Московский Государственный Университет имени

М.В.Ломоносова

Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

Кафедра Исследования Операций

Выпускная квалификаионная работа

Исследование модельной игры преподавателя и студента с применением свёртки Гермейера у студента

Автор:

группа 411

Кононов Сергей Владиславович

Научный руководитель:

к.ф.-м.н

Поспелова Ирина Игоревна

Москва, 2019

Аннотация

Исследование модельной игры преподавателя и студента
с применением свёртки Гермейера у студента

Кононов Сергей Владиславович

В работе проводится исследование в области применения сверток в игре с векторной функцией выигрыша. Анализируются оптимальные стратегии и значения игры при различных степенях дискретизации непрерывной модельной игры преподавателя и студента.

Содержание

1 Введение

Теорией игр называется математическая теория принятия решений в конфликтных ситуациях. В простейших моделях рассматривается *лицо принимающее решение* (ЛПР), которое выбирает своё действие из некоторого множества стратегий. Считается, что задана *целевая функция*, которая отражает интересы ЛПР и зависит от выбранной им стратегий. Задача принятия решений состоит в том, чтобы найти стратегию, при которой достигается максимум целевой функции. Отличие конфликтной ситуации заключается в том, что решения принимаются не одним лицом, а всеми участниками конфликтной ситуации и функция выигрыша каждого индивида зависит не только от его решения, но и от решения остальных участников. Модель такого вида называется – игрой, а участники конфликта – игроками. В рамках данной работы будет рассмотрена задача из теории *некооперативных игр* – игр, в которых игроки действуют самостоятельно, независимо друг от друга.

Сложность задачи многокритериальных игр состоит в объёмы вычислений необходимых для поиска точного результата. Методы предложенные [1], [2] сокращают вычислительную сложность предлагая достаточно точные результаты. Одним из методов решения конечных многокритериальных игр является метод свёрток [3]. Он позволяет скаляризовывать критерии, заменяя исходную задачу на семейство более простых задач.

Существующие методы решения этого типа предполагают использование всеми игроками одной функции свёртки (линейной свёртки [1] или обратной логической свёртки [2]). Однако, можно предположить, что игроки не сговариваются перед началом игры, не обсуждают использование свёрток, на основе которых они будут выбирать стратегию, следовательно, можно предположить, что они могут использовать разные свёртки. Именно такой подход будет анализироваться в текущей работе.

2 Основные понятия и определения

Определим формально модель игры с несколькими участниками в общем виде. Есть конечное *множество игроков* $A = \{1, 2, ..., m\}$. Каждый игрок $a \in A$ имеет *множество чистых стратегий* $S_a = \{1, 2, ..., n_a\}$, при этом *игровой ситуацией* или просто *ситуацией* называется m-мерный вектор:

$$\mathbf{s} = (s_1,\ s_2, \ldots,\ s_m) \in S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_m, \tag{1}$$

где $X \times Y$ обозначает декартово произведение множеств X и Y. *Функция выигрыша* $F_a,\ a \in A$ обозначает выигрыш игрока при конкретной ситуации в игре. Она определена для каждого игрока и имеет вид:

$$F_a : S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_m \to \mathbb{R},\ a \in A \tag{2}$$

Определение 1. *Игрой в нормальной форме называется совокупность:*

$$G = \big\langle A, S, F \big\rangle \tag{3}$$

где:

$A = \{1,\ 2, ...,\ m\}$ - *множество игроков,*
$S = \{S_1,\ S_2, ...,\ S_m\}$ - *множество наборов чистых стратегий игроков,*
$F = \{F_1,\ F_2, ...,\ F_m\}$ - *множество функций выигрыша игроков. [4]*

Теперь введём фундаментальное понятие в теории игр – *равновесие по Нэшу*:

Определение 2. *Ситуация* $\boldsymbol{s} = (s_1^0,\ s_2^0, ...,\ s_m^0)$ *называется [4] равновесием по Нэшу в игре* (3)*, если:*

$$\max_{s_a \in S_a} F_a(s_1^0, ..., s_{a-1}^0, s_a, s_{a+1}^0 ..., s_m^0) = F_a(s_1^0, ..., s_{a-1}^0, s_a^0, s_{a+1}^0 ..., s_m^0),\ \forall\ a \in A. \tag{4}$$

Смысл этого определения заключается в том, что при ситуации в игре, которая является равновесием по Нэшу, ни одному игроку индивидуально не выгодно отклоняться от своей текущей стратегии.

До этого мы рассматривали функции выигрыша игроков, которые имели вид (2), т.е. каждому игроку соответствовало одно значение, зависящее от ситуации игры. Однако, не всегда интересы могут быть выражены одним критерием. Часто возникают разные оценки качества принимаемого решения, причем они могут быть противоречивыми и их нельзя свести друг у другу. Например характеристиками решения могут быть такие значения как *(время, деньги)* или *(математическое ожидание, дисперсия)*. Следуя этим рассуждениям рассмотрим такое обобщение игры (3), что функция выигрыша игроков имеет вид:

$$F : S_1 \times S_2 \times ... \times S_m \to \mathbb{R}^n,\ n \in \mathbb{N} \tag{5}$$

Такое обобщение ближе к реальным ситуациям в которых критерием выбора представляет собой несколько значимых параметров. Для примера такой игры можно привести задачу выбора машины: допустим покупателю важно чтобы машина имела большую мощность, достаточный уровень безопасности и мало стоила, продавцу же важно, чтобы она стоила как можно дороже и кроме того следует продавать те машины, которые плохо покупают. Таким образом мы получили игру, в которой игроки имеют три и два критерия соответственно, которые важны для них при выборе стратегии. Пока что мы допустили существование игры с функцией выигрыша вида (5). Формализация и подробное описание будет позже.

Приведённые выше обобщения приводят нас к другому разделу математики, а именно – *многокритериальной оптимизации.* Рассмотрим следующую задачу которая относится к этой области.

$$\operatorname*{Max}_{x \in X} F(x),\ F(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)),\ X \subseteq \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

где $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, m$. Это задача заключается в том, что у нас есть n-мерная функция, которая представляет собой множество значений критериев, зависящих от параметров, которые принадлежат некоторому множеству. Особенность заключается в том, что правило сравнения двух векторов не определено однозначно, т.е. в общей задаче не всегда можно точно сказать, какой из двух векторов значений функции предпочтительнее. В примере про покупку автомобиля можно сказать, что если одна машина более мощная и менее дорогая чем вторая, то она предпочтительнее, однако, если она более мощная, но при этом и стоит дороже, то правило их сравнения не определено. Введём понятие *оптимальных (эффективных) по Парето* и *оптимальных (эффективных) по Слейтеру* векторов в задаче (6). И значением максимума в задаче (6), который в отличие от скалярного максимума записывается с заглавной буквы, будем считать *множество Слейтера* в критериальном пространстве $\mathbb{R}^m$.

Определение 3. *Допустимое решение $\hat{x} \in X$ называется оптимальным по Слейтеру (оптимальным по Парето) для задачи* (6)*, если **не** существует $x \in X$ такого, что $f_k(x) > f_k(\hat{x})$ $(f_k(x) \geqslant f_k(\hat{x}))$ для всех $k = 1, \ldots, m$. Множество всех оптимальных по Слейтеру (оптимальных по Парето) решений задачи* (6) *называется множеством Слейтера (множеством Парето) задачи* (6)*. [5]*

Другими словами это такое множество значений, при котором значение каждого частного показателя, характеризующего систему, не может быть улучшено без ухудшения других.

Для поиска множества Слейтера существуют разные методы [5], [3], в текущей работе исследуется *метод свёрток* [6]. Метод заключается в том, что задача (6) заменяется параметрическим семейством скалярных задач:

$$\max_{x \in X} C(\{f_i\}_{i=1}^m, \lambda, x), \ \lambda \in \Lambda$$

где:

C – функция свертки частных критериев $\{f_i\}_{i=1}^m$ задачи (6) в единый скалярный критерий,

λ – параметр свертки заданный на некоторой области определения Λ.

В текущей работе рассмотрены две различные свёртки – *линейная свёртка* и *обратная логическая свёртка*:

Определение 4. *Линейной свёрткой с параметром λ для функции критериев задачи* (6) *называется [5] функция:*

$$L(\{f_i\}_{i=1}^m, \lambda, x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i, \tag{7}$$

где

$$\lambda \in \Lambda = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \mid \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0\ i = 1, \dots m\}. \tag{8}$$

Определение 5. *Свёрткой Гермейера с параметром μ для функции критериев задачи* (6) *называется [6] функция:*

$$G(\{f_i\}_{i=1}^m, \mu, x) = \min_{i:\mu_i>0} \mu_i f_i, \tag{9}$$

где

$$\mu \in M = \{(\mu_1, \dots, \mu_m) \mid \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1,\ \mu_i \geq 0\ i = 1, \dots m\}. \tag{10}$$

Применение линейной свёртки в задачах вида (6) обосновывается теоремой Карлина:

Теорема 1 (С. Карлин)**.** *Рассмотрим задачу* (6)*. Пусть множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ выпукло, а функции $f_1, \dots, f_m$ - вогнуты на нём. Если x^* – эффективная по Парето точка, тогда существует вектор $\lambda \in \Lambda$ из* (8) *такой, что x^* является точкой максимума функции* (7) *по переменной x. [7]*

Ю.Б.Гермейером была предложена свертка, которая также аппроксимирует множество Слейтера. Её применение в многокритериальных задачах обосновывается следующей теоремой:

Теорема 2 (Ю.Б. Гермейер)**.** *Рассмотрим задачу* (6)*. Пусть x^* - эффективная по Слейтеру точка, причем $f_1(x^*) > 0, \dots, f_m(x^*) > 0$. Тогда существует вектор $\mu \in M$ из* (10) *и x^* является точкой максимума функции* (9) *по переменной x. [6]*

В работе будет использоваться модификация свёртки Гермейера - *обратная логическая свертка*. Она отличается только тем, что веса (параметры свёртки) стоят в знаменателе, а не в числителе.

Определение 6. *Обратной логической свёрткой с параметром μ для функции критериев задачи* (6) *называется функция:*

$$G(\{f_i\}_{i=1}^m, \mu, x) = \min_{i:\mu_i>0} \frac{f_i}{\mu_i}, \tag{11}$$

где $\mu \in M$ определено в (10).

Вернёмся к рассмотрению некооперативных игр. Если множество чистых стратегий у игроков конечно, то игра называется *конечная*. Для конечной игры определим обобщение модели, а именно - *смешанное расширение игры*. Смысл смешанного расширения игры заключается в том, что каждый игрок выбирает любую из своих чистых стратегий с некоторой фиксированной вероятностью, и его стратегией является не одна чистая стратегия, а вероятностное распределение над множеством его чистых стратегий. Выигрышем игрока в таком случае считаем взвешенный выигрыш по всем ситуациям с весами соответствующими вероятностям данной ситуации. Определим эти понятия формально.

Пусть в игре $G = \left\langle A, S, F \right\rangle$. A – конечное множество игроков, $A = \{1, 2, ..., m\}$, причём множества чистых стратегии $S_a = \{1, 2, ..., n_a\}$ $a \in A$ конечны. *Смешанной стратегией* игрока $a \in A$ называется вероятностное распределение над множеством чистых стратегий S_a игрока $a \in A$:

$$\pi^a \in P_a = \{(\pi_1^a, \pi_2^a, ..., \pi_{n_a}^a) \in [0,1]^{n_a} \mid \sum_{i=1}^{n_a} \pi_i^a = 1\}$$

где π_i^a - это вероятность выбора игроком $a \in A$ чистой стратегии s_i^a в качестве реальной стратегии игрока, а $[0,1]^n$ обозначает n-ую декартову степень отрезка $[0,1]$. Симплекс P_a называется *множеством смешанных стратегий игрока*.

Введём обозначение для заданного набора стратегий:

$$\pi = (\pi^1, \ldots, \pi^m) \in P = P_1 \times \ldots \times P_m,$$

и вероятности реализации ситуации $\mathbf{s}$ из (1):

$$p(s|\pi) = \prod_{a \in A} \pi^a_{s_a}.$$

Тогда математическое ожидание выигрыша игрока $a \in A$ задаётся функцией:

$$\overline{F}_a(\pi) = \sum_{s \in S} p(s|\pi) F_a(s),$$

где функция F_a - определена в (3). Таким образом смешанное расширение игры в нормальной форме определяется следующим образом:

Определение 7. *Смешанным расширением игры в нормальной форме называется совокупность:*

$$\overline{G} = \{A, P, \overline{F}\} \tag{12}$$

где:

$A = \{1, 2, ..., m\}$ *– множество игроков,*
$P = P_1 \times \ldots \times P_m$ *– множество наборов смешанных стратегий игроков,*
$\overline{F} = \{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_m\}$ *– множество функций выигрыша игроков.*

Ситуации равновесия (4) игры $\overline{G}$ будем называть *ситуациями равновесия в смешанных стратегиях игры* G или *смешанными равновесиями по Нэшу.*

Теперь в игре (12) будем считать, что функции выигрыша $F_a,\ a \in A$ имеют вид (5). Обозначим через $S_a(\pi||a),\ a \in A$ множество Слейтера задачи $\underset{\pi\,:\,\pi^a \in P^a}{\mathrm{Max}} \overline{F}_a(\pi)$, в которой все координаты π, кроме a фиксированы.

Определение 8. *Решением игры* (12) *согласно [3] является множество ситуаций* P^**:*

$$P^* = \{\pi = (\pi^1, \ldots, \pi^m) \in P \mid \pi^a \in S_a(\pi||a),\ a \in A\} \tag{13}$$

В случае конечных многокритериальных игр Шепли свел [1] описание данного множества к семейству задач поиска значений скалярных игр с функциями выигрышей – ЛС частных критериев при произвольном наборе весовых коэффициентов, своих у каждого игрока. В случае скалярной игры осреднение однозначно, а для скаляризованной вектор-функции могут быть разные варианты.

Целью данной выпускной квалификационной работы является исследование применения разных сверток в игре с векторным выигрышем.

3 Общая постановка задачи

Рассматриваются два игрока – Студент, далее обозначается **С**, и Преподаватель, далее обозначается **П**, которые имеют противоположные интересы. Критерий интересов составляют две величины, первая из которых является эффективностью работы **С** в научной сфере, а вторая – его эффективностью на подработке.

С выбирает долю x рабочего времени, которую он тратит на подготовку диплома, оставшееся рабочее время $1 - x$ он тратит на подработку. Считается, что производительность **С** при любых занятий падает с увеличением отводимого на них времени, поэтому эффективность труда **С** зададим функцией $\sqrt{x}$ и $\sqrt{1-x}$ соответственно. **С** может распределять свое время между двумя видами деятельности, т.е. имеет множество стратегий $x \in X = [0, 1]$, причём он может использовать смешанные стратегии.

П выбирает – относиться к **С** требовательно, способствуя написанию диплома и мешая подработке или же не мешать подработке и не помогать **С**с дипломом. **П** имеет множество стратегий $y \in Y = \{1, 2\}$, причём тоже может использовать смешанные стратегии.

Определим вектор-функцию выигрыша следующим образом:

$$F(x, y) = \big(f_1(x, y), f_2(x, y)\big) = \Big(\frac{y\sqrt{x}}{2}, \frac{\sqrt{1-x}}{y}\Big) \tag{14}$$

П стремится минимизировать (выбирая $y \in Y = \{1, 2\}$) вектор-функцию выигрыша $F(x, y)$, а игрок **С** - максимизировать (выбирая $x \in X = [0, 1]$).

Мы будем рассматривать конечную игру **С** — **П**, полученную из исходной дискретизацией множества X конечным множеством точек:

$$X^T = \{0,\ \frac{1}{T},\ \frac{2}{T},\ \ldots,\ \frac{T-1}{T},\ 1\},\ \ T \in \mathbb{N}$$

Поскольку игроки используют смешанные стратегии, определим допустимые распределения q и p зависимые от параметра дискретизации T для игрока **С** и

$\mathbf{\Pi}$ соответственно:

$$q \in Q(T) = \{(q_1, \ldots, q_{T+1}) \in [0,1]^{T+1} \mid \sum_{i=1}^{T+1} q_i = 1\} \tag{15}$$

$$p \in P = \{(p_1, p_2) \in [0,1]^2 \mid p_1 + p_2 = 1\} \tag{16}$$

Теперь задачу можно представить в виде многокритериальной игры двух лиц с противоположными интересами:

$$G = \left\langle A, S, \mathbf{F} \right\rangle \tag{17}$$

где:

A ={**С**, $\mathbf{\Pi}$} – множество игроков,

$S = \{Q(T),\, T\}$ – множество наборов смешанных стратегий игроков,

$\mathbf{F} = \{F,\, -F\}$ – множество вектор-функций выигрыша игроков.

В работе исследуются случаи дискретизации, когда $T = 1$ и тогда множество $X^1 = \{0, 1\}$, и когда $T = 2$, тогда множество чистых стратегий **С** принимает вид $X^2 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. В каждом случае необходимо решить игру, т.е. найти равновесия Нэша в смешанных стратегиях. Составим план, по которому будет проходить поиск решений (12).

(1) Игроки используют смешанные стратегии, поэтому стратегий **С** и $\mathbf{\Pi}$ будет распределение вероятностей $q \in Q(T)$ и $p \in P$ над множествами X^T и Y соответственно. Где $Q(T)$ и P – все допустимые распределения над этими множествами. Следовательно заменим вектор-функцию выигрыша каждого игрока на математическое ожидание этой функции по распределению вероятностей его стратегии. Для **С** и $\mathbf{\Pi}$ функции принимают вид $\mathbb{E}_x[F(x,y)]$ и $\mathbb{E}_y[-F(x,y)]$:

$$\mathbb{E}_x[F(x,y)] = \left\langle \mathbb{E}_x[f_1(x,y)], \mathbb{E}_x[f_2(x,y)] \right\rangle$$
$$\mathbb{E}_y[-F(x,y)] = \left\langle \mathbb{E}_y[-f_1(x,y)], \mathbb{E}_y[-f_2(x,y)] \right\rangle$$

(2) Каждый игрок выбирает функцию свёртки, которая будет аппроксимировать его множество Слейтера S_a. В данной работе исследуется случай, когда игрок **C** выбирает *обратную логическую свёртку*, а игрок **П** *линейную свёртку*. После чего игроки применяют свёртку к осреднённой вектор-функции выигрыша. Для **C** и **П** скаляризованные функции выигрыша принимают вид:

$$G(\mathbb{E}_x[F(x,y)],q,y,\mu)$$
$$L(\mathbb{E}_y[-F(x,y)],x,p,\lambda).$$

(3) Далее игроки получают скалярный критерий, который зависит от чистых стратегий противника. Поскольку игроки используют смешанные стратегии, то и рассчитывать на средний выигрыш, поэтому теперь каждый осредняет скаляризованные критерии по стратегиям противника. Мы получили функции выигрыша игроков, которые зависят от их смешанных стратегий. Для **C** и **П** функции выигрыша принимают вид

$$\overline{G}(p,q,\mu) = \mathbb{E}_y[G(\mathbb{E}_x[F(x,y)],q,y,\mu)]$$
$$\overline{L}(p,q,\lambda) = \mathbb{E}_x[L(\mathbb{E}_y[-F(x,y)],x,p,\lambda)].$$

(4) Мы получили игру в смешанных стратегиях и теперь необходимо найти все возможные равновесия Нэша (4) при фиксированных параметрах свёртки. Стратегии, которые являются решениями будем называть *оптимальными стратегиями*. В конкретном случае они определяются следующим образом:

Определение 9. *Пара стратегий* $(p^0,q^0) \in P(T) \times Q$ *называется оптимальными, если для некоторой пары параметров* $(\lambda,\mu) \in \Lambda \times M$ *верно:*

$$\begin{cases} p^0(q^0,\lambda) = \arg\min\limits_{p\in P} \overline{L}(p,q^0,\lambda) \\ q^0(p^0,\mu) = \arg\min\limits_{q\in Q} \overline{G}(p^0,q,\mu) \end{cases} \tag{18}$$

Использованы следующие обозначения:

$$\arg\max_{x\in X} f(x) = \{x^* \in X \mid f(x^*) = \max_{x\in X} f(x)\}$$
$$\arg\min_{x\in X} f(x) = \{x^* \in X \mid f(x^*) = \min_{x\in X} f(x)\}$$

Множество всех оптимальных пар обозначим через $\mathbb{O}_T$*, где* T *– означает степень дискретизации для конкретной задачи.*

4 Постановка задачи.
Параметр дискретизации T=1

Сначала рассмотри случай с параметром $T = 1$. Тогда множество $X^1 = \{0, 1\}$. Игроки используют смешанные стратегии, т.е. распределение над своими чистыми стратегиями. Чистыми стратегиями игроков **С** и **П** являются $X^1 = \{0, 1\}$ и $Y = \{1, 2\}$ соответственно. Эти множества дискретны и равномощны, поэтому распределения задаются в виде векторов:

$$(p_1, p_2) \in P = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid p_1 + p_2 = 1)\}$$
$$(q_1, q_2) \in Q(1) = P$$

где $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geqslant 0 \;\; i = 1, \dots n\}$. Обозначим $Q_1 := Q(1)$. Смешанные стратеги игроков **С** и **П** будем обозначать $q = (q_0, q_1) \in Q_1$ и $p = (p_0, p_1) \in P$ соответственно, причём:

$$\begin{aligned} &P(X = 0) = q_0 \qquad\qquad && P(Y = 1) = p_0 \\ &P(X = 1) = q_1 && P(Y = 2) = p_1 \end{aligned} \tag{19}$$

Введём обозначения $q := q_1$ и $p := p_1$, тогда $q_0 = 1 - q$ и $p_0 = 1 - p$. Игрок **С** использует смешанную стратегию (q_0, q_1), тогда его вектор-функция выигрыша (14) приобретает вид:

$$F_{\text{С}}(q, y) = \Big\langle q_0 \frac{y\sqrt{0}}{2} + q_1 \frac{y\sqrt{1}}{2}; q_0 \frac{\sqrt{1}}{y} + q_1 \frac{\sqrt{0}}{y} \Big\rangle = \Big\langle \frac{q_1 y}{2}; \frac{q_0}{y} \Big\rangle$$

Игрок **П** использует смешанную стратегию (p_0, p_1), тогда его вектор-функция выигрыша (14) приобретает вид:

$$\begin{aligned} F_{\Pi}(x, p) &= \Big\langle (1-p)\frac{1 \cdot \sqrt{x}}{2} + p\frac{2 \cdot \sqrt{x}}{2};\; (1-p)\frac{\sqrt{1-x}}{1} + p\frac{\sqrt{1-x}}{2} \Big\rangle = \\ &= \frac{1}{2}\Big\langle (p+1)\sqrt{x};\; (2-p)\sqrt{1-x} \Big\rangle \end{aligned}$$

Далее игрок **С** использует *обратную логическую свёртку* (11):

$$G(y,q,\mu)=\min_{i:\mu_i>0}\{\frac{q_1 y}{2\mu_0};\frac{q_0}{y\mu_1}\},$$

а игрок **П** использует *линейную свёртку* (7):

$$L(p,x,\lambda)=\lambda_0(p+1)\sqrt{x}+\lambda_1(2-p)\sqrt{1-x}.$$

После чего игрок **С** осредняет свёртку критерия по стратегиям игрока **П**, т.е. по переменной y:

$$\overline{G}(p,q,\mu)=p\min\{\frac{q}{\mu};\frac{1-q}{2(1-\mu)}\}+(1-p)\min\{\frac{q}{2\mu};\frac{1-q}{1-\mu}\},$$

а игрок **П** осредняет свёртку критерия по стратегиям игрока **С**, т.е. по переменной x:

$$\overline{L}(p,q,\lambda)=\frac{1}{2}\big\{q(3\lambda+p-2)+(2-p)(1-\lambda)\big\}.$$

Мы определили функции выигрыша игроков. Теперь задачу можно формализовать и представить как семейство игр двух игроков в нормальный форме:

$$\Big\langle\{\mathbf{C},\,\mathbf{\Pi}\},\{Q_1,\ P\},\{\overline{G}(p,q,\mu),-\overline{L}(p,q,\lambda)\}\Big\rangle,\ (\lambda,\mu)\in\Lambda\times M$$

Область определения параметров λ и μ задана в определении свёрток (7) и (11). Знак минус перед второй функцией выигрыша означает, что игрок стремится её минимизировать. Для нас представляет интерес множество оптимальных точек (18).

5 Решения игры. Параметр дискретизации T=1

Для поиска оптимальных стратегий сначала необходимо найти точки максимума и минимума функций выигрыша **C** и **П** соответственно:

$$q^*(p,\mu) = \arg\max_{q\in Q_1} \overline{G}(p,q,\mu) \text{ и } p^*(q,\lambda) = \arg\min_{p\in P} \overline{L}(p,q,\lambda).$$

Из статьи [2] следует, что:

$$p^*(q,\lambda) = \arg\min_{p\in P} \overline{L}(p,q,\lambda) = \begin{cases} 0, & q > 1-\lambda \\ 1, & q < 1-\lambda \\ [0,1], & q = 1-\lambda \end{cases} \tag{20}$$

Аналогичными рассуждениями получаем, что:

$$q^*(p,\mu) = \arg\max_{q\in Q} \overline{G}(p,q,\mu) = \begin{cases} \dfrac{\mu}{2-\mu}, & p \geqslant 1-\mu \\ \dfrac{2\mu}{1+\mu}, & p \leqslant 1-\mu \end{cases} \tag{21}$$

Докажем утверждение характеризующее множество оптимальных пар данной игры.

Утверждение 1. *Любая пара* $(p^*,q^*) \in [0,1]^2$ *является оптимальной, т.е.* $\forall\ (p^*,q^*) \in [0,1]^2\ \exists\ (\mu,\lambda) \in M \times \Lambda$ *такие, что верно* (18).

Доказательство

Зафиксируем некоторую пару $(p^*,q^*) \in [0,1]^2$ и найдём такие $\hat{\mu}(p^*,q^*) \in M$ и $\hat{\lambda}(p^*,q^*) \in \Lambda$ что верно (18) т.е. что пара стратегий является оптимальной.

(1) Определим $\hat{\lambda}(p^*,q^*)$ и покажем что $p^* \in \arg\min_{p\in P} \overline{L}(p,q^*,\hat{\lambda})$. Возьмём $\hat{\lambda} := 1-q^*$ тогда поскольку $\arg\min_{p\in P} \overline{L}(p,q^*,\hat{\lambda}) = [0,1]$ при $q^* = 1-\hat{\lambda}$, то $p^* \in \arg\min_{p\in P} \overline{L}(p,q^*,\hat{\lambda})$.

(2) Определим $\hat{\mu}(p^*, q^*)$ и покажем что $q^* \in \arg\max\limits_{q \in Q} \overline{G}(p^*, q, \hat{\mu})$. По имеющемуся q^* решим уравнения $\dfrac{\mu}{2-\mu} = q^*$ и $\dfrac{2\mu}{1+\mu} = q^*$, относительно переменной μ:

$$q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} \Rightarrow \mu = \frac{q^*}{2-q^*} \qquad\qquad q^* = \frac{\mu}{2-\mu} \Rightarrow \mu = \frac{2q^*}{1+q^*}$$

Введём обозначения $\mu_1(q) = \dfrac{q}{2-q}$ и $\mu_2(q) = \dfrac{2q}{1+q}$. Заметим, что при $q^* \in [0,1]$ верно $0 \leqslant \mu_2(q^*) \leqslant \mu_1(q^*) \leqslant 1$. В таком случае поскольку $1 - p^* \in [0,1]$, то при фиксированных переменных (p^*, q^*) будет реализован один и только один из 3-х вариантов:

(a) $1 - p^* \leqslant \mu_2(q^*)$, т.е. $1 - p^* \leqslant \dfrac{q^*}{2-q^*}$. Возьмём $\hat{\mu} := \mu_1 = \dfrac{2q^*}{1+q^*}$.

Действительно, при таком выборе $\hat{\mu}$ имеем:

$$1 - p^* \leqslant \mu_2 \leqslant \mu_1 = \hat{\mu} \Rightarrow p^* \geqslant 1 - \hat{\mu} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \arg\max_{q \in Q} \overline{G}(p^*, q, \hat{\mu}) = \frac{\hat{\mu}}{2-\hat{\mu}} = \frac{\dfrac{2q^*}{1+q^*}}{2 - \dfrac{2q^*}{1+q^*}} = q^*$$

(b) $\mu_2(q^*) < 1 - p^* \leqslant \mu_1(q^*)$, т.е. $\dfrac{q^*}{2-q^*} < 1 - p^* \leqslant \dfrac{2q^*}{1+q^*}$. Возьмём $\hat{\mu} := \mu_1 = \dfrac{2q^*}{1+q^*}$. Действительно, при таком выборе $\hat{\mu}$ имеем:

$$1 - p^* \leq \mu_1 = \hat{\mu} \;\Rightarrow\; p^* \geqslant 1 - \hat{\mu} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \arg\max_{q \in Q} \overline{G}(p^*, q, \hat{\mu}) = \frac{\hat{\mu}}{2-\hat{\mu}} = \frac{\dfrac{2q^*}{1+q^*}}{2 - \dfrac{2q^*}{1+q^*}} = q^* \Rightarrow$$

(c) $\mu_1(q^*) < 1 - p^*$ т.е. $\dfrac{2q^*}{1+q^*} < 1 - p^*$. Возьмём $\hat{\mu} := \mu_2 = \dfrac{q^*}{2-q^*}$ Действительно, при таком выборе $\hat{\mu}$ имеем:

$$1-p^*>\mu_1\geqslant\mu_2=\hat\mu\Rightarrow p^*\leqslant 1-\hat\mu\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \arg\max_{q\in Q}\overline{G}(p^*,q,\hat\mu)=\frac{2\hat\mu}{1+\hat\mu}=\frac{2\dfrac{q^*}{2-q^*}}{1+\dfrac{q^*}{2-q^*}}=q^*.$$

Теперь для любой точки $(p^*,q^*)\in[0,1]^2$ можем указать $(\hat\mu(p^*,q^*),\hat\lambda(p^*,q^*))$ такие, что верно (18), а именно:

$$(\hat\mu(p^*,q^*),\hat\lambda(p^*,q^*))=\begin{cases}\left(\dfrac{q^*}{2-q^*},\ 1-q^*\right), & \dfrac{2q^*}{1+q^*}<1-p^*\\ \left(\dfrac{2q^*}{1+q^*},\ 1-q^*\right), & 1-p^*\leqslant\dfrac{q^*}{2-q^*}\\ \left(\dfrac{2q^*}{1+q^*},\ 1-q^*\right), & \dfrac{q^*}{2-q^*}<1-p^*\leqslant\dfrac{2q^*}{1+q^*}\end{cases}$$

Утверждение доказано.

Теперь для каждой пары параметров (μ,λ) найдём множество соответствующих оптимальных пар $(p^0(\mu,\lambda),q^0(\mu,\lambda))\in P\times Q$. Рассмотрим все возможные сочетания значений для p^* и q^* в системах (20) (21), что даст нам 6 следующих систем:

Учтём, что переменные p,q,μ и λ определены на отрезке $[0,1]$.

(1)

$$\begin{cases}p^*=0\\ q^*=\dfrac{\mu}{2-\mu}\\ q^*>1-\lambda\\ p^*+\mu-1\geqslant 0\end{cases}\sim\begin{cases}p^*=0\\ q^*=\dfrac{\mu}{2-\mu}\\ \dfrac{\mu}{2-\mu}>1-\lambda\\ \mu\geqslant 1\quad\Rightarrow\quad\mu=1\end{cases}\sim\begin{cases}p^*=0\\ q^*=1\\ \lambda>0\\ \mu=1\end{cases}$$

При $\mu = 1$ и $\lambda \in (0, 1]$ имеем следующие оптимальные пары:

$$(p^0, q^0) \in (0, 1).$$

(2)

$$\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \\ q^* > 1 - \lambda \\ p^* + \mu - 1 \leqslant 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \\ \dfrac{2\mu}{1+\mu} > 1 - \lambda \\ \mu \leqslant 1 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \\ \lambda > \dfrac{1-\mu}{1+\mu} \\ \mu \leqslant 1 \end{cases}$$

При $\mu \in [0, 1]$ и $\lambda \in (\frac{1-\mu}{1+\mu}, 1]$ имеем следующие оптимальные пары:

$$(p^0, q^0) \in (0, \frac{2\mu}{1+\mu}).$$

(3)

$$\begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \\ q^* < 1 - \lambda \\ p^* + \mu - 1 \geqslant 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \\ \dfrac{\mu}{2-\mu} < 1 - \lambda \\ \mu \geqslant 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \\ \lambda < 2\dfrac{1-\mu}{2-\mu} \\ \mu \geqslant 0 \end{cases}$$

При $\mu \in [0, 1]$ и $\lambda \in [0, 2\frac{1-\mu}{2-\mu})$ имеем следующие оптимальные пары:

$$(p^0, q^0) \in (1, \frac{\mu}{2-\mu}).$$

(4)

$$\begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \\ q^* < 1 - \lambda \\ p^* + \mu - 1 \leqslant 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \\ \dfrac{2\mu}{1+\mu} < 1 - \lambda \\ \mu \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = 0 \\ \lambda < 1 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

При $\mu = 0$ и $\lambda \in [0, 1)$ имеем следующие оптимальные пары:

$$(p^0, q^0) \in (1, 0).$$

(5)

$$\begin{cases} p^* \in [0,1] \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \\ q^* = 1-\lambda \\ p^* + \mu - 1 \geqslant 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* \in [0,1] \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \\ \dfrac{\mu}{2-\mu} = 1-\lambda \\ p^* \geqslant 1-\mu \end{cases} \sim \begin{cases} p^* \in [1-\mu, 1] \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \\ \lambda = 2\dfrac{1-\mu}{2-\mu} \end{cases}$$

При $\mu \in [0, 1]$ и $\lambda = 2\dfrac{1-\mu}{2-\mu}$ имеем следующие оптимальные пары:

$$(p^0, q^0) \in [1-\mu, 1] \times \{\frac{\mu}{2-\mu}\}.$$

(6)

$$\begin{cases} p^* \in [0,1] \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \\ q^* = 1-\lambda \\ p^* + \mu - 1 \leqslant 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* \in [0,1] \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \\ \dfrac{2\mu}{1+\mu} = 1-\lambda \\ p^* \leqslant 1-\mu \end{cases} \sim \begin{cases} p^* \in [0, 1-\mu] \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \\ \lambda = \dfrac{1-\mu}{1+\mu} \end{cases}$$

При $\mu \in [0, 1]$ и $\lambda = \dfrac{1-\mu}{1+\mu}$ имеем следующие оптимальные пары:

$$(p^0, q^0) \in [0, 1-\mu] \times \{\frac{2\mu}{1+\mu}\}.$$

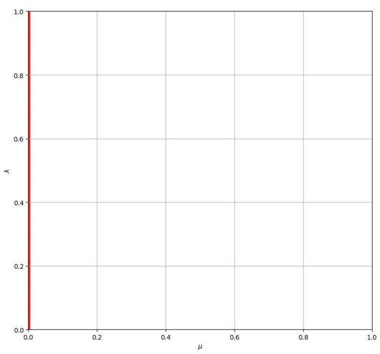
Итого получаем:

$$
\mathbb{O}_1 = \begin{cases}
(0,\ 1), & \mu = 1,\ \lambda \in (0, 1] \\
(0,\ \dfrac{2\mu}{1+\mu}), & \mu \in [0, 1],\ \lambda \in (\frac{1-\mu}{1+\mu}, 1] \\
(1,\ \dfrac{\mu}{2-\mu}), & \mu \in [0, 1],\ \lambda \in [0, 2\frac{1-\mu}{2-\mu}) \\
(1,\ 0), & \mu = 0,\ \lambda \in [0, 1) \\
[1-\mu, 1] \times \left\{\dfrac{\mu}{2-\mu}\right\}, & \mu \in [0, 1],\ \lambda = 2\dfrac{1-\mu}{2-\mu} \\
[0, 1-\mu] \times \left\{\dfrac{2\mu}{1+\mu}\right\}, & \mu \in [0, 1],\ \lambda = \dfrac{1-\mu}{1+\mu}
\end{cases}
$$

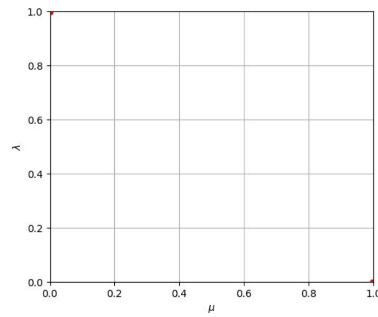
Некоторые условия оптимальных пар пересекаются, поэтому произведём агрегацию системы по условиям таким образом, чтобы множества (μ, λ), которые стоят в правой части, имели между собой пустое пересечение.

$$
\mathbb{O}_1 = \begin{cases}
(1,\ 0), & \mu = 0, \lambda \in [0, 1) \\
[0, 1] \times \{0\}, & \mu = 0, \lambda = 1 \\
[0, 1] \times \{1\}, & \mu = 1, \lambda = 0 \\
\{1\} \times \{\dfrac{\mu}{2-\mu}\}, & \mu \in (0, 1), \lambda \in (0, \dfrac{1-\mu}{1+\mu}] \\
\{1\} \times \{\frac{\mu}{2-\mu}\} \cup [0, 1-\mu] \times \{\frac{2\mu}{1+\mu}\} & \mu \in (0, 1), \lambda = \dfrac{1-\mu}{1+\mu} \\
(0, \dfrac{2\mu}{1+\mu}) \cup (1, \dfrac{\mu}{2-\mu}) & \mu \in [(, 1), \lambda \in [0, 2\dfrac{1-\mu}{2-\mu}] \cap (\dfrac{1-\mu}{1+\mu}, 1] \\
(0, \dfrac{2\mu}{1+\mu}) \cup [1-\mu, 1] \times \{\dfrac{\mu}{2-\mu}\} & \mu \in (0, 1), \lambda = 2\dfrac{1-\mu}{2-\mu} \\
(0, \dfrac{2\mu}{1+\mu}) & \mu \in (0, 1), \lambda \in (2\dfrac{1-\mu}{2-\mu}, 1] \\
(0, 1) & \mu = 1, \lambda \in (0, 1]
\end{cases}
$$

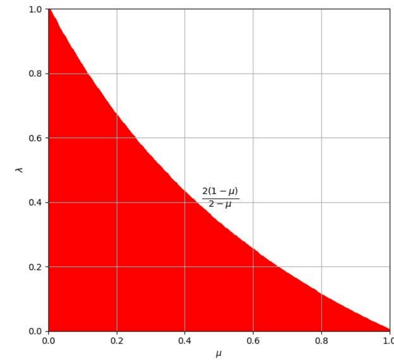
Каждое из множеств в условиях системы изображено на отдельном графике на рис. 1 снизу. Были рассмотрены все точки множества $(\mu, \lambda) \in [0, 1]^2$.



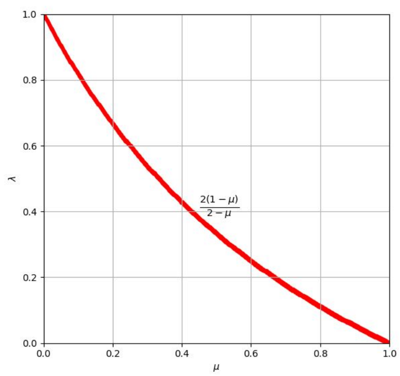
(a) $\mu = 0,\ \lambda \in [0, 1)$



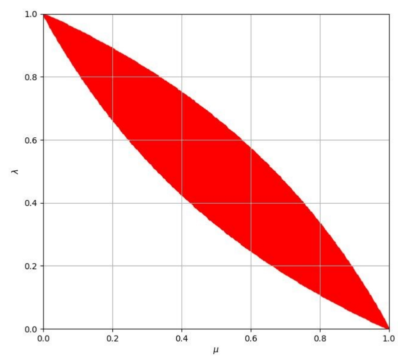
(b) $\left[\begin{array}{l} \mu = 0,\ \lambda = 1 \\ \mu = 1,\ \lambda = 0 \end{array}\right.$



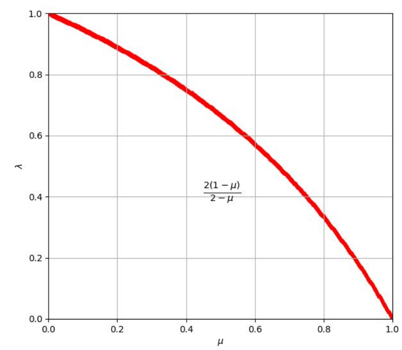
(c) $\mu \in (0, 1),\ \lambda \in (0, \frac{1-\mu}{1+\mu}]$



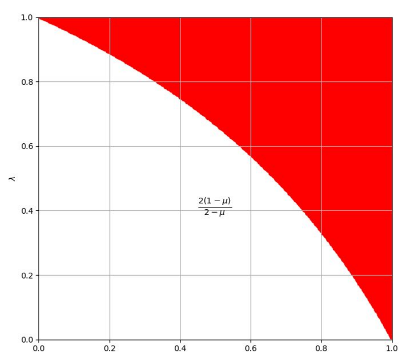
(d) $\mu \in (0, 1), \lambda = \dfrac{1-\mu}{1+\mu}$



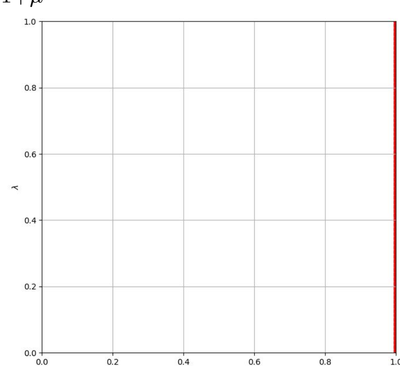
(e) $\mu \in [(0, 1),$
$\lambda \in [0, 2\frac{1-\mu}{2-\mu}] \cap (\frac{1-\mu}{1+\mu}, 1]$



(f) $\mu \in (0, 1), \lambda = 2\dfrac{1-\mu}{2-\mu}$:



(g) $\mu \in (0, 1), \lambda \in (2\frac{1-\mu}{2-\mu}, 1]$



(h) $\mu = 1, \lambda \in (0, 1]$

Рис. 1

6 Постановка задачи. Параметр дискретизации T=2

Теперь рассмотрим случай с параметром дискретизации $T = 2$. Тогда множество X^T принимает вид $X^2 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Игроки используют смешанные стратегии, т.е. вероятностные распределения над своими чистыми стратегиями. Чистыми стратегиями игроков **С** и **П** являются $X^2 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ и $Y = \{1, 2\}$ соответственно. Эти множества дискретны, поэтому вероятностные распределения над ними задаются в виде векторов:

$$(q_0, q_1, q_2) \in Q(2) = \{(q_0, q_1, q_2) \in [0,1]^3 \mid q_0 + q_1 + q_2 = 1)\},$$
$$(p_1, p_2) \in P = \{(p_1, p_2) \in [0,1]^2 \mid p_1 + p_2 = 1).\}$$

Смешанные стратеги игроков **С** и **П** будем обозначать $q = (q_0, q_1, q_2) \in Q(2)$ и $p = (p_0, p_1) \in P$ соответственно, причём:

$$\begin{aligned} &P(X = 0) = q_0 && P(Y = 1) = p_0 \\ &P(X = \tfrac{1}{2}) = q_1 && P(Y = 2) = p_1 \\ &P(X = 1) = q_2 && \end{aligned} \tag{22}$$

Введём обозначения $p := p_1$, тогда $p_0 = 1 - p$. Поскольку верно, что одна из переменных выражается через две другие: $q_1 = 1 - q_0 - q_2$, то будем рассматривать задачу на соответствующем от двух переменных $q = (q_0, q_2) \in Q$:

$$Q = \{(q_0, q_2) \in [0,1]^2 \mid q_0 + q_2 \leqslant 1\}.$$

Сначала определим функции выигрыша $\overline{G}(p, q, \mu)$ и $\overline{L}(p, q, \lambda)$, а затем найдём их найти точки максимума и минимума при фиксированных параметрах свёрток:

$$q^*(p, \mu) = \arg\max_{q \in Q} \overline{G}(p, q, \mu)$$
$$p^*(q, \lambda) = \arg\min_{p \in P} \overline{L}(p, q, \lambda).$$

Затем найдём множество оптимальных стратегий (18).

7 Решение игры. Параметр дискретизации T=2

7.1 Оптимальная стратегия преподавателя

Игрок **П** стремится минимизировать вектор-функцию выигрыша (14):

$$F(x,y) = \Big\langle \frac{y\sqrt{x}}{2}, \frac{\sqrt{1-x}}{y} \Big\rangle$$

Он использует смешанную стратегию, т.е. его стратегией является распределение $p = (p_0, p_1) \in P$ над множеством чистых стратегий $Y = \{1, 2\}$. Его вектор-функция выигрыша (14) приобретает вид:

$$F_{\Pi}(p,x) = \Big\langle (1-p)\frac{1\cdot\sqrt{x}}{2} + p\frac{2\cdot\sqrt{x}}{2};\ (1-p)\frac{\sqrt{1-x}}{1} + p\frac{\sqrt{1-x}}{2} \Big\rangle = \\ = \frac{1}{2}\big\langle (p+1)\sqrt{x};\ (2-p)\sqrt{1-x} \big\rangle.$$

Затем использует **ЛС** (7):

$$L(p,x,\lambda) = \frac{1}{2}\big(\lambda(p+1)\sqrt{x} + (1-\lambda)(2-p)\sqrt{1-x}\big)$$

Далее осредняем функцию $L(p,x,\lambda)$ по стратегиям противника $x \in X = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ с вероятностями $q = (q_0, q_1, q_2)$:

$$\overline{L}(p,q,\lambda) = \frac{1}{2}\Big(q_0(1-\lambda)(2-p)\sqrt{1} + q_1\big(\lambda(p+1)\frac{1}{\sqrt{2}} + \\ + (1-\lambda)(2-p)\frac{1}{\sqrt{2}}\big) + q_2\lambda(p+1)\sqrt{1}\Big) = \\ = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\big(\lambda(q_1+\sqrt{2}q_2) - (1-\lambda)(q_1+\sqrt{2}q_0)\big)p + \big(\lambda(q_1+\sqrt{2}q_2) + 2(1-\lambda)(q_1+\sqrt{2}q_0)\big)\Big).$$

Функция является линейной по переменной p:

$$\overline{L}(p,q,\lambda) = k(\lambda,q)p + b(\lambda,q),$$

где:

$$k(q,\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\big(\lambda(q_1+\sqrt{2}q_2) - (1-\lambda)(q_1+\sqrt{2}q_0)\big),$$
$$b(q,\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\big(\lambda(q_1+\sqrt{2}q_2) + 2(1-\lambda)(q_1+\sqrt{2}q_0)\big).$$

Наша задача – найти $p^*(q,\lambda) = \arg\min_{p\in[0,1]} \overline{L}(p,q,\lambda)$. Поскольку функция $\overline{L}(p,q,\lambda)$ линейна по переменной p, следовательно:

$$p^*(q,\lambda) = \arg\min_{p\in[0,1]} \overline{L}(p,q,\lambda) = \begin{cases} 0, & k(\lambda,q) > 0 \\ 1, & k(\lambda,q) < 0 \\ [0,1], & k(\lambda,q) = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $k(q,\lambda)$:

$$k(q,\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\lambda\big(2+(\sqrt{2}-2)(q_0-q_2)\big) - \big(1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0\big)\Big)$$

Нас интересует знак это функции при различных значениях аргументов. Введём обозначения:

$$\ell(q) = \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{2+(\sqrt{2}-2)(q_0-q_2)}$$

Напомним, что множество Q имеет следующий вид:

$$Q = \{(q_0,q_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid q_0+q_2 \leqslant 1\}$$

Поскольку для $q \in Q$ верно:

$$2+(\sqrt{2}-2)(q_0-q_2) > 0$$
$$1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0 \geqslant 0$$
$$q_0+(\sqrt{2}-3)q_2 - 1 \leqslant 0$$

Следовательно:

$$k(q,\lambda) \vee 0 \Leftrightarrow \lambda \vee \ell(q) \text{ где } \vee \text{ это один из знаков } >,<,= .$$

Более того верно что $\forall\ q \in Q:\ 0 \leqslant \ell(q) \leqslant 1$. Проиллюстрируем это на рис. 2. В плоскости $q = (q_0, q_2)$ изображены прямые $\ell_1(q)$ и $\ell_2(q)$ такие, что:

$$\ell_1(q):\ \ell(q) = 0$$
$$\ell_2(q):\ \ell(q) = 1$$

Зелёным цветом изображена область в которой $0 \leqslant \ell(q) \leqslant 1$. Видно, что квадрат $q = [0, 1]^2$ а следовательно и множество Q полностью принадлежит этой области.

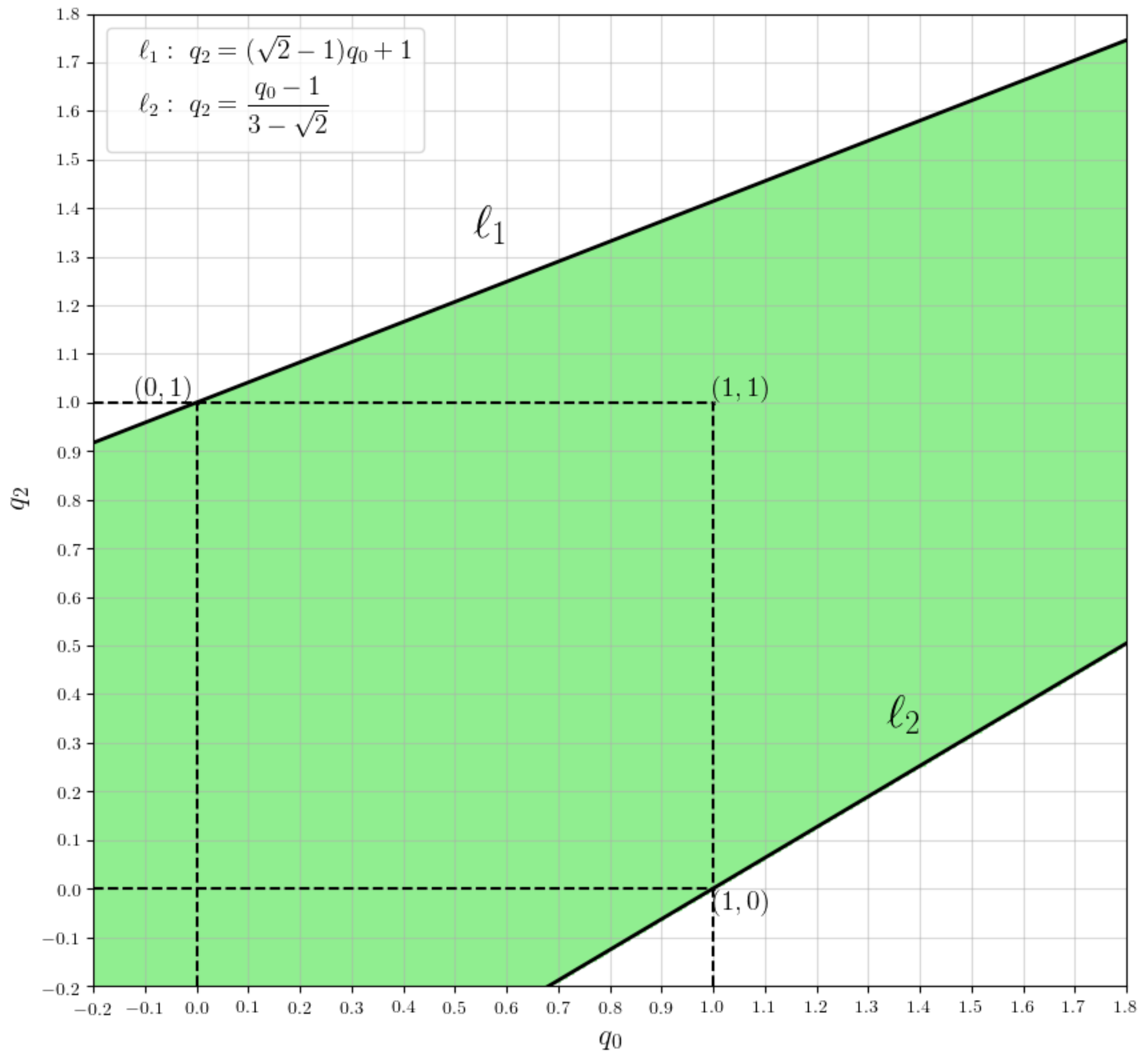


Рис. 2

Следовательно $\forall\, q = (q_0, q_2) \in Q \;\exists\, \lambda \in [0,1] : \; k(\lambda, q) = 0$.

$$p^*(\lambda, q) = \arg\min_{p\in[0,1]} \overline{L}(p,q,\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \in \big(\ell(q), 1\big] \\ 1, & \lambda \in \big[0, \ell(q)\big) \\ [0,1], & \lambda = \ell(q) \end{cases}, \tag{23}$$

где $\ell(q) = \dfrac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{2 + (\sqrt{2}-2)(q_0 - q_2)}$.

7.2 Оптимальная стратегия студента

Игрок **C** стремится максимизировать вектор-функцию выигрыша (14):

$$F(x,y) = \left\langle \frac{y\sqrt{x}}{2}, \frac{\sqrt{1-x}}{y} \right\rangle$$

Игрок **C** использует смешанную стратегию, т.е. его стратегией является распределение $(q_0, q_1, q_2) \in Q(2)$ над множеством чистых стратегий $X = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Его вектор-функция выигрыша (14) приобретает вид:

$$F_{\text{C}} = \langle q_0 \frac{y\sqrt{0}}{2} + q_1 \frac{y}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} + q_2 \frac{y\sqrt{1}}{2}; q_0 \frac{\sqrt{1}}{y} + q_1 \frac{1}{y}\sqrt{\frac{1}{2}} + q_2 \frac{\sqrt{0}}{y} \rangle =$$
$$= \langle \frac{y}{2} \cdot \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{\sqrt{2}}; \frac{1}{y} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{\sqrt{2}} \rangle$$

Затем использует **ОЛС** (11). Сначала рассмотрим вырожденные случаи свёртки - когда её параметры равны $\mu = 0$ и $\mu = 1$.

(1) Если $\mu = 0$:

$$G(y,q,0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{y}$$

Далее осредняем функцию $G(y,q,0)$ по стратегиям противника $y \in Y = \{1, 2\}$ с вероятностями $(1-p, p)$:

$$\overline{G}(p,q,0) = \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{1} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{2} =$$
$$= \frac{(2-p)(1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0)}{2\sqrt{2}}$$

Найдём частные производные по переменным q_0 и q_2. Введём следующие обозначения для сокращения записи:

$$\frac{\partial \overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q} = \langle \frac{\partial \overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q_0}; \frac{\partial \overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q_2} \rangle = \langle g_1(p,q,\mu), g_2(p,q,\mu) \rangle \tag{24}$$

$$\frac{\partial\overline{G}(p,q,0)}{\partial q} = \frac{2-p}{2\sqrt{2}}\langle\sqrt{2}-1;-1\rangle$$

Поскольку $p \leqslant 1$, то $\dfrac{2-p}{2\sqrt{2}} > 0$. Мы рассматриваем задачу максимизации на множестве Q, следовательно:

$$q^*(p,0) = \arg\max_{q\in Q}\overline{G}(p,q,0) = (1,0).$$

(2) Если $\mu = 1$:

$$G(y,q,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{y}$$

Далее осредняем функцию $G(y,q,1)$ по стратегиям противника $y \in Y = \{1,2\}$ с вероятностями $(1-p,p)$:

$$\overline{G}(p,q,1) = \frac{1-p}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{2} + \frac{p}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{1} = \\ = \frac{(p+1)(1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2)}{2\sqrt{2}}$$

Найдём частные производную по переменным q_0 и q_2:

$$\frac{\partial\overline{G}(p,q,1)}{\partial q} = \frac{p+1}{2\sqrt{2}}\langle -1;\sqrt{2}-1\rangle$$

Поскольку $p \geqslant 0$, то $\dfrac{p+1}{2\sqrt{2}} > 0$. Мы рассматриваем задачу максимизации на множестве Q, следовательно:

$$q^*(p,1) = \arg\max_{q\in Q}\overline{G}(p,q,1) = (0,1).$$

(3) Теперь $\mu \neq 0,1$:

$$G(y,q,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}}\min_{0<\mu<1}\Big\langle\frac{y}{2}\cdot\frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{\mu};\frac{1}{y}\cdot\frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu}\Big\rangle$$

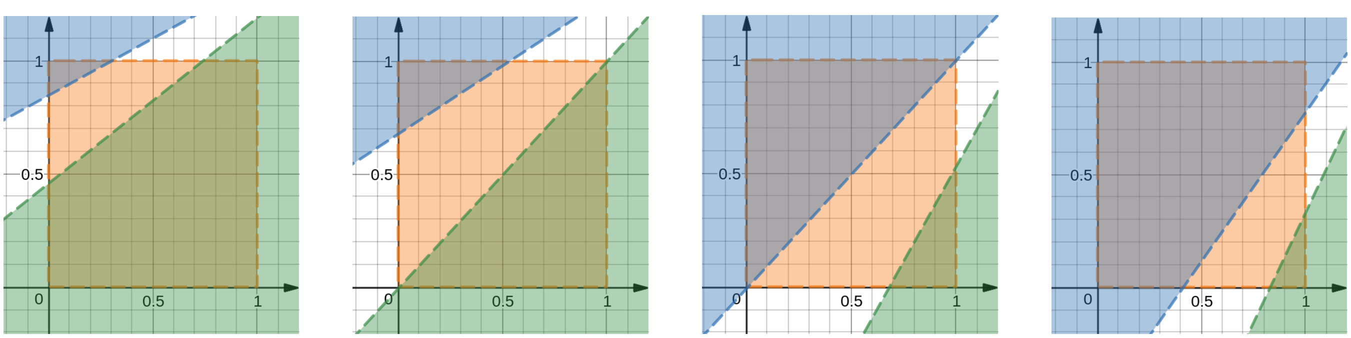
Далее осредняем функцию $G(y, q, \mu)$ по стратегиям противника $y \in Y = \{1, 2\}$ с вероятностями $(1-p, p)$:

$$\overline{G}(p, q, \mu) = \frac{1-p}{\sqrt{2}} \min_{0<\mu<1} \left\langle \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu}; \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu} \right\rangle + \\ + \frac{p}{\sqrt{2}} \min_{0<\mu<1} \left\langle \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}; \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)} \right\rangle \quad (25)$$

Введём вспомогательные обозначения:

$$\ell_1(q, \mu) = \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu}$$
$$\ell_2(q, \mu) = \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu}$$
$$\ell_3(q, \mu) = \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}$$
$$\ell_4(q, \mu) = \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)}$$

Для различных значений переменной μ рассмотрим взаимные расположения множеств $\ell_1 > \ell_2$ и $\ell_3 > \ell_4$ на плоскости (q_0, q_2). Другими словами для фиксированного значения $\mu \in [0, 1]$ найдём области плоскости, в которых достигается минимум одного из выражений в (25).



(a) $\mu = 0.8$ (b) $\mu = \frac{2}{3}$ (c) $\mu = \frac{1}{3}$ (d) $\mu = 0.1$

Поясним график. Синяя область – это множество $\ell_1 > \ell_2$. Зелёная область на графике – это множнство $\ell_3 < \ell_4$. Область между ними – это множество

$\{\ell_1 < \ell_2 \cap \ell_3 > \ell_4\}$. Исходя из графиков $\{\ell_1 > \ell_2 \cap \ell_3 < \ell_4\} = \emptyset$ при $(\mu, q) \in (0,1) \times [0,1]^2$. Поскольку граничные случаи для параметра μ были рассмотрены в первых двух пунктах, то квадрат $[0,1]^2$ на плоскости (q_0, q_2) делится на три связные, не пересекающихся множества.

(1) Рассмотрим полуплоскость, которая определяется системой $\begin{cases} \ell_1 > \ell_2 \\ \ell_3 > \ell_4 \end{cases}$

Вторая строчка в системе является избыточной, т.к. следует из первой. Система эквивалентна неравенству $\ell_1 > \ell_2$. Выражение (25) на этом множестве принимает следующий вид:

$$\overline{G}(p, q, \mu) = \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)} = \\ = \frac{2-p}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu}$$

(2) Рассмотрим полуплоскость, которая определяется системой $\begin{cases} \ell_1 < \ell_2 \\ \ell_3 < \ell_4 \end{cases}$

Первая строчка в системе является избыточной, т.к. следует из второй. Система эквивалентна неравенству $\ell_3 < \ell_4$. Выражение (25) на этом множестве принимает следующий вид:

$$\overline{G}(p, q, \mu) = \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{\mu} = \\ = \frac{1+p}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}$$

(3) Рассмотрим область, которая определяется системой $\begin{cases} \ell_1 < \ell_2 \\ \ell_3 > \ell_4 \end{cases}$

Выражение (25) на этом множестве принимает следующий вид:

$$\overline{G}(p,q,\mu) = \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)} =$$
$$= \frac{(1-p)(1-\mu)(1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2) + p\mu(1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0)}{2\sqrt{2}\mu(1-\mu)}$$

Итого:

$$\overline{G}(p,q,\mu) = \begin{cases} \dfrac{2-p}{2\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu}, & \ell_1 \geqslant \ell_2 \\ \dfrac{1+p}{2\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}, & \ell_3 \leqslant \ell_4 \\ \dfrac{(1-p)(1-\mu)(1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2) + p\mu(1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0)}{2\sqrt{2}\mu(1-\mu)}, & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда вектор производных по переменным (q_0, q_2) имеет вид:

$$\frac{\partial \overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q} = \begin{cases} \dfrac{2-p}{2\sqrt{2}(1-\mu)} \langle \sqrt{2}-1; -1 \rangle, & \ell_1 \geqslant \ell_2 \\ \dfrac{1+p}{2\sqrt{2}\mu} \langle -1; \sqrt{2}-1 \rangle, & \ell_3 \leqslant \ell_4 \\ \mathbf{g}(p,\mu), & \text{иначе} \end{cases}$$

где:

$$\mathbf{g}(p,\mu) = \frac{1}{2\sqrt{2}\mu(1-\mu)} \Big\langle (\sqrt{2}-1)p\mu - (1-p)(1-\mu); (\sqrt{2}-1)(1-p)(1-\mu) - p\mu \Big\rangle.$$

(1) Рассмотрим $\ell_1 \geqslant \ell_2$. Тогда вектор производных по переменным (q_0, q_2) имеет вид:

$$\frac{\partial \overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q} = \frac{2-p}{2\sqrt{2}(1-\mu)} \langle \sqrt{2}-1; -1 \rangle$$

Введём вспомогательную функцию $\ell_B(q,\mu) := (\ell_1 - \ell_2) \cdot \mu(1-\mu)$, множество, на котором она принимает неотрицательные значения составляют интересующую нас область. Множитель $\mu(1-\mu)$ является строго положительным на $\mu \in (0,1)$, поэтому не влияет на знак. Функция является линейной по переменным q_0 и q_2:

$$\ell_B(q,\mu) = (1+\mu(2\sqrt{2}-3))q_0 + (1-\sqrt{2}+\mu(\sqrt{2}-3))q_2 + 3\mu - 1$$

Параметр μ изменяется в диапазоне $(0,1)$, причём:

$$\ell_B(q,\mu) \xrightarrow[\mu\to 1]{} 1 - q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2$$

$$\ell_B(q,\mu) \xrightarrow[\mu\to 0]{} 1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0$$

Предельные положения $\ell_B(q,\mu) = 0$ изображены на графике (Рис. 4).

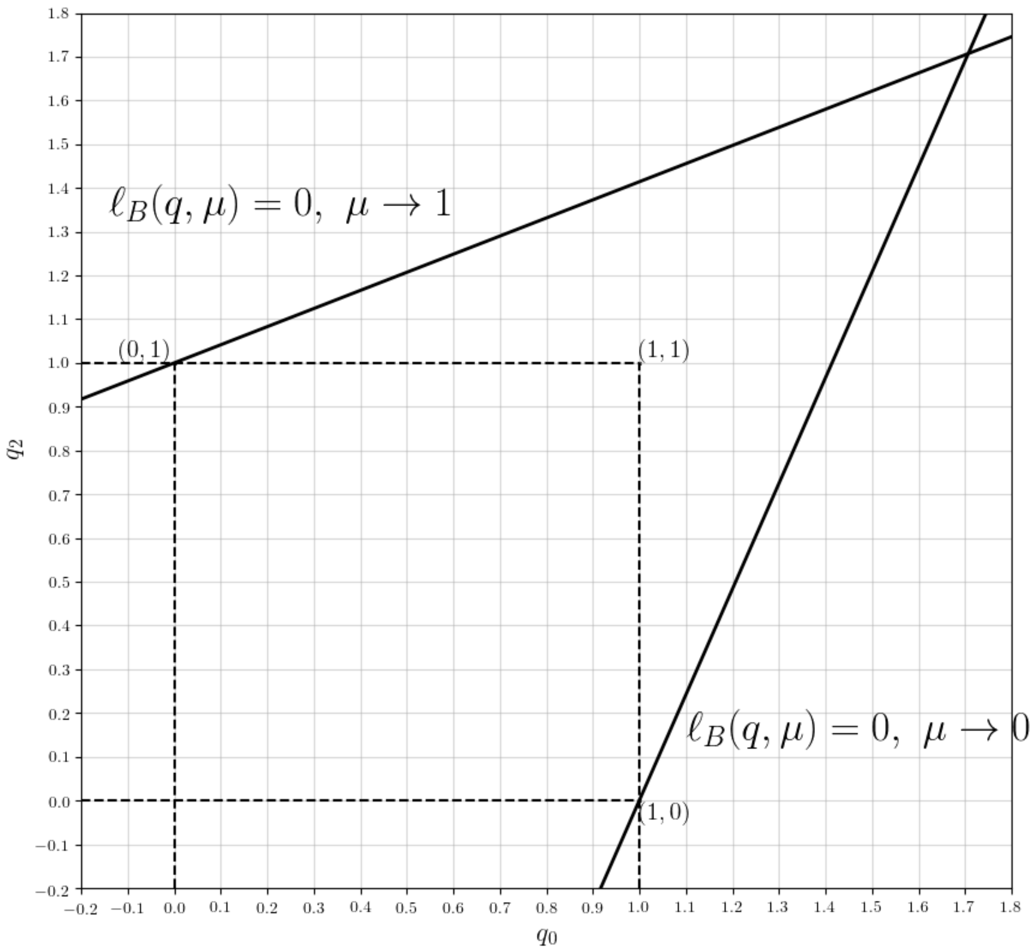


Рис. 4

Найдём значение μ, при котором прямая $\ell_B(q,\mu)$ проходит через точку $q = (0,0)$:

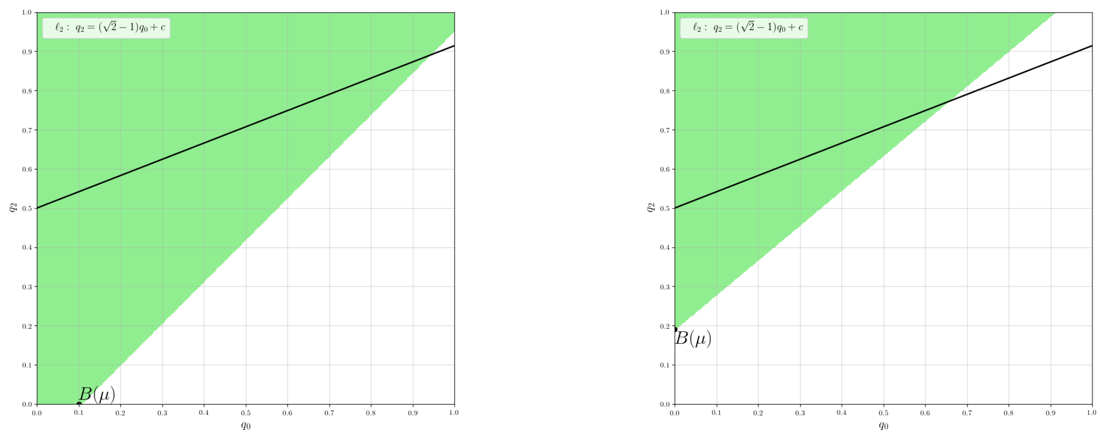
$$\ell_B(0,0,\hat{\mu}) = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{3}$$

Очевидно, что на полиэдре $P_B(\mu)$:

$$P_B(\mu) = \{q \in Q \mid \ell_B(q,\mu) \geqslant 0\},\ \mu \in (0,1),$$

функция $\overline{G}(p,q,\mu)$ достигает максимума в точке $B(\mu)$:

$$q^* = \arg\max_{q \in P_B(\mu)} \overline{G}(y,q,\mu) = B(\mu) = \begin{cases} (0,q_2) : \ell_B(0,q_2,\mu) = 0, & \frac{1}{3} \leqslant \mu < 1 \\ (q_0,0) : \ell_B(q_0,0,\mu) = 0, & 0 < \mu \leqslant \frac{1}{3} \end{cases}$$



(a) $\mu = 0.1 < \frac{1}{3}$

(b) $\mu = 0.4 > \frac{1}{3}$

На графике зелёным цветом изображена область $P_B(\mu)$, чёрным цветом обозначены линии уровня и стрелкой соответственно градиент функции. Рассмотрим эти два случая и найдём явное выражение для точки $B(\mu)$:

(a) Если $\frac{1}{3} \leqslant \mu \leqslant 1$ то координата q_2 точки максимума определяется из условия:

$$\ell_B(0,q_2,\mu) = 0$$

$$(1-\sqrt{2}+\mu(\sqrt{2}-3))q_2 + 3\mu - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_2 = \frac{3\mu - 1}{\sqrt{2}-1+(3-\sqrt{2})\mu}$$

$$q^* = (0; \frac{3\mu-1}{\sqrt{2}-1+(3-\sqrt{2})\mu}),\quad \frac{1}{3} \leqslant \mu \leqslant 1$$

(b) Если $0 \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{3}$ то координата q_0 точки максимума определяется из условия:

$$\ell_B(q_0, 0, \mu) = 0$$

$$(1 + \mu(2\sqrt{2} - 3))q_0 + 3\mu - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_0 = \frac{1 - 3\mu}{1 + (2\sqrt{2} - 3\mu)}$$

$$q^* = (\frac{1 - 3\mu}{1 + (2\sqrt{2} - 3\mu)}; 0), \quad 0 \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{3}$$

Следовательно:

$$B(\mu) = \arg \max_{q \in P_B(\mu)} \overline{G}(y, q, \mu) = \begin{cases} (0; \dfrac{3\mu - 1}{\sqrt{2} - 1 + (3 - \sqrt{2})\mu}), & \frac{1}{3} \leqslant \mu \leqslant 1 \\ (\dfrac{1 - 3\mu}{1 + (2\sqrt{2} - 3\mu)}; 0), & 0 \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{3} \end{cases} \tag{26}$$

(2) Рассмотрим $\ell_3 \leqslant \ell_4$. Тогда вектор производных по переменным (q_0, q_2) имеет вид:

$$\frac{\partial \overline{G}(p, q, \mu)}{\partial q} = \frac{1 + p}{2\sqrt{2}\mu} \langle -1; \sqrt{2} - 1 \rangle$$

Введём вспомогательную функцию $\ell_A(q, \mu) := (\ell_3 - \ell_4) \cdot \mu(1 - \mu)$, множество, на котором она принимает неотрицательные значения составляют интересующую нас область. Множитель $\mu(1 - \mu)$ является строго положительным на $\mu \in (0, 1)$, поэтому не влияет на знак. Функция является линейной по переменным q_0 и q_2:

$$\ell_A(q, \mu) = -(2 + (\sqrt{2} - 3)\mu)q_0 - (2 - 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2} - 3)\mu)q_2 - 3\mu + 2$$

Параметр μ изменяется в диапазоне $(0, 1)$, причём

$$\ell_A(q, \mu) \xrightarrow[\mu \to 1]{} 1 - q_0 + (\sqrt{2} - 1)q_2$$

$$\ell_A(q, \mu) \xrightarrow[\mu \to 0]{} 1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0$$

Предельные положения $\ell_B(q, \mu) = 0$ изображены на графике (Рис. (**??**)). Найдём значение μ при котором прямая $\ell(q, \mu)$ проходит через точку $q = (0, 0)$:

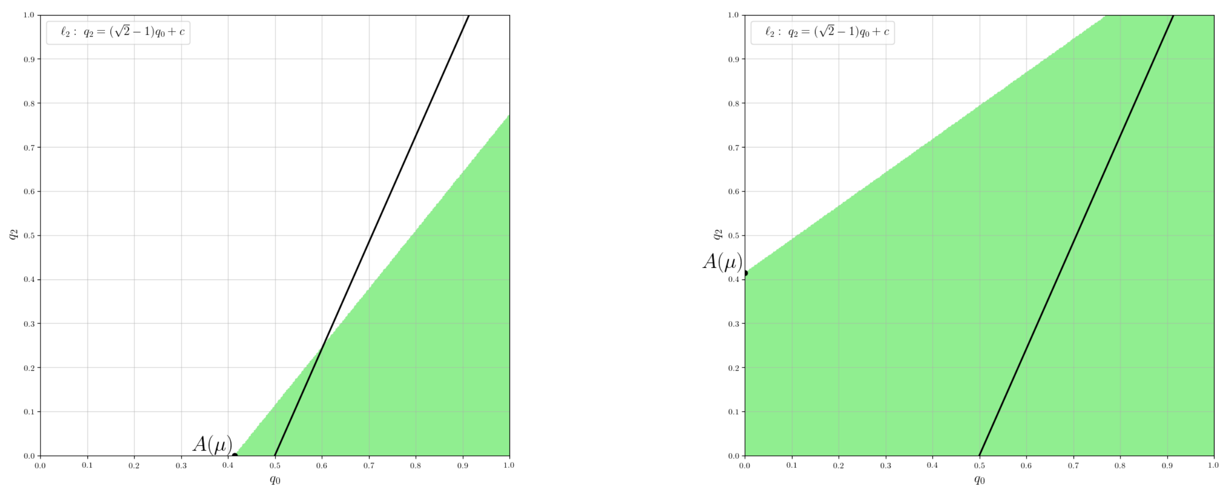
$$\ell_A(0, 0, \hat{\mu}) = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{2}{3}$$

Очевидно, что на полиэдре $P_2(\mu)$:

$$P_A(\mu) = \{q \in Q \mid \ell_3(q,\mu) \leqslant \ell_4(q,\mu)\},\ \mu \in (0,1)$$

функция $\overline{G}(p,q,\mu)$ достигает максимума в точке $A(\mu)$:

$$A(\mu) = \arg\max_{q\in P_A(\mu)} \overline{G}(p,q,\mu) = \begin{cases} (0,q_2) : \ell_A(0,q_2,\mu) = 0, & \frac{2}{3} \leqslant \mu \leqslant 1 \\ (q_0,0) : \ell_A(q_0,0,\mu) = 0, & 0 \leqslant \mu \leqslant \frac{2}{3} \end{cases}$$



(a) $\mu = 0.1 < \frac{2}{3}$ (b) $\mu = 0.8 > \frac{2}{3}$

На графике зелёным цветом изображена область $P_A(\mu)$, чёрным цветом обозначены линии уровня и стрелкой соответственно градиент функции. Рассмотрим эти два случая и найдём явное выражение для точки $A(\mu)$:

(a) Если $\frac{2}{3} \leqslant \mu \leqslant 1$ то координата q_2 точки максимума определяется из условия:

$$\ell_A(0,q_2,\mu) = 0$$

$$-(2-2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}-3)\mu)q_2 - 3\mu + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_2 = \frac{3\mu-2}{2(\sqrt{2}-1)+(3-2\sqrt{2})\mu}$$

$$q^* = (0; \frac{3\mu-2}{2(\sqrt{2}-1)+(3-2\sqrt{2})\mu}), \quad \frac{2}{3} \leqslant \mu \leqslant 1$$

(b) Если $0 \leqslant \mu \leqslant \frac{2}{3}$ то координата q_0 точки максимума определяется из условия:

$$\ell_A(q_0, 0, \mu) = 0$$
$$-(2 + (\sqrt{2} - 3)\mu)q_0 - 3\mu + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_0 = \frac{2 - 3\mu}{2 + (\sqrt{2} - 3)\mu}$$
$$q^* = (\frac{2 - 3\mu}{2 + (\sqrt{2} - 3)\mu}; 0), \quad 0 \leqslant \mu \leqslant \frac{2}{3}$$

Следовательно:

$$A(\mu) = \arg \max_{q \in P_A(\mu)} \overline{G}(p, q, \mu) = \begin{cases} (0; \dfrac{3\mu - 2}{2(\sqrt{2} - 1) + (3 - 2\sqrt{2})\mu}), & \frac{2}{3} \leqslant \mu \leqslant 1 \\ (\dfrac{2 - 3\mu}{2 + (\sqrt{2} - 3)\mu}; 0), & 0 \leqslant \mu \leqslant \frac{2}{3} \end{cases} \tag{27}$$

(3) Рассмотрим область в которой $\begin{cases} \ell_1 \leqslant \ell_2 \\ \ell_3 \geqslant \ell_4 \end{cases}$

Вектор производных по переменным (q_0, q_2) в данной области имеет вид:

$$\frac{\partial \overline{G}(p, q, \mu)}{\partial q} = \frac{1}{2\sqrt{2}\mu(1 - \mu)} \big\langle (\sqrt{2} - 1)p\mu - (1 - p)(1 - \mu); (\sqrt{2} - 1)(1 - p)(1 - \mu) - p\mu \big\rangle$$
$$g_1(p, \mu) := (\sqrt{2} - 1)p\mu - (1 - p)(1 - \mu),$$
$$g_2(p, \mu) := (\sqrt{2} - 1)(1 - p)(1 - \mu) - p\mu.$$

Заметим, что функция $\overline{G}(p, q, \mu)$ является линейной по переменным q_0 и q_2:

$$\overline{G}(p, q, \mu) = g_0(p, \mu)\, q_0 + g_2(p, \mu)\, q_2 + c(p, \mu),$$

и

$$\overline{G}(p, q, \mu) = 0 \sim q_2 = k(p, \mu) \cdot q_0 + c(p, \mu).$$

Рассматриваем функцию на полиэдре $P_{AB}(\mu)$:

$$P_{AB}(\mu) = \{q \in Q \mid \ell_A(q, \mu) \geqslant 0 \cap \ell_B(q, \mu) \leqslant 0\}, \ \mu \in (0, 1)$$

Ограничение $\ell_A(q,\mu) = 0$ и $\ell_B(q,\mu) = 0$ представимы в эквивалентном виде:

$$\ell_A(q,\mu) = 0 \sim \; q_2 = k_A(\mu)q_0 + c_A(\mu)$$
$$\ell_B(q,\mu) = 0 \sim \; q_2 = k_B(\mu)q_0 + c_B(\mu)$$

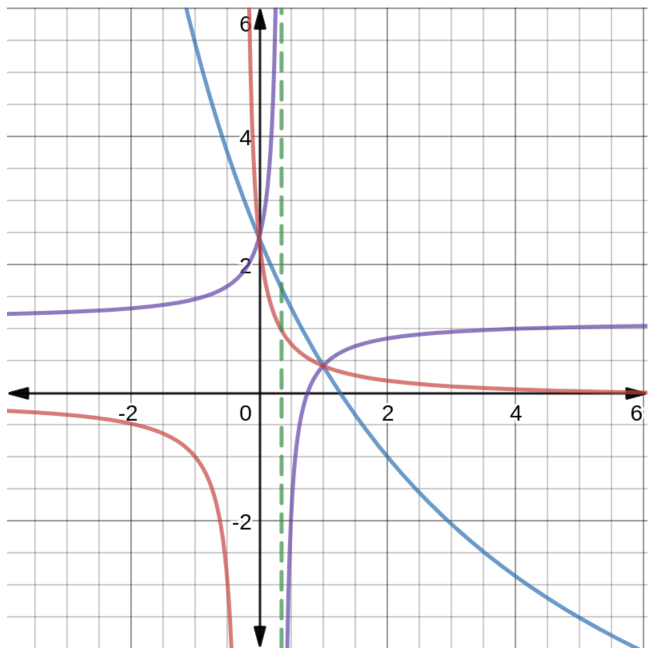


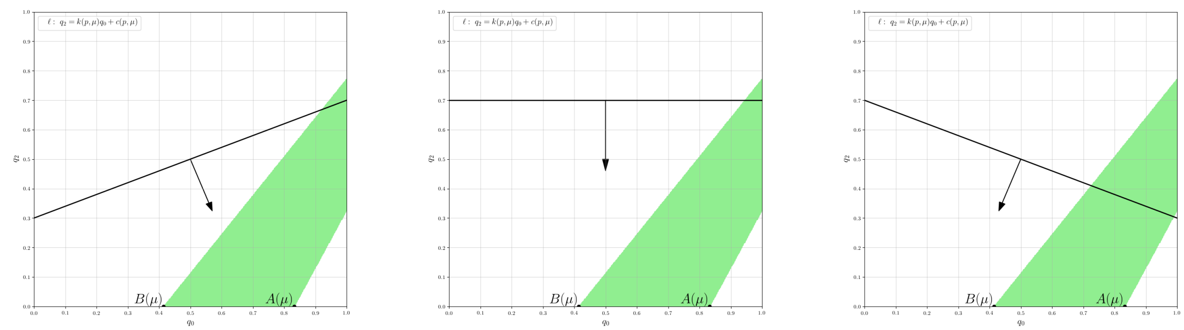
Рис. 7: Коэффициенты $k_A(\mu)$, $k_B(\mu)$ и $k(p,\mu)$ при фиксированном p

Рассмотрим график (Рис. 7), на котором изображены значения коэффициентов при фиксированном значении $p \in [0,1]$. $k_B(\mu)$ изображены красной кривой, $k_A(\mu)$ синей и фиолетовой - кривая $k(p,\mu)$. Пунктирная вертикальная линия обозначает точку в которой выражение $g_1 = 0$. Имеет место неравенство $k_A(\mu) > k_B(\mu)$ при $\mu \in (0,1)$.

$$\begin{cases} k(\mu) < k_B(\mu) \text{ при } g_1(\mu,p) < 0 \\ k(\mu) > k_A(\mu) \text{ при } g_1(\mu,p) > 0 \end{cases}$$

Следовательно точки максимума функции $\overline{G}(p,q,\mu)$ при фиксированных значениях μ и p могут быть точки: $\{A\}$, $\{B\}$, $(0,0)$ и отрезки $[B,A]$, $[0,A]$, $[0,B]$. Где точки $A(\mu)$ и $B(\mu)$ определены в (27) и (26). Рассмотрим три подслучая:

(a) $0 \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{3}$.

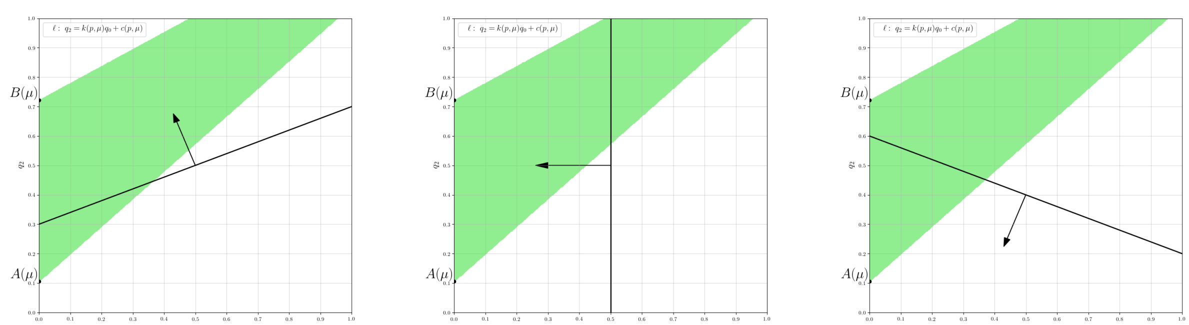


(a) $g_1 > 0 \Rightarrow q^* = A$ (b) $g_1 = 0 \Rightarrow q^* = [B, A]$ (c) $g_1 < 0 \Rightarrow q^* = B$

Рис. 8

$$\left[\begin{array}{c} g_1 > 0 \Rightarrow q^* = A \\ g_1 = 0 \Rightarrow q^* = [B, A] \\ g_1 < 0 \Rightarrow q^* = B \end{array}\right.$$

(b) $\frac{2}{3} \leqslant \mu \leqslant 1$

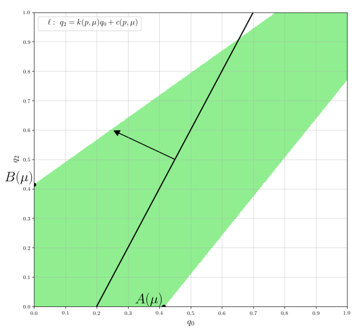


(a) $g_2 > 0 \Rightarrow q^* = B$ (b) $g_2 = 0 \Rightarrow q^* = [B, A]$ (c) $g_2 < 0 \Rightarrow q^* = A$

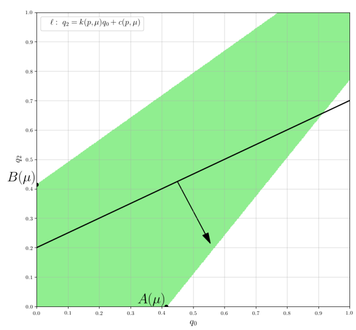
Рис. 9

$$\left[\begin{array}{c} g_2 > 0 \Rightarrow q^* = B \\ g_2 = 0 \Rightarrow q^* = [B, A] \\ g_2 < 0 \Rightarrow q^* = A \end{array}\right.$$

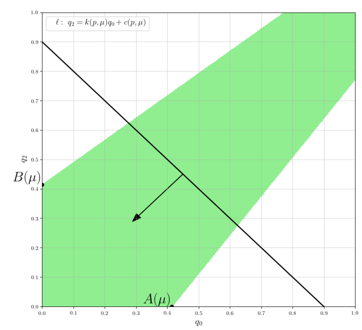
(c) $\frac{1}{3} \leqslant \mu \leqslant \frac{2}{3}$



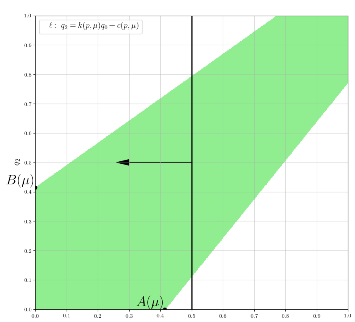
(a) $g_2 > 0 \Rightarrow q^* = B$



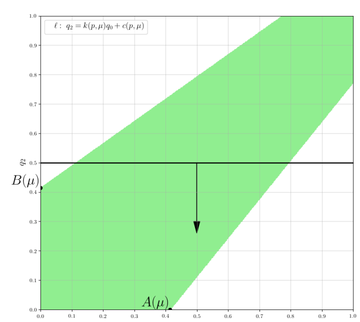
(b) $g_1 > 0 \Rightarrow q^* = A$



(c) $g_2, g_1 < 0 \Rightarrow q^* = (0, 0)$



(d) $g_2 = 0 \Rightarrow q^* = [0, B]$



(e) $g_1 = 0 \Rightarrow q^* = [0, A]$

$$\left[\begin{array}{c} g_1 > 0 \Rightarrow q^* = A \\ g_2 > 0 \Rightarrow q^* = B \\ g_1 = 0 \Rightarrow q^* = [0, A] \\ g_2 = 0 \Rightarrow q^* = [0, B] \\ \begin{cases} g_2 < 0 \\ g_1 < 0 \end{cases} \Rightarrow q^* = (0, 0) \end{array}\right.$$

Итого получим следующие множества точек:

$$C(p,\mu) = \arg\max_{P_{AB}} \overline{G}(p,q,\mu) = \begin{cases} A(\mu), & g_2(p,\mu) < 0 \cup \mu \leqslant \frac{1}{3} \cap g_2 < 0 \\ B(\mu), & g_1(p,\mu) > 0 \cup \mu \geqslant \frac{2}{3} \cap g_1 > 0 \\ (0,0), & g_1(p,\mu) < 0 \cap g_2(p,\mu) < 0 \\ [A(\mu), B(\mu)], & g_1(\mu) = 0 \cap \mu < \frac{1}{3} \cup g_1(\mu) = 0 \cap \mu > \frac{2}{3} \\ [0, A(\mu)], & g_2(\mu) = 0 \cap \mu \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ [0, B(\mu)], & g_1(\mu) = 0 \cap \mu \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \end{cases}$$

Но кроме того точки $A(\mu)$ и $B(\mu)$ являются оптимальными для любого p и μ поскольку являются таковыми в пунктах **(1)** и **(2)**. Итого в области P_B оптимальной является точка $B(\mu)$, в области P_A оптимальной является точка $A(\mu)$, и в области P_{AB} оптимальной является точка $C(p,\mu)$. Поскольку, если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на множестве X, то и $\min(f(x), g(x))$ непрерывна на X. Следовательно максимум достигается в точке C.

$$q^*(p,\mu) = \arg\max_{Q} \overline{G}(p,q,\mu) = \begin{cases} A(\mu), & g_2(p,\mu) < 0 \cup \mu \leqslant \frac{1}{3} \cap g_2 < 0 \\ B(\mu), & g_1(p,\mu) > 0 \cup \mu \geqslant \frac{2}{3} \cap g_1 > 0 \\ (0,0), & g_1(p,\mu) < 0 \cap g_2(p,\mu) < 0 \\ [A(\mu), B(\mu)], & g_1(\mu) = 0 \cap \mu < \frac{1}{3} \cup g_1(\mu) = 0 \cap \mu > \frac{2}{3} \\ [0, A(\mu)], & g_2(\mu) = 0 \cap \mu \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ [0, B(\mu)], & g_1(\mu) = 0 \cap \mu \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ (0,1), & \mu = 0 \\ (1,0), & \mu = 1 \end{cases}$$

В предыдущем пункте мы установили (23), что:

$$p^*(q,\lambda(q)) = \arg\max_{p\in[0,1]} \overline{L}(p,q,\lambda(q)) = [0,1].$$

Нас интересуют оптимальные пары (p^0, q^0) такие, что: $\exists(\lambda, \mu) \in [0,1]^2$:

$$\begin{cases} p^0 = p^*(q^0, \lambda) \\ q^0 = q^*(p^0, \mu) \end{cases}$$

Введём следующие множества:

$$P_0 = [0,1],\ Q_0 = [0,1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [0,1]$$

Следующие точки являются оптимальными:

$$(p, q) \in P_0 \times Q_0$$

8 Значение игры

В предыдущих пунктах были найдены оптимальные стратегии для модельной игры с двумя различными значениями параметра дискретизации: T=1 и T=2. Теперь опишем значения игры для оптимальных стратегий при различных параметрах T.

8.1 Значение игры для игрока Студент

Начнём рассмотрение со случая, когда параметр дискретизации T=1. На квадрате $(\mu, \lambda) \in [0,1]^2$ мы рассмотрели все точки и для каждой нашли оптимальные пары $\big(p^0(\mu,\lambda), q^0(\mu,\lambda)\big)$. Теперь для всех возможных пар из квадрата $(\mu, \lambda) \in [0,1]^2$ в соответствующих оптимальных парах найдём значения скаляризованно функции выигрыша игрока **C**:

$$\overline{G}(p^0(\mu,\lambda), q^0(\mu,\lambda), \mu) = p \min\left\{\frac{q^0}{\mu}; \frac{1-q^0}{2(1-\mu)}\right\} + (1-p^0)\min\left\{\frac{q^0}{2\mu}; \frac{1-q^0}{1-\mu}\right\}$$

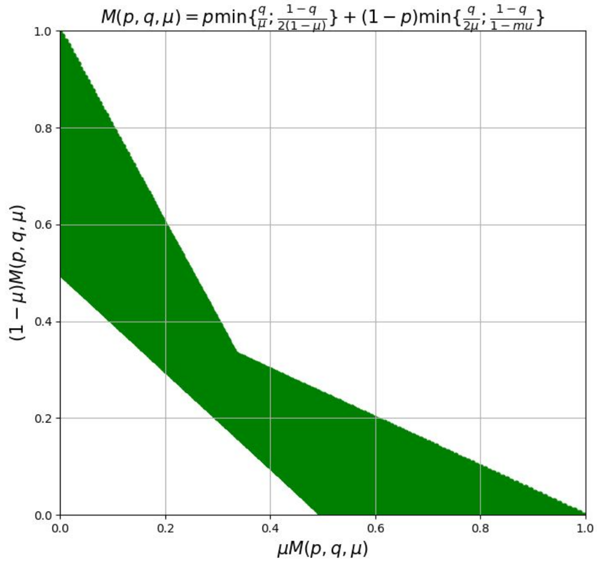
Получим следующую систему в зависимости от значений μ и λ:

$$\overline{G}(p^0(\mu,\lambda), q^0(\mu,\lambda), \mu) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \mu = \{0,1\},\ \lambda \in [0,1) \\ [\frac{1}{2}, 1], & \mu = 0,\ \lambda = 1 \cup \mu = 1,\ \lambda = 0 \\ \dfrac{1}{2-\mu}, & \mu \in (0,1),\ \lambda \in (0, 2\dfrac{1-\mu}{2-\mu}) \\ \dfrac{1}{1+\mu}, & \mu \in (0,1),\ \lambda \in (\dfrac{1-\mu}{1+\mu}, 1] \\ \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2-\mu}\right], & \mu \in (0,1), \lambda \in 2\dfrac{1-\mu}{2-\mu} \\ \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{1+\mu}\right], & \mu \in (0,1), \lambda = \dfrac{1-\mu}{1+\mu} \end{cases}$$

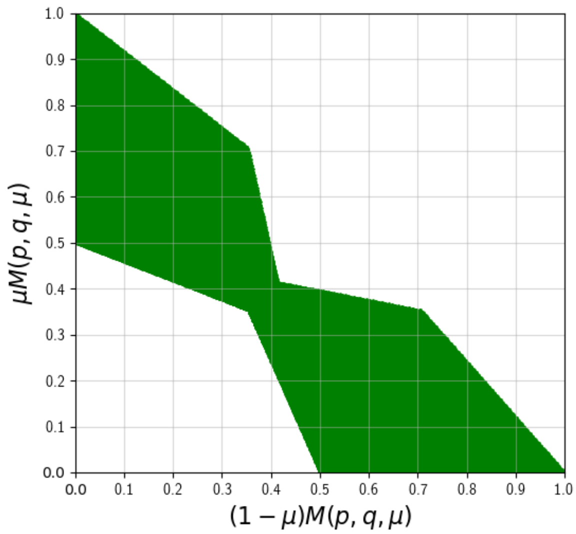
Для наглядности и дальнейшего анализа изобразим графически множество значений выигрыша в оптимальных точках. Для этого на квадрате $[0,1]^2$ изобразим все значения, которые принимает вектор

$$(\mu\overline{G}(p^0(\mu,\lambda), q^0(\mu,\lambda), \mu)), (1-\mu)\overline{G}(p^0(\mu,\lambda), q^0(\mu,\lambda), \mu))$$

при всех возможных $(\mu, \lambda) \in [0,1]^2$. Соответствующий график изображён на рис. 11a.



(a)



(b)

Рис. 11

Поясним график (рис. 11a):

нижняя огибающая в координатах X, Y: $y = \dfrac{1}{2} - x$,

верхняя огибающая в координатах X, Y: $y = \begin{cases} 1-2x, & x \in [0, \frac{1}{3}) \\ \dfrac{1-x}{2}, & x \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases}$

Исходя из аналогичных рассуждений получим график для случая T=2. Он изображён на рис. 11b.

8.2 Значение игры для игрока Преподаватель

Вернёмся к рассмотрению случая T=1. Вычислим математическое ожидание от имеющегося векторного критерия (14) , где x и y возьмём как случайные величины с распределениями (22) и соответствующими обозначениями величин p и q. В таком случае имеем:

$$\mathbb{E}_{xy}[F(x,y)] = \left\langle \frac{q(1+p)}{2}; \frac{(1-q)(2-p)}{2} \right\rangle$$

В утверждении 1 мы установили, что любая пара $(p^0, q^0) \in [0,1]^2$ является оптимальной. Рассмотрим это как множество точек на плоскости X, Y зависящие от двух параметров $(p,q) \in [0,1]^2$

$$\begin{cases} x = \dfrac{q(1+p)}{2} \\ y = \dfrac{(1-q)(2-p)}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \dfrac{2x}{1+p} \\ y = \dfrac{(1-\dfrac{2x}{1+p})(2-p)}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \dfrac{2x}{1+p} \\ y = \dfrac{(1+p-2x)(2-p)}{2(1+p)} \end{cases}$$

Найдём максимальные значения, которые может принимать $y(x,p)$ при фиксированном x:

$$\frac{\partial y(x,p)}{\partial p} = \frac{3x}{(p+1)^2} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow p = \sqrt{6x} - 1.$$

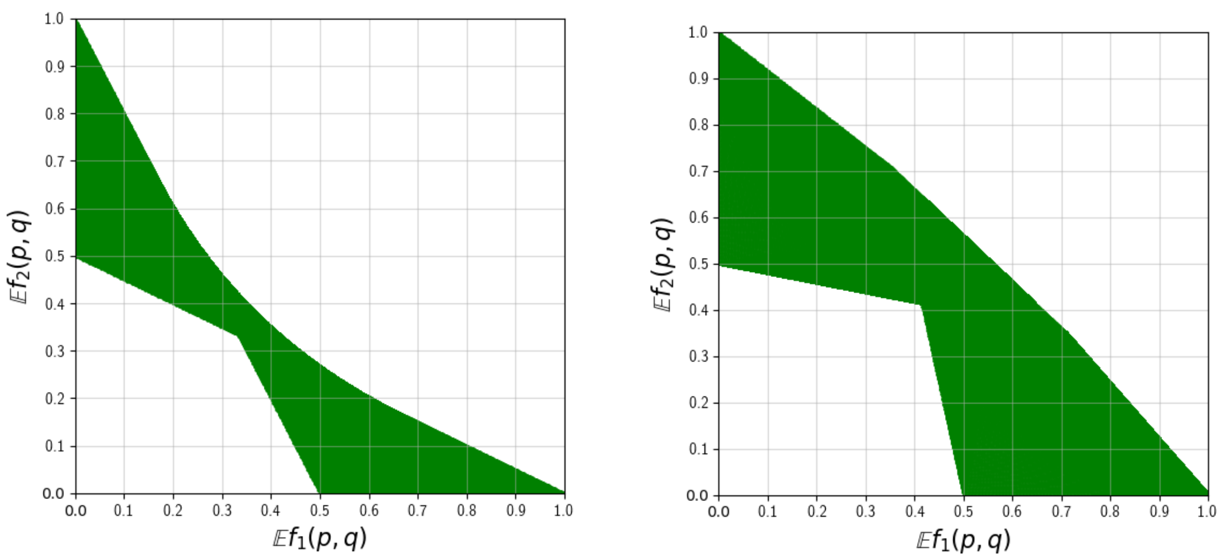
Введём обозначение $p_0 = \sqrt{6x} - 1$. Поскольку область определения $p_0 \in [0,1]$, то $p_0 = 1 \Rightarrow x = \dfrac{2}{3}$ и $p_0 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{6}$.

$$y_{max}(x) = \begin{cases} \max\{y(x,0),\ y(x,1),\ y(x,p_0)\}, & x \in \left[\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right] \\ \max\{y(x,0),\ y(x,1)\}, & x \in \left[0, \frac{1}{6}\right] \cap \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}$$

учитывая, что $y(x,0) = 1-2x,\ y(x,1) = \dfrac{1-x}{2},\ y(x,p_0) = \dfrac{(\sqrt{6x}-2x)(3-\sqrt{6x})}{2\sqrt{6x}}$ получим уравнения верхней и нижней огибающей области на графике (рис. 12a).

$$y_{min}(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{2}, & x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ 1-2x, & x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right] \end{cases} \qquad y_{max}(x) = \begin{cases} 1-2x, & x \in \left[0, \frac{1}{6}\right] \\ \frac{(\sqrt{6x}-2x)(3-\sqrt{6x})}{2\sqrt{6x}}, & x \in \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right] \\ \dfrac{1-x}{2}, & x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}$$

Теперь для всех оптимальных стратегий, т.е. пар $(p^0, q^0) \in [0,1]^2$ изобразим на графике (рис. 12a) значения математическое ожидание векторного критерия в этой точке. Аналогичными рассуждениями для случая T=2 получаем область на рис. 12b. Таким образом мы спроецировали множества в критериальном пространстве представляющие собой максимум среднего вектора критериев:



(a) (b)

Рис. 12

Видно, что при увеличении степени дискретизации, графики приближаются к той форме, которую имеют соответствующие множества в непрерывной задаче [2].

9 Заключение

Была исследована и решена модельная двухкритериальная игры двух лиц. На её примере было изучено применение различных свёрток игроками, и проанализирована зависимость выигрыша от подхода к решению задачи. Были рассмотрены два варианта дискретизации непрерывной модельной задачи и получены следующие результаты:

1. **Оптимальные стратегии**. В случае T=1 оптимальные стратегии оказались неизбирательными, поскольку любая допустимая стратегия оказалась оптимальной. В случае T=2 для игрока **П** оптимальна любая допустимая стратегия, а для игрока **С** множество оптимальных стратегий состоит из двух отрезков.

2. **Множества значений в критериальном пространстве**. Выпуклая оболочка множества значений в критериальном пространстве при оптимальных стратегиях в случае T=2 содержит в себе это множество для T=1. Более того, при увеличении степени аппроксимации, это множество всё точнее приближается к непрерывному случаю.

Работа была представлена на конференции "Ломоносовские чтения 2019" [8].

Список литературы

[1] *Shapley L. S.* Equilibrium points in games with vector payoffs // *Naval Research Logistics.* — 1959. — March. — Vol. 6, no. 1. — Pp. 57–62.

[2] *Novikova N. M., Pospelova I. I.* Scalarization method in multicriteria games // *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* — 2018. — 02. — Vol. 58. — Pp. 180–189.

[3] *David B.* An analog of the minimax theorem for vector payoffs // *Pacific Journal of Mathematics.* — 1959. — Vol. 6, no. 1. — Pp. 1–8.

[4] *Vasin A. A., Morozov V. V.* Game theory and mathematical economics models. — M.: MAKS Press, 2005.

[5] *Ehrgott M.* Multicriterial optimization. — Springer, 2005.

[6] *Germejer Y. B.* Introduction into operations research. — M.: Nauka, 1971.

[7] *Karlin S.* Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics. — Dover Publications, 1992.

[8] *Kononov S. V., Pospelova I. I.* The result of the use of different scalarization methods in multicriterial zero-sum game. — Moscow: CMC MSU, 2019. — Pp. 94–95.