Московский Государственный Университет имени

М.В.Ломоносова

Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

Кафедра Исследования Операций

Выпускная квалификаионная работа

Исследование модельной игры преподавателя и студента с применением свёртки Гермейера у студента

Автор:

группа 411

Кононов Сергей Владиславович

Научный руководитель:

к.ф.-м.н

Поспелова Ирина Игоревна

Москва, 2019

Аннотация

Исследование модельной игры преподавателя и студента
с применением свёртки Гермейера у студента

Кононов Сергей Владиславович

В данной работе проводится исследование в области применения разных сверток в игре с векторным выигрышем. Анализируются и сопоставляются решения игры при различной дискретизации непрерывной игры.

Содержание

1 Введение

Теорией игр называется математическая теория принятия решений в конфликтных ситуациях. В простейших моделях рассматривается *лицо принимающее решение* (ЛПР), которое выбирает своё действие из некторого множества стратегий. Считается, что задана целевая функция, которая отражает интресы ЛПР и зависит от выбранных им стратегий. Задача принятия решений состоит в том, чтобы найти стратегию, доставляющую максимум целевой функции. Отличие конфликтной ситуации заключается в том, что решения принимаются не одним лицом, а всеми участниками конфликтной ситуации и функция выигрыша кадого индивида зависит не только от его решения, но и от решения остальных участников. Модель такого вида называется – игрой, а учаастники конфликта – игроками. В рамках данной работы будет рассмотрена задача из теории *некооперативных игр* – игр, в которых игроки действуют самостоятельно, независимо друг от друга. Определим формально модель игры с несколькими участниками в общем виде.

Есть конечное *множество игроков* A, которые перенумерованы $1, 2, ..., m$. Каждый игрок $a \in A$ имеет *множество чистых стратегий* $S_a = \{1, 2, ..., n_a\}$, при этом *игровой ситуацией* или просто *ситуацией* называется m-мерный вектор:

$$\mathbf{s} = (s_1,\, s_2, \ldots,\, s_m) \in \bigotimes_{a \in A} S_a \tag{1}$$

Функция выигрыша обозначает выигрыша игрока при конкретной ситуации в игре. Она определена для каждого игрока из A и имеет вид:

$$F : S_1 \times S_2 \times ... \times S_m \to \mathbb{R} \tag{2}$$

Определение 1 *Игрой в нормальной форме называется совокупность:*

$$G = \left\langle A, S, F \right\rangle \tag{3}$$

где:

$A = \{1,\ 2, ...,\ m\}$ - *множество игроков,*

$S = \{S_1,\ S_2, ...,\ S_m\}$ - *множество наборов чистых стратегий игроков,*

$F = \{F_1,\ F_2, ...,\ F_m\}$ - *множество функций выигрыша игроков.*

Теперь введём фундаментальное понятие в теории игр - *равновесие по Нэшу*:

Определение 2 *Ситуация* $\boldsymbol{s} = (s_1^0,\ s_2^0, ...,\ s_m^0)$ *называется равновесием по Нэшу игры* $G = \left\langle A, S, F \right\rangle$, *если:*

$$\max_{s_a \in S_a} F_a(s_1^0, ..., s_{a-1}^0, s_a, s_{a+1}^0 ..., s_m^0) = F_a(s_1^0, ..., s_{a-1}^0, s_a^0, s_{a+1}^0 ..., s_m^0),\ a \in A \tag{4}$$

Смысл этого определения заключается в том, что при ситуации в игре, которая является равновесием по Нэшу, одному игроку индивидуально не выгодно отклоняться от своей стратегии.

До этого мы рассматривали функции выигрыша игроков, которые имели вид: (2), т.е. каждому игроку соответсвовало одно значение, зависящее ситуации игры. Однако не всегда интересы могут быть выражены одним критерием. Часто возникают разные оценки качества принимаемого решения, причем они могут быть противоречивыми и их нельзя свести друг у другу. Например характеристиками решени могут быть значения *(время, деньги)* или *(математическое ожидание, дисперсия)*. Следуя этим рассуждениям рассмотрим обобщение игры (3) такое, что функция выигрыша игроков имеет вид:

$$F : S_1 \times S_2 \times ... \times S_m \to \mathbb{R}^m,\ m \in \mathbb{N} \tag{5}$$

Такое обощение ближе к реальным ситуациям в которых рассматриваются несколько значимых параметров. Для примера такой игры можно привести задачу выбора машины: допустим покупателю важно чтобы машина имела большую мощность, достаточный уровень безопасности и мало стоила, продавцу же важно, чтобы она стоила как можно дороже и кроме того следует продавать машины из которые плохо покупают. Таким образом мы получили игру, в которой игроки имеют два и тра критерия соответсвенно, которые важны для них при выборе стратегии. Пока что мы допустили существование игры с такой функцие выигры, формализцию и подробное описание будет позже.

Приведённые выше обощения приводят нас к другому разделу математики, а именно – *многокритериальной оптимизации*. Рассмотрим следующую задачу которая относится к этой области.

$$\max_{x \in X} F(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)),\ X \subseteq \mathbb{R}^n \tag{6}$$

Это задача заключается в том, что у нас есть n-мерная функция, которая представляет собой множество значений критериев, зависящая от параметров, которые принадлежат некоторому множеству. Особенность заключается в том, что правило сравнения двух векторов не определено однозначно, т.е. в общей задаче не всегда можно точно сказать, какой из двух векторов значений функции предпочтительнее. Для внесения определённости в задачу, введём понятие *оптимальных по Парето* и *оптимальных по Слейтеру* векторов в задаче (6).

Определение 3 *Допустимое решение $\hat{x} \in X$ называется эффективным по Слейтеру (эффективным по Парето) для задачи*

$$\max_{x \in X} F(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)),\ X \subseteq \mathbb{R}^n$$

*если **не** существует $x \in X$ такого, что $f_k(x) > f_k(\hat{x})$ ($f_k(x) \geqslant f_k(\hat{x})$) для всех $k = \{1, ..., n\}$. Множетсво всех эффективных по Слейтеру (эффективных по Парето) решений задачи (6) называется множеством Слейтера (множеством Парето) задачи (6).*

Другими словами это такое множество значений, при котором значение каждого частного показателя, характеризующего систему, не может быть улучшено без ухудшения других.

Обычно в задача многокритериальной оптимизации требуется (???) найти множество Слейтера. Для этих целей существуют разные методы, в работе далее исследуется *метод свёрток*, изначально предложенный Л.С. Шепли [1].

Он заключается в том, что задача (6) заменяется параметрическим семейством скалярных задач

$$\max_{x \in X} C(\{f_i\}_{i=1}^n, \lambda, x),\ \lambda \in \Lambda$$

где:

C – функция свертки частных критериев $\{f_i\}_{i=1}^n$ задачи (6) в единый скалярный критерий,

λ – параметр свертки заданный на некоторой области определения Λ.

В текущей работе рассмотрены две различные свёртки – *линейная свёртка* и *обратная логическая свёртка*:

Определение 4 *Линейной свёрткой с параметром λ для функции критериев задачи* (6) *называется функция:*

$$L(\{f_i\}_{i=1}^n, \lambda, x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i, \tag{7}$$

где

$$\lambda \in \Lambda = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0\ i = 1, \dots n\}. \tag{8}$$

Определение 5 *свёрткой Гермейера с параметром μ для функции критериев задачи* (6) *называется функция:*

$$G(\{f_i\}, \mu, x) = \min_{i:\mu_i > 0} \mu_i f_i, \tag{9}$$

где

$$\mu \in M = \{(\mu_1, \dots, \mu_n) \mid \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1,\ \mu_i \geq 0\ i = 1, \dots n\}. \tag{10}$$

Применение линейной свертки в задачах вида (6) обосновывается теоремой Карлина:

Теорема 1 (Карлин [2]) *Рассмотрим задачу* (6)*. Пусть множество* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *выпукло, а функции* $f_1, \ldots, f_n$ *- вогнуты на нём. Если* x^* *– эффективная по Парето точка, тогда существует вектор* $\lambda \in \Lambda$ *из* (8) *такой, что* x^* *является точкой максимума функции* (7) *по переменной* x*.*

Гермейером была предложена свертка, которая также аппроксимирует множество Слейтера. Её применение в многокритериальных задачах обосновывается следующей теоремой:

Теорема 2 (Гермейер [3]) *Рассмотрим задачу* (6)*. Пусть* x^* *- эффективная по Слейтеру точка, причем* $f_i(x^*) > 0, \ldots, f_n(x^*) > 0$*. Тогда существует вектор* $\mu \in M$ *из* (12) *и* x^* *является точкой максимума функции* (9) *по переменной* x*.*

В работе будет использоваться модификация свёртки Гермейера - *обратная логическая свертка.* Она отличается только тем, что веса (параметры свёртки) стоят в знаменателе, а не в числителе.

Определение 6 *Обратной логической свёрткой с параметром* μ *для функции критериев задачи* (6) *называется функция:*

$$G(\{f_i\}, \mu, x) = \min_{i:\mu_i>0} \frac{f_i}{\mu_i}, \tag{11}$$

где

$$\mu \in M = \{(\mu_1, \ldots, \mu_n) \mid \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1,\ \mu_i \geq 0\ i = 1, \ldots n\}. \tag{12}$$

Теперь вернёмся к рассмотрению некооперативных игр. Если множество чистых стратегий у игроков конечно, то игра называется *конечная.* Для конечной игры можно определить обобщение модели, а именно - *смешанное расширение игры.* Смысл смешанного расширения игры заключается в том все игроки выбирают каждую из своих чистых стратегий с некоторой фиксированной то вероятностью, и его стратегией является не одна чистая стратегия, а вероятностное распределение над множеством его чистых стратегий. Выигрышем игрока в таком случае считаем взвешенный выигрыш по всем ситуациям с весами соответсвующими вероятностям данной ситуации. Определим эти понятия формально.

Пусть в игре $G = \langle A, S, F \rangle$. A – конечное множество игроков, которые перенумерованы $1, 2, ..., m$, причём множества стратегии $S_a = \{1, 2, ..., n_a\}$ $a \in A$ конечны. *Смешанной стратегией* игрока $a \in P$ называется вероятностоное распределение над множеством чистых стратегий S_a игрока $a \in A$:

$$\pi^a = (\pi_1^a, \pi_2^a, ..., \pi_{n_a}^a),$$

где π_i^a - это веротяность выбора игрком $a \in A$ чистой стратегии s_i^a в качестве реальной стратегии игрока. Распределение является элементом симлекса:

$$P^a = \{\pi^a = (\pi_1^a, \pi_2^a, ..., \pi_{n_a}^a) \mid \sum_{i=1}^{n_a} \pi_i^a = 1,\ \pi_i^a \in [0, 1]\ i = 1, 2, ..., n_a\}$$

которое называется *множество смешанных стратегий игрока.* Введём обозначение для заданного набора стратегий:

$$\pi = (\pi^1, \dots, \pi^m) \in P = \bigotimes_{a \in A} P^a,$$

и вероятности реализации ситуации $\mathbf{s}$ из (1):

$$p(s|\pi) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \prod_{a \in A} \pi_{s_a}^a$$

Тогда математическое ожидание выигрыша игрока $a \in A$ задаётся функцией:

$$\overline{F}_a(\pi) = \sum_{s \in S} p(s|\pi) F_a(s),$$

где функция F_a - определена в (3). Таким образом смешанное расширение игры в нормальной форме определяется следующим образом.

Определение 7 *Смешанным расширением игры в нормалной форме называется совокупность:*

$$\overline{G} = \{A, S, \overline{F}\} \tag{13}$$

где:

$A = \{1, 2, ..., m\}$ *– множество игроков,*

$P = \bigotimes_{a \in A} P^a$ *– множество наборов смешанных стратегий игроков,*

$\overline{F} = \{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_m\}$ *– множество функций выигрыша игроков.*

Ситуации равновесия (4) игры $\overline{G}$ будем называть ситуациями равновесия в смешанных стратегиях игры G или смешанными равновесиями по Нэшу.

Теперь в игре (13) будем считать, что функция выигрыша имеет вид (5). Обозначим через $S_a(\pi \backslash \pi^a)$, где $a \in A$ множество Слейтера задачи $\max\limits_{\pi \in P\,:\,\pi^a \in P^a} \overline{F}_a(\pi)$ где F_a имеет вид (5).

Определение 8 *Решением игры* (13) *согласно [4] является множество ситуаций*

$$P^* = \{\pi = (\pi^1, \ldots, \pi^m) \in P = \bigotimes_{a \in A} P^a \mid \pi^a \in S_a(\pi \backslash \pi^a),\ a \in A\} \tag{14}$$

В случае конечных многокриетриальных игр Шепли свел [1] описание данного множества к семейству задач поиска значений скалярных игр с функциями выигрышей – ЛС частных критериев при произвольном наборе весовых коэффициентов, своих у каждого игрока. В случае скалярной игры осреднение однозначно, а для скаляризованной вектор-функции могут быть разные варианты.

Целью данной выпускной квалификационной работы является исследование применения разных сверток в игре с векторным выигрышем.

2 Постановка задачи

Рассматриваются два игрока – Студент, далее обозначается **С**, и Преподаватель, далее обозначается **П**, которые имеют противоположные интересы. Критерий интересов составляют две велечины, первая из которых является эффективностью работы **С** в научной сфере, а второй его эффективностью на подработке.

С выбирает долю x рабочего времени, которую он тратит на подготовку диплома, оставшееся рабочее время $1-x$ он тратит на подработку. Считается, что производительность **С** при любых занятий падает с увеличением отводимого на них времени, эффективность труда **С** зададим функцией $\sqrt{x}$ и $\sqrt{1-x}$ соответственно. **С** может распределять свое время между двумя видами деятельности, т.е. имеет множетсво стратегий $x \in X = \{0, 1\}$, причём он может использовать смешанные стратегии.

П выбирает – отностится к **С** требовательно, способствую написанию диплома и мешая подработке или же не обращать на него внимания не мешая подработке и не помогая с дипломом. **П** имеет множество стратегий $y \in Y = \{1, 2\}$, причём тоже может использовать смешаные стратегии.

Получаем следующую вектор-функция выигрыша:

$$F(x,y) = \big(f_1(x,y), f_2(x,y)\big) = \Big(\frac{y\sqrt{x}}{2}, \frac{\sqrt{1-x}}{y}\Big) \tag{15}$$

П стремится минимизировать (выборая $y \in Y = \{1, 2\}$) вектор-функцию выигрыша $F(x, y)$, а игрок **С** - максимизировать (выбирая $x \in X = [0, 1]$).

Мы будем рассматривать конечную игру **С** — **П**, полученную из исходной дисеретизацией множества X конечным множеством точек:

$$X^T = \{0,\ \frac{1}{T},\ \frac{2}{T},\ \dots,\ \frac{T-1}{T},\ 1\},\ \ T \in \mathbb{N}$$

Теперь задачу можно представить в виде многокритериальной игры двух лиц с противоположными интересами:

$$G = \left\langle A, P, \mathbf{F} \right\rangle \tag{16}$$

где:

$A =\{$**С**, **П**$\}$ - множество игроков,

$P = \{X^T, Y\}$ - множество наборов чистых стратегий игроков,

$\mathbf{F} = \{F, -F\}$ - множество вектор-функций выигрыша игроков.

Игра записана в чистых старатегиях. Мы же допустим, что игроки будут использовать смешанные стратегии. В работе исследуются случаи дискретизации, когда $T = 1$ и тогда множество $X^1 = \{0, 1\}$, и когда $T = 2$, тогда множество чистых стратегий **С** примнимет вид $X^2 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. В каждом случае необходимо решить игру, т.е. найти равновесия Нэша в смешанных стратениях. Составим план, по которому будет проходить поиск решений (13).

(1) Игроки используют смешанные стратегии, поэтому стратегий **С** и **П** будет распределение вероятностей $p \in P$ и $q \in Q$ над множествами X^T и Y соответсвенно. Где P и Q – все допустимые распределения над этими множествами. Следовательно заменим вектор-функцию выигрыша каждого игрока на матожидание этой функции по распределению вероятностей его стартегии. Для **С** и **П** функции принимают вид $\mathbb{E}_x[F(x, y)]$ и $\mathbb{E}_y[-F(x, y)]$.

(2) Каждый игрок выбирает функцию свёртки, которая будет аппроксимировать его множество слейтера S_a. В данной работе исследуется случай, когда игрок **С** выбирет *обратную логическую свёртку*, а игрок **П** *линейную свёртку*. После чего игроки применяют свёртку к осреднённой вектор-функции выигрыша. Для **С** и **П** функции принимают вид $G(\mathbb{E}_x[F(x, y)], p, y)$ и $L(\mathbb{E}_y[-F(x, y)], x, q)$.

(3) Далее игроки получают скалярный критерий, который зависит от чистых стратегий противника. Поскольку игроки используют смешанные стратегии, то на 3 – ем этапе игроки осредняют скаляризованные критерии по стратегиям противника. Мы получили функции выигрыша игроков, которые зависят от их смешнных стратегий. Для **С** и **П** функции принимают вид

$$\overline{G}(p, q, \mu) = \mathbb{E}_y[G(\mathbb{E}_x[F(x, y)], p, y, \mu)]$$

и

$$\overline{L}(p, q, \lambda) = \mathbb{E}_x[L(\mathbb{E}_y[-F(x, y)], x, q, \lambda)].$$

(4) Теперь мы получили игру в смешанных стратегиях и нам необходимо решить игру т.е. найти все возможные равновесия Нэша (4) при фиксированных параметрах свёртки. Стратегии, которые являются решениями будем называть *оптимальными стратегиями*. В конкретном случае они определяются следующим образом:

Определение 9 *Пара стратегий* $(p^0, q^0) \in P \times Q$ *называется оптимальными, если для некоторых* λ, μ *верно:*

$$\begin{cases} p^0(q^0, \lambda) = \arg\min\limits_{p \in P} \overline{L}(p, q^0, \lambda) \\ q^0(p^0, \mu) = \arg\min\limits_{q \in Q} \overline{G}(p^0, q, \mu) \end{cases} \tag{17}$$

Использованы следующие обозначения:

$$\arg\max_{x \in X} f(x) = \{x^* \in X \mid f(x^*) = \max_{x \in X} f(x)\}$$
$$\arg\min_{x \in X} f(x) = \{x^* \in X \mid f(x^*) = \min_{x \in X} f(x)\}$$

Множесво всех оптимальных пар обозначим через $\mathbb{O}_T$, *где* T *– означает степень дискретизации для конкретной задачи.*

3 Постановка задачи (Парметр дискретизации T=1)

Сначала рассмотри случай с параметром $T = 1$. Тогда множество $X^1 = \{0, 1\}$. Игроки используют смешанные стратегии т.е. распределение над своими чистыми стратегиями. Чистыми стратегиями игроков **С** и **П** являются $X^1 = \{0, 1\}$ и $Y = \{1, 2\}$ соответсвенно. Эти множества дискретны и равномощны, поэтому распределения задаются в виде векторов:

$$(p_1, p_2) \in P_2 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid p_1 + p_2 = 1)\},$$

где $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geqslant 0 \;\; i = 1, \dots n\}$. Множество $Q_2 = P_2$, введено для наглядности. Смешанные стратеги игроков **С** и **П** будем обозначать $q = (q_0, q_1) \in Q_2$ и $p = (p_0, p_1) \in P_2$ соответсвенно, причём:

$$\begin{aligned} &P(X = 0) = q_0 && P(Y = 1) = p_0 \\ &P(X = 1) = q_1 && P(Y = 2) = p_1 \end{aligned} \tag{18}$$

Введём обозначения $q := q_1$ и $p := p_1$, тогда $q_0 = 1 - q$ и $p_0 = 1 - p$. Игрок **С** использует смешаную стратегию (q_0, q_1), тогда его векторный критерий (15) приобретает вид:

$$F_{\text{С}}(q, y) = \Big\langle q_0 \frac{y\sqrt{0}}{2} + q_1 \frac{y\sqrt{1}}{2}; q_0 \frac{\sqrt{1}}{y} + q_1 \frac{\sqrt{0}}{y} \Big\rangle = \Big\langle \frac{q_1 y}{2}; \frac{q_0}{y} \Big\rangle$$

Игрок **П** использует смешаную стратегию (p_0, p_1), тогда его векторный критерий (15) приобретает вид:

$$F_{\Pi}(x, p) = \Big\langle (1 - p) \frac{1 \cdot \sqrt{x}}{2} + p \frac{2 \cdot \sqrt{x}}{2};\; (1 - p) \frac{\sqrt{1 - x}}{1} + p \frac{\sqrt{1 - x}}{2} \Big\rangle = \\ = \frac{1}{2} \Big\langle (p + 1)\sqrt{x};\; (2 - p)\sqrt{1 - x} \Big\rangle$$

Далее игрок **С** использует *обратную логическую свёртку* (9):

$$G(y, q, \mu) = \min_{i : \mu_i > 0} \{ \frac{q_1 y}{2\mu_0}; \frac{q_0}{y\mu_1} \},$$

а игрок **П** использует *линейную свёртку* (7):

$$L(p,x,\lambda)=\lambda_0(p+1)\sqrt{x}+\lambda_1(2-p)\sqrt{1-x}.$$

После чего игрок **С** осредняет свёртку критерия по стратегиям игрока **П**, т.е. по переменной y:

$$\overline{G}(p,q,\mu)=p\min\{\frac{q}{\mu};\frac{1-q}{2(1-\mu)}\}+(1-p)\min\{\frac{q}{2\mu};\frac{1-q}{1-\mu}\},$$

а игрок **П** осредняет свёртку критерия по стратегиям игрока **С**, т.е. по переменной x:

$$\overline{L}(p,q,\lambda)=\frac{1}{2}\big\{q(3\lambda+p-2)+(2-p)(1-\lambda)\big\}.$$

Мы определили функции выигрыша игроков. Теперь задачу можно формализовать и представить как семейство игр двух игроков в нормальный форме:

$$\Big\langle\{\mathbf{C},\mathbf{\Pi}\},\{Q,\ P\},\{\overline{G}(p,q,\mu),-\overline{L}(p,q,\lambda)\}\Big\rangle,\ (\lambda,\mu)\in\Lambda\times M$$

Знак минус перед второй функцией выигрыша означает, что игрок стремится её минимизировать. Для нас представляет интерес множество оптимальных точек (17).

4 Решения игры (Параметр дискретизации T=1)

Для поиска оптимальных стратегий сначала необходимо найти точки максимума и минимума функций выигрыша **С** и **П** соответсвенно:

$$q^*(p,\mu) = \arg\max_{q\in Q} \overline{G}(p,q,\mu) \text{ и } p^*(q,\lambda) = \arg\min_{p\in P} \overline{L}(p,q,\lambda).$$

Из статьи [5] следует, что:

$$p^*(q,\lambda) = \arg\min_{p\in P} \overline{L}(p,q,\lambda) = \begin{cases} 0, & q > 1-\lambda \\ 1, & q < 1-\lambda \\ [0,1], & q = 1-\lambda \end{cases} \tag{19}$$

Из пункта **[ещё не написано]** следует, что

$$q^*(p,\mu) = \arg\max_{q\in Q} \overline{G}(p,q,\mu) = \begin{cases} \dfrac{\mu}{2-\mu}, & p \geqslant 1-\mu \\ \dfrac{2\mu}{1+\mu}, & p \leqslant 1-\mu \end{cases} \tag{20}$$

Докажем утверждение характерезующее множество оптимальных пар данной игры.

Утверждение 1 *Любая пара* $(p^*,q^*) \in [0,1]^2$ *является оптимальной, т.е.* $\forall\ (p^*,q^*) \in [0,1]^2\ \exists\ (\mu,\lambda) \in M \times \Lambda$ *такие, что верно* (17).

Доказательство

Зафиксируем некоторую пару $(p^*,q^*) \in [0,1]^2$ и найдём такие $\hat{\mu}(p^*,q^*) \in M$ и $\hat{\lambda}(p^*,q^*) \in \Lambda$ что верно (17) т.е. что пара стратегий является оптимальной.

(1) Определим $\hat{\lambda}(p^*,q^*)$ и покажем что $p^* \in \arg\min_{p\in P} \overline{L}(p,q^*,\hat{\lambda})$. Возьмём $\hat{\lambda} := 1-q^*$ тогда поскольку $\arg\min_{p\in P} \overline{L}(p,q^*,\hat{\lambda}) = [0,1]$ при $q^* = 1-\hat{\lambda}$, то $p^* \in \arg\min_{p\in P} \overline{L}(p,q^*,\hat{\lambda})$.

(2) Определим $\hat{\mu}(p^*, q^*)$ и покажем что $q^* \in \arg\max\limits_{q \in Q} \overline{G}(p^*, q, \hat{\mu})$. По имеющемуся q^* решим уравнения $\dfrac{\mu}{2-\mu} = q^*$ и $\dfrac{2\mu}{1+\mu} = q^*$, относительно переменной μ:

$$q^* = \frac{2\mu}{1+\mu} \Rightarrow \mu = \frac{q^*}{2-q^*} \qquad\qquad q^* = \frac{\mu}{2-\mu} \Rightarrow \mu = \frac{2q^*}{1+q^*}$$

Введём обозначения $\mu_1(q) = \dfrac{q}{2-q}$ и $\mu_2(q) = \dfrac{2q}{1+q}$. Заметим, что при $q^* \in [0,1]$ верно $0 \leqslant \mu_2(q^*) \leqslant \mu_1(q^*) \leqslant 1$. В таком случае поскольку $1 - p^* \in [0,1]$, то при фиксированных переменных (p^*, q^*) будет реализован один и только один из 3-х вариантов:

(a) $1 - p^* \leqslant \mu_2(q^*)$, т.е. $1 - p^* \leqslant \dfrac{q^*}{2-q^*}$. Возьмём $\hat{\mu} := \mu_1 = \dfrac{2q^*}{1+q^*}$.

Действительно, при таком выборе $\hat{\mu}$ имеем:

$$1 - p^* \leqslant \mu_2 \leqslant \mu_1 = \hat{\mu} \Rightarrow p^* \geqslant 1 - \hat{\mu} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \arg\max_{q \in Q} \overline{G}(p^*, q, \hat{\mu}) = \frac{\hat{\mu}}{2-\hat{\mu}} = \frac{\dfrac{2q^*}{1+q^*}}{2 - \dfrac{2q^*}{1+q^*}} = q^*$$

(b) $\mu_2(q^*) < 1 - p^* \leqslant \mu_1(q^*)$, т.е. $\dfrac{q^*}{2-q^*} < 1 - p^* \leqslant \dfrac{2q^*}{1+q^*}$. Возьмём $\hat{\mu} := \mu_1 = \dfrac{2q^*}{1+q^*}$. Действительно, при таком выборе $\hat{\mu}$ имеем:

$$1 - p^* \leq \mu_1 = \hat{\mu} \;\Rightarrow\; p^* \geqslant 1 - \hat{\mu} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \arg\max_{q \in Q} \overline{G}(p^*, q, \hat{\mu}) = \frac{\hat{\mu}}{2-\hat{\mu}} = \frac{\dfrac{2q^*}{1+q^*}}{2 - \dfrac{2q^*}{1+q^*}} = q^* \Rightarrow$$

(c) $\mu_1(q^*) < 1 - p^*$ т.е. $\dfrac{2q^*}{1+q^*} < 1 - p^*$. Возьмём $\hat{\mu} := \mu_2 = \dfrac{q^*}{2-q^*}$ Действительно, при таком выборе $\hat{\mu}$ имеем:

$$1 - p^* > \mu_1 \geqslant \mu_2 = \hat{\mu} \Rightarrow p^* \leqslant 1 - \hat{\mu} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \arg\max_{q \in Q} \overline{G}(p^*, q, \hat{\mu}) = \frac{2\hat{\mu}}{1+\hat{\mu}} = \frac{2\dfrac{q^*}{2-q^*}}{1+\dfrac{q^*}{2-q^*}} = q^*.$$

Теперь для любой точки $(p^*, q^*) \in [0,1]^2$ можем указать $(\hat{\mu}(p^*, q^*), \hat{\lambda}(p^*, q^*))$ такие, что верно (17), а именно:

$$(\hat{\mu}(p^*, q^*), \hat{\lambda}(p^*, q^*)) = \begin{cases} \left(\dfrac{q^*}{2-q^*},\ 1-q^*\right), & \dfrac{2q^*}{1+q^*} < 1-p^* \\ \left(\dfrac{2q^*}{1+q^*},\ 1-q^*\right), & 1-p^* \leqslant \dfrac{q^*}{2-q^*} \\ \left(\dfrac{2q^*}{1+q^*},\ 1-q^*\right), & \dfrac{q^*}{2-q^*} < 1-p^* \leqslant \dfrac{2q^*}{1+q^*} \end{cases}$$

Утверждение доказано.

Теперь для каждой пары параметров (μ, λ) найдём множество соответсвующих оптимальных пар $(p^0(\mu, \lambda), q^0(\mu, \lambda)) \in P \times Q$. Рассмотрим все возможные сочетания значений для p^* и q^* в системах (19) (20), что даст нам 6 следующих систем:

Учтём, что переменные p, q, μ и λ определены на отрезке $[0,1]$.

(1)

$$\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \\ q^* > 1-\lambda \\ p^* + \mu - 1 \geqslant 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \\ \dfrac{\mu}{2-\mu} > 1-\lambda \\ \mu \geqslant 1 \quad \Rightarrow \quad \mu = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = 1 \\ \lambda > 0 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

Значит при $\mu = 1$ и $\lambda \in (0, 1]$ имеем следующие оптимальные пары: $(p^0, q^0) \in (0, 1)$.

(2)

$$\begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \\ q^* > 1 - \lambda \\ p^* + \mu - 1 \leqslant 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \\ \dfrac{2\mu}{1+\mu} > 1 - \lambda \\ \mu \leqslant 1 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 0 \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \\ \lambda > \dfrac{1-\mu}{1+\mu} \\ \mu \leqslant 1 \end{cases}$$

Значит при $\mu \in [0, 1]$ и $\lambda \in (\frac{1-\mu}{1+\mu}, 1]$ имеем следующие оптимальные пары $(p^0, q^0) \in (0, \dfrac{2\mu}{1+\mu})$.

(3)

$$\begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \\ q^* < 1 - \lambda \\ p^* + \mu - 1 \geqslant 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \\ \dfrac{\mu}{2-\mu} < 1 - \lambda \\ \mu \geqslant 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \\ \lambda < 2\dfrac{1-\mu}{2-\mu} \\ \mu \geqslant 0 \end{cases}$$

Значит при $\mu \in [0, 1]$ и $\lambda \in [0, 2\frac{1-\mu}{2-\mu})$ имеем следующие оптимальные пары $(p^0, q^0) \in (1, \frac{\mu}{2-\mu})$.

(4)

$$\begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \\ q^* < 1-\lambda \\ p^* + \mu - 1 \leqslant 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \\ \dfrac{2\mu}{1+\mu} < 1-\lambda \\ \mu \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* = 1 \\ q^* = 0 \\ \lambda < 1 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

Значит при $\mu = 0$ и $\lambda \in [0,1)$ имеем следующие оптимальные пары $(p^0, q^0) \in (1,0)$.

(5)

$$\begin{cases} p^* \in [0,1] \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \\ q^* = 1-\lambda \\ p^* + \mu - 1 \geqslant 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* \in [0,1] \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \\ \dfrac{\mu}{2-\mu} = 1-\lambda \\ p^* \geqslant 1-\mu \end{cases} \sim \begin{cases} p^* \in [1-\mu,1] \\ q^* = \dfrac{\mu}{2-\mu} \\ \lambda = 2\dfrac{1-\mu}{2-\mu} \end{cases}$$

Значит при $\mu \in [0,1]$ и $\lambda = 2\dfrac{1-\mu}{2-\mu}$ имеем следующие оптимальные пары $(p^0, q^0) \in [1-\mu, 1] \times \{\frac{\mu}{2-\mu}\}$.

(6)

$$\begin{cases} p^* \in [0,1] \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \\ q^* = 1-\lambda \\ p^* + \mu - 1 \leqslant 0 \end{cases} \sim \begin{cases} p^* \in [0,1] \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \\ \dfrac{2\mu}{1+\mu} = 1-\lambda \\ p^* \leqslant 1-\mu \end{cases} \sim \begin{cases} p^* \in [0,1-\mu] \\ q^* = \dfrac{2\mu}{1+\mu} \\ \lambda = \dfrac{1-\mu}{1+\mu} \end{cases}$$

Значит при $\mu \in [0,1]$ и $\lambda = \dfrac{1-\mu}{1+\mu}$ имеем следующие оптимальные пары $(p^0, q^0) \in [0, 1-\mu] \times \{\frac{2\mu}{1+\mu}\}$.

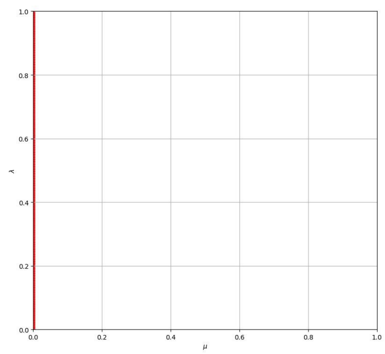
Итого получаем:

$$
\mathbb{O}_2 = \begin{cases}
(0,\ 1), & \mu = 1,\ \lambda \in (0, 1] \\
(0,\ \dfrac{2\mu}{1+\mu}), & \mu \in [0,1],\ \lambda \in (\frac{1-\mu}{1+\mu}, 1] \\
(1,\ \dfrac{\mu}{2-\mu}), & \mu \in [0,1],\ \lambda \in [0, 2\frac{1-\mu}{2-\mu}) \\
(1,\ 0), & \mu = 0,\ \lambda \in [0, 1) \\
[1-\mu, 1] \times \left\{\dfrac{\mu}{2-\mu}\right\}, & \mu \in [0,1],\ \lambda = 2\dfrac{1-\mu}{2-\mu} \\
[0, 1-\mu] \times \left\{\dfrac{2\mu}{1+\mu}\right\}, & \mu \in [0,1],\ \lambda = \dfrac{1-\mu}{1+\mu}
\end{cases}
$$

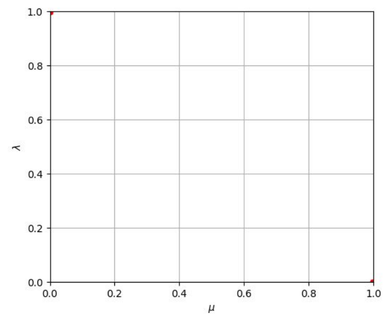
Некоторые условия оптимальных пар пересекаются, поэтому произведём агрегацию системы по условиям таким образом, чтобы множества (μ, λ) которые они задают имели между собой пустое пересечение.

$$
\mathbb{O}_2 = \begin{cases}
(1,\ 0), & \mu = 0, \lambda \in [0, 1) \\
[0,1] \times \{0\}, & \mu = 0, \lambda = 1 \\
[0,1] \times \{1\}, & \mu = 1, \lambda = 0 \\
\{1\} \times \{\dfrac{\mu}{2-\mu}\}, & \mu \in (0,1), \lambda \in (0, \dfrac{1-\mu}{1+\mu}] \\
\{1\} \times \{\frac{\mu}{2-\mu}\} \cup [0, 1-\mu] \times \{\frac{2\mu}{1+\mu}\} & \mu \in (0,1), \lambda = \dfrac{1-\mu}{1+\mu} \\
(0, \dfrac{2\mu}{1+\mu}) \cup (1, \dfrac{\mu}{2-\mu}) & \mu \in [(,1), \lambda \in [0, 2\dfrac{1-\mu}{2-\mu}] \cap (\dfrac{1-\mu}{1+\mu}, 1] \\
(0, \dfrac{2\mu}{1+\mu}) \cup [1-\mu, 1] \times \{\dfrac{\mu}{2-\mu}\} & \mu \in (0,1), \lambda = 2\dfrac{1-\mu}{2-\mu} \\
(0, \dfrac{2\mu}{1+\mu}) & \mu \in (0,1), \lambda \in (2\dfrac{1-\mu}{2-\mu}, 1] \\
(0, 1) & \mu = 1, \lambda \in (0, 1]
\end{cases}
$$

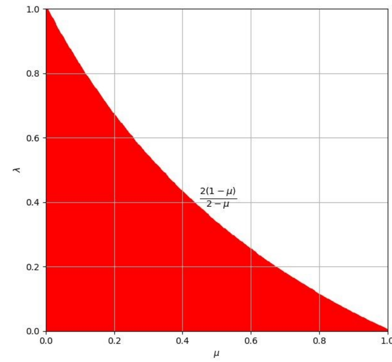
Каждое из множеств в условиях системы изображено на отдельном графике на рисунке снизу. Визульно видно, что были рассмотрены все точки множества $(\mu, \lambda) \in [0,1]^2$



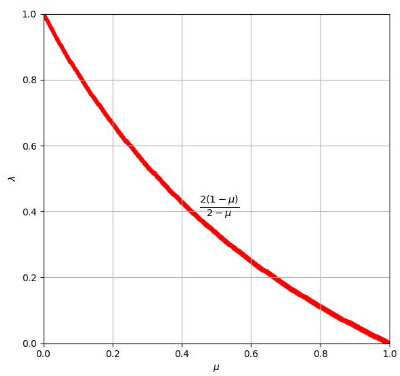
(a) $\mu = 0,\ \lambda \in [0, 1)$



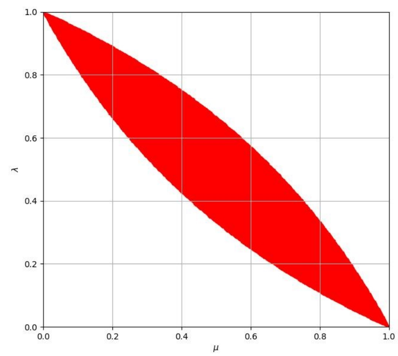
(b) $\left[\begin{array}{l} \mu = 0,\ \lambda = 1 \\ \mu = 1,\ \lambda = 0 \end{array}\right.$



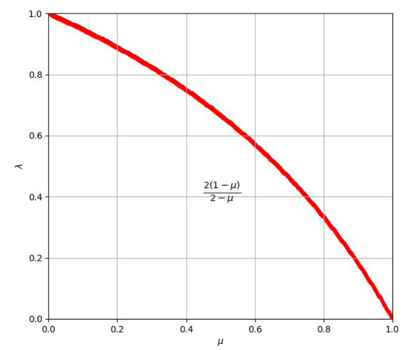
(c) $\mu \in (0, 1),\ \lambda \in (0, \frac{1-\mu}{1+\mu}]$



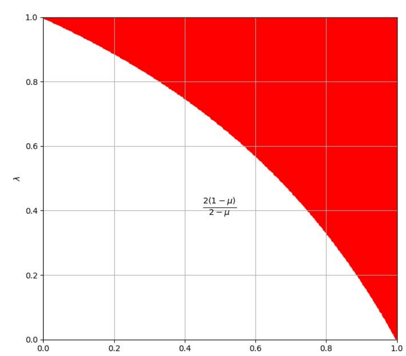
(d) $\mu \in (0, 1), \lambda = \dfrac{1-\mu}{1+\mu}$



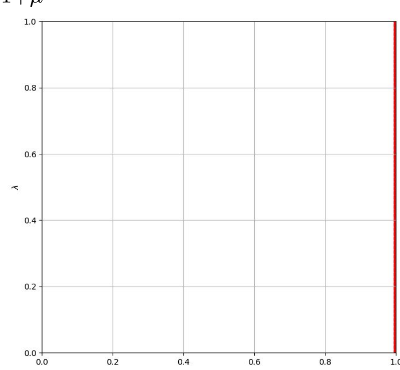
(e) $\mu \in [(, 1),$
$\lambda \in [0, 2\frac{1-\mu}{2-\mu}] \cap (\frac{1-\mu}{1+\mu}, 1]$



(f) $\mu \in (0, 1), \lambda = 2\dfrac{1-\mu}{2-\mu}$:



(g) $\mu \in (0, 1), \lambda \in (2\frac{1-\mu}{2-\mu}, 1]$



(h) $\mu = 1, \lambda \in (0, 1]$

Рис. 1

5 Постановка задачи (Парметр дискретизации T=2)

Теперь рассмотри случай с параметром дискретизации $T = 2$. Тогда множество X^T принимает вид $X^2 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Игроки используют смешанные стратегии т.е. вероятностноые распределения над своими чистыми стратегиями. Чистыми стратегиями игроков **С** и **П** являются $X^2 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ и $Y = \{1, 2\}$ соответсвенно. Эти множества дискретны, поэтому вероятностные распределения над ними задаются в виде векторов:

$$(q_1, q_2, q_3) \in Q_3 = \{(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3_+ \mid q_1 + q_2 + q_3 = 1)\},$$
$$(p_1, p_2) \in P_2 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid p_1 + p_2 = 1)\}$$

Смешанные стратеги игроков **С** и **П** будем обозначать $q = (q_0, q_1) \in Q_2$ и $p = (p_0, p_1, p_2) \in P_3$ соответсвенно, причём:

$$\begin{aligned} &P(X = 0) = q_0 && P(Y = 1) = p_0 \\ &P(X = \tfrac{1}{2}) = q_1 && P(Y = 2) = p_1 \\ &P(X = 1) = q_2 && \end{aligned} \tag{21}$$

Введём обозначения $p := p_1$, тогда $q_1 = 1 - q_0 - q_2$ и $p_0 = 1 - p$. Тогда $q = (q_0, q_2) \in Q$:

$$Q = \{(q_0, q_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid q_0 + q_2 \leqslant 1\}$$

И рассматривать игру мы будем на этом множестве.

Сначала определим функции выигрыша $\overline{G}(p, q, \mu)$ и $\overline{L}(p, q, \lambda)$, а замем найдём их найти точки максимума и минимума при фиксированных параметрах свёрток:

$$q^*(p, \mu) = \arg\max_{q \in Q} \overline{G}(p, q, \mu)$$
$$p^*(q, \lambda) = \arg\min_{p \in P} \overline{L}(p, q, \lambda).$$

Затем найдём множесво оптимальных стратегий (17).

6 Решение игры (Параметр дискретизации T=2)

6.1 Рассмотрим игру за преподавателя

Игрое **П** стремится минимизировать функциональный критерий:

$$F(x,y) = (\frac{y\sqrt{x}}{2}, \frac{\sqrt{1-x}}{y})$$

Он использует смешанную стратегию, т.е. его стратегией является распределение $p = (p_0, p_1)$ над множеством чистых стратегий $Y = \{1, 2\}$:

$$F_\Pi(p,x) = \Big\langle (1-p)\frac{1\cdot\sqrt{x}}{2} + p\frac{2\cdot\sqrt{x}}{2};\ (1-p)\frac{\sqrt{1-x}}{1} + p\frac{\sqrt{1-x}}{2}\Big\rangle = \\ = \frac{1}{2}\Big\langle (p+1)\sqrt{x};\ (2-p)\sqrt{1-x}\Big\rangle$$

Затем использует **ЛС** (7):

$$L(p,x,\lambda) = \frac{1}{2}\big(\lambda(p+1)\sqrt{x} + (1-\lambda)(2-p)\sqrt{1-x}\big)$$

Введём обозначение $q = (q_0, q_1, q_2)$. Далеем осредняем функцию $L(p,x,\lambda)$ по стратегиям противника $x \in X = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ с вероятностями $q = (q_0, q_1, q_2)$:

$$\overline{L}(p,q,\lambda) = \frac{1}{2}\Big(q_0(1-\lambda)(2-p)\sqrt{1} + q_1\big(\lambda(p+1)\frac{1}{\sqrt{2}} + \\ + (1-\lambda)(2-p)\frac{1}{\sqrt{2}}\big) + q_2\lambda(p+1)\sqrt{1}\Big) = \\ = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\big(\lambda(q_1+\sqrt{2}q_2)-(1-\lambda)(q_1+\sqrt{2}q_0)\big)p + \big(\lambda(q_1+\sqrt{2}q_2)+2(1-\lambda)(q_1+\sqrt{2}q_0)\big)\Big)$$

Функция является линейной по переменной p:

$$\overline{L}(p,q,\lambda) = k(\lambda,q)p + b(\lambda,q),$$

где

$$k(q,\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\big(\lambda(q_1+\sqrt{2}q_2) - (1-\lambda)(q_1+\sqrt{2}q_0)\big)$$

$$b(q,\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\big(\lambda(q_1+\sqrt{2}q_2) + 2(1-\lambda)(q_1+\sqrt{2}q_0)\big)$$

Наша задача – найти $p^*(q,\lambda) = \arg\min\limits_{p\in[0,1]} \overline{L}(p,q,\lambda)$. Поскольку функция $\overline{L}(p,q,\lambda)$ линейна по переменной p, следовательно:

$$p^*(q,\lambda) = \arg\min_{p\in[0,1]} \overline{L}(p,q,\lambda) = \begin{cases} 0, & k(\lambda,q) > 0 \\ 1, & k(\lambda,q) < 0 \\ [0,1], & k(\lambda,q) = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $k(q,\lambda)$:

$$k(q,\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\lambda\big(2+(\sqrt{2}-2)(q_0-q_2)\big) - \big(1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0\big)\Big)$$

Нас интересует знакт это функции при различных значениях аргументов. Введём обозначения:

$$\ell(q) = \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{2+(\sqrt{2}-2)(q_0-q_2)}$$

Напомним, что множестово Q имеет следующий вид:

$$Q = \{(q_0,q_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid q_0+q_2 \leqslant 1\}$$

Поскольку для $q \in Q$ верно:

$$2+(\sqrt{2}-2)(q_0-q_2) > 0$$
$$1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0 \geqslant 0$$
$$q_0+(\sqrt{2}-3)q_2-1 \leqslant 0$$

Следовательно:

$$k(q,\lambda) \vee 0 \Leftrightarrow \lambda \vee \ell(q) \text{ где } \vee \text{ это один из знаков } >,<,= .$$

Более того верно что $\forall\ q \in Q: \ \ 0 \leqslant \ell(q) \leqslant 1$. Проиллюстрируем это на графике. В плоскости $q=(q_0,q_2)$ изображены прямые $\ell_1(q)$ и $\ell_2(q)$ такие, что:

$$\ell_1(q):\ \ell(q) = 0$$
$$\ell_2(q):\ \ell(q) = 1$$

Зелёным цветом изображена область в которой $0 \leqslant \ell(q) \leqslant 1$. Видно, что квадрат $q = [0,1]^2$ а следовательно и множетсво Q полностью принадлежит этой области.

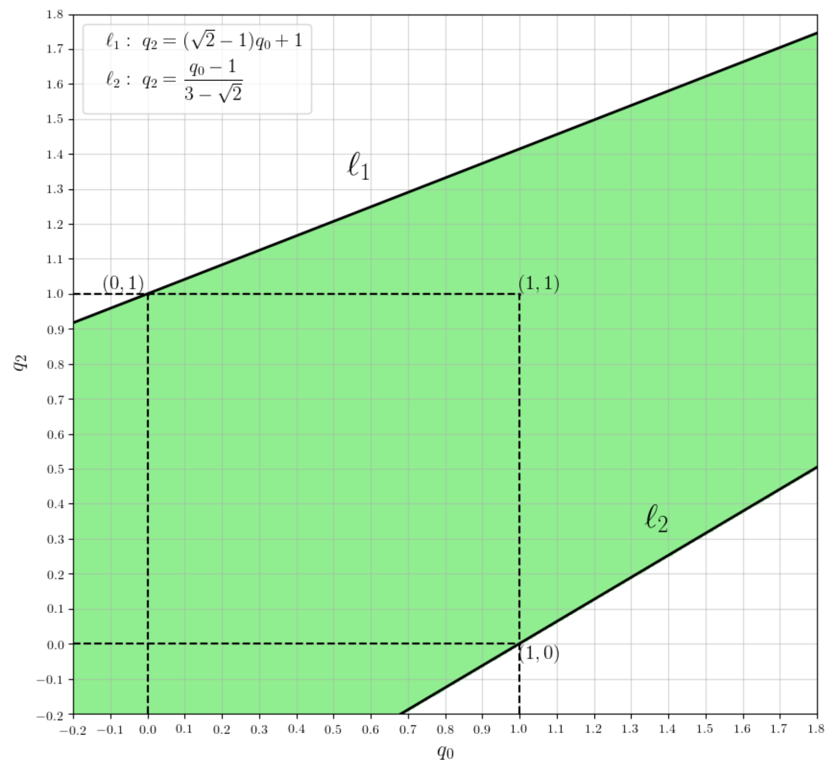


Рис. 2

Следовательно $\forall\ q = (q_0, q_2) \in Q \ \exists\ \lambda \in [0,1]: \ k(\lambda, q) = 0$.

$$p^*(\lambda, q) = \arg\min_{p\in[0,1]} \overline{L}(p,q,\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \in \big(\ell(q), 1\big] \\ 1, & \lambda \in \big[0, \ell(q)\big) \\ [0,1], & \lambda = \ell(q) \end{cases}, \tag{22}$$

где $\ell(q) = \dfrac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{2 + (\sqrt{2}-2)(q_0 - q_2)}$

6.2 Рассмотрим игру за студента

Игрок **C** стремится максимизировать вектор-функцию выигрыша:

$$F(x,y) = (\frac{y\sqrt{x}}{2}, \frac{\sqrt{1-x}}{y})$$

Игрок **C** использует смешанную стратегию, т.е. его стратегией является распределение $q = (q_0, q_1, q_2)$ над множеством чистых стратегий $X = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$:

$$F_{\text{C}} = \langle q_0 \frac{y\sqrt{0}}{2} + q_1 \frac{y}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} + q_2 \frac{y\sqrt{1}}{2}; q_0 \frac{\sqrt{1}}{y} + q_1 \frac{1}{y}\sqrt{\frac{1}{2}} + q_2 \frac{\sqrt{0}}{y} \rangle =$$
$$= \langle \frac{y}{2} \cdot \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{\sqrt{2}}; \frac{1}{y} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{\sqrt{2}} \rangle$$

Затем использует **ОЛС** (11). Сначала рассмотрим вырожденные случаи для свёртки - когда параметры равны $\mu = 0$ и $\mu = 1$.

(1) Если $\mu = 0$:

$$G(y, q, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{y}$$

Далеем осредняем функцию $G(y, q, 0)$ по стратегиям противника $y \in Y = \{1, 2\}$ с вероятностями $(1-p, p)$:

$$\overline{G}(p, q, 0) = \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{1} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{2} =$$
$$= \frac{(2-p)(1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0)}{2\sqrt{2}}$$

Найдём частные производную по переменным q_0 и q_2. Введём следующие обозначения для сокращения записи:

$$\frac{\partial \overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q} = \langle \frac{\partial \overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q_0}; \frac{\partial \overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q_2} \rangle = \langle g_1(p,q,\mu), g_2(p,q,\mu) \rangle \tag{23}$$

$$\frac{\partial \overline{G}(p,q,0)}{\partial q} = \frac{2-p}{2\sqrt{2}} \langle \sqrt{2} - 1; -1 \rangle$$

Поскольку $p \leqslant 1$, то $\dfrac{2-p}{2\sqrt{2}} > 0$. Мы рассматриваем задачу максимизации на множестве Q, следовательно:

$$q^* = \arg\max_{q \in Q} \overline{G}(p, q, 0) = (1, 0).$$

(2) Если $\mu = 1$:

$$G(y, q, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2} - 1)q_0}{y}$$

Далеем осредняем функцию $G(y, q, 1)$ по стратегиям противника $y \in Y = \{1, 2\}$ с вероятностями $(1 - p, p)$:

$$\overline{G}(p, q, 1) = \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{2} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{1} =$$
$$= \frac{(p+1)(1 - q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2)}{2\sqrt{2}}$$

Найдём частные производную по переменным q_0 и q_2:

$$\frac{\partial \overline{G}(p, q, 1)}{\partial q} = \frac{p+1}{2\sqrt{2}} \langle -1; \sqrt{2} - 1 \rangle$$

Поскольку $p \geqslant 0$, то $\dfrac{p+1}{2\sqrt{2}} > 0$. Мы рассматриваем задачу максимизации на множестве Q, следовательно:

$$q^* = \arg\max_{q \in Q} \overline{G}(p, q, 1) = (0, 1).$$

(3) Теперь $\mu \neq 0, 1$:

$$G(y, q, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2}} \min_{0<\mu<1} \Big\langle \frac{y}{2} \cdot \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}; \frac{1}{y} \cdot \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu} \Big\rangle$$

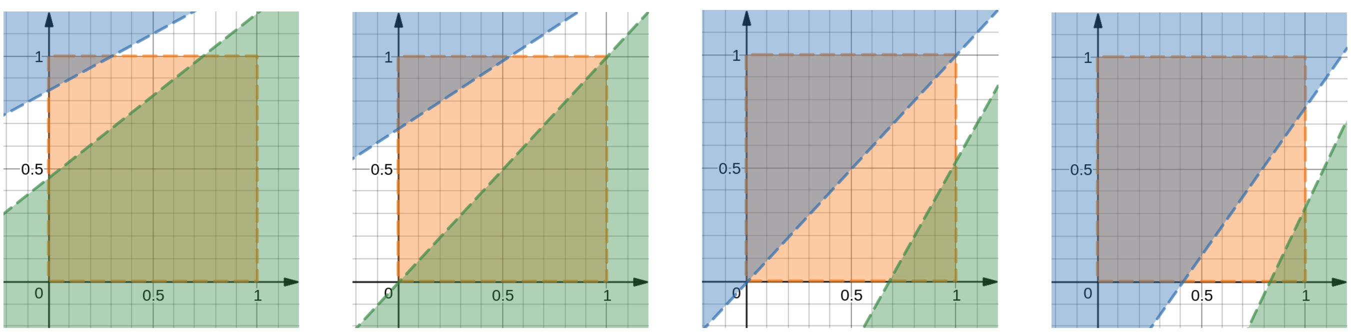
Далеем осредняем функцию $G(y, q, \mu)$ по стратегиям противника $y \in Y = \{1, 2\}$ с вероятностями $(1 - p, p)$:

$$\overline{G}(p, q, \mu) = \frac{1-p}{\sqrt{2}} \min_{0<\mu<1} \Big\langle \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu}; \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu} \Big\rangle +$$
$$+ \frac{p}{\sqrt{2}} \min_{0<\mu<1} \Big\langle \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}; \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)} \Big\rangle \quad (24)$$

Введём вспомогательные обозначения:

$$\ell_1(q,\mu) = \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu}$$
$$\ell_2(q,\mu) = \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu}$$
$$\ell_3(q,\mu) = \frac{1 - q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}$$
$$\ell_4(q,\mu) = \frac{1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)}$$

Для различных значений переменной μ рассмотрим взаимные расположения множеств $\ell_1 > \ell_2$ и $\ell_3 > \ell_4$ на плоскости (q_0, q_2). Другими словами для фиксированного значения $\mu \in [0,1]$ найдём области плоскости, в которых достигается минимум одного из выражений в (24)



(a) $\mu = 0.8$ (b) $\mu = \frac{2}{3}$ (c) $\mu = \frac{1}{3}$ (d) $\mu = 0.1$

Поясним график. Синяя область – это множество $\ell_1 > \ell_2$. Зелёная область на графике – это множнство $\ell_3 < \ell_4$. Область между ними – это множество $\{\ell_1 < \ell_2 \cap \ell_3 > \ell_4\}$. Исходя из графиков $\{\ell_1 > \ell_2 \cap \ell_3 < \ell_4\} = \emptyset$ при $(\mu, q) \in (0,1) \times [0,1]^2$. Поскольку граничные случаи для параметра μ были рассмотрены в первых двух пунктах, то квадрат $[0,1]^2$ на плоскости (q_0, q_2) делится на 3 связные, не пересекающихся множества.

Добавить доказательство того, что всего три возможных варианта

(1) Рассмотрим полуплоскость, которая определяется системой $\begin{cases} \ell_1 > \ell_2 \\ \ell_3 > \ell_4 \end{cases}$. Вторая строчка в системе является избыточной, т.к. следует из первой. Система эквивалентна неравенству $\ell_1 > \ell_2$. Выражение (24) на этом множестве принимает следующий вид:

$$\overline{G}(p,q,\mu) = \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)} = \\ = \frac{2-p}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu}$$

(2) Рассмотрим полуплоскость, которая определяется системой $\begin{cases} \ell_1 < \ell_2 \\ \ell_3 < \ell_4 \end{cases}$. Первая строчка в системе является избыточной, т.к. следует из второй. Система эквивалентна неравенству $\ell_3 < \ell_4$. Выражение (24) на этом множестве принимает следующий вид

$$\overline{G}(p,q,\mu) = \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{\mu} = \\ = \frac{1+p}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}$$

(3) Рассмотрим область, которая определяется системой $\begin{cases} \ell_1 < \ell_2 \\ \ell_3 > \ell_4 \end{cases}$. Выражение (24) на этом множестве принимает следующий вид:

$$\overline{G}(p,q,\mu) = \frac{1-p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{2\mu} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{2(1-\mu)} = \\ = \frac{(1-p)(1-\mu)(1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2) + p\mu(1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0)}{2\sqrt{2}\mu(1-\mu)}$$

Итого:

$$\overline{G}(p,q,\mu)=\begin{cases}\dfrac{2-p}{2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0}{1-\mu}, & \ell_1\geqslant\ell_2\\ \dfrac{1+p}{2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2}{\mu}, & \ell_3\leqslant\ell_4\\ \dfrac{(1-p)(1-\mu)(1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2)+p\mu(1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0)}{2\sqrt{2}\mu(1-\mu)}, & \text{иначе}\end{cases}$$

Тогда вектор производных по переменным (q_0,q_2) имеет вид:

$$\frac{\partial\overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q}=\begin{cases}\dfrac{2-p}{2\sqrt{2}(1-\mu)}\langle\sqrt{2}-1;-1\rangle, & \ell_1\geqslant\ell_2\\ \dfrac{1+p}{2\sqrt{2}\mu}\langle-1;\sqrt{2}-1\rangle, & \ell_3\leqslant\ell_4\\ \mathbf{g}(p,\mu), & \begin{cases}\ell_1\leqslant\ell_2\\ \ell_3\geqslant\ell_4\end{cases}\end{cases}$$

где:

$$\mathbf{g}(p,\mu)=\frac{1}{2\sqrt{2}\mu(1-\mu)}\Big\langle(\sqrt{2}-1)p\mu-(1-p)(1-\mu);(\sqrt{2}-1)(1-p)(1-\mu)-p\mu\Big\rangle$$

(1) Рассмотрим $\ell_1\geqslant\ell_2$. Тогда вектор производных по переменным (q_0,q_2) имеет вид:

$$\frac{\partial\overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q}=\frac{2-p}{2\sqrt{2}(1-\mu)}\langle\sqrt{2}-1;-1\rangle$$

Введём вспомогалетльную функцию $\ell_B(q,\mu):=(\ell_1-\ell_2)\cdot\mu(1-\mu)$, множество, на котором она принимает неотрицательные значения составляют интересующую нас область. Множитель $\mu(1-\mu)$ является строго положительным на $\mu\in(0,1)$, поэтому не влияет на знак. Функция является линейной по переменным q_0 и q_2:

$$\ell_B(q,\mu)=(1+\mu(2\sqrt{2}-3))q_0+(1-\sqrt{2}+\mu(\sqrt{2}-3))q_2+3\mu-1$$

Параметр μ изменяется в диапазоне $(0,1)$, причём:

$$\ell_B(q,\mu) \xrightarrow[\mu\to 1]{} 1 - q_0 + (\sqrt{2}-1)q_2$$
$$\ell_B(q,\mu) \xrightarrow[\mu\to 0]{} 1 - q_2 + (\sqrt{2}-1)q_0$$

Предельные положения $\ell_B(q,\mu) = 0$ изображены на графике 4.

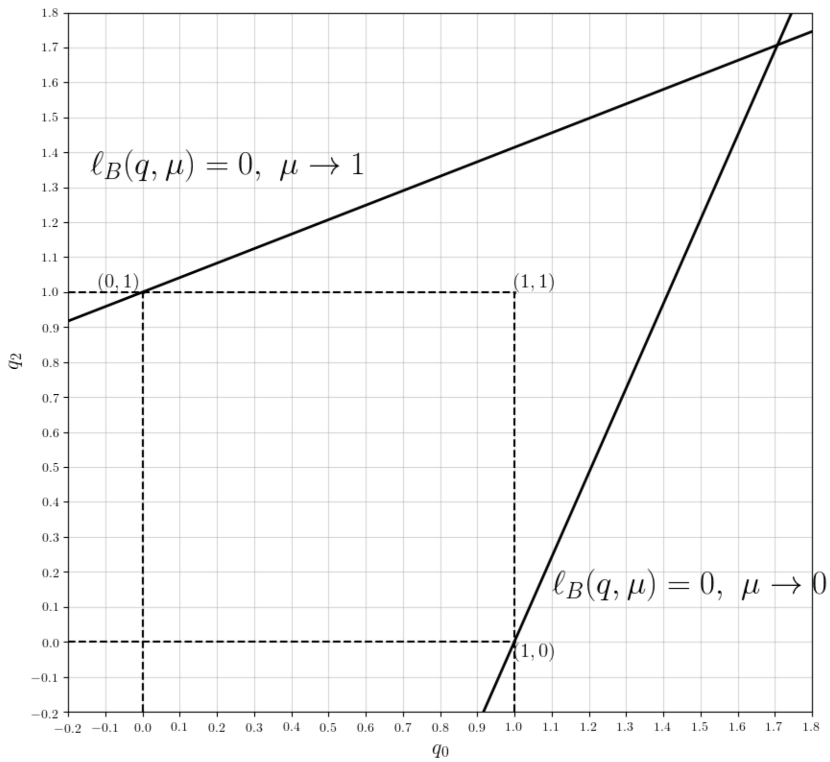


Рис. 4

Найдём значение μ, при котором прямая $\ell_B(q,\mu)$ проходит через точку $q = (0,0)$:

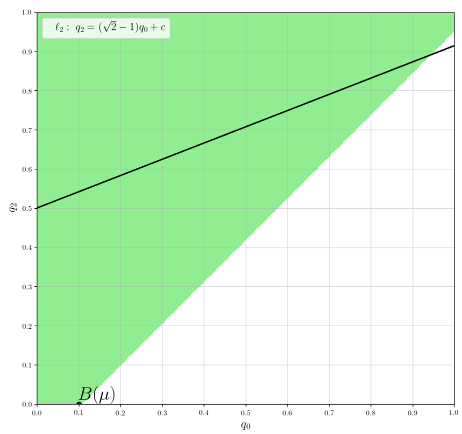
$$\ell_B(0,0,\hat{\mu}) = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{3}$$

Очевидно, что на полиэдре $P_B(\mu)$:

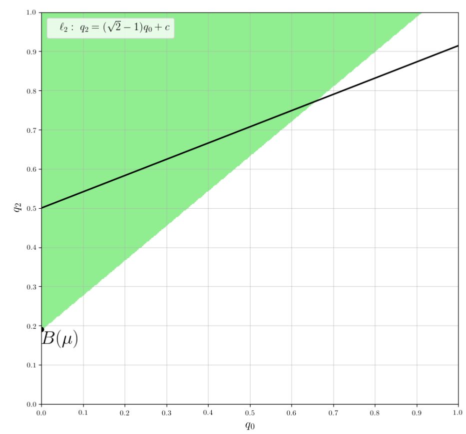
$$P_B(\mu) = \{q \in Q \mid \ell_B(q,\mu) \geqslant 0\},\ \mu \in (0,1),$$

функция $\overline{G}(p,q,\mu)$ достигает максимума в точке $B(\mu)$:

$$q^* = \arg\max_{q\in P_B(\mu)} \overline{G}(y,q,\mu) = B(\mu) = \begin{cases} (0,q_2) : \ell_B(0,q_2,\mu)=0, & \frac{1}{3}\leqslant \mu < 1 \\ (q_0,0) : \ell_B(q_0,0,\mu)=0, & 0<\mu\leqslant \frac{1}{3} \end{cases}$$



(a) $\mu = 0.1 < \frac{1}{3}$



(b) $\mu = 0.4 > \frac{1}{3}$

На графике зелёным цветом изображена область $P_B(\mu)$, чёрным цветом обозначены линии уровня и стрелкой соответсвенно градиент функции. Рассмотрим эти два случая и найдём явное выражение для точки $B(\mu)$:

(a) Если $\frac{1}{3}\leqslant\mu\leqslant 1$ то координата q_2 точки максимума определяется из условия:

$$\ell_B(0,q_2,\mu)=0$$

$$(1-\sqrt{2}+\mu(\sqrt{2}-3))q_2+3\mu-1=0 \quad\Rightarrow\quad q_2=\frac{3\mu-1}{\sqrt{2}-1+(3-\sqrt{2})\mu}$$

$$q^*=(0;\frac{3\mu-1}{\sqrt{2}-1+(3-\sqrt{2})\mu}),\quad \frac{1}{3}\leqslant\mu\leqslant 1$$

(b) Если $0\leqslant\mu\leqslant\frac{1}{3}$ то координата q_0 точки максимума определяется из условия:

$$\ell_B(q_0,0,\mu)=0$$
$$(1+\mu(2\sqrt{2}-3))q_0+3\mu-1=0 \quad\Rightarrow\quad q_0=\frac{1-3\mu}{1+(2\sqrt{2}-3\mu)}$$
$$q^*=(\frac{1-3\mu}{1+(2\sqrt{2}-3\mu)};0),\quad 0\leqslant\mu\leqslant\frac{1}{3}$$

Следовательно:

$$B(\mu)=\arg\max_{q\in P_B(\mu)}\overline{G}(y,q,\mu)=\begin{cases}(0;\dfrac{3\mu-1}{\sqrt{2}-1+(3-\sqrt{2})\mu}), & \frac{1}{3}\leqslant\mu\leqslant 1\\ (\dfrac{1-3\mu}{1+(2\sqrt{2}-3\mu)};0), & 0\leqslant\mu\leqslant\frac{1}{3}\end{cases} \tag{25}$$

(2) Рассмотрим $\ell_3\leqslant\ell_4$. Тогда вектор производных по переменным (q_0,q_2) имеет вид:

$$\frac{\partial\overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q}=\frac{1+p}{2\sqrt{2}\mu}\langle -1;\sqrt{2}-1\rangle$$

Введём вспомогалетльную функцию $\ell_A(q,\mu):=(\ell_3-\ell_4)\cdot\mu(1-\mu)$, множество, на котором она принимает неотрицательные значения составляют интересующую нас область. Множитель $\mu(1-\mu)$ является строго положительным на $\mu\in(0,1)$, поэтому не влияет на знак. Функция является линейной по переменным q_0 и q_2:

$$\ell_A(q,\mu)=-(2+(\sqrt{2}-3)\mu)q_0-(2-2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}-3)\mu)q_2-3\mu+2$$

Параметр μ изменяется в диапазоне $(0,1)$, причём

$$\ell_A(q,\mu)\xrightarrow[\mu\to 1]{}1-q_0+(\sqrt{2}-1)q_2$$
$$\ell_A(q,\mu)\xrightarrow[\mu\to 0]{}1-q_2+(\sqrt{2}-1)q_0$$

Предельные положения $\ell_B(q,\mu)=0$ изображены на графике (4). Найдём значение μ при котором прямая $\ell(q,\mu)$ проходит через точку $q=(0,0)$:

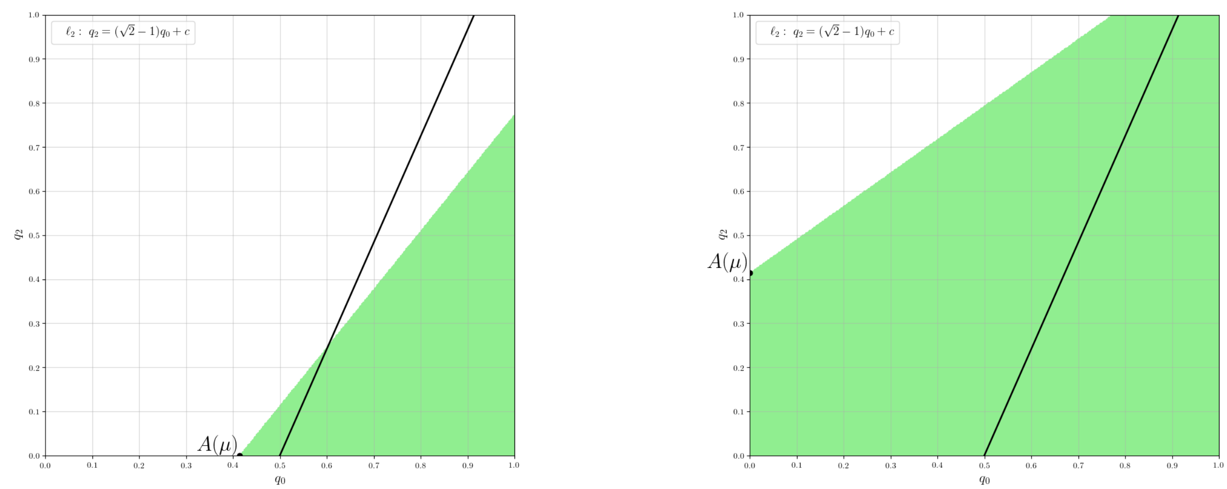
$$\ell_A(0,0,\hat{\mu})=0\Rightarrow\hat{\mu}=\frac{2}{3}$$

Очевидно, что на полиэдре $P_2(\mu)$:

$$P_A(\mu) = \{q \in Q \mid \ell_3(q,\mu) \leqslant \ell_4(q,\mu)\},\ \mu \in (0,1)$$

функция $\overline{G}(p,q,\mu)$ достигает максимума в точке $A(\mu)$:

$$A(\mu) = \arg\max_{q\in P_A(\mu)} \overline{G}(p,q,\mu) = \begin{cases} (0,q_2) : \ell_A(0,q_2,\mu) = 0, & \frac{2}{3} \leqslant \mu \leqslant 1 \\ (q_0,0) : \ell_A(q_0,0,\mu) = 0, & 0 \leqslant \mu \leqslant \frac{2}{3} \end{cases}$$



(a) $\mu = 0.1 < \frac{2}{3}$ (b) $\mu = 0.8 > \frac{2}{3}$

На графике зелёным цветом изображена область $P_A(\mu)$, чёрным цветом обозначены линии уровня и стрелкой соответсвенно градиент функции. Рассмотрим эти два случая и найдём явное выражение для точки $A(\mu)$:

(a) Если $\frac{2}{3} \leqslant \mu \leqslant 1$ то координата q_2 точки максимума определяется из условия:

$$\ell_A(0,q_2,\mu) = 0$$

$$-(2-2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}-3)\mu)q_2 - 3\mu + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_2 = \frac{3\mu-2}{2(\sqrt{2}-1)+(3-2\sqrt{2})\mu}$$

$$q^* = (0; \frac{3\mu-2}{2(\sqrt{2}-1)+(3-2\sqrt{2})\mu}), \quad \frac{2}{3} \leqslant \mu \leqslant 1$$

(b) Если $0 \leqslant \mu \leqslant \frac{2}{3}$ то координата q_0 точки максимума определяется из условия:

$$\ell_A(q_0, 0, \mu) = 0$$
$$-(2+(\sqrt{2}-3)\mu)q_0 - 3\mu + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_0 = \frac{2-3\mu}{2+(\sqrt{2}-3)\mu}$$
$$q^* = (\frac{2-3\mu}{2+(\sqrt{2}-3)\mu}; 0), \quad 0 \leqslant \mu \leqslant \frac{2}{3}$$

Следовательно:

$$A(\mu) = \arg\max_{q \in P_A(\mu)} \overline{G}(p,q,\mu) = \begin{cases} (0; \dfrac{3\mu-2}{2(\sqrt{2}-1)+(3-2\sqrt{2})\mu}), & \frac{2}{3} \leqslant \mu \leqslant 1 \\ (\dfrac{2-3\mu}{2+(\sqrt{2}-3)\mu}; 0), & 0 \leqslant \mu \leqslant \frac{2}{3} \end{cases} \tag{26}$$

(3) Рассмотрим область в которой $\begin{cases} \ell_1 \leqslant \ell_2 \\ \ell_3 \geqslant \ell_4 \end{cases}$

Вектор производных по переменным (q_0, q_2) в данной области имеет вид:

$$\frac{\partial \overline{G}(p,q,\mu)}{\partial q} = \frac{1}{2\sqrt{2}\mu(1-\mu)} \big\langle (\sqrt{2}-1)p\mu - (1-p)(1-\mu); (\sqrt{2}-1)(1-p)(1-\mu) - p\mu \big\rangle$$
$$g_1(p,\mu) = (\sqrt{2}-1)p\mu - (1-p)(1-\mu)$$
$$g_2(p,\mu) = (\sqrt{2}-1)(1-p)(1-\mu) - p\mu$$

Заметим, что функция $\overline{G}(p,q,\mu)$ является линейной по переменным q_0 и q_2:

$$\overline{G}(p,q,\mu) = g_0(p,\mu)\, q_0 + g_2(p,\mu)\, q_2 + c(p,\mu)$$

и

$$\overline{G}(p,q,\mu) = 0 \sim q_2 = k(p,\mu) \cdot q_0 + c(p,\mu)$$

Рассматриваем функцию на полиэдре $P_{AB}(\mu)$:

$$P_{AB}(\mu) = \{q \in Q \mid \ell_A(q,\mu) \geqslant 0 \cap \ell_B(q,\mu) \leqslant 0\}, \ \mu \in (0,1)$$

Ограничение $\ell_A(q,\mu) = 0$ и $\ell_B(q,\mu) = 0$ представимы в эквивалентном виде:

$$\ell_A(q,\mu) = 0 \sim \; q_2 = k_A(\mu) q_0 + c_A(\mu)$$
$$\ell_B(q,\mu) = 0 \sim \; q_2 = k_B(\mu) q_0 + c_B(\mu)$$

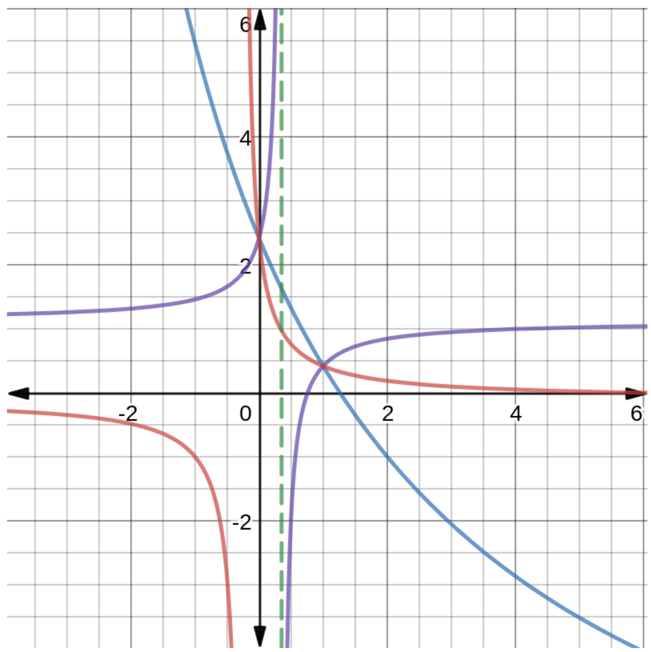


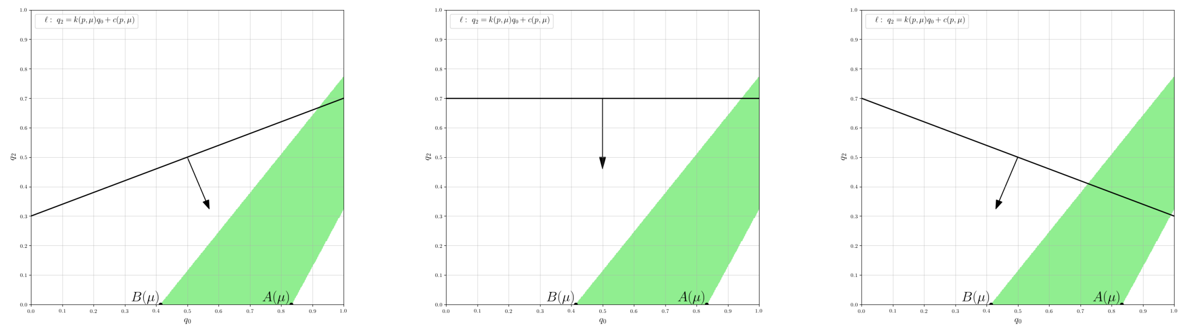
Рис. 7: Коэффициенты $k_A(\mu)$, $k_B(\mu)$ и $k(p,\mu)$ при фиксированном p

Рассмотрим график 7, на котором изображены значения коэффициетов при фиксированном значении $p \in [0,1]$. $k_B(\mu)$ изображены красной кривой, $k_A(\mu)$ синей и фиолетовой - кривая $k(p,\mu)$. Пунктирная вертикальная линия обозначает точку x в которой выражение $g_1 = 0$. Имеет место неравенство $k_A(\mu) > k_B(\mu)$ при $\mu \in (0,1)$.

$$\begin{cases} k(\mu) < k_B(\mu) \text{ при } g_1(\mu,p) < 0 \\ k(\mu) > k_A(\mu) \text{ при } g_1(\mu,p) > 0 \end{cases}$$

Следовательно точки максимума функции $\overline{G}(p,q,\mu)$ при фикисированных значениях μ и p могут быть точки: $\{A\}$, $\{B\}$, $(0,0)$ и отрезки $[B,A]$, $[0,A]$, $[0,B]$. Где точки $A(\mu)$ и $B(\mu)$ определны в (26) и (25). Рассмотрим три подслучая:

(a) $0 \leqslant \mu \leqslant \dfrac{1}{3}$.

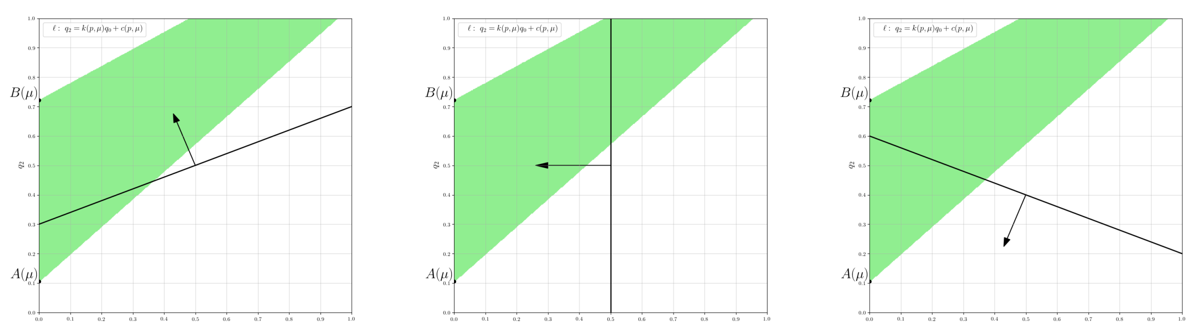


(a) $g_1 > 0 \Rightarrow q^* = A$ (b) $g_1 = 0 \Rightarrow q^* = [B, A]$ (c) $g_1 < 0 \Rightarrow q^* = B$

Рис. 8

$$\left[\begin{array}{c} g_1 > 0 \Rightarrow q^* = A \\ g_1 = 0 \Rightarrow q^* = [B, A] \\ g_1 < 0 \Rightarrow q^* = B \end{array}\right.$$

(b) $\dfrac{2}{3} \leqslant \mu \leqslant 1$

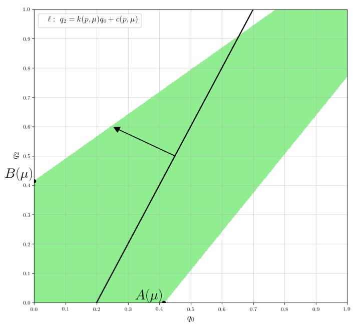


(a) $g_2 > 0 \Rightarrow q^* = B$ (b) $g_2 = 0 \Rightarrow q^* = [B, A]$ (c) $g_2 < 0 \Rightarrow q^* = A$

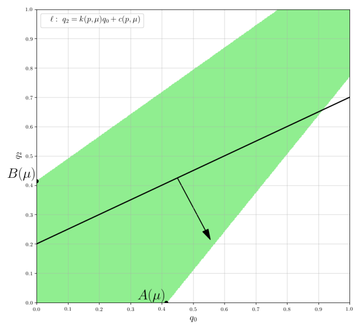
Рис. 9

$$
\left[\begin{array}{c}
g_2 > 0 \Rightarrow q^* = B \\
g_2 = 0 \Rightarrow q^* = [B, A] \\
g_2 < 0 \Rightarrow q^* = A
\end{array}\right.
$$

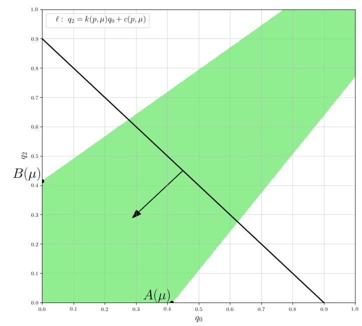
(c) $\frac{1}{3} \leqslant \mu \leqslant \frac{2}{3}$



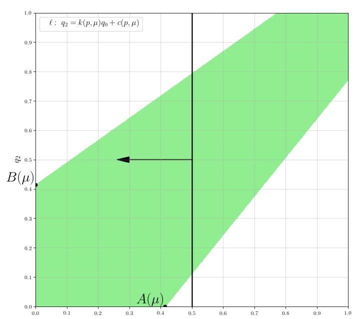
(a) $g_2 > 0 \Rightarrow q^* = B$



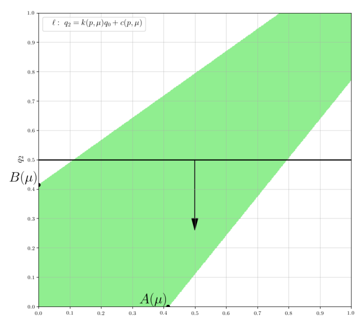
(b) $g_1 > 0 \Rightarrow q^* = A$



(c) $g_2, g_1 < 0 \Rightarrow q^* = (0, 0)$



(d) $g_2 = 0 \Rightarrow q^* = [0, B]$



(e) $g_1 = 0 \Rightarrow q^* = [0, A]$

$$
\left[\begin{array}{c}
g_1 > 0 \Rightarrow q^* = A \\
g_2 > 0 \Rightarrow q^* = B \\
g_1 = 0 \Rightarrow q^* = [0, A] \\
g_2 = 0 \Rightarrow q^* = [0, B] \\
\begin{cases} g_2 < 0 \\ g_1 < 0 \end{cases} \Rightarrow q^* = (0, 0)
\end{array}\right.
$$

Итого получим следующие

$$C(p,\mu) = \arg\max_{P_{AB}} \overline{G}(p,q,\mu) = \begin{cases} A(\mu), & g_2(p,\mu) < 0 \cup \mu \leqslant \frac{1}{3} \cap g_2 < 0 \\ B(\mu), & g_1(p,\mu) > 0 \cup \mu \geqslant \frac{2}{3} \cap g_1 > 0 \\ (0,0), & g_1(p,\mu) < 0 \cap g_2(p,\mu) < 0 \\ [A(\mu), B(\mu)], & g_1(\mu) = 0 \cap \mu < \frac{1}{3} \cup g_1(\mu) = 0 \cap \mu > \frac{2}{3} \\ [0, A(\mu)], & g_2(\mu) = 0 \cap \mu \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ [0, B(\mu)], & g_1(\mu) = 0 \cap \mu \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \end{cases}$$

Но кроме того точки $A(\mu)$ и $B(\mu)$ являются оптимальными $\forall\, p$ и μ поскольку являются таковыми в пунктах **(1)** и **(2)**. Итого в области P_B оптимальной является точка $B(\mu)$, в области P_A оптимальной является точка $A(\mu)$, и в области P_{AB} оптимальной является точка $C(p,\mu)$. Поскольку если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на множестве X, то и $\min(f(x), g(x))$ непрерывна на X, то максимум достигается в точке C.

$$q^*(p,\mu) = \arg\max_{Q} \overline{G}(p,q,\mu) = \begin{cases} A(\mu), & g_2(p,\mu) < 0 \cup \mu \leqslant \frac{1}{3} \cap g_2 < 0 \\ B(\mu), & g_1(p,\mu) > 0 \cup \mu \geqslant \frac{2}{3} \cap g_1 > 0 \\ (0,0), & g_1(p,\mu) < 0 \cap g_2(p,\mu) < 0 \\ [A(\mu), B(\mu)], & g_1(\mu) = 0 \cap \mu < \frac{1}{3} \cup g_1(\mu) = 0 \cap \mu > \frac{2}{3} \\ [0, A(\mu)], & g_2(\mu) = 0 \cap \mu \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ [0, B(\mu)], & g_1(\mu) = 0 \cap \mu \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ (0,1), & \mu = 0 \\ (1,0), & \mu = 1 \end{cases}$$

Поскольку в предыдущем пункте мы установили (22), что

$$p^*(q,\lambda(q)) = \arg\max_{p\in[0,1]} \overline{L}(p,q,\lambda(q)) = [0,1]$$

Нас интересуют оптимальные пары (p^0, q^0) такие, что $\exists(\lambda, \mu) \in [0,1]^2$:

$$\begin{cases} p^0 = p^*(q^0, \lambda) \\ q^0 = q^*(p^0, \mu) \end{cases}$$

Введём следующие множества:

$$P_0 = [0,1],\ Q_0 = [0,1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [0,1]$$

Следующие точки являются оптимальными:

$$(p,q) \in P_0 \times Q_0$$

7 Значение игры

В предыдущих пунктах были найдены оптимальные стратегии для модельной игры с двумя различными значениями параметра дискретизации: T=1 и T=2. Теперь опишем значения игры для оптимальных стратегий при различных параметрах T.

7.1 Значение игры для игрока Студент

Начнём рассмотрение со случая, когда параметр дискретизации T=1. На квадрате $(\mu, \lambda) \in [0,1]^2$ мы рассмотрели все точки и для каждой нашли оптимальные пары $\big(p^0(\mu,\lambda), q^0(\mu,\lambda)\big)$. Теперь для всех возможых пар из квадрата $(\mu, \lambda) \in [0,1]^2$ в соответсвующих оптимальных парах найдём значения скаляризованно функции выигрыша игрока **С**:

$$\overline{G}(p^0(\mu,\lambda), q^0(\mu,\lambda), \mu) = p\min\left\{\frac{q^0}{\mu}; \frac{1-q^0}{2(1-\mu)}\right\} + (1-p^0)\min\left\{\frac{q^0}{2\mu}; \frac{1-q^0}{1-\mu}\right\}$$

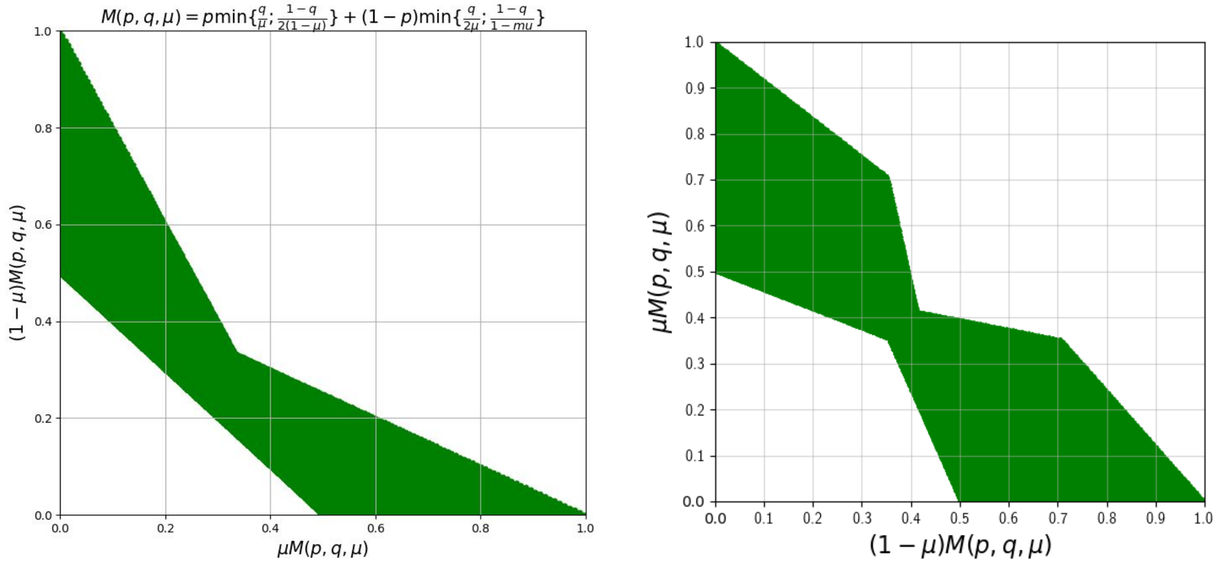
Получим следующую систему в зависимости от значений μ и λ:

$$\overline{G}(p^0(\mu,\lambda), q^0(\mu,\lambda), \mu) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \mu = \{0,1\},\ \lambda \in [0,1) \\ [\frac{1}{2}, 1], & \mu = 0,\ \lambda = 1 \cup \mu = 1,\ \lambda = 0 \\ \dfrac{1}{2-\mu}, & \mu \in (0,1),\ \lambda \in (0, 2\dfrac{1-\mu}{2-\mu}) \\ \dfrac{1}{1+\mu}, & \mu \in (0,1),\ \lambda \in (\dfrac{1-\mu}{1+\mu}, 1] \\ \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2-\mu}\right], & \mu \in (0,1), \lambda \in 2\dfrac{1-\mu}{2-\mu} \\ \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{1+\mu}\right], & \mu \in (0,1), \lambda = \dfrac{1-\mu}{1+\mu} \end{cases}$$

Для наглядности и дальнейшего анализа изобразим графически множество значений выигрыша в оптимальных точках. Для этого на квадрате $[0,1]^2$ изобразим все значения, которые принимает вектор

$$(\mu\overline{G}(p^0(\mu,\lambda), q^0(\mu,\lambda), \mu)), (1-\mu)\overline{G}(p^0(\mu,\lambda), q^0(\mu,\lambda), \mu))$$

при всех возможных $(\mu, \lambda) \in [0,1]^2$. Соответствующий график изображён на рисунке 11a.



(a) (b)

Рис. 11

Поясним график 11a:

нижняя огибающая в координатах X, Y: $y = \dfrac{1}{2} - x$,

верхняя огибающая в координатах X, Y: $y = \begin{cases} 1 - 2x, & x \in [0, \frac{1}{3}) \\ \dfrac{1-x}{2}, & x \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases}$

Исходя из аналогичных рассуждений получим график для случая T=2. Он изображён на рисунке 11b.

7.2 Значение игры для игрока Преподаватель

Вернёмся к рассмотрению случая T=1. Вычислим матожидание от имеющегося векторного критерия (15) , где x и y возьмём как случайные величины с распределениями (21) и соответсвующими обозначениями велечин p и q. В таком случае имеем:

$$\mathbb{E}_{xy}[F(x,y)] = \Big\langle \frac{q(1+p)}{2}; \frac{(1-q)(2-p)}{2} \Big\rangle$$

В утверждении 1 мы установили, что любая пара $(p^0, q^0) \in [0,1]^2$ является оптимальной. Рассмотрим это как множество точек на плоскости X, Y зависящие от двух параметров $(p,q) \in [0,1]^2$

$$\begin{cases} x = \dfrac{q(1+p)}{2} \\ y = \dfrac{(1-q)(2-p)}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \dfrac{2x}{1+p} \\ y = \dfrac{(1 - \dfrac{2x}{1+p})(2-p)}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \dfrac{2x}{1+p} \\ y = \dfrac{(1+p-2x)(2-p)}{2(1+p)} \end{cases}$$

Найдём максимальные значения, которые может принимать $y(x,p)$ при фиксированном x:

$$\frac{\partial y(x,p)}{\partial p} = \frac{3x}{(p+1)^2} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow p = \sqrt{6x} - 1$$

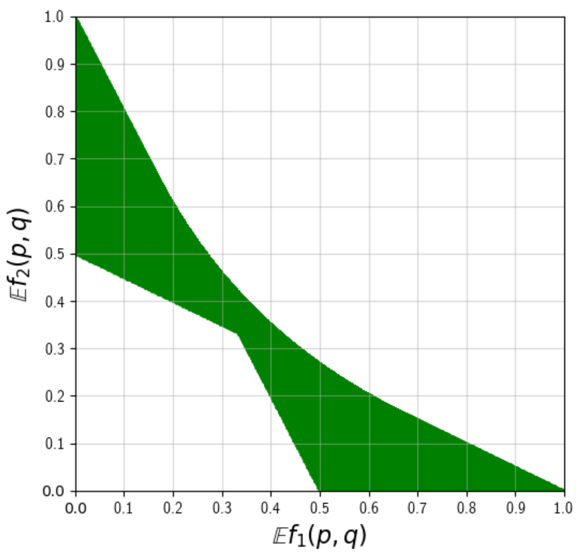
Введём обозначение $p_0 = \sqrt{6x} - 1$. Поскольку область определения $p_0 \in [0,1]$, то $p_0 = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ и $p_0 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{6}$

$$y_{max}(x) = \begin{cases} \max\{y(x,0),\ y(x,1),\ y(x,p_0)\}, & x \in \left[\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right] \\ \max\{y(x,0),\ y(x,1)\}, & x \in \left[0, \frac{1}{6}\right] \cap \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}$$

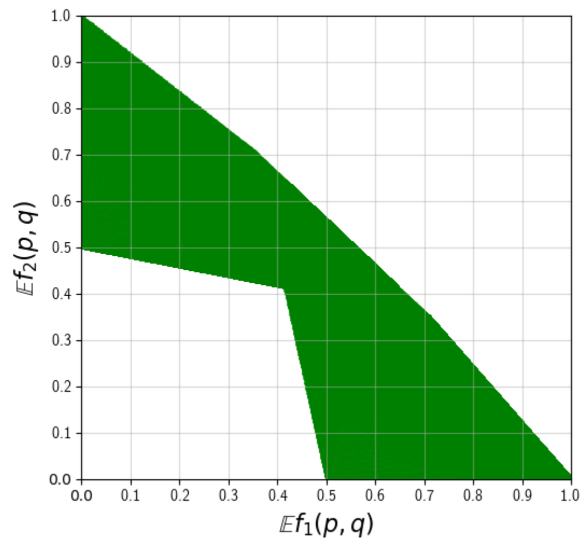
учитывая, что $y(x,0) = 1-2x,\ y(x,1) = \dfrac{1-x}{2},\ y(x,p_0) = \dfrac{(\sqrt{6x}-2x)(3-\sqrt{6x})}{2\sqrt{6x}}$ получим уравнения верхней и нижней огибающей области на графике ниже.

$$y_{min}(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{2}, & x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ 1-2x, & x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right] \end{cases} \qquad y_{max}(x) = \begin{cases} 1-2x, & x \in \left[0, \frac{1}{6}\right] \\ \frac{(\sqrt{6x}-2x)(3-\sqrt{6x})}{2\sqrt{6x}}, & x \in \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right] \\ \dfrac{1-x}{2}, & x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}$$

Теперь для всех оптимальных стратегий т.е. пар $(p^0, q^0) \in [0,1]^2$ изобразим на графике 12a значения матожидания векторного критерия в этой точке. Аналогичными рассауждениями для случая T=2 получаем область на рисунке 12b:



(a)



(b)

Рис. 12

8 Заключение

На примере двухкритериальной игры двух лиц была изучена возможность применения линейной свёртки и обратной логической свёртки (кторая является модификацией свёртки Гермейера). Рассмотрены два варианта дискретизации непрерывной модельной задачи и получены следующие результаты:

1. **Оптимальные стратегии**. В случае T=1 оптимальные стратегии оказались неизирательными, поскольку любая допустимая стратения оказалась оптимальной. В случае T=2 для игрока **П** оптимальна любая допустимая сттратегия, а для игрока **С** множество оптимальных стратегий состоит из двух отрезков.

2. **Множества значений в критериальном пространстве**. Выпуклая оболочка множества значений в критериальном пространстве при оптимальных стратегиях в случае T=2 содержит в себе это множество для T=1. Более при увеличении степени аппроксимации, это множество всё точнее приближается к непрерывному случаю.

Список литературы

[1] *Shapley L. S.* Equilibrium points in games with vector payoffs. — 1959.

[2] *Karlin S.* Mathematical methods and theory in games, programming, and economics. — 1992.

[3] *Germejer Y. B.* Introduction into operations research.

[4] *David B.* An analog of the minimax theorem for vector payoffs. — 1959.

[5] *Novikova N. M., Pospelova I. I.* Mixed strategy in vector optimization and germeyer convolution.