6) Формула полной вероятности. Формула Байеса

Пусть A - произвольное событие, а события $H_1, \dots, H_n$ попарно несовместны. $(H_i \cdot H_j = \varnothing)$; $\Omega = \{H_1, \dots H_n\}$, $H_1 \dots H_n$ - гипотезы.

ФПВ: $\boxed{P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + \dots + P(H_n) \cdot P(A|H_n)}$

Для док-ва отметим, что событие A можно представить в виде суммы попарно несовместных событий: $A = (A \cdot H_1) + (A \cdot H_2) + \dots + (A \cdot H_n)$. ⟶

⟶ Тогда $P(A) = \sum_{i=1} P(A \cdot H_i) = \sum P(H_i) P(A|H_i)$

Формула Байеса: $\boxed{P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + \dots + P(H_n) \cdot P(A|H_n)}}$

$\left[P(H_k) \cdot P(A|H_k) = P(H_k \cdot A) = P(A) \cdot P(H_k|A) \right]$ H_1, H_n - априорные вер-ти, $P(H_i|A)$ - апостериорные вер-ти

7) Повторные независимые испытания. Формула Бернулли.

Эксперимент повторяется n раз, причем вер-ть наступления событий не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания назыв. Повт. Незав. Исп. Т.е. события вида $\{\omega_j$ - исход i-го эксперимента$\}$ $(i = 1, \dots, n, \ j = 1, 2)$ являются независимыми в совокупности. Такая модель назыв. последовательностью независимых испытаний Бернулли.

Формула Бернулли: $\boxed{P(A_k) = C_n^k \cdot q^k \cdot p^{n-k}}$.

Ещё одна форма записи: $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$.

Эксперимент с 2 возможными исходами (ω_1 и ω_2)

$P(\omega_1) = p$, $P(\omega_2) = 1 - p = q$.

8) Случайные величины. Ф-я распределения. Её свойства.

Случайной величиной $\xi(\omega)$ называется ф-я $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, заданная на множестве элементарных событий Ω вероятностного пространства (Ω, F, P), такая, что для любого промежутка $[a, b]$ событие $\{\omega \mid \xi(\omega) \in [a, b]\}$ принадлежит F.

С.В - величина, которая в рез-те опыта может принять одно и только одно возможное значение, заранее неизвестное и зависящее от случ. обстоятельств.

Функцией Распределения случ. величины ξ назыв. ф-я $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая каждому значению x ставит в соответствие число $F(x) = P(\xi < x)$

$P(\xi \in [x_1; x_2)) = F(x_2) - F(x_1)$ - вер-ть попадания С.В в любой промежуток

Свойства:

1) $0 \leq F(x) \leq 1$

2) $F(x)$ - неубывающая ф-я

3) $F(x)$ непрерывна слева, т.е. в любой точке a левосторонний предел равен значению функции: $\lim_{x \to a-0} F(x) = F(a)$

4) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

(9.) Дискретные случайные величины. Ряд распределения. Ф-я распределения

Дискретной С.В. называется вещественная ф-я, заданная на множестве элементарных событий $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, множество значений которой конечно / счётно.
Пусть $P(\xi = x_i) = p_i$.
Набор значений С.В. вместе с вероятностями принятия значений где $p_i \in [0, 1]$ и $\sum_i p_i = 1$ назыв. рядом распределения дискретной С.В.

ξ	x_1	x_2	..	x_n
p_i	p_1	p_2	..	p_n

Фун-ей распр-я С.В. ξ назыв. ф-я $F(x) = P(\xi < x)$, $x \in \mathbb{R}$, определенная на всей вещественной оси.
Для дискретной С.В. ф-я распр-я — непрерывная слева кусочно-постоянная ф-я с разрывами в точках x_i. Причем, в каждой точке x_i значение ф-ии увеличивается на величину p_i.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1 \\ p_1, & x_1 < x \le x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \le x_3 \\ \dots & \dots \\ 1, & x > x_n \end{cases}$$

(10) Абсолютно-непрерывные случ. величины. Плотность распределения вер-ей. Ее св-ва. Связь с функцией распределения.

С.В. ξ назыв. абсолютно непрерывной, если существует такая ф-я $f(x)$, что для любого борелевского множества A на прямой $P(x \in A) = \int_A f(x)\,dx$.
Вероятностное пространство, на котором задана такая С.В., является абсолютно непрерывным с плотностью $f(x)$. Эта плотность удовлетворяет след. свойствам:

1) $f(x) \ge 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$
2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.
3) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$.

Ф-я $f(x)$ назыв. плотностью распр-я. По ней вычисляется вер-ть попадания С.В. в любой промежуток $[a, b]$: $P\{\xi \in [a, b]\} = \int_a^b f(x)\,dx$.

По плотности может быть однозначно восстановлена ф-я распределения:
$$F(x) = P(\xi \in (-\infty; x)) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$
С другой стороны плотностью распределения вероятностей $f(x)$ непрерывной С.В. ξ называется производная ф-ии распределения $F(x)$ этой величины:
$$f(x) = F'(x)$$

(11) Числовые характеристики С.В. Мат. ожидание, дисперсия, СКО

Мат. ожиданием С.В ξ называется число $M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, d\,F(x)$, где $F(x)$ — ф-я распр-я С.В. Когда ξ — дискретная С.В $\Rightarrow$ $M\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 \dots + x_n p_n$
Когда ξ — абс. непрерыв. $\Rightarrow$ $M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx$.

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 \cdot f(x)\,dx = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - (M\xi)^2.$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}.$$

$$D\xi = M(\xi - M\xi) = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$