

Свойства свёртки Гермейера в векторных играх

Кононов Сергей

4 мая 2019 г.

Содержание

1	Введение	3
2	Постановка задача	3
3	Оптимальные значения	3
3.1	Рассмотрим игру за преподавателя	3
3.2	Рассмотрим игру за студента	6

1 Введение

Определение [1]

Мы рассмотрим *линейную свёртку* (ЛС):

$$L(\{f_i\}, \lambda)(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i, \text{ где } \lambda \in \Lambda = \{\lambda_i \geq 0 \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}, \quad (1)$$

и *свёртку Гермейера*, или *обратную логическую свёртку* (ОЛС):

$$G(\{f_i\}, \lambda)(x) = \min_{\lambda_i > 0} \frac{f_i}{\lambda_i}, \text{ где } \lambda \in \Lambda = \{\lambda_i \geq 0 \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}. \quad (2)$$

2 Постановка задача

Функциональный критерий: $F(x, y) = (\frac{y\sqrt{x}}{2}, \frac{\sqrt{1-x}}{y})$

$$\begin{aligned} \text{С: } F(x, y) &\rightarrow \max_{x \in X} \\ X &= \{0; \frac{1}{2}; 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{П: } F(x, y) &\rightarrow \min_{y \in Y} \\ Y &= \{1, 2\} \end{aligned}$$

$$P(X = 0) = q_0$$

$$P(X = \frac{1}{2}) = q_1$$

$$P(X = 1) = q_2$$

$$\sum_{i=0}^2 q_i = 1$$

$$0 \leq q_i \leq 1, \quad i = \overline{0, 2}$$

$$P(Y = 1) = p_0$$

$$P(Y = 2) = p_1$$

$$\sum_{i=0}^1 p_i = 1$$

$$0 \leq p_i \leq 1, \quad i = \overline{0, 1}$$

Следовательно $q_1 = 1 - q_0 - q_2$ Пусть $p := p_1$, тогда $p_0 = 1 - p$

Введём множество

$$Q = \{(q_0, q_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq q_i \leq 1 \quad i \in \{0, 2\}; \quad q_0 + q_2 \leq 1\} \quad (3)$$

Студент выбирает X и использует **ОЛС**.

Преподаватель выбирает Y и использует **ЛС**.

3 Оптимальные значения

3.1 Рассмотрим игру за преподавателя

Игрок **П** стремится минимизировать функциональный критерий:

$$F(x, y) = (\frac{y\sqrt{x}}{2}, \frac{\sqrt{1-x}}{y})$$

Игрок **П** использует смешанную стратегию, т.е. его стратегией является распределение $p = (p_0, p_1)$ над множеством чистых стратегий $Y = \{1, 2\}$:

$$F_{\Pi}(p, x) = \left\langle (1-p)\frac{1 \cdot \sqrt{x}}{2} + p\frac{2 \cdot \sqrt{x}}{2}; (1-p)\frac{\sqrt{1-x}}{1} + p\frac{\sqrt{1-x}}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} \langle (p+1)\sqrt{x}; (2-p)\sqrt{1-x} \rangle$$

Затем использует **ЛС** (1):

$$L(p, x, \lambda) = \frac{1}{2} (\lambda(p+1)\sqrt{x} + (1-\lambda)(2-p)\sqrt{1-x})$$

Введём обозначение $q = (q_0, q_1, q_2)$. Далее осредняем функцию $L(p, x, \lambda)$ по стратегиям противника $x \in X = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ с вероятностями $q = (q_0, q_1, q_2)$:

$$\begin{aligned} \bar{L}(p, q, \lambda) &= \frac{1}{2} \left(q_0(1-\lambda)(2-p)\sqrt{1} + q_1 \left(\lambda(p+1)\frac{1}{\sqrt{2}} + (1-\lambda)(2-p)\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + q_2 \lambda(p+1)\sqrt{1} \right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((\lambda(q_1 + \sqrt{2}q_2) - (1-\lambda)(q_1 + \sqrt{2}q_0))p + (\lambda(q_1 + \sqrt{2}q_2) + 2(1-\lambda)(q_1 + \sqrt{2}q_0)) \right) \end{aligned}$$

Функция является линейной по переменной p :

$$\bar{L}(p, q, \lambda) = k(\lambda, q)p + b(\lambda, q)$$

где

$$\begin{aligned} k(q, \lambda) &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (\lambda(q_1 + \sqrt{2}q_2) - (1-\lambda)(q_1 + \sqrt{2}q_0)) \\ b(q, \lambda) &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (\lambda(q_1 + \sqrt{2}q_2) + 2(1-\lambda)(q_1 + \sqrt{2}q_0)) \end{aligned}$$

Наша задача найти $p^*(q, \lambda) = \arg \min_{p \in [0,1]} \bar{L}(p, q, \lambda)$. Поскольку функция $\bar{L}(p, q, \lambda)$ линейна по переменной p , следовательно:

$$p^*(q, \lambda) = \arg \min_{p \in [0,1]} \bar{L}(p, q, \lambda) = \begin{cases} 0, & k(\lambda, q) > 0 \\ 1, & k(\lambda, q) < 0 \\ [0, 1], & k(\lambda, q) = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $k(q, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2}} (\lambda(2 + (\sqrt{2} - 2)(q_0 - q_2)) - (1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0))$

Нас интересует знак этой функции при различных значениях аргументов. Введём обозначения:

$$\ell(q) = \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0}{2 + (\sqrt{2} - 2)(q_0 - q_2)}$$

Напомним, что множество Q имеет следующий вид:

$$Q = \{(q_0, q_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq q_i \leq 1 \ i \in \{0, 2\}; q_0 + q_2 \leq 1\}$$

Поскольку для $q \in Q$ верно:

$$2 + (\sqrt{2} - 2)(q_0 - q_2) > 0$$

$$1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0 \geq 0$$

$$q_0 + (\sqrt{2} - 3)q_2 - 1 \leq 0$$

Следовательно:

$$k(q, \lambda) \vee 0 \Leftrightarrow \lambda \vee \ell(q) \text{ где } \vee \text{ это один из знаков } >, <, = .$$

Более того верно что $\forall q \in Q$ $0 \leq \ell(q) \leq 1$. Проиллюстрируем это на графике. В плоскости $q = (q_0, q_2)$ изображены прямые $\ell_1(q)$ и $\ell_2(q)$ такие, что:

$$\ell_1(q) : \ell(q) = 0$$

$$\ell_2(q) : \ell(q) = 1$$

зелёным цветом изображена область в которой $0 \leq \ell(q) \leq 1$. Видно, что квадрат $q = [0, 1]^2$ а следовательно и множество Q полностью принадлежит этой области.

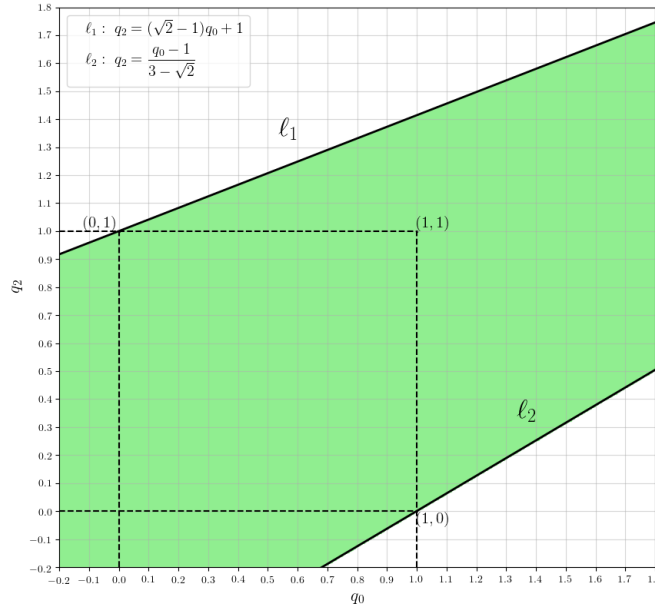


Рис. 1

Следовательно $\forall q = (q_0, q_2) \in Q \exists \lambda \in [0, 1] : k(\lambda, q) = 0$.

$$p^*(\lambda, q) = \arg \min_{p \in [0, 1]} \bar{L}(p, q, \lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \in (\ell(q), 1] \\ 1, & \lambda \in [0, \ell(q)) \\ [0, 1], & \lambda = \ell(q) \end{cases} \text{ , где } \ell(q) = \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0}{2 + (\sqrt{2} - 2)(q_0 - q_2)}$$

3.2 Рассмотрим игру за студента

Игрок С стремится максимизировать функциональный критерий:

$$F(x, y) = \left(\frac{y\sqrt{x}}{2}, \frac{\sqrt{1-x}}{y} \right)$$

Игрок С использует смешанную стратегию, т.е. его стратегией является распределение $q = (q_0, q_1, q_2)$ над множеством чистых стратегий $X = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$:

$$\begin{aligned} F_C &= \left\langle q_0 \frac{y\sqrt{0}}{2} + q_1 \frac{y}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} + q_2 \frac{y\sqrt{1}}{2}; q_0 \frac{\sqrt{1}}{y} + q_1 \frac{1}{y} \sqrt{\frac{1}{2}} + q_2 \frac{\sqrt{0}}{y} \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{y}{2} \cdot \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2} - 1)q_2}{\sqrt{2}}; \frac{1}{y} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0}{\sqrt{2}} \right\rangle \end{aligned}$$

Затем использует **ОЛС** (2). Сначала рассмотрим вырожденные случаи когда $\mu = 0$ и $\mu = 1$.

(1) Если $\mu = 0$:

$$G(y, q, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0}{y}$$

Далее осредняем функцию $G(y, q, \mu)$ по стратегиям противника $y \in Y = \{1, 2\}$ с вероятностями $(1 - p, p)$:

$$\begin{aligned} \bar{G}(p, q, 0) &= \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0}{1} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0}{2} = \\ &= \frac{(2-p)(1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0)}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Найдём частные производную по переменным q_0 и q_2 , при этом введём следующие обозначения для сокращения записи:

$$\frac{\partial \bar{G}(p, q, \mu)}{\partial q} = \left\langle \frac{\partial \bar{G}(p, q, \mu)}{\partial q_0}; \frac{\partial \bar{G}(p, q, \mu)}{\partial q_2} \right\rangle = \langle g_1(p, q, \mu), g_2(p, q, \mu) \rangle \quad (4)$$

$$\frac{\partial \bar{G}(p, q, 0)}{\partial q} = \frac{2-p}{2\sqrt{2}} \langle \sqrt{2} - 1; -1 \rangle$$

Поскольку $p \leq 1$, то $\frac{2-p}{2\sqrt{2}} > 0$. Мы рассматриваем задачу максимизации на множестве (3). Следовательно:

$$q^* = \arg \max_{q \in Q} \bar{G}(p, q, 0) = (1, 0).$$

(2) Если $\mu = 1$:

$$G(y, q, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0}{y}$$

Далее осредняем функцию $G(y, q, \mu)$ по стратегиям противника $y \in Y = \{1, 2\}$ с вероятностями $(1 - p, p)$:

$$\begin{aligned}\bar{G}(p, q, 1) &= \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{2} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{1} = \\ &= \frac{(p+1)(1-q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2)}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Найдём частные производную по переменным q_0 и q_2 :

$$\frac{\partial \bar{G}(p, q, 1)}{\partial q} = \frac{p+1}{2\sqrt{2}} \langle -1; \sqrt{2}-1 \rangle$$

Поскольку $p \geq 0$, то $\frac{p+1}{2\sqrt{2}} > 0$. Мы рассматриваем задачу максимизации на множестве (3). Следовательно:

$$q^* = \arg \max_{q \in Q} \bar{G}(p, q, 1) = (0, 1).$$

(3) Теперь $\mu \neq 0, 1$:

$$G(y, q, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2}} \min_{0 < \mu < 1} \left\langle \frac{y}{2} \cdot \frac{1-q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}; \frac{1}{y} \cdot \frac{1-q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu} \right\rangle$$

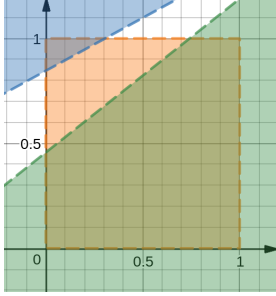
Далее осредняем функцию $G(y, q, \mu)$ по стратегиям противника $y \in Y = \{1, 2\}$ с вероятностями $(1 - p, p)$:

$$\begin{aligned}\bar{G}(p, q, \mu) &= \frac{1-p}{\sqrt{2}} \min_{0 < \mu < 1} \left\langle \frac{1-q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu}; \frac{1-q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu} \right\rangle + \\ &+ \frac{p}{\sqrt{2}} \min_{0 < \mu < 1} \left\langle \frac{1-q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}; \frac{1-q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)} \right\rangle \quad (5)\end{aligned}$$

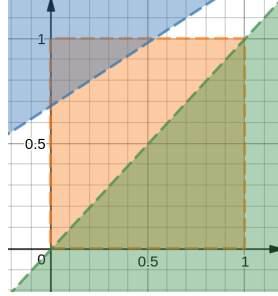
Введём вспомогательные обозначения:

$$\begin{aligned}\ell_1(q, \mu) &= \frac{1-q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu} \\ \ell_2(q, \mu) &= \frac{1-q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu} \\ \ell_3(q, \mu) &= \frac{1-q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{\mu} \\ \ell_4(q, \mu) &= \frac{1-q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)}\end{aligned}$$

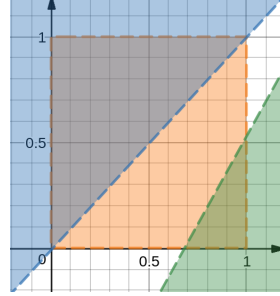
Для различных значений переменной μ рассмотрим взаимные расположения множеств $\ell_1 > \ell_2$ и $\ell_3 > \ell_4$ на плоскости (q_0, q_2) . Другими словами для фиксированного значения $\mu \in [0, 1]$ найдём области плоскости, в которых достигается минимум одного из выражений в (5):



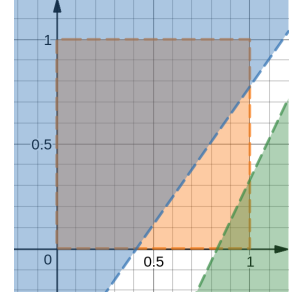
(a) $\mu = 0.8$



(b) $\mu = \frac{2}{3}$



(c) $\mu = \frac{1}{3}$



(d) $\mu = 0.1$

Поясним график. Синяя область - это множество $\ell_1 > \ell_2$.

Зелёная область на графике - это множество $\ell_3 < \ell_4$.

Область между ними - это множество $\{\ell_1 < \ell_2 \cap \ell_3 > \ell_4\}$. Исходя из графиков $\{\ell_1 > \ell_2 \cap \ell_3 < \ell_4\} = \emptyset$ при $(\mu, q) \in (0, 1) \times [0, 1]^2$. Поскольку граничные случаи для параметра μ были рассмотрены в первых двух пунктах, то квадрат $[0, 1]^2$ на плоскости (q_0, q_2) делится на 3 не пересекающихся множества.

Добавить доказательство того, что всего три возможных варианта

(1) Рассмотрим полуплоскость, которая определяется системой $\begin{cases} \ell_1 > \ell_2 \\ \ell_3 > \ell_4 \end{cases} \sim \ell_1 > \ell_2$

Выражение (5) на этом множестве принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{G}(p, q, \mu) &= \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)} = \\ &= \frac{2-p}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu} \end{aligned}$$

(2) Рассмотрим полуплоскость, которая определяется системой $\begin{cases} \ell_1 < \ell_2 \\ \ell_3 < \ell_4 \end{cases} \sim \ell_3 < \ell_4$

Выражение (5) на этом множестве принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{G}(p, q, \mu) &= \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{\mu} = \\ &= \frac{1+p}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{\mu} \end{aligned}$$

(3) Рассмотрим область, которая определяется системой $\begin{cases} \ell_1 < \ell_2 \\ \ell_3 > \ell_4 \end{cases}$

Выражение (5) на этом множестве принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}\bar{G}(p, q, \mu) &= \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)} = \\ &= \frac{(1-p)(1-\mu)(1-q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2) + p\mu(1-q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0)}{2\sqrt{2}\mu(1-\mu)}\end{aligned}$$

Итого:

$$\bar{G}(p, q, \mu) = \begin{cases} \frac{2-p}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu}, & \ell_1 \geq \ell_2 \\ \frac{1+p}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}, & \ell_3 \leq \ell_4 \\ \frac{(1-p)(1-\mu)(1-q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2) + p\mu(1-q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0)}{2\sqrt{2}\mu(1-\mu)}, & \begin{cases} \ell_1 \leq \ell_2 \\ \ell_3 \geq \ell_4 \end{cases} \end{cases}$$

Тогда производная от функции имеет:

$$\frac{\partial \bar{G}(p, q, \mu)}{\partial q} = \begin{cases} \frac{2-p}{2\sqrt{2}(1-\mu)} \langle \sqrt{2}-1; -1 \rangle, & \ell_1 \geq \ell_2 \\ \frac{1+p}{2\sqrt{2}\mu} \langle -1; \sqrt{2}-1 \rangle, & \ell_3 \leq \ell_4 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}\mu(1-\mu)} \langle (\sqrt{2}-1)p\mu - (1-p)(1-\mu); (\sqrt{2}-1)(1-p)(1-\mu) - p\mu \rangle, & \begin{cases} \ell_1 \leq \ell_2 \\ \ell_3 \geq \ell_4 \end{cases} \end{cases}$$

(1) Рассмотрим $\ell_1 \geq \ell_2$. Производная в области имеет вид:

$$\frac{\partial \bar{G}(p, q, \mu)}{\partial q} = \frac{2-p}{2\sqrt{2}(1-\mu)} \langle \sqrt{2}-1; -1 \rangle$$

Введём вспомогательную функцию $\ell_B(q, \mu) := (\ell_1 - \ell_2) \cdot \mu(1-\mu)$, множество, на котором она принимает неотрицательные значения составляют интересующую нас область. Множитель $\mu(1-\mu)$ является строго положительным на $\mu \in (0, 1)$, поэтому не влияет на знак. Функция является линейной по переменным q_0 и q_2 :

$$\ell_B(q, \mu) = (1 + \mu(2\sqrt{2} - 3))q_0 + (1 - \sqrt{2} + \mu(\sqrt{2} - 3))q_2 + 3\mu - 1$$

Параметр μ изменяется в диапазоне $(0, 1)$, причём

$$\begin{aligned}\ell_B(q, \mu) &\xrightarrow{\mu \rightarrow 1} 1 - q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2 \\ \ell_B(q, \mu) &\xrightarrow{\mu \rightarrow 0} 1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0\end{aligned}$$

Предельные положения $\ell_B(q, \mu) = 0$ изображены на графике (3).

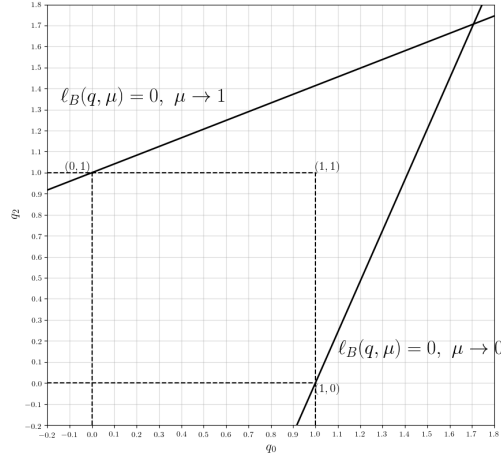


Рис. 3

Найдём значение μ при котором прямая $\ell_B(q, \mu)$ проходит через точку $q = (0, 0)$:

$$\ell_1(0, 0, \hat{\mu}) = \ell_2(0, 0, \hat{\mu}) : \frac{1}{2\hat{\mu}} = \frac{1}{1 - \hat{\mu}} \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{3}$$

Очевидно, что на полиэдре $P_B(\mu)$:

$$P_B(\mu) = \{q \in Q \mid \ell_B(q, \mu) \geq 0\}, \mu \in (0, 1)$$

функция $\bar{G}(p, q, \mu)$ достигает максимума в точке $B(\mu)$:

$$q^* = \arg \max_{q \in P_B(\mu)} \bar{G}(y, q, \mu) = B(\mu) = \begin{cases} (0, q_2) : \ell_B(0, q_2, \mu) = 0, & \frac{1}{3} \leq \mu < 1 \\ (q_0, 0) : \ell_B(q_0, 0, \mu) = 0, & 0 < \mu \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

Рассмотрим эти два случая и найдём явное выражение для точки $B(\mu)$:

а) Если $\mu \geq \frac{1}{3}$ то координата q_2 точки максимума определяется из условия:

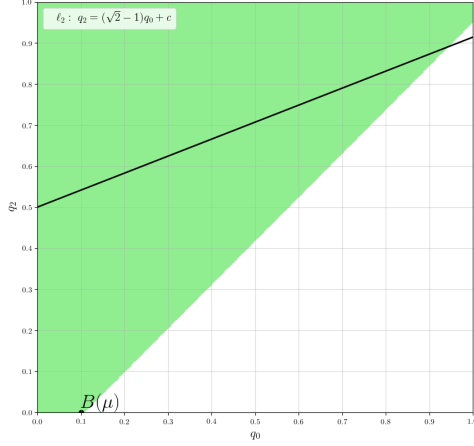
$$\ell_1(0, q_2, \mu) = \ell_2(0, q_2, \mu)$$

$$\frac{1 - q_2}{1 - \mu} = \frac{1 + (\sqrt{2} - 1)q_2}{2\mu} \Rightarrow q_2 = \frac{3\mu - 1}{\sqrt{2} - 1 + (3 - \sqrt{2})\mu}$$

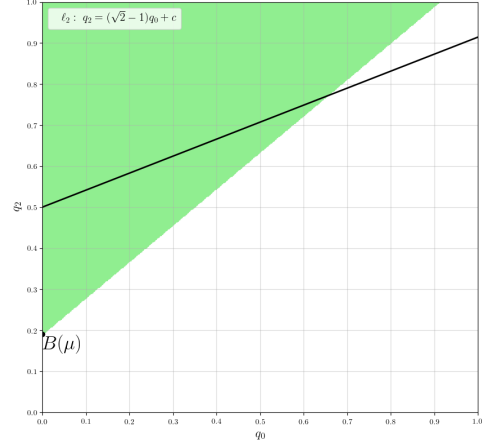
$$q^* = (0; \frac{3\mu - 1}{\sqrt{2} - 1 + (3 - \sqrt{2})\mu}), \mu \geq \frac{1}{3}$$

б) Если $\mu \leq \frac{1}{3}$ то координата q_0 точки максимума определяется из условия:

$$\ell_1(q_0, 0, \mu) = \ell_2(q_0, 0, \mu)$$



(a) $\mu = 0.1 < \frac{1}{3}$



(b) $\mu = 0.4 > \frac{1}{3}$

$$\frac{1 - q_0}{2\mu} = \frac{1 + (\sqrt{2} - 1)q_0}{1 - \mu} \Rightarrow q_0 = \frac{1 - 3\mu}{1 + (2\sqrt{2} - 3\mu)}$$

$$q^* = (0; \frac{3\mu - 1}{\sqrt{2} - 1 + (3 - \sqrt{2})\mu}), \quad \mu \geq \frac{1}{3}$$

Следовательно:

$$q^* = \arg \max_{q \in P_1(\mu)} \bar{G}(y, q, \mu) = \begin{cases} (0; \frac{3\mu - 1}{\sqrt{2} - 1 + (3 - \sqrt{2})\mu}), & \mu \geq \frac{1}{3} \\ (\frac{1 - 3\mu}{1 + (2\sqrt{2} - 3\mu)}; 0), & \mu \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

② Рассмотрим $\ell_3 \leq \ell_4$

$$\frac{\partial \bar{G}(p, q, \mu)}{\partial q} = \frac{1 + p}{2\sqrt{2}\mu} \langle -1; \sqrt{2} - 1 \rangle, \text{ если } \ell_3 \leq \ell_4$$

Введём вспомогательную функцию $\ell_A(q, \mu) := \ell_3 - \ell_4$. Множество положительных значений которой определяет интересующую область, причём функция ℓ является линейной по переменным q_0 и q_2 т.е.:

$$\ell_A(q, \mu) = -(2 + (\sqrt{2} - 3)\mu)q_0 - (2 - 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2} - 3)\mu)q_2 - 3\mu + 2$$

$$\ell_A(q, \mu) = A(\mu)q_0 + B(\mu)q_1 + C(\mu)$$

Параметр μ изменяется в диапазоне $(0, 1)$, причём

$$\ell_A(q, \mu) = 0 \xrightarrow{\mu \rightarrow 1} 1 - q_0 + (\sqrt{2} - 1)q_2 = 0$$

$$\ell_A(q, \mu) = 0 \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} 1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0 = 0$$

Предельные положения $\ell_1(q, \mu) = \ell_2(q, \mu)$ изображены на графике в предыдущем пункте. Найдём значение μ при котором прямая $\ell(q, \mu)$ проходит через точку $q = (0, 0)$:

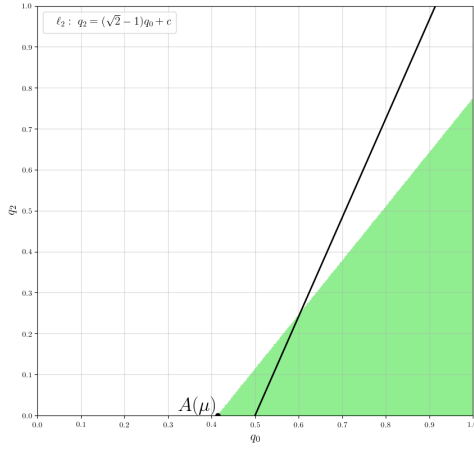
$$\ell_3(0, 0, \mu) = \ell_4(0, 0, \mu) : \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2(1 - \mu)} \Rightarrow \mu = \frac{2}{3}$$

Очевидно, что на полиэдре $P_2(\mu)$:

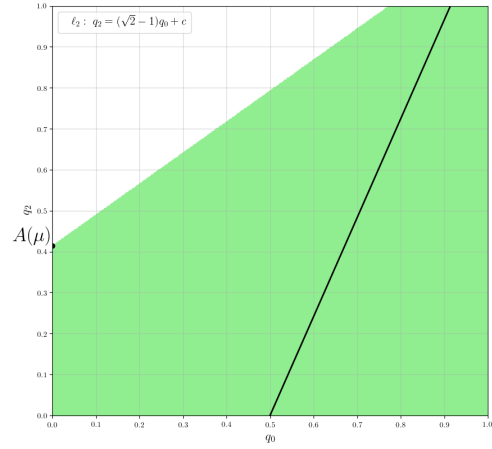
$$P_2(\mu) = \{q \in [0, 1]^2, \mu \in (0, 1) \mid \ell_3(q, \mu) \leq \ell_4(q, \mu)\}$$

ф-ия $\overline{G}(p, q, \mu)$ достигает максимума в точке $A(\mu)$:

$$q^* = \arg \max_{q \in P_2(\mu)} \overline{G}(p, q, \mu) = A(\mu) = \begin{cases} (0, q_2) : \ell_3(0, q_2, \mu) = \ell_4(0, q_2, \mu), & \mu \geq \frac{2}{3} \\ (q_0, 0) : \ell_3(q_0, 0, \mu) = \ell_4(q_0, 0, \mu), & \mu \leq \frac{2}{3} \end{cases}$$



(a) $\mu = 0.1 < \frac{2}{3}$



(b) $\mu = 0.8 > \frac{2}{3}$

Рассмотрим эти два случая и найдём явное выражение для точки $A(\mu)$:

а) Если $\mu \geq \frac{2}{3}$ то координата q_2 точки максимума определяется из условия:

$$\ell_3(0, q_2, \mu) = \ell_4(0, q_2, \mu)$$

$$\frac{1 - q_2}{2(1 - \mu)} = \frac{1 + (\sqrt{2} - 1)q_2}{\mu} \Rightarrow q_2 = \frac{3\mu - 2}{2(\sqrt{2} - 1) + (3 - 2\sqrt{2})\mu}$$

$$q^* = (0; \frac{3\mu - 2}{2(\sqrt{2} - 1) + (3 - 2\sqrt{2})\mu}), \mu \geq \frac{2}{3}$$

b) Если $\mu \leq \frac{2}{3}$ то координата q_0 точки максимума определяется из условия:

$$\ell_3(q_0, 0, \mu) = \ell_4(q_0, 0, \mu)$$

$$\frac{1 - q_0}{\mu} = \frac{1 + (\sqrt{2} - 1)q_0}{2(1 - \mu)} \Rightarrow q_0 = \frac{2 - 3\mu}{2 + (\sqrt{2} - 3)\mu}$$

$$q^* = (\frac{2 - 3\mu}{2 + (\sqrt{2} - 3)\mu}; 0), \mu \leq \frac{2}{3}$$

Следовательно:

$$q^* = \arg \max_{q \in P_2(\mu)} \bar{G}(p, q, \mu) = \begin{cases} (0; \frac{3\mu - 2}{2(\sqrt{2} - 1) + (3 - 2\sqrt{2})\mu}), & \mu \geq \frac{2}{3} \\ (\frac{2 - 3\mu}{2 + (\sqrt{2} - 3)\mu}; 0), & \mu \leq \frac{2}{3} \end{cases}$$

③ Рассмотрим область в которой $\begin{cases} \ell_1 \leq \ell_2 \\ \ell_3 \geq \ell_4 \end{cases}$

Частные переменные имеют следующий вид в данной области.

$$\frac{\partial \bar{G}(p, q, \mu)}{\partial q} = \frac{1}{2\sqrt{2}\mu(1 - \mu)} \langle (\sqrt{2} - 1)p\mu - (1 - p)(1 - \mu); (\sqrt{2} - 1)(1 - p)(1 - \mu) - p\mu \rangle$$

Заметим, что функция $\bar{G}(p, q, \mu)$ является линейной по переменным q_0 и q_2 т.е.:

$$\bar{G}(p, q, \mu) = g_0(p, \mu) q_0 + g_2(p, \mu) q_2 + c(p, \mu)$$

Рассматриваем функцию на полиэдре $P_{AB}(\mu)$:

$$P_{AB}(\mu) = \{q \in [0, 1]^2, \mu \in (0, 1) \mid \ell_3(q, \mu) \geq \ell_4(q, \mu) \cap \ell_1(q, \mu) \leq \ell_2(q, \mu)\}$$

Ограничение $\ell_3(q, \mu) = \ell_4(q, \mu)$ представимо в эквивалентном виде:

$$\ell_A(q, \mu) = -(2 + (\sqrt{2} - 3)\mu)q_0 - (2 - 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2} - 3)\mu)q_2 - 3\mu + 2 = 0$$

$$\ell_A : q_2 = k_A q_0 + c_A$$

А ограничение $\ell_1(q, \mu) = \ell_2(q, \mu)$ в виде:

$$\ell_B(q, \mu) = (1 + \mu(2\sqrt{2} - 3))q_0 + (1 - \sqrt{2} + \mu(\sqrt{2} - 3))q_2 + 3\mu - 1 = 0$$

$$\ell_B : q_2 = k_B q_0 + c_B$$

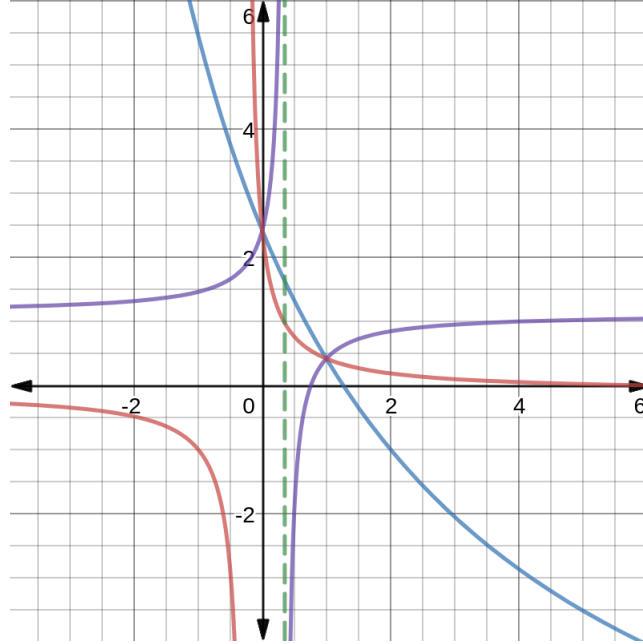


Рис. 6

Имеет место неравенство $k_A(\mu) > k_B(\mu)$ при $\mu \in (0, 1)$.

$$\begin{cases} k(\mu) < k_B(\mu) & \text{при } g_1(\mu, p) < 0 \\ k(\mu) > k_A(\mu) & \text{при } g_1(\mu, p) > 0 \end{cases}$$

Следовательно точки максимума функции $\overline{G}(p, q, \mu)$ по переменной q могут быть: $\{A\}$, $\{B\}$, $[B, A]$, $[0, A]$, $[0, B]$ и $(0, 0)$. Рассмотрим три подслучая:

(1) $0 \leq \mu \leq \frac{1}{3}$. Область P_{AB} находится под прямой $q_0 = q_2$

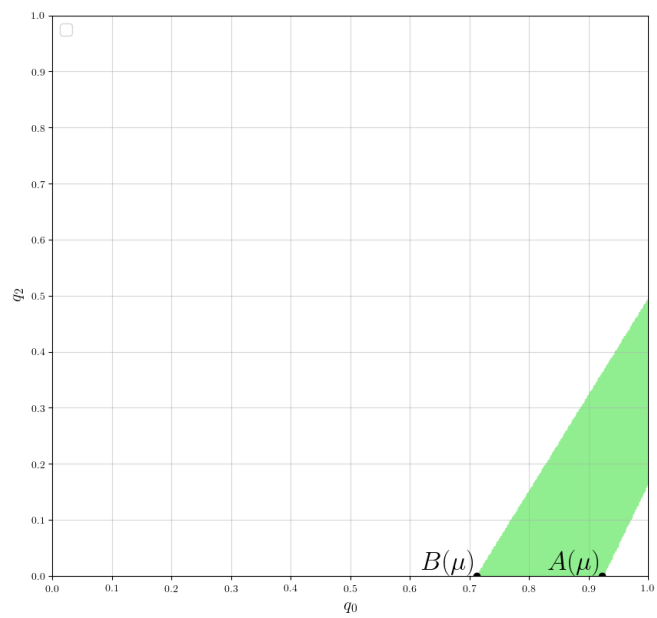


Рис. 7

$$\left[\begin{array}{l} g_1 > 0 \Rightarrow q^* = A \\ g_1 = 0 \Rightarrow q^* = [B, A] \\ g_1 < 0 \Rightarrow q^* = B \end{array} \right.$$

(2) $\mu \geq \frac{2}{3}$

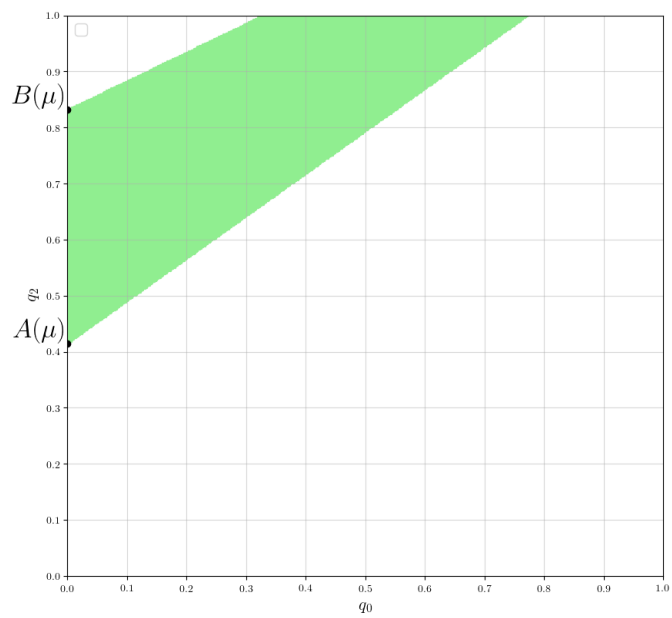


Рис. 8

$$\left[\begin{array}{l} g_2 > 0 \Rightarrow q^* = B \\ g_2 = 0 \Rightarrow q^* = [B, A] \\ g_2 < 0 \Rightarrow q^* = A \end{array} \right.$$

$$(3) \quad \frac{1}{3} \leq \mu \leq \frac{2}{3}$$

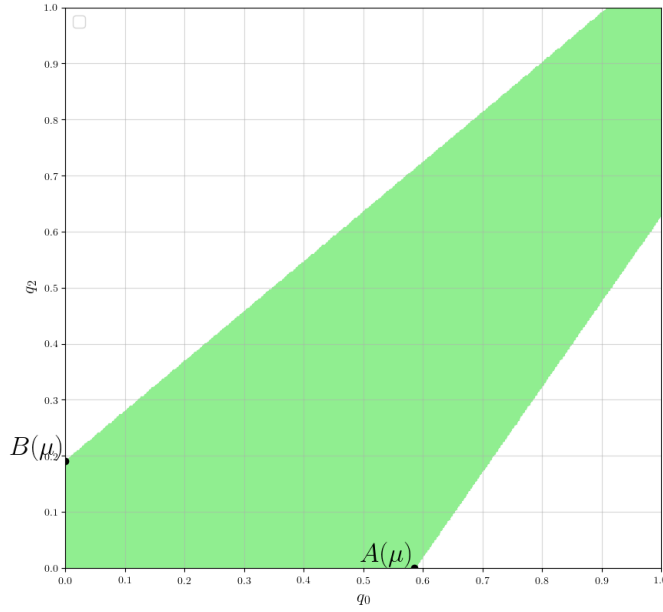


Рис. 9

$$\left[\begin{array}{l} g_1 > 0 \Rightarrow q^* = A \\ g_2 > 0 \Rightarrow q^* = B \\ g_1 = 0 \Rightarrow q^* = [0, A] \\ g_2 = 0 \Rightarrow q^* = [0, B] \\ \left\{ \begin{array}{l} g_2 < 0 \\ g_1 < 0 \end{array} \right. \Rightarrow q^* = (0, 0) \end{array} \right.$$

Итого получим следующие $q^* = \arg \max_q \bar{G}(p, q, \mu)$

Но кроме того точки A и B являются оптимальными $\forall p$ и μ поскольку являются таковыми в (1) и (2) со страницы 5 и 6 соответственно \Rightarrow необходимо проверить значения в точках $A; B(0, 0)$ на плоскости $q \in [0, 1]^2$ для функции $\bar{G}(p, q, \mu)$. Но поскольку функция $\bar{G}(p, q, \mu)$ непрерывна как композиция непрерывных функций, то можно обобщить на 3-ий случай все три.

Итого на графике выше обозначены все $q^* = \arg \max_q \bar{G}(p, q, \mu)$.

$$g_1 = p\mu - (1-p)(1-\mu) \quad g_1 = 0 \sim p = \frac{1-\mu}{(\sqrt{2}-2)\mu + 1}$$

$$g_2 = (1-p)(1-\mu)(\sqrt{2}-1) - p\mu \quad g_2 = 0 \sim p = \frac{(1-\mu)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-2)\mu + (\sqrt{2}-1)}$$

Поскольку на странице 3 мы установили, что $\forall \hat{q} \in [0, 1]^2 : \exists \hat{\lambda} \in [0, 1] k(\hat{\lambda}; \hat{q}) = 0$
 $\Rightarrow \arg \max_p \bar{L}(p, \hat{q}, \hat{\lambda}) = [0, 1] \Rightarrow$ множество оптимальных пар изображено на графике