Lista 2

SME0121 - Processos Estocásticos

2022

1 Exercício

Observação: há um erro na primeira linha da matriz. Assuma que $P_{00} = 0.5$ para que a soma da primeira linha seja 1.

(a) Usando que $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$, as propriedades da cadeia de Markov e a matriz de probabilidade, temos que

$$P(X_0 = 0 \cap X_1 = 1 \cap X_2 = 2) =$$
$$P(X_2 = 2|X_1 = 1 \cap X_0 = 0)P(X_1 = 1|X_0 = 0)P(X_0 = 0) =$$
$$P(X_2 = 2|X_1 = 1)P(X_1 = 1|X_0 = 0)P(X_0 = 0) =$$
$$P_{12}P_{01}P(X_0 = 0) = 0.4 \times 0.2 \times 0.3 = 0.024$$

(b) Semelhante ao item (a).

$$P(X_2 = 1 \cap X_3 = 1|X_1 = 0) =$$
$$\frac{P(X_1 = 0 \cap X_2 = 1 \cap X_3 = 1)}{P(X_1 = 0)} =$$
$$\frac{P(X_3 = 1|X_2 = 1)P(X_2 = 1|X_1 = 0)P(X_1 = 0)}{P(X_1 = 0)} =$$
$$P_{11}P_{01} = 0.6 \times 0.2 = 0.12$$

(c) Semelhante aos items (a) e (b).

$$P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1 | X_0 = 0) =$$
$$\frac{P(X_0 = 0 \cap X_1 = 1 \cap X_2 = 1)}{P(X_0 = 0)} =$$
$$\frac{P(X_2 = 1 | X_1 = 1) P(X_1 = 1 | X_0 = 0) P(X_0 = 0)}{P(X_0 = 0)} =$$
$$P_{11} P_{01} = 0.6 \times 0.2 = 0.12$$

(d) Semelhante aos itens anteriores.

$$P(X_0 = 1 \cap X_1 = 0 \cap X_2 = 2 | X_0 = 1) =$$
$$\frac{P(X_0 = 1 \cap X_1 = 0 \cap X_2 = 2)}{P(X_0 = 1)} =$$
$$\frac{P(X_2 = 2 | X_1 = 0) P(X_1 = 0 | X_0 = 1) P(X_0 = 1)}{P(X_0 = 1)} =$$
$$P_{02} P_{10} = 0.3 \times 0 = 0$$

2 Exercício

(a) Temos que $P_{00} = \alpha$ e que $P_{10} = \beta$. Fora isso, sabemos que cada linha da matriz de transição soma 1 e que o espaço de estados possui apenas dois elementos, o que nos dá a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$$

Para calcular a distribuição de equilíbrio, utilizamos as equações $\pi = \pi P$ e $\sum_i \pi_i = 1$.

$$\begin{cases} \pi_0 = \pi_0 \alpha + \pi_1 \beta \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_0 (1-\alpha) = \pi_1 \beta \\ \pi_1 = 1 - \pi_0 \end{cases}$$

$$\pi_0 (1-\alpha) = \beta - \beta \pi_0$$

$$\pi_0 = \frac{\beta}{\beta + 1 - \alpha}$$

$$\pi_1 = \frac{1-\alpha}{\beta + 1 - \alpha}$$

(b) O enunciado está mal formulado. Vamos assumir que queremos calcular $P(X_{n+4} = 0|X_n = 0)$.

Assumindo que

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Temos que encontrar o termo P_{00} de $\mathbb{P}^4$.

$$\mathbb{P}^2 = \begin{bmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{P}^4 = \begin{bmatrix} 0.5749 & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix}$$

Portanto, a probabilidade é de 57.49%.