Lista 2

SME0121 - Processos Estocásticos

2022

1 Exercício

Observação: há um erro na primeira linha da matriz. Assuma que $P_{00} = 0.5$ para que a soma da primeira linha seja 1.

(a) Usando que $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$, as propriedades da cadeia de Markov e a matriz de probabilidade, temos que

$$
\begin{gathered}
P(X_0 = 0 \cap X_1 = 1 \cap X_2 = 2) = \\
P(X_2 = 2|X_1 = 1 \cap X_0 = 0)P(X_1 = 1|X_0 = 0)P(X_0 = 0) = \\
P(X_2 = 2|X_1 = 1)P(X_1 = 1|X_0 = 0)P(X_0 = 0) = \\
P_{12}P_{01}P(X_0 = 0) = 0.4 \times 0.2 \times 0.3 = 0.024
\end{gathered}
$$

(b) Semelhante ao item (a).

$$
\begin{gathered}
P(X_2 = 1 \cap X_3 = 1|X_1 = 0) = \\
\frac{P(X_1 = 0 \cap X_2 = 1 \cap X_3 = 1)}{P(X_1 = 0)} = \\
\frac{P(X_3 = 1|X_2 = 1)P(X_2 = 1|X_1 = 0)P(X_1 = 0)}{P(X_1 = 0)} = \\
P_{11}P_{01} = 0.6 \times 0.2 = 0.12
\end{gathered}
$$

(c) Semelhante aos items (a) e (b).

$$P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1 | X_0 = 0) =$$
$$\frac{P(X_0 = 0 \cap X_1 = 1 \cap X_2 = 1)}{P(X_0 = 0)} =$$
$$\frac{P(X_2 = 1 | X_1 = 1) P(X_1 = 1 | X_0 = 0) P(X_0 = 0)}{P(X_0 = 0)} =$$
$$P_{11} P_{01} = 0.6 \times 0.2 = 0.12$$

(d) Semelhante aos itens anteriores.

$$P(X_0 = 1 \cap X_1 = 0 \cap X_2 = 2 | X_0 = 1) =$$
$$\frac{P(X_0 = 1 \cap X_1 = 0 \cap X_2 = 2)}{P(X_0 = 1)} =$$
$$\frac{P(X_2 = 2 | X_1 = 0) P(X_1 = 0 | X_0 = 1) P(X_0 = 1)}{P(X_0 = 1)} =$$
$$P_{02} P_{10} = 0.3 \times 0 = 0$$

2 Exercício

(a) Temos que $P_{00} = \alpha$ e que $P_{10} = \beta$. Fora isso, sabemos que cada linha da matriz de transição soma 1 e que o espaço de estados possui apenas dois elementos, o que nos dá a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{bmatrix}$$

Para calcular a distribuição de equilíbrio, utilizamos as equações $\pi = \pi \mathbb{P}$ e $\sum_i \pi_i = 1$.

$$\begin{cases} \pi_0 = \pi_0 \alpha + \pi_1 \beta \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_0 (1 - \alpha) = \pi_1 \beta \\ \pi_1 = 1 - \pi_0 \end{cases}$$

$$\pi_0 (1 - \alpha) = \beta - \beta \pi_0$$

$$\pi_0 = \frac{\beta}{\beta + 1 - \alpha}$$

$$\pi_1 = \frac{1 - \alpha}{\beta + 1 - \alpha}$$

(b) O enunciado está mal formulado. Vamos assumir que queremos calcular $P(X_{n+4} = 0|X_n = 0)$.

Assumindo que

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Temos que encontrar o termo P_{00} de $\mathbb{P}^4$.

$$\mathbb{P}^2 = \begin{bmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{P}^4 = \begin{bmatrix} 0.5749 & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix}$$

Portanto, a probabilidade é de 57.49%.

3 Exercício

Temos que $Z_n = (X_{n-1}, X_n)$. Logo, $Z_{n+1} = (X_n, X_{n+1})$. Isso significa que Z_n e Z_{n+1} compartilham de um estado X_n. Logo, temos que

$$Q_{(a,b)(c,d)} = 0,$$

sempre que $b \neq c$.

Definindo os estados $0 \to (0,0)$, $1 \to (0,1)$, $2 \to (1,0)$ e $3 \to (1,1)$, temos a seguinte matriz de probabilidades para Z_n:

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} Q_{00} & Q_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{20} & Q_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix}$$

Para $b = c$, temos que

$$\begin{gathered} Q_{(a,b)(c,d)} = P(X_{n+1} = d \cap X_n = c|X_n = b \cap X_{n-1} = a) = \\ P(X_{n+1} = d \cap X_n = c|X_n = b) = \\ \frac{P(X_{n+1} = d \cap X_n = b)}{P(X_n = b)} = \\ P(X_{n+1} = d|X_n = b) = P_{bd}. \end{gathered}$$

Dessa forma, temos por fim a matriz de probabilidade da variável aleatória Z_n:

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\beta & \beta \\ \alpha & 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\beta & \beta \end{bmatrix}$$

4 Exercício

Observação: A frase "a probabilidade do jogador A atingir estado i antes dele atingir o estado 0" está incorreta nesse contexto. A frase correta deveria ser "a probabilidade da fortuna do jogador A".

Observação 2: Há um erro na lista em que o exercício atual possui duas questões (a). A segunda será encarada como (b).

Observação 3: Ficou ambígua a frase "jogador A ganhe um dólar do jogador B antes que o jogador B ganhe 99 dólares do jogador A". Isso foi questionado ao professor durante a aula e a interpretação correta segundo ele é: "fortuna do jogador A antes da fortuna do jogador B". Uma interpretação equivalente deve ser assumida para na questão (b).

(a) Resultado vem direto da equação fornecida.

$$\alpha_{99} = \frac{(\frac{0.6}{0.4})^{99} - 1}{(\frac{0.6}{0.4})^{100} - 1} = \frac{2 \cdot 3^{99} - 2^{100}}{3 \cdot 3^{99} - 2^{100}} \approx \frac{2}{3}$$

(b) Novamente resultado vem direto da equação.

$$1 - \alpha_{98} = 1 - \frac{(\frac{0.6}{0.4})^{98} - 1}{(\frac{0.6}{0.4})^{100} - 1} = \frac{5 \cdot 3^{98}}{9 \cdot 3^{98} - 2^{100}}$$

$$\frac{5 \cdot 3^{98}}{9 \cdot 3^{98} - 2^{100}} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3^{98} > -2^{100}$$

Como a última inequação é claramente verdadeira, então a probabilidade da ruína de A nessa situação é maior que 50%.

5 Exercício

(a) Para esta questão se usa as mesmas ferramentas que no exercício 1 desta mesma lista.

$$P(X_0 = 0 \cap X_1 = 0 \cap X_2 = 0 | X_0 = 0) =$$
$$\frac{P(X_0 = 0 \cap X_1 = 0 \cap X_2 = 0)}{P(X_0 = 0)} =$$
$$\frac{P(X_2 = 0|X_1 = 0)P(X_1 = 0|X_0 = 0)P(X_0 = 0)}{P(X_0 = 0)} =$$
$$P_{00}{}^2 = (1-\alpha)^2$$

(b) Aqui, deve-se considerar a matriz de probabilidade.

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{P}^2 = \begin{bmatrix} 2\alpha^2 - 2\alpha + 1 & 2\alpha(1-\alpha) \\ 2\alpha(1-\alpha) & 2\alpha^2 - 2\alpha + 1 \end{bmatrix}$$

A probabilidade $P(X_2 = 0|X_0 = 0)$ é igual a $2\alpha^2 - 2\alpha + 1$.

(c) Para calcular a distribuição de equilíbrio, utilizamos as equações $\pi = \pi\mathbb{P}$ e $\sum_i \pi_i = 1$, como feito anteriormente no exercício 2.

$$\begin{cases} \pi_0 = \pi_0(1-\alpha) + \pi_1\alpha \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_0 = \pi_0 - \pi_0\alpha + \pi_1\alpha \\ \pi_1 = 1 - \pi_0 \end{cases}$$

$$\pi_0 = \pi_1 = \frac{1}{2}$$

(d) Por fim, usa-se as multiplicações da matriz de probabilidade, de modo semelhante à questão (b) deste exercício.

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{P}^2 = \begin{bmatrix} 0.82 & 0.18 \\ 0.18 & 0.82 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{P}^4 = \begin{bmatrix} 0.7048 & 0.2952 \\ 0.2952 & 0.7048 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{P}^5 = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ 0.33616 & P_{11} \end{bmatrix}$$

Ou seja, $P(X_5 = 0|X_0 = 1) = 33.62\%$

6 Exercício

(a) Como cada linha da matriz soma 1,

$$\begin{cases} x = 0.3 \\ y = 0.3 \\ z = 0.4 \end{cases}$$

Gerando a matriz

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

A distribuição de equilíbrio é calculada por $\pi = \pi\mathbb{P}$ e $\sum_i \pi_i = 1$.

$$\begin{cases} \pi_0 = 0.6\pi_0 + 0.3\pi_1 + 0.4\pi_2 \\ \pi_1 = 0.3\pi_0 + 0.4\pi_1 + 0.1\pi_2 \\ 1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 \end{cases}$$

Usando qualquer método de resolução de sistemas, se obtém o seguinte resultado:

$$\pi = (\frac{27}{58}, \frac{16}{58}, \frac{15}{58})$$

(b) Usando as técnicas do exercício 1 desta lista, temos

$$P(X_0 = 0 \cap X_1 = 1 \cap X_2 = 2) =$$
$$P(X_2 = 2|X_1 = 1)P(X_1 = 1|X_0 = 0)P(X_0 = 0) =$$
$$P_{12}P_{01}p_0 = 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.3 = 0.027$$

e

$$P(X_2 = 1 \cap X_3 = 1|X_1 = 0) =$$
$$\frac{P(X_1 = 0 \cap X_2 = 1 \cap X_3 = 1)}{P(X_1 = 0)} =$$
$$\frac{P(X_3 = 1|X_2 = 1)P(X_2 = 1|X_1 = 0)P(X_1 = 0)}{P(X_1 = 0)} =$$
$$P_{11}P_{01} = 0.4 \cdot 0.3 = 0.12$$

(c) O enunciado nos manda determinar $P(X_0 = 1 \cap X_1 = 0 \cap X_2 = 2|X_0 = 1)$. Podemos proceder exatamente como na questão (d) do exercício 1 desta lista.

$$P(X_0 = 1 \cap X_1 = 0 \cap X_2 = 2|X_0 = 1) =$$
$$\frac{P(X_0 = 1 \cap X_1 = 0 \cap X_2 = 2)}{P(X_0 = 1)} =$$
$$P_{02}P_{10} = 0.1 \cdot 0.3 = 0.03$$

7 Exercício

(a) Novamente, calcular a distribuição de equilíbrio.

$$\begin{cases} \pi_0 = 0.8\pi_0 + 0.1\pi_1 \\ \pi_1 = 0.1\pi_0 + 0.7\pi_1 + 0.1\pi_2 \\ 1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_0 = 0.125 \\ \pi_1 = 0.25 \\ \pi_2 = 0.625 \end{cases}$$

(b) O que o enunciado pede para calcular é $\mathbb{P}^2$.

$$\mathbb{P}^2 = \begin{bmatrix} 0.65 & 0.16 & 0.19 \\ 0.15 & 0.52 & 0.33 \\ 0.01 & 0.16 & 0.83 \end{bmatrix}$$

8 Exercício

(a) Como nenhum dos estados se comunicam, há 3 classes: $\{0\}$, $\{1\}$ e $\{2\}$.

(b) Não, cadeias irredutíveis por definição possuem apenas 1 classe.

(c) Uma das condições para se encontrar a distribuição de equilíbrio de uma cadeia é a sua irredutibilidade. Não é o caso, pois a cadeia não é irredutível.

9 Exercício

A cadeia possui 2 estados: $\{0, 1\}$ e $\{2\}$, pois o estado 2 não se comunica com nenhum dos outros estados. Dessa forma, a cadeia não é irredutível, e não satisfaz uma das condições para encontrar a distribuição de equilíbrio.

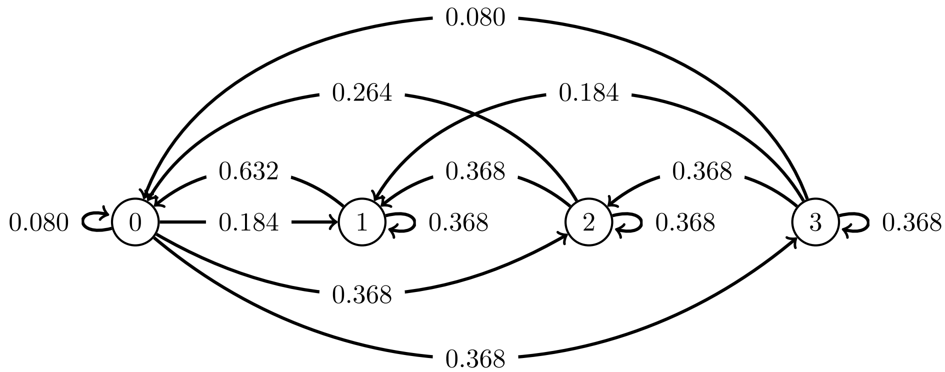
10 Exercício

Observação: Esse exercício não deixa claro no enunciado se, em um fim de semana, se conta o número de câmeras para determinar o estado e depois se realiza a política, ou se primeiro se realiza a política e depois se determina o estado. Vamos considerar que primeiro se determina o estado e depois se realiza a política, pois caso contrário, o estado 0 seria inatingível.

Observação 2: Provavelmente a linha 1 e 2 estão trocadas. Vamos considerar a seguinte matriz de probabilidades:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \\ 0.632 & 0.368 & 0 & 0 \\ 0.264 & 0.368 & 0.368 & 0 \\ 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \end{bmatrix}$$

Isso porque, dado o enunciado e nossa interpretação comentada na observação anterior, faz sentido que não haja chance da cadeia ir do estado 1 para o estado 2 em um passo.



(a) Grafo desenhado acima.

(b) Sim, pois todo estado se comunica com outro estado, o que faz com que a cadeia tenha apenas uma classe, e portanto seja irredutível.

(c) Cálculo da distribuição de equilíbrio.

$$\begin{cases} \pi_1 = 0.184\pi_0 + 0.368\pi_1 + 0.368\pi_2 + 0.184\pi_3 \\ \pi_2 = 0.368\pi_0 + 0.368\pi_2 + 0.368\pi_3 \\ \pi_3 = 0.368\pi_0 + 0.368\pi_3 \\ 1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_0 \approx 0.2857 \\ \pi_1 \approx 0.2849 \\ \pi_2 \approx 0.2632 \\ \pi_3 \approx 0.1664 \end{cases}$$

(d) O tempo de recorrência é calculado por $\mu_i = \frac{1}{\pi_i}$. Temos então que $\mu_3 \approx$ 6.01 semanas.