Свойства свёртки Гермейера в векторных играх

Кононов Сергей

4 мая 2019 г.

Содержание

1 Введение

Определение [1]
Мы рассмотрим ***линейную свёртку*** **(ЛС)**:

$$L(\{f_i\},\lambda)(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i, \text{ где } \lambda \in \Lambda = \{\lambda_i \geqslant 0 \mid \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}, \tag{1}$$

и ***свёртку Гермейера***, или ***обратную логическую свёртку*** **(ОЛС)**:

$$G(\{f_i\},\lambda)(x) = \min_{\lambda_i>0} \frac{f_i}{\lambda_i}, \text{ где } \lambda \in \Lambda = \{\lambda_i \geq 0 | \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}. \tag{2}$$

2 Постановка задача

Функциональный критерий: $F(x,y) = (\frac{y\sqrt{x}}{2}, \frac{\sqrt{1-x}}{y})$

С: $F(x,y) \to \max\limits_{x \in X}$	П: $F(x,y) \to \min\limits_{y \in Y}$
$X = \{0; \frac{1}{2}; 1\}$	$Y = \{1, 2\}$
$P(X=0) = q_0$	$P(Y=1) = p_0$
$P(X=\frac{1}{2}) = q_1$	$P(Y=2) = p_1$
$P(X=1) = q_2$	
$\sum_{i=0}^{2} q_i = 1$	$\sum_{i=0}^{1} p_i = 1$
$0 \leqslant q_i \leqslant 1\ ,\quad i = \overline{0,2}$	$0 \leqslant p_i \leqslant 1\ ,\quad i = \overline{0,1}$

Следровательно $q_1 = 1 - q_0 - q_2$ Пусть $p := p_1,$ тогда $p_0 = 1 - p$

Введём множество

$$Q = \{(q_0, q_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant q_i \leqslant 1\ i \in \{0,2\};\ q_0 + q_2 \leqslant 1\} \tag{3}$$

Студент выбирет X и использует **ОЛС**.
Преподаватель выбирает Y и использует **ЛС**.

3 Оптимальные значения

3.1 Рассмотрим игру за преподавателя

Игрок использует смешанную стратегию:

$$F_{\Pi}(p,x) = \Big\langle (1-p)\frac{1\cdot\sqrt{x}}{2} + p\frac{2\cdot\sqrt{x}}{2};\ (1-p)\frac{\sqrt{1-x}}{1} + p\frac{\sqrt{1-x}}{2} \Big\rangle = \frac{1}{2}\Big\langle (p+1)\sqrt{x};\ (2-p)\sqrt{1-x} \Big\rangle$$

Игрок использует ЛС:

$$L(p,x,\lambda)=\frac{1}{2}\big(\lambda(p+1)\sqrt{x}+(1-\lambda)(2-p)\sqrt{1-x}\big)$$

Введём обозначение $q=(q_0,q_1,q_2)$ и осредняем по переменной x:

$$\overline{L}(p,q,\lambda)=\frac{1}{2}\Big(q_0(1-\lambda)(2-p)\sqrt{1}+q_1\big(\lambda(p+1)\frac{1}{\sqrt{2}}+(1-\lambda)(2-p)\frac{1}{\sqrt{2}}\big)+q_2\lambda(p+1)\sqrt{1}\Big)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\big(\lambda(q_1+\sqrt{2}q_2)-(1-\lambda)(q_1+\sqrt{2}q_0)\big)p+\big(\lambda(q_1+\sqrt{2}q_2)+2(1-\lambda)(q_1+\sqrt{2}q_0)\big)\Big)$$

Итого получаем:

$$\overline{L}(p,q,\lambda)=k(\lambda,q)p+b(\lambda,q)$$

где

$$k(q,\lambda)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\big(\lambda(q_1+\sqrt{2}q_2)-(1-\lambda)(q_1+\sqrt{2}q_0)\big)$$

$$b(q,\lambda)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\big(\lambda(q_1+\sqrt{2}q_2)+2(1-\lambda)(q_1+\sqrt{2}q_0)\big)$$

Наша задача найти $\hat{p}(q,\lambda)=\arg\min\limits_{p\in[0,1]}\overline{L}(p,q,\lambda)$. Поскольку функция $\overline{L}(p,q,\lambda)$ линейна по переменной p, следовательно:

$$\hat{p}(q,\lambda)=\arg\min_{p\in[0,1]}\overline{L}(p,q,\lambda)=\begin{cases}0, & k(\lambda,q)>0\\ 1, & k(\lambda,q)<0\\ [0,1], & k(\lambda,q)=0\end{cases}$$

Рассмотрим функцию $k(q,\lambda)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\lambda\big(2+(\sqrt{2}-2)(q_0-q_2)\big)-\big(1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0\big)\Big)$
Введём обозначения:

$$\ell(q)=\frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{2+(\sqrt{2}-2)(q_0-q_2)}$$

Поскольку для q удовлетворяющих заданным ограничениям верно:

$$2+(\sqrt{2}-2)(q_0-q_2)>0$$

Следовательно:

$$k(q,\lambda)\vee 0\Leftrightarrow\lambda\vee\ell(q)$$

На рисунке 1 в плоскости $q=(q_0.q_2)$ бирюзовым цветом изображена область в которой $0\leqslant\ell(q)\leqslant 1$. Видно, что квадрат $q=[0,1]^2$ полностью принадлежит этой области. Прямые $\ell_1(q)$ и $\ell_2(q)$ такие, что:

$$\ell_1(q):\ \ell(q)=0$$

$$\ell_2(q):\ \ell(q) = 1$$

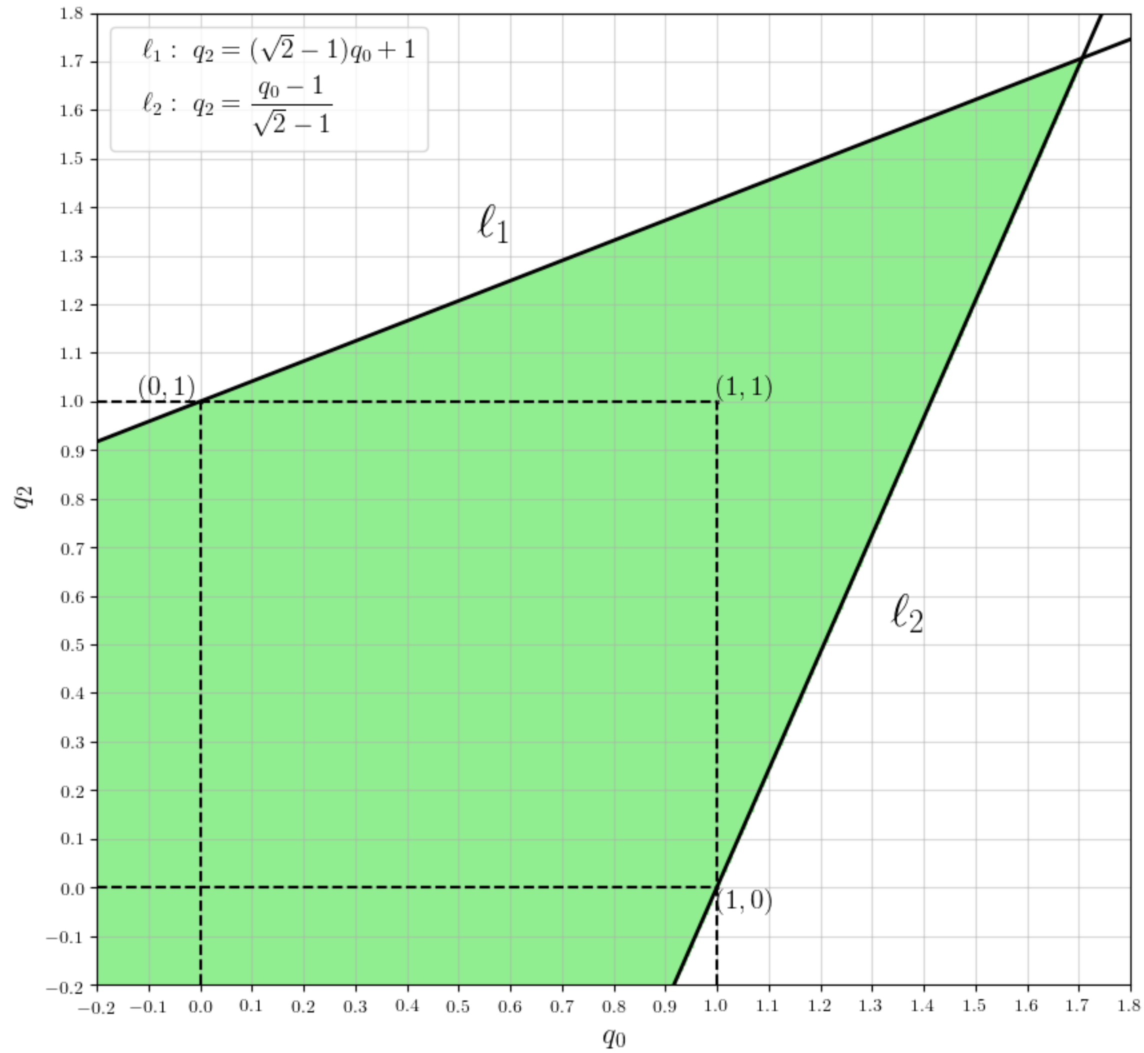


Рис. 1

Следовательно $\forall q = (q_0, q_2) \in [0,1]^2\ \exists\ \lambda \in [0,1]:\ k(\lambda, q) = 0$

$$\hat{p}(\lambda, q) = \arg\min_{p\in[0,1]} \overline{L}(p,q,\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \in \big(\ell(q), 1\big] \\ 1, & \lambda \in \big[0, \ell(q)\big) \\ [0,1], & \lambda = \ell(q) \end{cases}\ , \text{ где } \ell(q) = \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{2 + (\sqrt{2}-2)(q_0 - q_2)}$$

3.2 Рассмотрим игру за студента

Игрок использует смешанную стратегию:

$$F_{\text{C}} = \langle q_0\frac{y\sqrt{0}}{2} + q_1\frac{y}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} + q_2\frac{y\sqrt{1}}{2}; q_0\frac{\sqrt{1}}{y} + q_1\frac{1}{y}\sqrt{\frac{1}{2}} + q_2\frac{\sqrt{0}}{y}\rangle =$$
$$= \langle\frac{y}{2}\cdot\frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{\sqrt{2}}; \frac{1}{y}\cdot\frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{\sqrt{2}}\rangle$$

Используем ОЛС:
Сначала рассмотрим вырожденные случаи - когда $\mu = 0$ и $\mu = 1$.
I Если $\mu = 0$:

$$G(y,q,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{y}$$

Осредняем по переменной y:

$$\overline{G}(p,q,0) = \frac{1-p}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{1} + \frac{p}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{2} =$$
$$= \frac{(2-p)(1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0)}{2\sqrt{2}}$$

Найдём частные производную по переменным q_0 и q_2:

$$\frac{\partial\overline{G}(y,q,0)}{\partial q} = \langle\frac{\partial\overline{G}(y,q,0)}{\partial q_0}; \frac{\partial\overline{G}(y,q,0)}{\partial q_2}\rangle = \frac{2-p}{2\sqrt{2}}\langle\sqrt{2}-1; -1\rangle$$

Поскольку $p \leqslant 1$, то $\dfrac{2-p}{2\sqrt{2}} > 0$. Мы рассматриваем задачу максимизации на множестве (3). Следовательно:

$$\hat{q} = \arg\max_{q\in Q}\overline{G}(y,q,0) = (1,0).$$

II Рассмотрим случай когда $\mu = 1$:

$$G(y,q,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{y}$$

Осредняем по переменной y:

$$\overline{G}(p,q,1) = \frac{1-p}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{2} + \frac{p}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{1} =$$
$$= \frac{(p+1)(1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2)}{2\sqrt{2}}$$

Найдём частные производную по переменным q_0 и q_2, при этом введём следующие обозначения для сокращения записи:

$$\frac{\partial\overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q} = \langle\frac{\partial\overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q_0}; \frac{\partial\overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q_2}\rangle = \langle g_1(p,q,\mu), g_2(p,q,\mu)\rangle \tag{4}$$

Таким образом получаем, что:

$$\frac{\partial \overline{G}(y,q,1)}{\partial q} = \frac{p+1}{2\sqrt{2}}\langle -1; \sqrt{2}-1\rangle$$

Поскольку $p \geqslant 0$, то $\dfrac{p+1}{2\sqrt{2}} > 0$. Мы рассматриваем задачу максимизации на множестве (3). Следовательно:

$$q^* = \arg\max_{q\in Q} \overline{G}(y,q,1) = (0,1).$$

III Теперь $\mu \neq 0, 1$:

$$G(y,q,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}} \min_{0<\mu<1} \Big\langle \frac{y}{2}\cdot\frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}; \frac{1}{y}\cdot\frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu}\Big\rangle$$

Осредняем по переменной y:

$$\overline{G}(p,q,\mu) = \frac{1-p}{\sqrt{2}} \min_{0<\mu<1} \Big\langle \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu}; \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu}\Big\rangle + \\ + \frac{p}{\sqrt{2}} \min_{0<\mu<1} \Big\langle \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}; \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)}\Big\rangle \quad (5)$$

Введём обозначения:

$$\ell_1(q,\mu) = \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu}$$

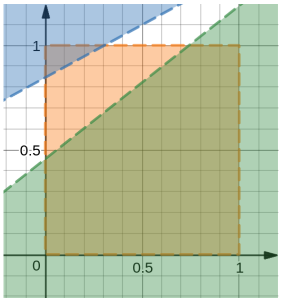
$$\ell_2(q,\mu) = \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu}$$

$$\ell_3(q,\mu) = \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}$$

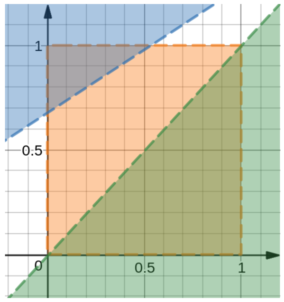
$$\ell_4(q,\mu) = \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)}$$

Для различных значений переменной μ рассмотрим взаимные расположения множеств $\ell_1 > \ell_2$ и $\ell_3 > \ell_4$ на плоскости (q_0, q_2). Другими словами для фиксированного значения $\mu \in [0,1]$ найдём области плоскости, в которых достигается минимум одного из выражений в скобках:
Синяя область на графике - это множество $\ell_1 > \ell_2$.
Зелёная область на графике - это множнство $\ell_3 > \ell_4$.
Область между ними - это $\{\ell_1 < \ell_2 \cap \ell_3 < \ell_4\}$. Исходя из графиков $\{\ell_1 > \ell_2 \cap \ell_3 > \ell_4\} = \emptyset$ при $\mu \in (0,1), q \in [0,1]^2$. Поскольку граничные случаи для параметра μ были рассмотрены в первых двух пунктах, то квадрат $[0,1]^2$ на плоскости делится на 3 не пересекающихся множества.

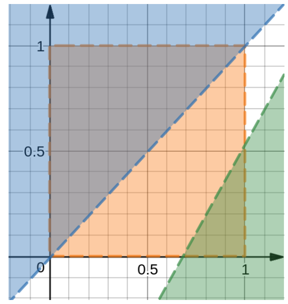
1) Рассмотрим полуплоскость, которая задаётся системой $\begin{cases} \ell_1 > \ell_2 \\ \ell_3 > \ell_4 \end{cases} \sim\ l_1 > l_2$



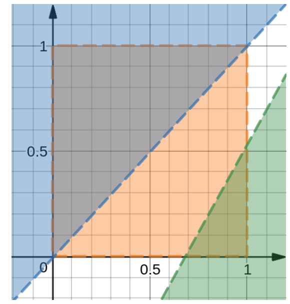
(a) $\mu = 0.8$



(b) $\mu = \frac{2}{3}$



(c) $\mu = \frac{1}{3}$



(d) $\mu = 0.1$

Выражение (4) на этом множестве принимает следующий вид:

$$\overline{G}(p,q,\mu) = \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)} = \\ = \frac{2-p}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu}$$

2) Рассмотрим полуплоскость, которая задаётся системой $\begin{cases} \ell_1 < \ell_2 \\ \ell_3 < \ell_4 \end{cases} \sim\ l_3 < l_4$

Выражение (4) на этом множестве принимает следующий вид:

$$\overline{G}(p,q,\mu) = \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{\mu} = \\ = \frac{1+p}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}$$

3) Рассмотрим область, которая задаётся системой $\begin{cases} \ell_1 < \ell_2 \\ \ell_3 > \ell_4 \end{cases}$

Выражение (4) на этом множестве принимает следующий вид:

$$\overline{G}(p,q,\mu) = \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)} = \\ = \frac{(1-p)(1-\mu)(1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2)+p\mu(1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0)}{2\sqrt{2}\mu(1-\mu)}$$

Итого:

$$\frac{\partial\overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q} = \begin{cases} \dfrac{2-p}{2\sqrt{2}(1-\mu)}\langle\sqrt{2}-1;-1\rangle, & \ell_1 \geqslant \ell_2 \\ \dfrac{1+p}{2\sqrt{2}\mu}\langle -1;\sqrt{2}-1\rangle, & \ell_3 \leqslant \ell_4 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{2}\mu(1-\mu)}\big\langle(\sqrt{2}-1)p\mu-(1-p)(1-\mu);(\sqrt{2}-1)(1-p)(1-\mu)-p\mu\big\rangle, & \begin{cases} \ell_1 \leqslant \ell_2 \\ \ell_3 \geqslant \ell_4 \end{cases} \end{cases}$$

(1) Рассмотрим $\ell_1 \geqslant \ell_2$

$$\frac{\partial \overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q} = \frac{2-p}{2\sqrt{2}(1-\mu)}\langle \sqrt{2}-1; -1\rangle, \text{ если } \ell_1 \geqslant \ell_2$$

Введём вспомогалетльную функцию $\ell_B(q,\mu) := \ell_1 - \ell_2$ Множество положительных значений которой определяет интересующую область, причём функция ℓ является линейной по переменным q_0 и q_2 т.е.:

$$\ell_B(q,\mu) = (1+\mu(2\sqrt{2}-3))q_0 + (1-\sqrt{2}+\mu(\sqrt{2}-3))q_2 + 3\mu - 1$$

$$\ell_B(q,\mu) = A(\mu)q_0 + B(\mu)q_1 + C(\mu)$$

Параметр μ изменяется в диапазоне $(0,1)$, причём

$$\ell_B(q,\mu) = 0 \xrightarrow[\mu\to 1]{} 1 - q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2 = 0$$
$$\ell_B(q,\mu) = 0 \xrightarrow[\mu\to 0]{} 1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0 = 0$$

Предельные положения $\ell_1(q,\mu) = \ell_2(q,\mu)$ изображены на графике.

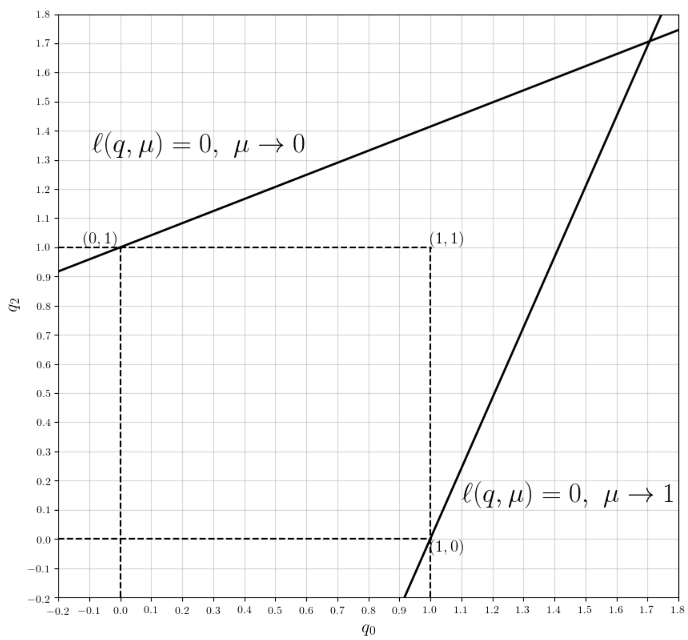


Рис. 3

Найдём значение μ при котором прямая $\ell(q,\mu)$ проходит через точку $q = (0,0)$:

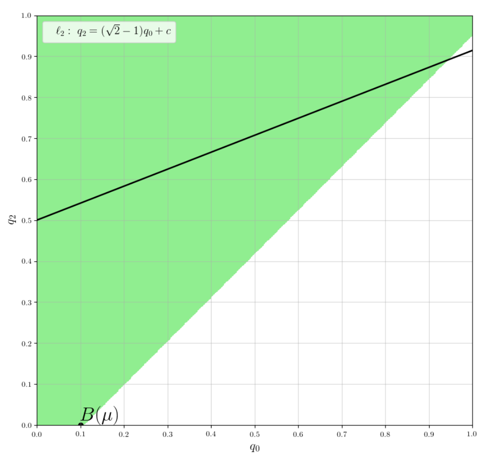
$$\ell_1(0,0,\hat\mu) = \ell_2(0,0,\hat\mu) : \frac{1}{2\hat\mu} = \frac{1}{1-\hat\mu} \Rightarrow \hat\mu = \frac{1}{3}$$

Очевидно, что на полиэдре $P_B(\mu)$:

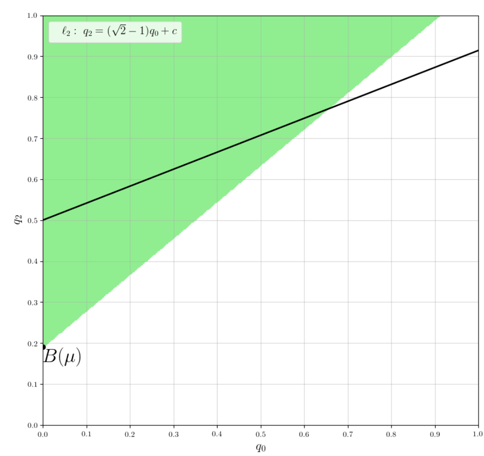
$$P_B(\mu) = \{q \in [0,1]^2,\ \mu \in (0,1) \mid \ell_1(q,\mu) > \ell_2(q,\mu)\}$$

функция $\overline{G}(p,q,\mu)$ достигает максимума в точке $B(\mu)$:

$$q^* = \arg\max_{q \in P_B(\mu)} \overline{G}(y,q,\mu) = B(\mu) = \begin{cases} (0,q_2) : \ell_1(0,q_2,\mu) = \ell_2(0,q_2,\mu), & \mu \geqslant \frac{1}{3} \\ (q_0,0) : \ell_1(q_0,0,\mu) = \ell_2(q_0,0,\mu), & \mu \leqslant \frac{1}{3} \end{cases}$$



(a) $\mu = 0.1 < \frac{1}{3}$



(b) $\mu = 0.4 > \frac{1}{3}$

Рассмотрим эти два случая и найдём явное выражение для точки $B(\mu)$:
a) Если $\mu \geqslant \frac{1}{3}$ то координата q_2 точки максимума определяется из условия:

$$\ell_1(0,q_2,\mu) = \ell_2(0,q_2,\mu)$$

$$\frac{1-q_2}{1-\mu} = \frac{1+(\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu} \quad \Rightarrow \quad q_2 = \frac{3\mu-1}{\sqrt{2}-1+(3-\sqrt{2})\mu}$$

$$q^* = (0; \frac{3\mu-1}{\sqrt{2}-1+(3-\sqrt{2})\mu}), \quad \mu \geqslant \frac{1}{3}$$

b) Если $\mu \leqslant \frac{1}{3}$ то координата q_0 точки максимума определяется из условия:

$$\ell_1(q_0,0,\mu) = \ell_2(q_0,0,\mu)$$

$$\frac{1-q_0}{2\mu} = \frac{1+(\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu} \quad \Rightarrow \quad q_0 = \frac{1-3\mu}{1+(2\sqrt{2}-3\mu)}$$

$$q^* = (0; \frac{3\mu - 1}{\sqrt{2} - 1 + (3-\sqrt{2})\mu}), \quad \mu \geqslant \frac{1}{3}$$

Следовательно:

$$q^* = \arg\max_{q \in P_1(\mu)} \overline{G}(y,q,\mu) = \begin{cases} (0; \dfrac{3\mu - 1}{\sqrt{2} - 1 + (3-\sqrt{2})\mu}), & \mu \geqslant \frac{1}{3} \\ (\dfrac{1-3\mu}{1+(2\sqrt{2}-3\mu)}; 0), & \mu \leqslant \frac{1}{3} \end{cases}$$

2 Рассмотрим $\ell_3 \leqslant \ell_4$

$$\frac{\partial \overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q} = \frac{1+p}{2\sqrt{2}\mu}\langle -1; \sqrt{2}-1\rangle, \text{ если } \ell_3 \leqslant \ell_4$$

Введём вспомогалетльную функцию $\ell_A(q,\mu) := \ell_3 - \ell_4$ Множество положительных значений которой определяет интересующую область, причём функция ℓ является линейной по переменным q_0 и q_2 т.е.:

$$\ell_A(q,\mu) = -(2+(\sqrt{2}-3)\mu)q_0 - (2-2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}-3)\mu)q_2 - 3\mu + 2$$

$$\ell_A(q,\mu) = A(\mu)q_0 + B(\mu)q_1 + C(\mu)$$

Параметр μ изменяется в диапазоне $(0,1)$, причём

$$\ell_A(q,\mu) = 0 \xrightarrow[\mu\to 1]{} 1 - q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2 = 0$$
$$\ell_A(q,\mu) = 0 \xrightarrow[\mu\to 0]{} 1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0 = 0$$

Предельные положения $\ell_1(q,\mu) = \ell_2(q,\mu)$ изображены на графике в предыдущем пункте. Найдём значение μ при котором прямая $\ell(q,\mu)$ проходит через точку $q = (0,0)$:

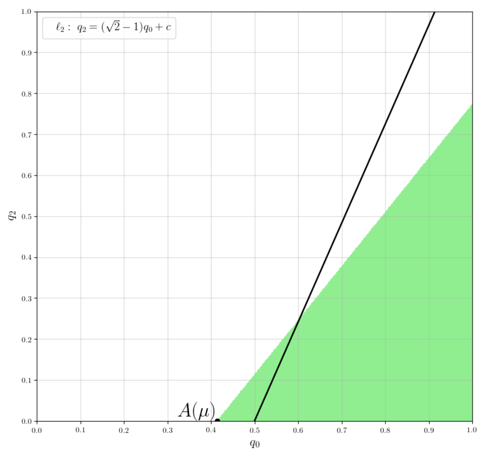
$$\ell_3(0,0,\mu) = \ell_4(0,0,\mu) : \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2(1-\mu)} \Rightarrow \mu = \frac{2}{3}$$

Очевидно, что на полиэдре $P_2(\mu)$:

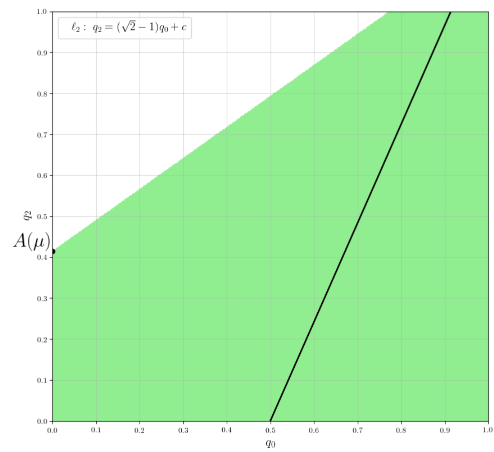
$$P_2(\mu) = \{q \in [0,1]^2, \ \mu \in (0,1) \mid \ell_3(q,\mu) \leqslant \ell_4(q,\mu)\}$$

ф-ия $\overline{G}(p,q,\mu)$ достигает максимума в точке $A(\mu)$:

$$q^* = \arg\max_{q \in P_2(\mu)} \overline{G}(p,q,\mu) = A(\mu) = \begin{cases} (0,q_2) : \ell_3(0,q_2,\mu) = \ell_4(0,q_2,\mu), & \mu \geqslant \frac{2}{3} \\ (q_0,0) : \ell_3(q_0,0,\mu) = \ell_4(q_0,0,\mu), & \mu \leqslant \frac{2}{3} \end{cases}$$



(a) $\mu = 0.1 < \frac{2}{3}$



(b) $\mu = 0.8 > \frac{2}{3}$

Рассмотрим эти два случая и найдём явное выражение для точки $A(\mu)$:
a) Если $\mu \geqslant \frac{2}{3}$ то координата q_2 точки максимума определяется из условия:

$$\ell_3(0, q_2, \mu) = \ell_4(0, q_2, \mu)$$

$$\frac{1-q_2}{2(1-\mu)} = \frac{1+(\sqrt{2}-1)q_2}{\mu} \quad \Rightarrow \quad q_2 = \frac{3\mu - 2}{2(\sqrt{2}-1)+(3-2\sqrt{2})\mu}$$

$$q^* = (0; \frac{3\mu - 2}{2(\sqrt{2}-1)+(3-2\sqrt{2})\mu}), \mu \geqslant \frac{2}{3}$$

b) Если $\mu \leqslant \frac{2}{3}$ то координата q_0 точки максимума определяется из условия:

$$\ell_3(q_0, 0, \mu) = \ell_4(q_0, 0, \mu)$$

$$\frac{1-q_0}{\mu} = \frac{1+(\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)} \quad \Rightarrow \quad q_0 = \frac{2-3\mu}{2+(\sqrt{2}-3)\mu}$$

$$q^* = (\frac{2-3\mu}{2+(\sqrt{2}-3)\mu}; 0), \mu \leqslant \frac{2}{3}$$

Следовательно:

$$q^* = \arg\max_{q \in P_2(\mu)} \overline{G}(p, q, \mu) = \begin{cases} (0; \dfrac{3\mu - 2}{2(\sqrt{2}-1)+(3-2\sqrt{2})\mu}), & \mu \geqslant \frac{2}{3} \\ (\dfrac{2-3\mu}{2+(\sqrt{2}-3)\mu}; 0), & \mu \leqslant \frac{2}{3} \end{cases}$$

3 Рассмотрим область в которой $\begin{cases} \ell_1 \leqslant \ell_2 \\ \ell_3 \geqslant \ell_4 \end{cases}$

Частные переменные имеют следующий види в данной области.
$\dfrac{\partial \overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}\mu(1-\mu)}\big\langle(\sqrt{2}-1)p\mu-(1-p)(1-\mu);(\sqrt{2}-1)(1-p)(1-\mu)-p\mu\big\rangle$
Заметим, что функция $\overline{G}(p,q,\mu)$ является линейной по переменным q_0 и q_2 т.е.:

$$\overline{G}(p,q,\mu) = g_0(p,\mu)\, q_0 + g_2(p,\mu)\, q_2 + c(p,\mu)$$

Рассматриваем функцию на полиэдре $P_{AB}(\mu)$:

$$P_{AB}(\mu) = \{q \in [0,1]^2,\ \mu \in (0,1) \mid \ell_3(q,\mu) \geqslant \ell_4(q,\mu) \cap \ell_1(q,\mu) \leqslant \ell_2(q,\mu)\}$$

Ограничение $\ell_3(q,\mu) = \ell_4(q,\mu)$ представимо в эквивалентном виде:

$$\ell_A(q,\mu) = -(2+(\sqrt{2}-3)\mu)q_0 - (2-2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}-3)\mu)q_2 - 3\mu + 2 = 0$$

$$\ell_A :\ q_2 = k_A q_0 + c_A$$

А ограничение $\ell_1(q,\mu) = \ell_2(q,\mu)$ в виде:

$$\ell_B(q,\mu) = (1+\mu(2\sqrt{2}-3))q_0 + (1-\sqrt{2}+\mu(\sqrt{2}-3))q_2 + 3\mu - 1 = 0$$

$$\ell_B :\ q_2 = k_B q_0 + c_B$$

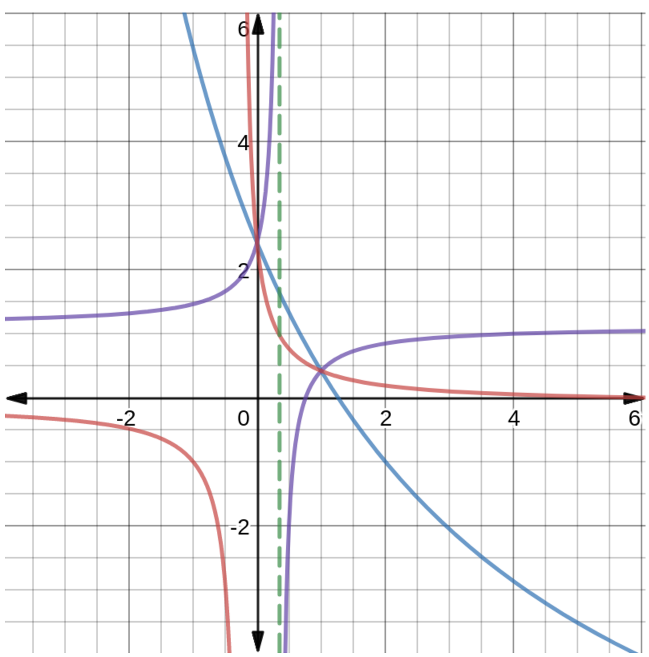


Рис. 6

Имеет место неравенство $k_A(\mu) > k_B(\mu)$ при $\mu \in (0,1)$.
$\begin{cases} k(\mu) < k_B(\mu) \text{ при } g_1(\mu,p) < 0 \\ k(\mu) > k_A(\mu) \text{ при } g_1(\mu,p) > 0 \end{cases}$

Следовательно точки максимума функции $\overline{G}(p, q, \mu)$ по переменной q могут быть: $\{A\}, \{B\}, [B, A], [0, A], [0, B]$ и $(0, 0)$. Рассмотрим три подслучая:
(1) $0 \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{3}$. Область P_{AB} находится под прямой $q_0 = q_2$

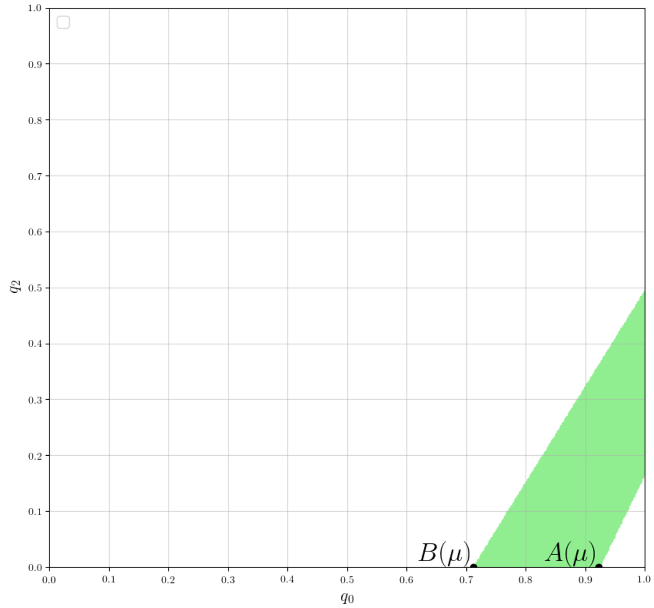


Рис. 7

$$\left[\begin{array}{c} g_1 > 0 \Rightarrow q^* = A \\ g_1 = 0 \Rightarrow q^* = [B, A] \\ g_1 < 0 \Rightarrow q^* = B \end{array}\right.$$

(2) $\mu \geqslant \frac{2}{3}$

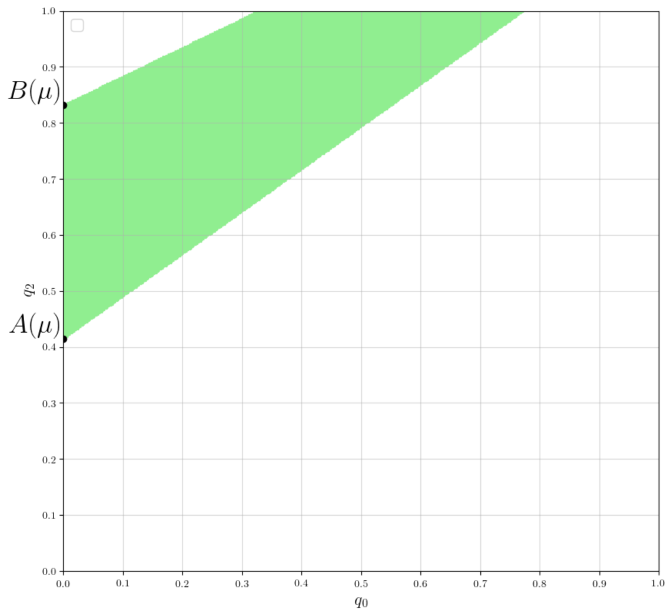


Рис. 8

$$\left[\begin{array}{c} g_2 > 0 \Rightarrow q^* = B \\ g_2 = 0 \Rightarrow q^* = [B, A] \\ g_2 < 0 \Rightarrow q^* = A \end{array}\right.$$

(3) $\frac{1}{3} \leqslant \mu \leqslant \frac{2}{3}$

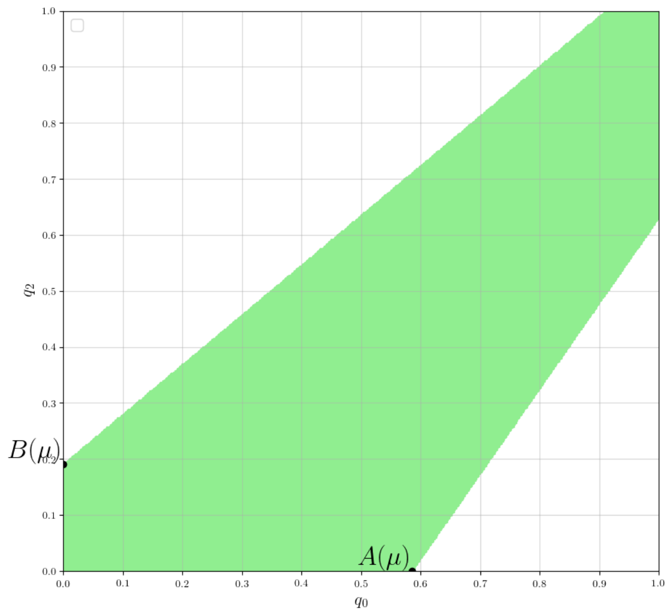


Рис. 9

$$\left[\begin{array}{l} g_1 > 0 \Rightarrow q^* = A \\ g_2 > 0 \Rightarrow q^* = B \\ g_1 = 0 \Rightarrow q^* = [0, A] \\ g_2 = 0 \Rightarrow q^* = [0, B] \\ \begin{cases} g_2 < 0 \\ g_1 < 0 \end{cases} \Rightarrow q^* = (0,0) \end{array}\right.$$

Итого получим следующие $q^* = \arg\max\limits_q \overline{G}(p, q, \mu)$

Но кроме того точки A и B являются оптимальными $\forall\ p$ и μ поскольку являются таковыми в 1 и 2 со страницы 5 и 6 соответсвеннно $\Rightarrow$ необходимо проверить значения в точках $A; B(0,0)$ на плоскости $q \in [0,1]^2$ для функциии $\overline{G}(p, q, \mu)$. Но поскольку функция $\overline{G}(p, q, \mu)$ непрерывна как композиция непрерывных функций, то можно обобщить на 3-ий случай все три.

Итого на графике выше обозначены все $q^* = \arg\max\limits_q \overline{G}(p, q, \mu)$.

$$g_1 = p\mu - (1-p)(1-\mu) \qquad g_1 = 0 \sim p = \frac{1-\mu}{(\sqrt{2}-2)\mu + 1}$$

$$g_2 = (1-p)(1-\mu)(\sqrt{2}-1) - p\mu \qquad g_2 = 0 \sim p = \frac{(1-\mu)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-2)\mu + (\sqrt{2}-1)}$$

Поскольку на странице 3 мы установили, что $\forall \hat{q} \in [0,1]^2 : \exists \hat{\lambda} \in [0,1] k(\hat{\lambda}; \hat{q}) = 0$
$\Rightarrow \arg\max\limits_p \overline{L}(p, \hat{q}, \hat{\lambda}) = [0,1] \Rightarrow$ множество оптимальных пар изображено на графике