = \min_{\lambda_i > 0} \frac{f_i}{\lambda_i}, \text{ где } \lambda \in \Lambda = \{\lambda_i \geq 0 \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}. \quad (13)$$

7 Постановка задача

Функциональный критерий: $F(x, y) = (\frac{y\sqrt{x}}{2}, \frac{\sqrt{1-x}}{y})$

$$\begin{aligned} \text{С: } F(x, y) &\rightarrow \max_{x \in X} \\ X &= \{0; \tfrac{1}{2}; 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{П: } F(x, y) &\rightarrow \min_{y \in Y} \\ Y &= \{1, 2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= q_0 \\ P(X = \tfrac{1}{2}) &= q_1 \\ P(X = 1) &= q_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y = 1) &= p_0 \\ P(Y = 2) &= p_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^2 q_i &= 1 \\ 0 \leq q_i \leq 1, \quad i &= \overline{0, 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^1 p_i &= 1 \\ 0 \leq p_i \leq 1, \quad i &= \overline{0, 1} \end{aligned}$$

Следовательно $q_1 = 1 - q_0 - q_2$ Пусть $p := p_1$, тогда $p_0 = 1 - p$

Введём множество

$$Q = \{(q_0, q_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq q_i \leq 1 \ i \in \{0, 2\}; q_0 + q_2 \leq 1\} \quad (14)$$

Студент выберет X и использует **ОЛС**.

Преподаватель выбирает Y и использует **ЛС**.

8 Оптимальные значения

8.1 Рассмотрим игру за преподавателя

Игрок **П** стремится минимизировать функциональный критерий:

$$F(x, y) = \left(\frac{y\sqrt{x}}{2}, \frac{\sqrt{1-x}}{y} \right)$$

Игрок **П** использует смешанную стратегию, т.е. его стратегией является распределение $p = (p_0, p_1)$ над множеством чистых стратегий $Y = \{1, 2\}$:

$$F_{\text{П}}(p, x) = \left\langle (1-p) \frac{1 \cdot \sqrt{x}}{2} + p \frac{2 \cdot \sqrt{x}}{2}; (1-p) \frac{\sqrt{1-x}}{1} + p \frac{\sqrt{1-x}}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} \langle (p+1)\sqrt{x}; (2-p)\sqrt{1-x} \rangle$$

Затем использует **ЛС** (1):

$$L(p, x, \lambda) = \frac{1}{2} (\lambda(p+1)\sqrt{x} + (1-\lambda)(2-p)\sqrt{1-x})$$

Введём обозначение $q = (q_0, q_1, q_2)$. Далее осредняем функцию $L(p, x, \lambda)$ по стратегиям противника $x \in X = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ с вероятностями $q = (q_0, q_1, q_2)$:

$$\begin{aligned} \bar{L}(p, q, \lambda) &= \frac{1}{2} \left(q_0(1-\lambda)(2-p)\sqrt{1} + q_1 \left(\lambda(p+1) \frac{1}{\sqrt{2}} + (1-\lambda)(2-p) \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + q_2 \lambda(p+1)\sqrt{1} \right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((\lambda(q_1 + \sqrt{2}q_2) - (1-\lambda)(q_1 + \sqrt{2}q_0))p + (\lambda(q_1 + \sqrt{2}q_2) + 2(1-\lambda)(q_1 + \sqrt{2}q_0)) \right) \end{aligned}$$

Функция является линейной по переменной p :

$$\bar{L}(p, q, \lambda) = k(\lambda, q)p + b(\lambda, q)$$

где

$$k(q, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\lambda(q_1 + \sqrt{2}q_2) - (1 - \lambda)(q_1 + \sqrt{2}q_0))$$

$$b(q, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\lambda(q_1 + \sqrt{2}q_2) + 2(1 - \lambda)(q_1 + \sqrt{2}q_0))$$

Наша задача найти $p^*(q, \lambda) = \arg \min_{p \in [0,1]} \bar{L}(p, q, \lambda)$. Поскольку функция $\bar{L}(p, q, \lambda)$ линейна по переменной p , следовательно:

$$p^*(q, \lambda) = \arg \min_{p \in [0,1]} \bar{L}(p, q, \lambda) = \begin{cases} 0, & k(\lambda, q) > 0 \\ 1, & k(\lambda, q) < 0 \\ [0, 1], & k(\lambda, q) = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $k(q, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\lambda(2 + (\sqrt{2} - 2)(q_0 - q_2)) - (1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0))$
Нас интересует знак этой функции при различных значениях аргументов. Введём обозначения:

$$\ell(q) = \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0}{2 + (\sqrt{2} - 2)(q_0 - q_2)}$$

Напомним, что множество Q имеет следующий вид:

$$Q = \{(q_0, q_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq q_i \leq 1 \ i \in \{0, 2\}; \ q_0 + q_2 \leq 1\}$$

Поскольку для $q \in Q$ верно:

$$2 + (\sqrt{2} - 2)(q_0 - q_2) > 0$$

$$1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0 \geq 0$$

$$q_0 + (\sqrt{2} - 3)q_2 - 1 \leq 0$$

Следовательно:

$$k(q, \lambda) \vee 0 \Leftrightarrow \lambda \vee \ell(q) \text{ где } \vee \text{ это один из знаков } >, <, = .$$

Более того верно что $\forall q \in Q \ 0 \leq \ell(q) \leq 1$. Проиллюстрируем это на графике. В плоскости $q = (q_0, q_2)$ изображены прямые $\ell_1(q)$ и $\ell_2(q)$ такие, что:

$$\ell_1(q) : \ell(q) = 0$$

$$\ell_2(q) : \ell(q) = 1$$

зелёным цветом изображена область в которой $0 \leq \ell(q) \leq 1$. Видно, что квадрат $q = [0, 1]^2$ а следовательно и множество Q полностью принадлежит этой области.

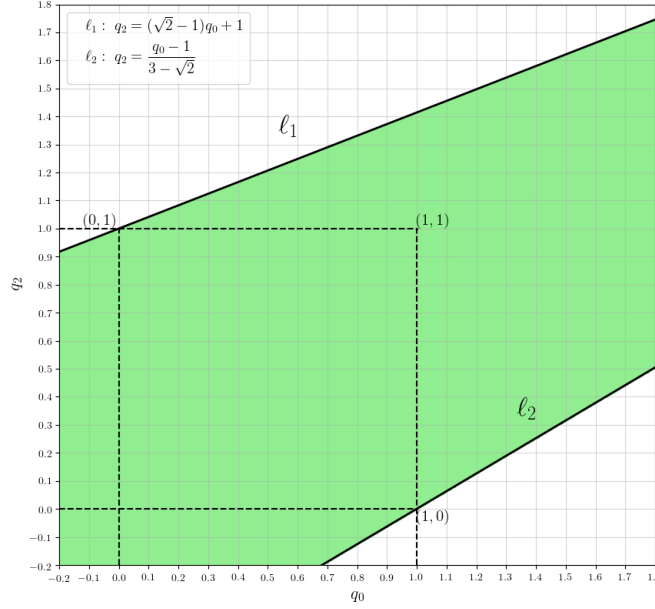


Рис. 1

Следовательно $\forall q = (q_0, q_2) \in Q \exists \lambda \in [0, 1] : k(\lambda, q) = 0$.

$$p^*(\lambda, q) = \arg \min_{p \in [0, 1]} \bar{L}(p, q, \lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \in (\ell(q), 1] \\ 1, & \lambda \in [0, \ell(q)) \\ [0, 1], & \lambda = \ell(q) \end{cases}, \text{ где } \ell(q) = \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0}{2 + (\sqrt{2} - 2)(q_0 - q_2)}$$

8.2 Рассмотрим игру за студента

Игрок **C** стремится максимизировать функциональный критерий:

$$F(x, y) = \left(\frac{y\sqrt{x}}{2}, \frac{\sqrt{1-x}}{y} \right)$$

Игрок **C** использует смешанную стратегию, т.е. его стратегией является распределение $q = (q_0, q_1, q_2)$ над множеством чистых стратегий $X = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$:

$$\begin{aligned} F_C &= \left\langle q_0 \frac{y\sqrt{0}}{2} + q_1 \frac{y}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} + q_2 \frac{y\sqrt{1}}{2}; q_0 \frac{\sqrt{1}}{y} + q_1 \frac{1}{y} \sqrt{\frac{1}{2}} + q_2 \frac{\sqrt{0}}{y} \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{y}{2} \cdot \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2} - 1)q_2}{\sqrt{2}}; \frac{1}{y} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0}{\sqrt{2}} \right\rangle \end{aligned}$$

Затем использует **ОЛС** (2). Сначала рассмотрим вырожденные случаи когда $\mu = 0$ и $\mu = 1$.

(1) Если $\mu = 0$:

$$G(y, q, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0}{y}$$

Далее осредняем функцию $G(y, q, \mu)$ по стратегиям противника $y \in Y = \{1, 2\}$ с вероятностями $(1 - p, p)$:

$$\begin{aligned} \bar{G}(p, q, 0) &= \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0}{1} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0}{2} = \\ &= \frac{(2-p)(1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0)}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Найдём частные производную по переменным q_0 и q_2 , при этом введём следующие обозначения для сокращения записи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{G}(p, q, \mu)}{\partial q} &= \left\langle \frac{\partial \bar{G}(p, q, \mu)}{\partial q_0}; \frac{\partial \bar{G}(p, q, \mu)}{\partial q_2} \right\rangle = \langle g_1(p, q, \mu), g_2(p, q, \mu) \rangle \\ \frac{\partial \bar{G}(p, q, 0)}{\partial q} &= \frac{2-p}{2\sqrt{2}} \langle \sqrt{2} - 1; -1 \rangle \end{aligned} \quad (15)$$

Поскольку $p \leq 1$, то $\frac{2-p}{2\sqrt{2}} > 0$. Мы рассматриваем задачу максимизации на множестве (3). Следовательно:

$$q^* = \arg \max_{q \in Q} \bar{G}(p, q, 0) = (1, 0).$$

(2) Если $\mu = 1$:

$$G(y, q, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0}{y}$$

Далее осредняем функцию $G(y, q, \mu)$ по стратегиям противника $y \in Y = \{1, 2\}$ с вероятностями $(1 - p, p)$:

$$\begin{aligned} \bar{G}(p, q, 1) &= \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2} - 1)q_2}{2} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2} - 1)q_2}{1} = \\ &= \frac{(p+1)(1 - q_0 + (\sqrt{2} - 1)q_2)}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Найдём частные производную по переменным q_0 и q_2 :

$$\frac{\partial \bar{G}(p, q, 1)}{\partial q} = \frac{p+1}{2\sqrt{2}} \langle -1; \sqrt{2} - 1 \rangle$$

Поскольку $p \geq 0$, то $\frac{p+1}{2\sqrt{2}} > 0$. Мы рассматриваем задачу максимизации

на множестве (3). Следовательно:

$$q^* = \arg \max_{q \in Q} \bar{G}(p, q, 1) = (0, 1).$$

(3) Теперь $\mu \neq 0, 1$:

$$G(y, q, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2}} \min_{0 < \mu < 1} \left\langle \frac{y}{2} \cdot \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2} - 1)q_2}{\mu}, \frac{1}{y} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0}{1 - \mu} \right\rangle$$

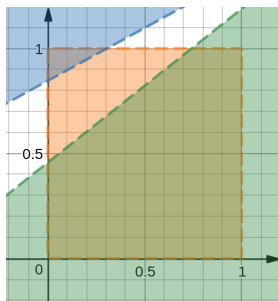
Далее осредняем функцию $G(y, q, \mu)$ по стратегиям противника $y \in Y = \{1, 2\}$ с вероятностями $(1 - p, p)$:

$$\begin{aligned} \bar{G}(p, q, \mu) = & \frac{1-p}{\sqrt{2}} \min_{0 < \mu < 1} \left\langle \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2} - 1)q_2}{2\mu}, \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0}{1 - \mu} \right\rangle + \\ & + \frac{p}{\sqrt{2}} \min_{0 < \mu < 1} \left\langle \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2} - 1)q_2}{\mu}, \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0}{2(1 - \mu)} \right\rangle \quad (16) \end{aligned}$$

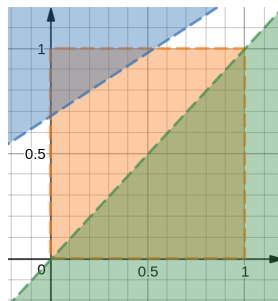
Введём вспомогательные обозначения:

$$\begin{aligned} \ell_1(q, \mu) &= \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2} - 1)q_2}{2\mu} \\ \ell_2(q, \mu) &= \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0}{1 - \mu} \\ \ell_3(q, \mu) &= \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2} - 1)q_2}{\mu} \\ \ell_4(q, \mu) &= \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0}{2(1 - \mu)} \end{aligned}$$

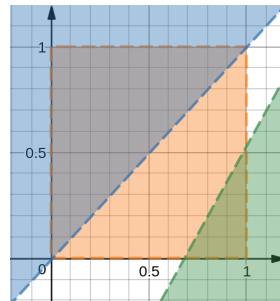
Для различных значений переменной μ рассмотрим взаимные расположения множеств $\ell_1 > \ell_2$ и $\ell_3 > \ell_4$ на плоскости (q_0, q_2) . Другими словами для фиксированного значения $\mu \in [0, 1]$ найдём области плоскости, в которых достигается минимум одного из выражений в (5):



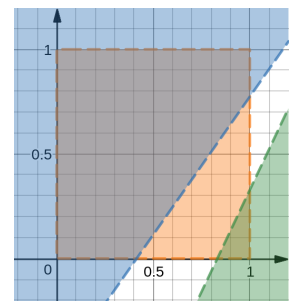
(a) $\mu = 0.8$



(b) $\mu = \frac{2}{3}$



(c) $\mu = \frac{1}{3}$



(d) $\mu = 0.1$

Поясним график. Синяя область - это множество $\ell_1 > \ell_2$.

Зелёная область на графике - это множество $\ell_3 < \ell_4$.

Область между ними - это множество $\{\ell_1 < \ell_2 \cap \ell_3 > \ell_4\}$. Исходя из графиков $\{\ell_1 > \ell_2 \cap \ell_3 < \ell_4\} = \emptyset$ при $(\mu, q) \in (0, 1) \times [0, 1]^2$. Поскольку граничные случаи для параметра μ были рассмотрены в первых двух пунктах, то квадрат $[0, 1]^2$ на плоскости (q_0, q_2) делится на 3 не пересекающихся множества.

Добавить доказательство того, что всего три возможных варианта

(1) Рассмотрим полуплоскость, которая определяется системой $\begin{cases} \ell_1 > \ell_2 \\ \ell_3 > \ell_4 \end{cases} \sim l_1 > l_2$

Выражение (16) на этом множестве принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \overline{G}(p, q, \mu) &= \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)} = \\ &= \frac{2-p}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu} \end{aligned}$$

(2) Рассмотрим полуплоскость, которая определяется системой $\begin{cases} \ell_1 < \ell_2 \\ \ell_3 < \ell_4 \end{cases} \sim l_3 < l_4$

Выражение (16) на этом множестве принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \overline{G}(p, q, \mu) &= \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{\mu} = \\ &= \frac{1+p}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{\mu} \end{aligned}$$

(3) Рассмотрим область, которая определяется системой $\begin{cases} \ell_1 < \ell_2 \\ \ell_3 > \ell_4 \end{cases}$

Выражение (16) на этом множестве принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \overline{G}(p, q, \mu) &= \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)} = \\ &= \frac{(1-p)(1-\mu)(1-q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2) + p\mu(1-q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0)}{2\sqrt{2}\mu(1-\mu)} \end{aligned}$$

Итого:

$$\overline{G}(p, q, \mu) = \begin{cases} \frac{2-p}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu}, & \ell_1 \geq \ell_2 \\ \frac{1+p}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}, & \ell_3 \leq \ell_4 \\ \frac{(1-p)(1-\mu)(1-q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2) + p\mu(1-q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0)}{2\sqrt{2}\mu(1-\mu)}, & \begin{cases} \ell_1 \leq \ell_2 \\ \ell_3 \geq \ell_4 \end{cases} \end{cases}$$

Тогда производная от функции имеет:

$$\frac{\partial \bar{G}(p, q, \mu)}{\partial q} = \begin{cases} \frac{2-p}{2\sqrt{2}(1-\mu)} \langle \sqrt{2}-1; -1 \rangle, & \ell_1 \geq \ell_2 \\ \frac{1+p}{2\sqrt{2}\mu} \langle -1; \sqrt{2}-1 \rangle, & \ell_3 \leq \ell_4 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}\mu(1-\mu)} \langle (\sqrt{2}-1)p\mu - (1-p)(1-\mu); (\sqrt{2}-1)(1-p)(1-\mu) - p\mu \rangle, & \begin{cases} \ell_1 \leq \ell_2 \\ \ell_3 \geq \ell_4 \end{cases} \end{cases}$$

(1) Рассмотрим $\ell_1 \geq \ell_2$. Производная в области имеет вид:

$$\frac{\partial \bar{G}(p, q, \mu)}{\partial q} = \frac{2-p}{2\sqrt{2}(1-\mu)} \langle \sqrt{2}-1; -1 \rangle$$

Введём вспомогательную функцию $\ell_B(q, \mu) := (\ell_1 - \ell_2) \cdot \mu(1 - \mu)$, множество, на котором она принимает неотрицательные значения составляют интересующую нас область. Множитель $\mu(1 - \mu)$ является строго положительным на $\mu \in (0, 1)$, поэтому не влияет на знак. Функция является линейной по переменным q_0 и q_2 :

$$\ell_B(q, \mu) = (1 + \mu(2\sqrt{2} - 3))q_0 + (1 - \sqrt{2} + \mu(\sqrt{2} - 3))q_2 + 3\mu - 1$$

Параметр μ изменяется в диапазоне $(0, 1)$, причём

$$\ell_B(q, \mu) \xrightarrow{\mu \rightarrow 1} 1 - q_0 + (\sqrt{2} - 1)q_2$$

$$\ell_B(q, \mu) \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} 1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0$$

Предельные положения $\ell_B(q, \mu) = 0$ изображены на графике (6).

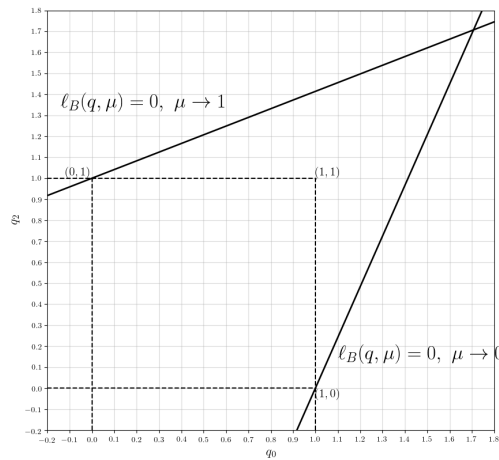


Рис. 3

Найдём значение μ при котором прямая $\ell_B(q, \mu)$ проходит через точку $q = (0, 0)$:

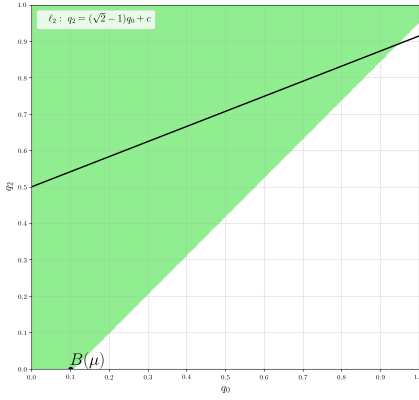
$$\ell_B(0, 0, \hat{\mu}) = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{3}$$

Очевидно, что на полиэдре $P_B(\mu)$:

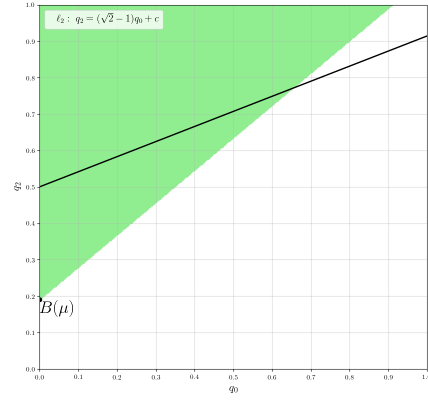
$$P_B(\mu) = \{q \in Q \mid \ell_B(q, \mu) \geq 0\}, \mu \in (0, 1)$$

функция $\overline{G}(p, q, \mu)$ достигает максимума в точке $B(\mu)$:

$$q^* = \arg \max_{q \in P_B(\mu)} \overline{G}(y, q, \mu) = B(\mu) = \begin{cases} (0, q_2) : \ell_B(0, q_2, \mu) = 0, & \frac{1}{3} \leq \mu < 1 \\ (q_0, 0) : \ell_B(q_0, 0, \mu) = 0, & 0 < \mu \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$



(a) $\mu = 0.1 < \frac{1}{3}$



(b) $\mu = 0.4 > \frac{1}{3}$

На графике зелёным цветом изображена область $P_B(\mu)$, чёрным цветом обозначены линии уровня и стрелкой соответственно градиент функции. Рассмотрим эти два случая и найдём явное выражение для точки $B(\mu)$:

(a) Если $\frac{1}{3} \leq \mu \leq 1$ то координата q_2 точки максимума определяется из условия:

$$\begin{aligned} \ell_B(0, q_2, \mu) &= 0 \\ (1 - \sqrt{2} + \mu(\sqrt{2} - 3))q_2 + 3\mu - 1 &= 0 \Rightarrow q_2 = \frac{3\mu - 1}{\sqrt{2} - 1 + (3 - \sqrt{2})\mu} \\ q^* &= (0; \frac{3\mu - 1}{\sqrt{2} - 1 + (3 - \sqrt{2})\mu}), \quad \frac{1}{3} \leq \mu \leq 1 \end{aligned}$$

(b) Если $0 \leq \mu \leq \frac{1}{3}$ то координата q_0 точки максимума определяется из условия:

$$\begin{aligned}\ell_B(q_0, 0, \mu) &= 0 \\ (1 + \mu(2\sqrt{2} - 3))q_0 + 3\mu - 1 &= 0 \Rightarrow q_0 = \frac{1 - 3\mu}{1 + (2\sqrt{2} - 3\mu)} \\ q^* &= \left(\frac{1 - 3\mu}{1 + (2\sqrt{2} - 3\mu)}; 0 \right), \quad 0 \leq \mu \leq \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Следовательно:

$$B(\mu) = \arg \max_{q \in P_B(\mu)} \overline{G}(y, q, \mu) = \begin{cases} (0; \frac{3\mu - 1}{\sqrt{2} - 1 + (3 - \sqrt{2})\mu}), & \frac{1}{3} \leq \mu \leq 1 \\ (\frac{1 - 3\mu}{1 + (2\sqrt{2} - 3\mu)}; 0), & 0 \leq \mu \leq \frac{1}{3} \end{cases} \quad (17)$$

(2) Рассмотрим $\ell_3 \leq \ell_4$. Производная в области имеет вид:

$$\frac{\partial \overline{G}(p, q, \mu)}{\partial q} = \frac{1 + p}{2\sqrt{2}\mu} \langle -1; \sqrt{2} - 1 \rangle$$

Введём вспомогательную функцию $\ell_A(q, \mu) := (\ell_3 - \ell_4) \cdot \mu(1 - \mu)$, множество, на котором она принимает неотрицательные значения составляют интересующую нас область. Множитель $\mu(1 - \mu)$ является строго положительным на $\mu \in (0, 1)$, поэтому не влияет на знак. Функция является линейной по переменным q_0 и q_2 :

$$\ell_A(q, \mu) = -(2 + (\sqrt{2} - 3)\mu)q_0 - (2 - 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2} - 3)\mu)q_2 - 3\mu + 2$$

Параметр μ изменяется в диапазоне $(0, 1)$, причём

$$\begin{aligned}\ell_A(q, \mu) &\xrightarrow{\mu \rightarrow 1} 1 - q_0 + (\sqrt{2} - 1)q_2 \\ \ell_A(q, \mu) &\xrightarrow{\mu \rightarrow 0} 1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0\end{aligned}$$

Предельные положения $\ell_B(q, \mu) = 0$ изображены на графике (6). Найдём значение μ при котором прямая $\ell(q, \mu)$ проходит через точку $q = (0, 0)$:

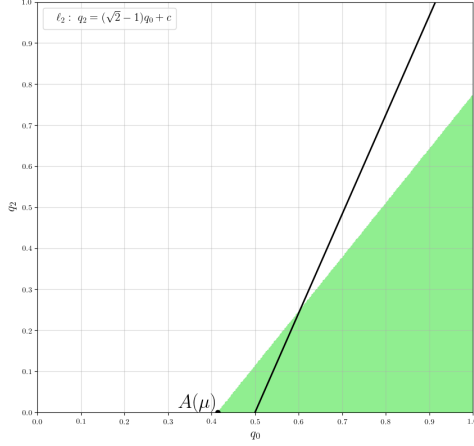
$$\ell_A(0, 0, \hat{\mu}) = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{2}{3}$$

Очевидно, что на полиэдре $P_2(\mu)$:

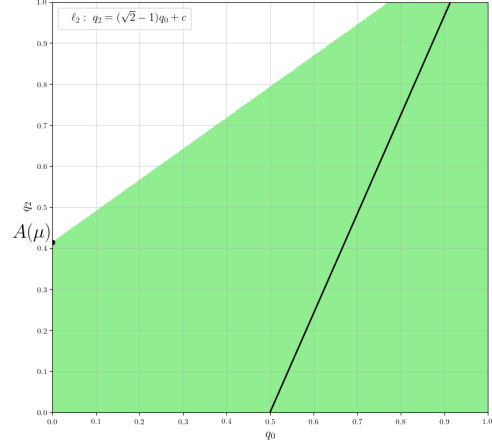
$$P_A(\mu) = \{q \in Q \mid \ell_3(q, \mu) \leq \ell_4(q, \mu)\}, \quad \mu \in (0, 1)$$

функция $\overline{G}(p, q, \mu)$ достигает максимума в точке $A(\mu)$:

$$A(\mu) = \arg \max_{q \in P_A(\mu)} \overline{G}(p, q, \mu) = \begin{cases} (0, q_2) : \ell_A(0, q_2, \mu) = 0, & \frac{2}{3} \leq \mu \leq 1 \\ (q_0, 0) : \ell_A(q_0, 0, \mu) = 0, & 0 \leq \mu \leq \frac{2}{3} \end{cases}$$



(a) $\mu = 0.1 < \frac{2}{3}$



(b) $\mu = 0.8 > \frac{2}{3}$

На графике зелёным цветом изображена область $P_A(\mu)$, чёрным цветом обозначены линии уровня и стрелкой соответственно градиент функции. Рассмотрим эти два случая и найдём явное выражение для точки $A(\mu)$:

(a) Если $\frac{2}{3} \leq \mu \leq 1$ то координата q_2 точки максимума определяется из условия:

$$\begin{aligned} \ell_A(0, q_2, \mu) &= 0 \\ -(2 - 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2} - 3)\mu)q_2 - 3\mu + 2 &= 0 \Rightarrow q_2 = \frac{3\mu - 2}{2(\sqrt{2} - 1) + (3 - 2\sqrt{2})\mu} \\ q^* &= (0; \frac{3\mu - 2}{2(\sqrt{2} - 1) + (3 - 2\sqrt{2})\mu}), \quad \frac{2}{3} \leq \mu \leq 1 \end{aligned}$$

(b) Если $0 \leq \mu \leq \frac{2}{3}$ то координата q_0 точки максимума определяется из условия:

$$\begin{aligned} \ell_A(q_0, 0, \mu) &= 0 \\ -(2 + (\sqrt{2} - 3)\mu)q_0 - 3\mu + 2 &= 0 \Rightarrow q_0 = \frac{2 - 3\mu}{2 + (\sqrt{2} - 3)\mu} \\ q^* &= (\frac{2 - 3\mu}{2 + (\sqrt{2} - 3)\mu}; 0), \quad 0 \leq \mu \leq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Следовательно:

$$A(\mu) = \arg \max_{q \in P_A(\mu)} \bar{G}(p, q, \mu) = \begin{cases} (0; \frac{3\mu - 2}{2(\sqrt{2} - 1) + (3 - 2\sqrt{2})\mu}), & \frac{2}{3} \leq \mu \leq 1 \\ (\frac{2 - 3\mu}{2 + (\sqrt{2} - 3)\mu}; 0), & 0 \leq \mu \leq \frac{2}{3} \end{cases} \quad (18)$$

(3) Рассмотрим область в которой $\begin{cases} \ell_1 \leq \ell_2 \\ \ell_3 \geq \ell_4 \end{cases}$

Частные производные имеют следующий вид в данной области.

$$\frac{\partial \bar{G}(p, q, \mu)}{\partial q} = \frac{1}{2\sqrt{2}\mu(1-\mu)} \langle (\sqrt{2}-1)p\mu - (1-p)(1-\mu); (\sqrt{2}-1)(1-p)(1-\mu) - p\mu \rangle$$

$$g_1 = (\sqrt{2}-1)p\mu - (1-p)(1-\mu)$$

$$g_2 = (\sqrt{2}-1)(1-p)(1-\mu) - p\mu$$

Заметим, что функция $\bar{G}(p, q, \mu)$ является линейной по переменным q_0 и q_2 т.е.:

$$\bar{G}(p, q, \mu) = g_0(p, \mu) q_0 + g_2(p, \mu) q_2 + c(p, \mu)$$

и

$$\bar{G}(p, q, \mu) = 0 \sim q_2 = k(p, \mu) \cdot q_0 + c(p, \mu)$$

Рассматриваем функцию на полиэдре $P_{AB}(\mu)$:

$$P_{AB}(\mu) = \{q \in Q \mid \ell_A(q, \mu) \geq 0 \cap \ell_B(q, \mu) \leq 0\}, \mu \in (0, 1)$$

Ограничение $\ell_A(q, \mu) = 0$ и $\ell_B(q, \mu) = 0$ представимы в эквивалентном виде:

$$\ell_A(q, \mu) = 0 \sim q_2 = k_A(\mu)q_0 + c_A(\mu)$$

$$\ell_B(q, \mu) = 0 \sim q_2 = k_B(\mu)q_0 + c_B(\mu)$$

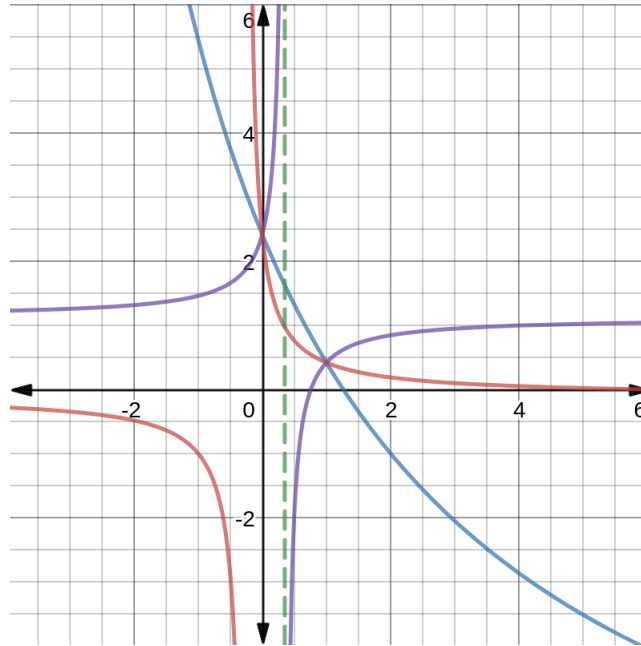


Рис. 6: Коэффициенты $k_A(\mu)$, $k_B(\mu)$ и $k(p, \mu)$ при фиксированном p

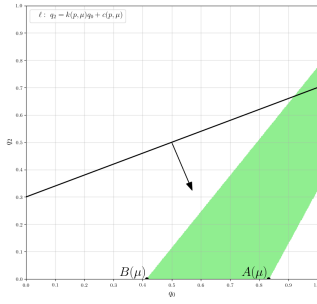
Рассмотрим график 11, на котором изображены значения коэффициентов при фиксированном значении $p \in [0, 1]$. $k_B(\mu)$ изображены красной кривой, $k_A(\mu)$ синей и

фиолетовой - кривая $k(p, \mu)$. Пунктирная вертикальная линия обозначает точку x в которой выражение $g_1 = 0$. Имеет место неравенство $k_A(\mu) > k_B(\mu)$ при $\mu \in (0, 1)$.

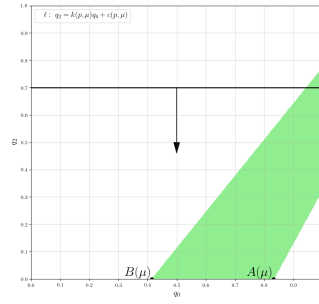
$$\begin{cases} k(\mu) < k_B(\mu) \text{ при } g_1(\mu, p) < 0 \\ k(\mu) > k_A(\mu) \text{ при } g_1(\mu, p) > 0 \end{cases}$$

Следовательно точки максимума функции $\overline{G}(p, q, \mu)$ при фиксированных значениях μ и p могут быть точки: $\{A\}, \{B\}, (0, 0)$ и отрезки $[B, A], [0, A], [0, B]$. Где точки $A(\mu)$ и $B(\mu)$ определены в [18](#) и [17](#). Рассмотрим три подслучая:

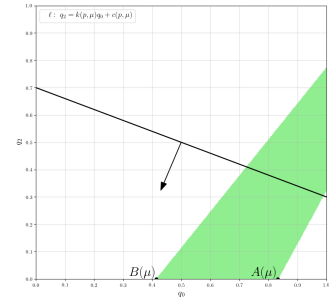
(a) $0 \leq \mu \leq \frac{1}{3}$.



(a) $g_1 > 0 \Rightarrow q^* = A$



(b) $g_1 = 0 \Rightarrow q^* = [B, A]$

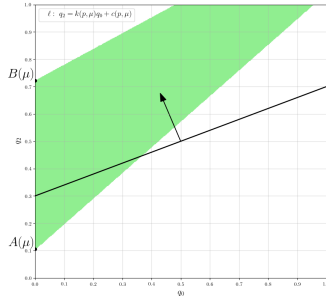


(c) $g_1 < 0 \Rightarrow q^* = B$

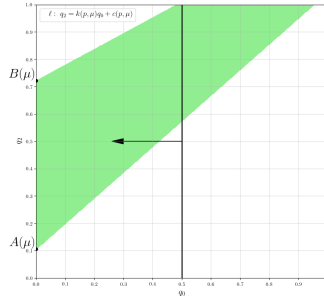
Рис. 7

$$\begin{cases} g_1 > 0 \Rightarrow q^* = A \\ g_1 = 0 \Rightarrow q^* = [B, A] \\ g_1 < 0 \Rightarrow q^* = B \end{cases}$$

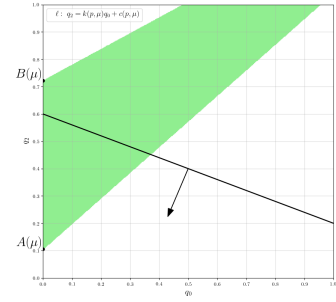
(b) $\frac{2}{3} \leq \mu \leq 1$



(a) $g_2 > 0 \Rightarrow q^* = B$



(b) $g_2 = 0 \Rightarrow q^* = [B, A]$

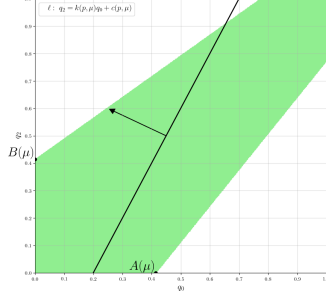


(c) $g_2 < 0 \Rightarrow q^* = A$

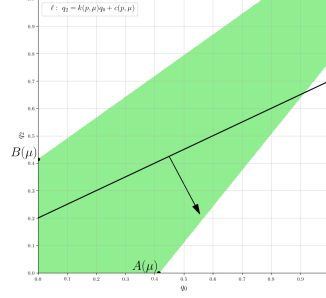
Рис. 8

$$\begin{cases} g_2 > 0 \Rightarrow q^* = B \\ g_2 = 0 \Rightarrow q^* = [B, A] \\ g_2 < 0 \Rightarrow q^* = A \end{cases}$$

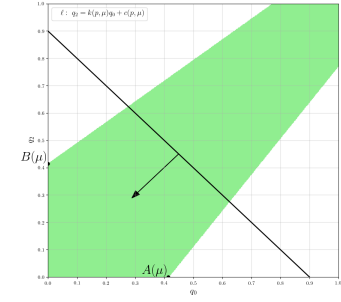
(c) $\frac{1}{3} \leq \mu \leq \frac{2}{3}$



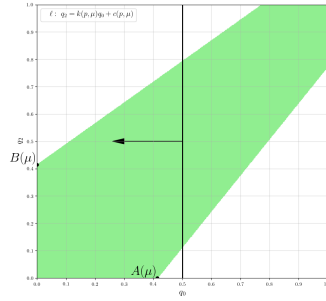
(a) $g_2 > 0 \Rightarrow q^* = B$



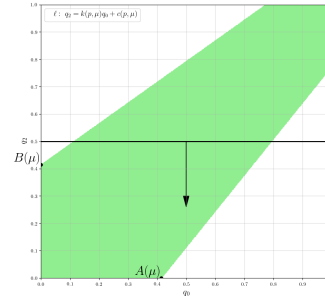
(b) $g_1 > 0 \Rightarrow q^* = A$



(c) $\begin{cases} g_2 < 0 \\ g_1 < 0 \end{cases} \Rightarrow q^* = (0, 0)$



(d) $g_2 = 0 \Rightarrow q^* = [0, B]$



(e) $g_1 = 0 \Rightarrow q^* = [0, A]$

$$\begin{cases} g_1 > 0 \Rightarrow q^* = A \\ g_2 > 0 \Rightarrow q^* = B \\ g_1 = 0 \Rightarrow q^* = [0, A] \\ g_2 = 0 \Rightarrow q^* = [0, B] \\ \begin{cases} g_2 < 0 \\ g_1 < 0 \end{cases} \Rightarrow q^* = (0, 0) \end{cases}$$

Итого получим следующие

$$C(p, \mu) = \arg \max_{P_{AB}} \bar{G}(p, q, \mu) \begin{cases} A(\mu), & g_2(p, \mu) < 0 \cup \mu \leq \frac{1}{3} \cap g_2 < 0 \\ B(\mu), & g_1(p, \mu) > 0 \cup \mu \geq \frac{2}{3} \cap g_1 > 0 \\ (0, 0), & g_1(p, \mu) < 0 \cap g_2(p, \mu) < 0 \\ [A(\mu), B(\mu)], & g_1(\mu) = 0 \cap \mu < \frac{1}{3} \cup g_1(\mu) = 0 \cap \mu > \frac{2}{3} \\ [0, A(\mu)], & g_2(\mu) = 0 \cap \mu \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ [0, B(\mu)], & g_1(\mu) = 0 \cap \mu \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \end{cases}$$

Но кроме того точки $A(\mu)$ и $B(\mu)$ являются оптимальными $\forall p$ и μ поскольку являются таковыми в (1) и (2). Итого в области P_B оптимальной является точка $B(\mu)$, в области P_A оптимальной является точка $A(\mu)$, и в области P_{AB} оптимальной

является точка $C(p, \mu)$. Поскольку если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на множестве X , то и $\min(f(x), g(x))$ непрерывна на X , то максимум достигается в точке C .

$$q^*(p, \mu) = \arg \max_Q \bar{G}(p, q, \mu) \begin{cases} A(\mu), & g_2(p, \mu) < 0 \cup \mu \leq \frac{1}{3} \cap g_2 < 0 \\ B(\mu), & g_1(p, \mu) > 0 \cup \mu \geq \frac{2}{3} \cap g_1 > 0 \\ (0, 0), & g_1(p, \mu) < 0 \cap g_2(p, \mu) < 0 \\ [A(\mu), B(\mu)], & g_1(\mu) = 0 \cap \mu < \frac{1}{3} \cup g_1(\mu) = 0 \cap \mu > \frac{2}{3} \\ [0, A(\mu)], & g_2(\mu) = 0 \cap \mu \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ [0, B(\mu)], & g_1(\mu) = 0 \cap \mu \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ (0, 1), & \mu = 0 \\ (1, 0), & \mu = 1 \end{cases}$$

Поскольку в пункте 3.1 мы установили, что

$$p^*(q, \lambda(q)) = \arg \max_{p \in [0, 1]} \bar{L}(p, q, \lambda(q)) = [0, 1]$$

Нас интересуют оптимальные пары (p^0, q^0) такие, что $\exists(\lambda, \mu) \in [0, 1]^2$:

$$\begin{cases} p^0 = p^*(q^0, \lambda) \\ q^0 = q^*(p^0, \mu) \end{cases}$$

Введём следующие множества:

$$P_0 = [0, 1], \quad Q_0 = \{(q_0, q_2) \in Q \mid q_0 = 0 \text{ или } q_2 = 0\}$$

Следующие точки являются оптимальными:

$$(p, q) \in P_0 \times Q_0$$

9 Ссылки на источники

- [1] Matthais Ehrgott. *Multicriterial optimization. page 38, Defenition 2.24*
- [2] Н.М. Новикова, И.И. Поспелова. *Смешанные стратегии в векторной оптимизаций и свёртка Гермейера.*
- [3] С.В. Кононов. *Смешанные стратегии в векторной оптимизации и свертка Гермейера.*
- [4] Ю.Б. Гермейер *Введение в теорию исследжования операций*