Свойства свёртки Гермейера в векторных играх

Кононов Сергей

8 мая 2019 г.

Содержание

1 Введение

В работе рассматриваются различные способы решения модельной задачи которая представляет собой игру двух лиц с противоположными интересами и двумерной функцией выигрыша. Для решения задачи применяется модифицированный метод свёрток предложенный Л.С. Шепли [1], который как правило используется в подобных задачах.

1.1 Игровая модель

Рассматриваются два игрока - Студент, далее обозначается **C**, и Преподаватель, далее обозначается **П**, которые имеют противоположные интересы. Критерий интересов составляют две велечины, первая из которых является эффективностью работы **C** в научной сфере, а второй его эффективностью на подработке.

C выбирает долю x рабочего времени, которую он тратит на подготовку диплома, оставшееся рабочее время $1-x$ он тратит на подработку. Считается, что производительность **C** при любых занятий падает с увеличением отводимого на них времени, эффективность труда **C** зададим функцией $\sqrt{x}$ и $\sqrt{1-x}$ соответственно. **C** может распределять свое время между двумя видами деятельности, т.е. имеет множетсво стратегий $x \in X = \{0,1\}$, причём он может использовать смешанные стратегии.

П выбирает - отностится к **C** требовательно, способствую написанию диплома и мешая подработке или же не обращать на него внимания не мешая подработке и не помогая с дипломом. **П** имеет множество стратегий $y \in Y = \{1,2\}$, причём тоже может использовать смешаные стратегии.

Получаем следующий функциональный критерий:

$$F(x,y) = \big(f_1(x,y), f_2(x,y)\big) = \Big(\frac{y\sqrt{x}}{2}, \frac{\sqrt{1-x}}{y}\Big) \qquad (1)$$

П стремится минимизировать (выборая $y \in Y = \{1,2\}$) критерий $F(x,y)$, а игрок **C** - максимизировать (выбирая $x \in X = [0,1]$).

Задачу можно представить в виде многокритериальную игру двух лиц с противоположными интересамив

$$\Big\langle F(x,y), X, Y \Big\rangle,\ y \in Y = \{1,2\},\ x \in X = [0,1] \qquad (2)$$

Определение 1 *Допустимое решение $\hat{x} \in X$ называется строго эффективным (эффективным по Слейтеру) для задачи*

$$\max_{x \in X} F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \qquad (3)$$

*если **не** существует $x \in X$ такого, что $f_k(x) > f_k(\hat{x})$ для всех $k = \{1, ..., n\}$. Множетсво всех эффективных по Слейтеру решений называается множеством Слейтера задачи (3).*

Для задачи (2) введём следующие частные случаи:

$$S_x(y^*) \text{ - множество Слейтера задачи } \max_{x \in X} F(x, y^*)$$
$$S_y(x^*) \text{ - множество Слейтера задачи } \min_{y \in Y} F(x^*, y)$$

Определение 2 *Решением*[1] *(2) является множество точек (x^*, y^*) таких, что $x^* \in S_x(y^*)$ и $y^* \in S_y(x^*)$,*

Для параметризации множеств Слейтера будем использовать метод свёрток. Он заключается в том, что задача $\max_{x \in X} F(x)$ заменяется параметрическим семейством скалярных задач $\max_{x \in X} C(\{f_i\}, \lambda, x)$, где C – функция свертки частных критериев $\{f_i\}_{i=1}^m$ задачи (3) в единый скалярный критерий, λ – параметр свертки.

Определение 3 *Линейной свёрткой с параметром λ для функции критериев задачи (3) называется функция:*

$$L(\{f_i\}, \lambda, x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i, \text{ где } \lambda \in \Lambda = \{\lambda_i \geq 0 | \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}, \qquad (4)$$

свёрткой Гермейера или обратной логической свёрткой с параметром μ для функции критериев задачи (3) называется функция:

$$G(\{f_i\}, \mu, x) = \min_{i: \mu_i > 0} \frac{f_i}{\mu_i}, \text{ где } \mu \in M = \{\mu_i \geq 0 | \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1\}. \qquad (5)$$

[1] Согласно *Blackwell D.* An analog of the minimax theorem for vector payoffs // Pac. J. of Math. 1956. No 6.

В случае конечных X и Y Шепли свел [1] описание данного множества к семейству задач поиска значений скалярных игр с функциями выигрышей – ЛС частных критериев при произвольном наборе весовых коэффициентов, своих у каждого игрока. Применение линейной свертки в многокритериальных задачах обосновывается леммой Карлина

Теорема 1 (Карлин [4]) *Пусть x_0 – эффективная точка, Тогда существуют неотрицательные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ такие, что $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ и x_0 является точкой максимума функции $L(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f^j(x)$*

Гермейером была предложена свертка, которая также аппроксимирует множество Слейтера. В работе используется ее модификация - обратная логическая свертка, она отличается тем, что веса стоят в знаменателе.

Теорема 2 (Гермейер [2]) *Пусть x_0 – эффективная точка, причем $f^i(x_0) > 0$ для всех $i = 1, \ldots, m$. Тогда существуют положительные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ такие, что $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ и x_0 является точкой максимума функции $G(x) = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} \lambda_j f^j(x)$.*

Рассмотрим случай, когда **С** использует обратную логическую свертку, с парамером μ, а **П** использует линейную свертку с параметром λ. Тогда множество оптимальных решений:

$$\begin{cases} x^* = \arg\max\limits_{x} G(\{f_1, f_2\}, \mu, x, y^*) \\ y^* = \arg\min\limits_{y} L(\{f_1, f_2\}, \lambda, x^*, y) \end{cases}$$

Поскольку игроки используют смешанные стратегии т.е. распределения вероятностей $\rho_x(x)$ и $\rho_y(y)$ над чистыми стратегиями $x \in X$ и $y \in Y$. Далее каждый игрок осредняет свою функцию выигрыша по стратегиям противника

$$\overline{G}(\{f_1, f_2\}, \mu, q, p) = \iint\limits_{PQ} G(\{f_1, f_2\}, \mu, q, p) \rho_x(x) \rho_y(y) dxdy$$

$$\overline{L}(\{f_1, f_2\}, \lambda, q, p) = \iint\limits_{PQ} L(\{f_1, f_2\}, \lambda, q, p) \rho_x(x) \rho_y(y) dxdy$$

Определение 4 *Пара стратегий* (p^0, q^0) *называется оптимальными, если для некоторых* λ, μ *верно:*

$$\begin{cases} p^0(q^0, \lambda) = \underset{p \in P}{\operatorname{argmin}} \, \overline{L}(p, q^0, \lambda) \\ q^0(p^0, \mu) = \underset{q \in Q}{\operatorname{argmin}} \, \overline{G}(p^0, q, \mu) \end{cases} \tag{6}$$

Мы будем рассматривать конечную игру $\mathbf{C} - \mathbf{\Pi}$, полученную из исходной заменой множества $X = [0, 1]$ конечным множеством точек

$$X^T = \{0, \ \frac{1}{T}, \ \frac{2}{T}, \ \ldots, \ \frac{T-1}{T}, \ 1\}, \ \ T \in \mathbb{N}$$

В работе исследуются случаи $T = 1$: $X^1 = \{0, 1\}$, и $T = 2$: $X^2 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

2 Постановка задачи (значение параметра T=1)

Сначала рассмотри случай с параметром $T = 1$. Тогда множество $X = \{0, 1\}$. Игроки используют смешанные стратегии т.е. распределение над своими чистыми стратегиями. Чистыми стратегиями игроков **С** и **П** являются $X = \{0, 1\}$ и $Y = \{1, 2\}$ соответсвенно. Эти множества дискретны, поэтому распределения задаются в виде векторов вида:

$$(p_1, p_2) \in P = \{(p_1, p_2) \in R_+^2 \mid p_1 + p_2 = 1)$$

Множество $Q = P$, введено для наглядности. Смешанные стратеги игроков **С** и **П** будем обозначать $q = (q_0, q_1) \in Q$ и $p = (p_0, p_1) \in P$ соответсвенно, причём:

$$\begin{array}{cc} P(X=0) = q_0 & P(Y=1) = p_0 \\ P(X=1) = q_1 & P(Y=2) = p_1 \\ \text{Пусть } q := q_1, \text{ тогда } q_0 = 1 - q & \text{Пусть } p := p_1, \text{ тогда } p_0 = 1 - p \end{array}$$

Игрок **С** использует смешаную стратегию (q_0, q_1), тогда его векторный критерий (1) приобретает вид:

$$F_{\text{C}}(q, y) = \left\langle q_0 \frac{y\sqrt{0}}{2} + q_1 \frac{y\sqrt{1}}{2}; q_0 \frac{\sqrt{1}}{y} + q_1 \frac{\sqrt{0}}{y} \right\rangle = \left\langle \frac{q_1 y}{2}; \frac{q_0}{y} \right\rangle$$

Игрок **П** использует смешаную стратегию (p_0, p_1), тогда его векторный критерий (1) приобретает вид:

$$F_{\Pi}(x, p) = \left\langle (1-p)\frac{1 \cdot \sqrt{x}}{2} + p\frac{2 \cdot \sqrt{x}}{2};\ (1-p)\frac{\sqrt{1-x}}{1} + p\frac{\sqrt{1-x}}{2} \right\rangle = \\ = \frac{1}{2}\left\langle (p+1)\sqrt{x};\ (2-p)\sqrt{1-x} \right\rangle$$

Далее игрок **С** использует *обратную логическую свёртку* (5):

$$G(y, q, \mu) = \min_{i:\mu_i > 0} \{ \frac{q_1 y}{2\mu_0}; \frac{q_0}{y\mu_1} \},$$

а игрок **П** использует *линейную свёртку* (4):

$$L(p, x, \lambda) = \lambda_0 (p+1)\sqrt{x} + \lambda_1 (2-p)\sqrt{1-x}$$

После чего игрок **С** осредняет свёртку критерия по стратегиям игрока **П**, т.е. по переменной y:

$$\overline{G}(p,q,\mu) = p\min\{\frac{q}{\mu}; \frac{1-q}{2(1-\mu)}\} + (1-p)\min\{\frac{q}{2\mu}; \frac{1-q}{1-\mu}\},$$

а игрок **П** осредняет свёртку критерия по стратегиям игрока **С**, т.е. по переменной x:

$$\overline{L}(p,q,\lambda) = \frac{1}{2}\big\{q(3\lambda+p-2) + (2-p)(1-\lambda)\big\}.$$

Мы установили функции выигрыша игроков. Теперь задачу можно формализовать и представить как семейство игр двух игроков в нормальный форме:

$$\Big\langle \{\mathbf{С}, \mathbf{П}\}, \{Q,\ P\}, \{\overline{L}(p,q,\lambda), -\overline{G}(p,q,\mu)\}\Big\rangle,\ (\lambda,\mu) \in \Lambda \times M$$

Для нас представляет интерес множество оптимальных точек (4).

3 Множество оптимальных стратегий

Для поиска оптимальных стратегий сначала необходимо установить значения $p^*(q,\lambda) = \arg\max\limits_{p\in P} \overline{L}(p,q,\lambda)$ и $q^*(p,\mu) = \arg\min\limits_{q\in Q} \overline{G}(p,q,\mu)$.

Из статьи [3] следует, что:

$$p^*(q,\lambda) = \arg\max_{p\in P} \overline{L}(p,q,\lambda) = \begin{cases} 0, & q > 1-\lambda \\ 1, & q < 1-\lambda \\ [0,1], & q = 1-\lambda \end{cases} \tag{7}$$

Из пункта 3 следует, что

$$q^*(p,\mu) = \arg\min_{q\in Q} \overline{G}(p,q,\mu) = \begin{cases} \dfrac{\mu}{2-\mu}, & p \geqslant 1-\mu \\ \dfrac{2\mu}{1+\mu}, & p \leqslant 1-\mu \end{cases} \tag{8}$$

Утверждение 1 *Любая пара* $(p^*, q^*) \in [0,1]^2$ *является оптимальной, т.е.* $\forall\ (p^*, q^*) \in [0,1]^2\ \exists\ (\mu,\lambda) \in M \times \Lambda$*: верно* (4).

Доказательство
Зафиксируем некоторую пару $(p^*, q^*) \in [0,1]^2$ и найдём такие $\hat{\mu}(p^*, q^*)$ и $\hat{\lambda}(p^*, q^*)$ что верно (4) т.е. что пара стратегий является оптимальной.
(1) Покажем оптимальность p^*:
Возьмём $\hat{\lambda} := 1 - q^* \ \Rightarrow$ поскольку $\arg\min\limits_{p\in P} \overline{L}(p, q^*, \hat{\lambda}) = [0,1]$ при $q^* = 1 - \hat{\lambda}$, то и $p^* \in \arg\min\limits_{p\in P} \overline{L}(p, q^*, \hat{\lambda})$
(2) Покажем оптимальность q^*. По имеющемуся q^* решим уравнения $f_1(\mu_1) = q^*$ и $f_2(\mu_2) = q^*$, где $f_1 = \dfrac{\mu}{2-\mu}$ и $f_2 = \dfrac{2\mu}{1+\mu}$:

$$q^* = \frac{2\mu_2}{1+\mu_2} \Rightarrow \mu_2 = \frac{q^*}{2-q^*}$$
$$q^* = \frac{\mu_1}{2-\mu_1} \Rightarrow \mu_1 = \frac{2q^*}{1+q^*}$$

Заметим, что при $q^* \in [0,1]$ верно $\mu_2 \leqslant \mu_1$. В таком случае поскольку $1 - p^* \in [0,1]$, то при фиксированных переменных (p^*, q^*) будет реализован один и только один из 3-х вариантов:

(a) $1 - p^* \leqslant \mu_2$, т.е. $1 - p^* \leqslant \dfrac{q^*}{2 - q^*}$. В этом случае $\hat{\mu} := \mu_1 = \dfrac{2q^*}{1 + q^*}$. Действительно, при таком выборе $\hat{\mu}$ имеем:

$$1 - p^* \leqslant \mu_2 \leqslant \mu_1 = \hat{\mu} \Rightarrow p^* + \hat{\mu} - 1 \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arg\max_{q \in Q} \overline{G}(p^*, q, \hat{\mu}) = \frac{\hat{\mu}}{2 - \hat{\mu}} = \frac{\dfrac{2q^*}{1 + q^*}}{2 - \dfrac{2q^*}{1 + q^*}} = q^* \Rightarrow$$

$$\text{при} \begin{cases} \hat{\mu} = \dfrac{2q^*}{1 + q^*} \\ \hat{\lambda} = 1 - q^* \\ 1 - p^* \leq \frac{q^*}{2 - q^*} \end{cases} \qquad (p^*, q^*) - \text{оптимальная пара}$$

(b) $\mu_2 < 1 - p^* \leqslant \mu_1$, т.е. $\dfrac{q^*}{2 - q^*} < 1 - p^* \leqslant \dfrac{2q^*}{1 + q^*}$. В этом случае $\hat{\mu} := \mu_1 = \dfrac{2q^*}{1 + q^*}$. Действительно, при таком выборе $\hat{\mu}$ имеем:

$$1 - p^* \leq \mu_1 = \hat{\mu} \;\Rightarrow\; p^* + \hat{\mu} - 1 \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arg\max_{q \in Q} \overline{G}(p^*, q, \hat{\mu}) = \frac{\hat{\mu}}{2 - \hat{\mu}} = \frac{\dfrac{2q^*}{1 + q^*}}{2 - \dfrac{2q^*}{1 + q^*}} = q^* \Rightarrow$$

$$\text{при} \begin{cases} \hat{\mu} = \dfrac{2q^*}{1 + q^*} \\ \hat{\lambda} = 1 - q^* \\ \dfrac{q^*}{2 - q^*} < 1 - p^* \leqslant \dfrac{2q^*}{1 + q^*} \end{cases} \qquad (p^*, q^*) - \text{оптимальная пара}$$

(c) $\mu_1 \leqslant 1 - p^*$ т.е. $\dfrac{2q^*}{1 + q^*} < 1 - p^*$. В этом случае $\hat{\mu} := \mu_2 = \dfrac{q^*}{2 - q^*}$ действительно, при таком выборе $\hat{\mu}$ имеем

$$1 - p^* \geqslant \mu_2 = \hat{\mu} \Rightarrow p^* + \mu - 1 \leqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arg\max_{q \in Q} \overline{G}(p^*, q, \hat{\mu}) = \frac{2\hat{\mu}}{1 + \hat{\mu}} = \frac{2\dfrac{q^*}{2 - q^*}}{1 + \dfrac{q^*}{2 - q^*}} = q^* \Rightarrow$$

$$\text{при} \begin{cases} \hat{\mu} = \dfrac{q^*}{2 - q^*} \\ \hat{\lambda} = 1 - q^* \\ \dfrac{2q^*}{1 + q^*} < 1 - p^* \end{cases} \qquad (p^*, q^*) - \text{оптимальная пара}$$

Таким образом при имеющихся (p^*, q^*) сначала надо определить в какой из вариантов 1-3 пара попадает, затем по соответсвующим равенствам найти $\hat{\mu}$ и $\hat{\lambda}$.

Утверждение доказано.

4 Графическое изображение матожидания критерия

Вычислим матожидание от имеющегося векторного критерия для игрока П $F(X,Y)=\big(\frac{Y\sqrt{X}}{2};\frac{\sqrt{1-X}}{Y}\big)$, где X и Y - случайные величины, причём

$$\begin{cases} P(X=0)=1-q \\ P(X=1)=q \end{cases} \quad \begin{cases} P(Y=1)=1-p \\ P(Y=2)=p \end{cases}$$

В таком случае имеем:

$$\mathop{\mathbb{E}}_{x}[F(x,y)]=\big(\frac{yq}{2};\frac{1-q}{y}\big) \tag{9}$$

$$\mathop{\mathbb{E}}_{xy}[F(x,y)]=\big(\frac{q(1+p)}{2};\frac{(1-q)(2-p)}{2}\big) \tag{10}$$

Рассмотрим это как множество точек на плоскости X,Y зависящие от двух параметров $(p,q)\in[0,1]^2$

$$\begin{cases} y=\frac{q(1+p)}{2} \\ x=\frac{(1-q)(2-p)}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q=\frac{2x}{1+p} \\ y=(1-\frac{2x}{1+p})\frac{2-p}{2}=\frac{(1+p-2x)(2-p)}{2(1+p)} \end{cases}$$

Найдём максимальные значения, которые может принимать $y(x,p)$ при фиксированном x:

$$\frac{\partial y(x,p)}{\partial p}=\frac{3x}{(p+1)^2}-\frac{1}{2}=0\Rightarrow p_0=\sqrt{6x}-1$$

Поскольку область определения $p_0\in[0,1]$, и

$$p_0=1\Rightarrow x=\frac{2}{3} \text{ и } p_0=0\Rightarrow x=\frac{1}{6}$$

$$y_{max}(x)=\begin{cases} \max(y(x,0),y(x,1),y(x,p_0)), & x\in[\frac{1}{6},\frac{2}{3}] \\ \max(y(x,0),y(x,1)), & x\in[0,\frac{1}{6}]\cap[\frac{2}{3},1] \end{cases}$$

учитывая, что

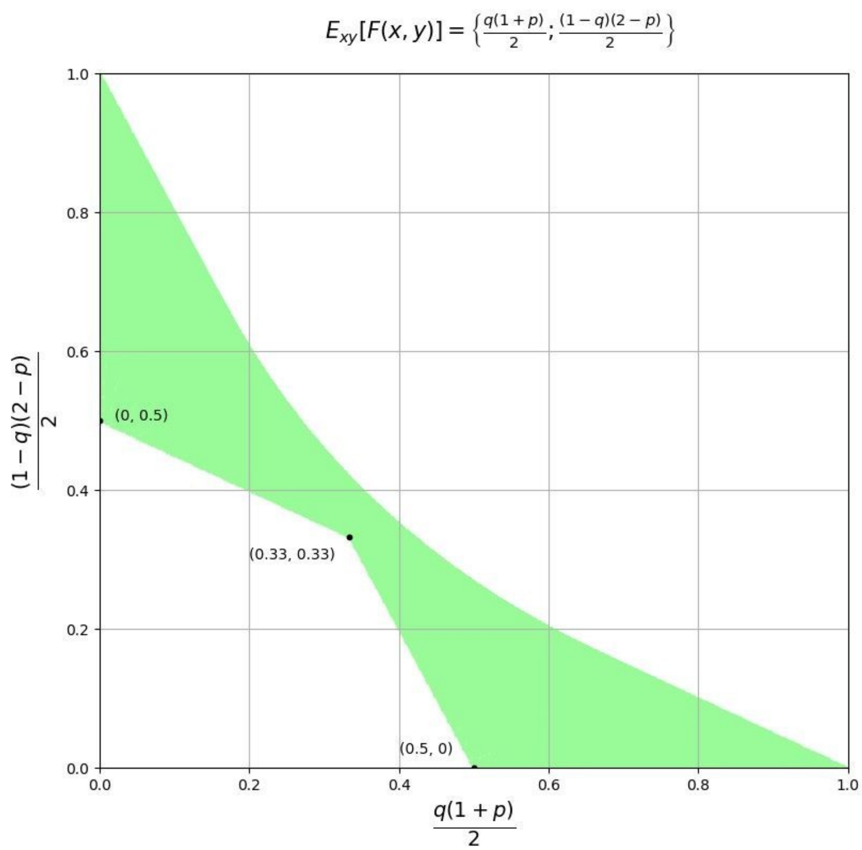
$$y(x,0)=1-2x$$

$$y(x,1)=\frac{1-x}{2}$$

$$y(x,p_0)=\frac{(\sqrt{6x}-2x)(3-\sqrt{6x})}{2\sqrt{6x}}$$

$$y_{min}(x)=\begin{cases}\frac{1-x}{2}, & x\in[0,\frac{1}{3}]\\ 1-2x, & x\in(\frac{1}{3},1]\end{cases}\quad y_{max}(x)=\begin{cases}1-2x, & x\in[0,\frac{1}{6}]\\ \frac{(\sqrt{6x}-2x)(3-\sqrt{6x})}{2\sqrt{6x}}, & x\in(\frac{1}{6},\frac{2}{3}]\\ \frac{1-x}{2}, & x\in(\frac{2}{3},1]\end{cases}$$

В предыдущем пункте мы установили что любая пара $(p^*,q^*)\in[0,1]^2$ является оптимальной. Теперь для всех оптимальных стратегий т.е. пар $(p^*,q^*)\in[0,1]^2$ изобразим на графике значения матожидания векторного критерия в этой точке.



Список литературы

[1] Shapley L.S. Equilibrium points in games with vector payoffs. 1959.

[2] Ю.Б. Гермейер. Введение в теорию исслежования операций.

[3] И.И. Поспелова Н.М. Новикова. Смешанные стратегии в векторной оптимизациий и свёртка Гермейера.

[4] Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. 1964.