Содержание

1 Введение

Теорией игр называется математическая теория принятия решений в конфликтных ситуациях. В простейших моделях рассматривается лицо принимающее решение (ЛПР), выбирает своё действие из некторогр множества стратегий. Считается, что задана целевая функция, которая отражает интресы ЛПР и зависит от выбранных им стратегий. Задача принятия решений состоит в том, чтобы найти стратегию, доставляющую максимум целевой функции. Отличие конфликтной ситуации заключается в том, что решения принимаются не одним лицом, а всеми участниками модельной игры и функция выигрыша кадого индивида зависит не только от его решения, но и от решения остальных участников. Модель такого вида называется - игрой, а учаастники конфликта - игроками. В рамках данной работы будет рассмотрена задача из Теории некооперативных игр - игр, в которых игроки действуют самостоятельно, незываисимо друг от друга.

Определим формально модель игры с несколькими участниками в общем виде.

Есть конечное множество P игроков, которые перенумерованы $1, 2, ..., m$. Каждый игрок из множества P имеет конечное множество чистых стратегий $S_k = \{1, 2, ..., n_k\}$, при этом ситуацие называется m мерный вектор

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2, ..., s_m) \in \bigotimes_{i \in P} S_i$$

Функция выигрыша - это отображение вида вида .

$$F : S_1 \times S_2 \times ... \times S_m \to \mathbb{R} \tag{1}$$

которая обозначает выигрыша игрока при конкретной ситуации в игре. Эта функция определена для каждого игрока из P.

Определение 1 *Игрой в нормалной форме называется совокупность:*

$$G = \{P, S, F\}$$

где:

$P = \{1, 2, ..., m\}$ *- множество игроков*
$S = \{S_1, S_2, ..., S_m\}$ *- множество наборов чистых стратегий игроков.*
$F = \{F_1, F_2, ..., F_m\}$ *- множество функция выигрыша игроков.*

Теперь введём фундаментальное понятие в теории игр - равновесие по Нэшу:

Определение 2 *Ситуация* $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, ..., s_m)$ *называется равновесием по Нэшу игры* $G = \{P, S, F\}$*, если:*

$$\max_{s_i \in S_i} F_i(s_1^0, ..., s_{i-1}^0, s_i, s_{i+1}^0 ..., s_m^0) = F_i(s_1^0, ..., s_{i-1}^0, s_i^0, s_{i+1}^0 ..., s_m^0),\ i \in P$$

Смысл этого определения заключается в том, что при ситуации в игре, которая является равновесием по Нэшу, одному игроку индивидуально не выгодно отклоняться от своей стратегии.

До этого мы рассматривали функции выигрыша игроков, которые имели вид: (**??**), т.е. каждому игроку соответсвовало одно значение, зависящее ситуации игры. Рассмотрим обобщение, когда функция выигрыша игроков имеет вид:

$$F : S_1 \times S_2 \times ... \times S_m \to \mathbb{R}^m,\ m \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Это означает, что каждый игрок имеет некторое конечно конечно множество критериев, в которых имеют для него значение и изменяются в зависимости от ситуации игры. Такое обощение ближе к реальным ситуациям в которых рассматриваются несколько значимых параметров. Для примера можно привести задачу выбора машины: допустим покупателю важно чтобы машина имела большую мощность, безопасность и мало стоило продавцу же важно, чтобы она стола как можно дороже и ещё следует продавать машины из которые плохо продаются. Таким образом мы получили игру, в которой игроки имеют два и тра критерия, которые важны для них при выборе стратегии.

Приведённые выше обощения приводят нас к другому разделу математики, а именно: многокритериальной оптимизации. Рассмотрим следующую задачу которая относится к этой области.

$$\max_{x \in X} F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \tag{3}$$

Это задача заключается в том, что у нас есть n-мерная функция, которая представляет собой множество значений критериев, зависящая от параметров, которые принадлежат некоторому множеству. Ньюанс заключается в том, что правило сравнения двух векторов не определено, т.е. в общей задаче не всегда можно точно сказать, какой из двух векторов значений функции предпочтительнее.

Введём понятие оптимальных по Парето и Слейтеру векторов задачи (3)

Определение 3 *Допустимое решение $\hat{x} \in X$ называется эффективным по Слейтеру (эффективным по Парето) для задачи*

*если **не** существует $x \in X$ такого, что $f_k(x) > f_k(\hat{x})$ ($f_k(x) \geqslant f_k(\hat{x})$) для всех $k = \{1, ..., n\}$. Множетсво всех эффективных по Слейтеру решений называается множеством Слейтера задачи* (3).

В работе рассматриваются различные способы решения модельной задачи которая представляет собой игру двух лиц с противоположными интересами и двумерной функцией выигрыша. Для решения задачи применяется модифицированный метод свёрток предложенный Л.С. Шепли [2], который как правило используется в подобных задачах.

Для задачи (**??**) введеём следующие частные случаи:

$$S_x(y^*) \text{ - множество Слейтера задачи } \max_{x\in X} F(x, y^*)$$
$$S_y(x^*) \text{ - множество Слейтера задачи } \min_{y\in Y} F(x^*, y)$$

Определение 4 *Решением игры* (**??**) *согласно [1] является множество точек (x^*, y^*) таких, что $x^* \in S_x(y^*)$ и $y^* \in S_y(x^*)$,*

Для параметризации множеств Слейтера будем использовать метод свёрток. Он заключается в том, что задача $\max\limits_{x\in X} F(x)$ заменяется параметрическим семейством скалярных задач $\max\limits_{x\in X} C(\{f_i\}, \lambda, x)$, где C – функция свертки частных критериев $\{f_i\}_{i=1}^m$ задачи (3) в единый скалярный критерий, λ – параметр свертки.

Определение 5 *Линейной свёрткой с параметром λ для функции критериев задачи* (3) *называется функция:*

$$L(\{f_i\}, \lambda, x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i, \text{ где } \lambda \in \Lambda = \{\lambda_i \geq 0 | \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}, \tag{4}$$

свёрткой Гермейера или обратной логической свёрткой с параметром μ для функции критериев задачи (3) *называется функция:*

$$G(\{f_i\}, \mu, x) = \min_{i:\mu_i > 0} \frac{f_i}{\mu_i}, \text{ где } \mu \in M = \{\mu_i \geq 0 | \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1\}. \tag{5}$$

В случае конечных X и Y Шепли свел [2] описание данного множества к семейству задач поиска значений скалярных игр с функциями выигрышей – ЛС частных критериев при произвольном наборе весовых коэффициентов, своих у каждого игрока. Применение линейной свертки в многокритериальных задачах обосновывается леммой Карлина

Теорема 1 (Карлин [4]) *Пусть x_0 – эффективная точка, Тогда существуют неотрицательные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ такие, что $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ и x_0 является точкой максимума функции $L(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f^j(x)$*

Гермейером была предложена свертка, которая также аппроксимирует множество Слейтера. В работе используется ее модификация - обратная логическая свертка, она отличается тем, что веса стоят в знаменателе.

Теорема 2 (Гермейер [3]) *Пусть x_0 – эффективная точка, причем $f^i(x_0) > 0$ для всех $i = 1, \ldots, m$. Тогда существуют положительные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ такие, что $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ и x_0 является точкой максимума функции $G(x) = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} \lambda_j f^j(x)$.*

Далее будем использовать следующие обозначения:

$$\arg\max_{x \in X} f(x) = \{x^* \in X \mid f(x^*) = \min_{x \in X} f(x)\}$$
$$\arg\min_{x \in X} f(x) = \{x^* \in X \mid f(x^*) = \max_{x \in X} f(x)\}$$

Рассмотрим случай, когда **С** использует обратную логическую свертку, с парамером μ, а **П** использует линейную свертку с параметром λ. Тогда множество оптимальных решений:

$$\begin{cases} x^* = \arg\max\limits_{x} G(\{f_1, f_2\}, \mu, x, y^*) \\ y^* = \arg\min\limits_{y} L(\{f_1, f_2\}, \lambda, x^*, y) \end{cases}$$

Поскольку игроки используют смешанные стратегии т.е. распределения вероятностей $\rho_x(x)$ и $\rho_y(y)$ над чистыми стратегиями $x \in X$ и $y \in Y$. Далее каждый игрок осредняет свою функцию выигрыша по стратегиям противника

$$\overline{G}(\{f_1, f_2\}, \mu, q, p) = \iint\limits_{PQ} G(\{f_1, f_2\}, \mu, q, p)\rho_x(x)\rho_y(y)dxdy$$

$$\overline{L}(\{f_1, f_2\}, \lambda, q, p) = \iint\limits_{PQ} L(\{f_1, f_2\}, \lambda, q, p)\rho_x(x)\rho_y(y)dxdy$$

Определение 6 *Пара стратегий* (p^0, q^0) *называется оптимальными, если для некоторых* λ, μ *верно:*

$$\begin{cases} p^0(q^0, \lambda) = \operatorname*{argmin}_{p \in P} \overline{L}(p, q^0, \lambda) \\ q^0(p^0, \mu) = \operatorname*{argmin}_{q \in Q} \overline{G}(p^0, q, \mu) \end{cases} \tag{6}$$

Мы будем рассматривать конечную игру $\mathbf{C} - \mathbf{\Pi}$, полученную из исходной заменой множества $X = [0, 1]$ конечным множеством точек

$$X^T = \{0,\ \frac{1}{T},\ \frac{2}{T},\ \ldots,\ \frac{T-1}{T},\ 1\},\quad T \in \mathbb{N}$$

В работе исследуются случаи $T = 1$: $X^1 = \{0, 1\}$, и $T = 2$: $X^2 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

Список литературы

[1] Blackwell D. *An analog of the minimax theorem for vector payoffs.* 1959.

[2] Shapley L.S. Equilibrium points in games with vector payoffs. 1959.

[3] Ю.Б. Гермейер. Введение в теорию исслежования операций.

[4] Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. 1964.