Globalübung 15 Mathe 1 – WS 25 (CES)

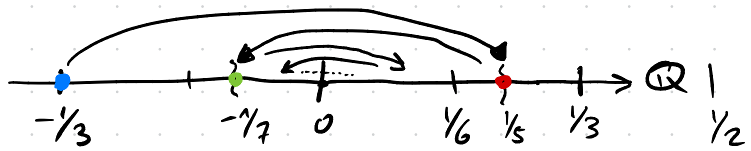
Lambert Theisen
06.02.2026

[0]: → Fragen?

[A] **Folgen**: Sei $A \neq \emptyset$ Menge. Abbildung $a: \mathbb{N} \to A,\ n \mapsto a(n)$ heißt Folge

Bsp: $a: \mathbb{N} \to \mathbb{Q},\ n \mapsto a(n) =: a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$

n	$a(n)$
1	$-1/3 = a_1$
2	$+1/5 = a_2$
3	$-1/7 = a_3$

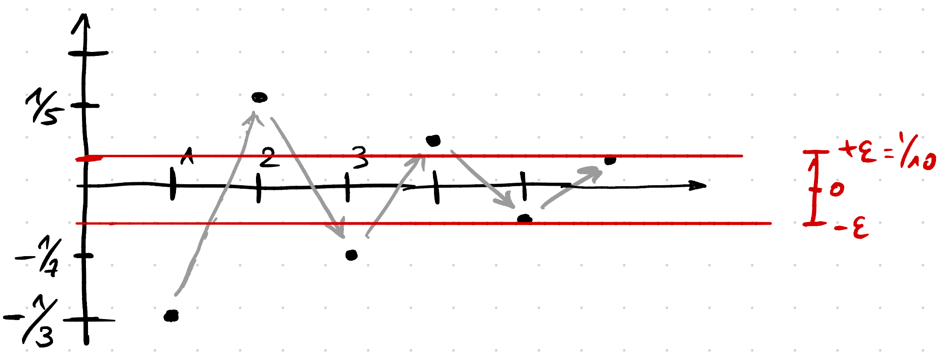


→ konvergiert gegen Null?

Grenzwert: Folge $(a_n) \subset \mathbb{K}$ hat GW $a \in \mathbb{K}$, falls:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

"Für alle $\varepsilon > 0$ (also auch für $\varepsilon = 0.0000\ldots1$) müssen wir eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass für alle $n \geq n_0$ ab diesem Zeitpunkt die Abweichung der Folge zum Grenzwert kleiner als ε ist."



Intuition:

ε	n_0
1	1
$0.1 = 1/10$	5
$0.01 = 1/100$	50
$\vdots$	$\vdots$

Formaler Beweis: Nehme $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ an.

Noch großzügiger möglich... $\leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt: $\left| \frac{(-1)^n}{2n+1} - 0 \right| = \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n} \leq \varepsilon$

Sofern $\frac{1}{2n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} \leq 2n \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{2\varepsilon}$.

Benutze für n_0

Da $n_0 \overset{!}{\in} \mathbb{N}$, wähle $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{2\varepsilon} \right\rfloor + 1$ oder $n_0 = \left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} \right\rceil$

Untere Gauß-Klammer („abrunden", $\lfloor 0.999 \rfloor = 0$)

Denn dann gilt: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = \lceil 1/2\varepsilon \rceil : |a_n - 0| \leq \varepsilon \ \forall n \geq n_0$

Test: $\varepsilon = \frac{1}{314} \Rightarrow n_0 = \left\lceil \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{314}} \right\rceil = \lceil 157 \rceil = 157$

Und $|a_{157} - 0| = \left| \frac{(-1)^{157}}{2 \cdot 157 + 1} \right| = \left| -\frac{1}{315} \right| = \frac{1}{315} < \frac{1}{314}$ ✓

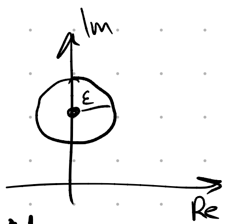
$|a_m - 0| < \frac{1}{314} \ \forall m > n_0 = 157$ ✓

Fun Fact zur Folge a_n:

$$\lim_{m\to\infty} \left(1 + \sum_{n=1}^{m} a_n\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(-1)^k}{2k+1} \right) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}$$

(Vergleiche: Leibnitz-Reihe, nächste A.-VL.)

Nullfolge: Folge mit GW Null, z.B. a_n von oben.



Im komplexen $\mathbb{C}$: ε-Umgebung $B_\varepsilon(a) := \{ z \in \mathbb{C} : |z - a| < \varepsilon \}$

Beschränktheit: $(a_n) \subset \mathbb{K}$ beschränkt $\Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R}, s > 0$ mit $|a_n| \leq s \ \forall n \in \mathbb{N}$

→ **Bsp**: a_n von oben ist beschränkt denn $|a_n| \leq s := 2 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

→ Konvergenz $\Rightarrow$ Beschränktheit $\Leftrightarrow \neg$(Beschränktheit) $\Rightarrow \neg$(Konvergenz)

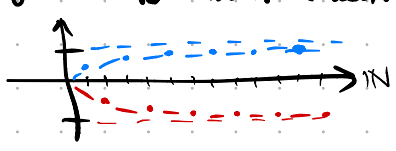
→ Obacht: Beschränktheit $\not\Rightarrow$ Konvergenz ($b_n = (-1)^n$)

↳ Rettung: Beschränktheit + Monotonie $\Rightarrow$ Konvergenz

Aber: " + " $\not\Leftarrow$ Konvergenz $\left[(-1)^n \cdot \frac{1}{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \right]$

Bolzano/Weierstraß: Jede beschränkte Folge besitzt min. 1 konvergente Teilfolge.

→ **Bsp**: $a_n = (-1)^{n-1} + \frac{(-1)^n}{n+1}$



$a_1 = 1/2$, $a_2 = -2/3$, $a_3 = 3/4$, $a_4 = -4/5$, $a_5 = 5/6$

Cauchy-Folge: $(a_n) \subset \mathbb{K}$ ist Cauchy-Folge falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| \leq \varepsilon \quad \forall n,m \geq n_0$$

("Ab n_0 wird Abstand zweier Folgenglieder beliebig klein")

→ **Bsp**: Ist $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ Cauchy?

Sei $\varepsilon > 0$, dann

$$|a_n - a_m| = \left| \frac{(-1)^n}{2n+1} - \frac{(-1)^m}{2m+1} \right|$$

$$\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \left| \frac{(-1)^n}{2n+1} \right| + \left| - \frac{(-1)^m}{2m+1} \right|$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2m+1}$$

$$< \frac{1}{2n} + \frac{1}{2m} \quad (\overset{!}{<} \varepsilon)$$

Nebenrechnung:

$$\frac{1}{2n} < \varepsilon/2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cancel{2}\varepsilon} < n/\cancel{2} \quad \forall n, \varepsilon > 0$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$$

mit $n,m > n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \forall n,m > n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$$

→ **Nice to know**: $(a_n) \subset \mathbb{K}$ konvergiert $\Leftrightarrow$ (a_n) ist Cauchy

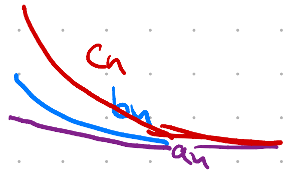
Manchmal einfacher zu zeigen, da kein expliziter Grenzwert bekannt sein muss

Sandwich-Lemma: Sei $(a_n), (b_n), (c_n)$ reelle Folgen mit

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq n_0$$

und konvergieren $(a_n), (c_n)$ zum selben Grenzwert d. Dann gilt:

$$\lim_{n \to \infty} b_n = d$$



Bsp: $b_n := \sqrt{n^2+2} - n$. Sei $a_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt: $a_n = 0 \overset{n \in \mathbb{N}}{=} \sqrt{n^2} - n \leq \sqrt{n^2+2} - n = b_n$

$$\leq \sqrt{n^2 + 2 + \frac{1}{n^2}} - n = \sqrt{\left(n + \frac{1}{n}\right)^2} - n$$

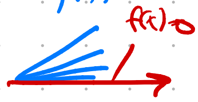
$$= n + \frac{1}{n} - n = \frac{1}{n} = c_n$$

Mit $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ sowie $\lim_{n \to \infty} c_n = 0$ folgt direkt:

b_n konvergiert ebenfalls mit Grenzwert $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$.

Funktionenfolgen:

$f_n := \frac{1}{n} \cdot x \quad . \quad x, \frac{1}{2}x, \frac{1}{3}x, \dots$



DEF): Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$ Menge aller Funktionen $f: D \to \mathbb{R}$.

Dann heißt die Folge der Fktn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}(D,\mathbb{R})$ Funktionenfolge

→ vgl. Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ⇝ Verallgemeinerung der Begriffe nötig.

Konvergenz (von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f):

($f \hat{=}$ Grenzfunktion)

I) Punktweise: $\boxed{\forall x \in D}$ gilt: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(x,\varepsilon): |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \; \forall n \geq N$

II) Gleichmäßig: $\forall x \in D$ gilt: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon): |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \; \forall n \geq N$

Beispiel:

Aufgabe 33

a) Untersuchen Sie die Funktionenfolge $(f_n)_n : D \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ jeweils auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(i) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ für $x \in D := \mathbb{R}$

(*Hinweis:* $\lim_{y\to\infty} ye^{-y} = 0$.)

Fälle $\boxed{x=0}$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = n \cdot 0 \cdot 1 = 0$

$\boxed{x \neq 0}$: $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot x^2 = \infty$, daher mit Hinweis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x}(nx^2)e^{-(nx^2)} \overset{y:=nx^2}{=} \lim_{y\to\infty} \frac{1}{x} ye^{-y} \overset{\text{Hinweis}}{=} 0 \; (x)$$

⇒ Funktionenfolge konvergiert punktweise gegen Nullfunktion.

ε-N zeigen

Vermutung: Konvergenz nicht gleichmäßig.

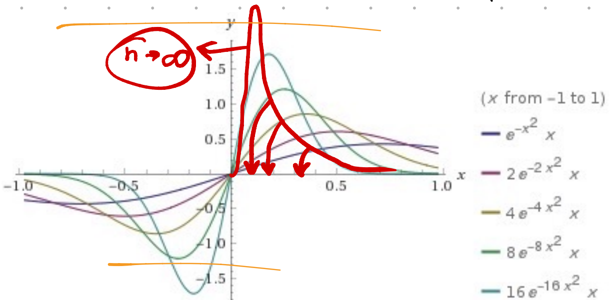
Wäre Konvergenz gleichmäßig, dann gäbe es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x)| < \varepsilon \; \forall x \in D$ mit $n \geq n_0$

Insbesondere müsste dann auch $|f_n(\frac{1}{n})| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

Es müsste also $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\frac{1}{n})$ doch wir haben:

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n \cdot \frac{1}{n} \cdot e^{-n \cdot \frac{1}{n^2}} = e^{-\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \quad ↯$$

⇒ Keine Gleichmäßige Konvergenz



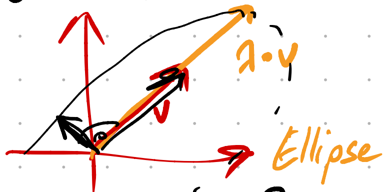
LA | Eigenwerte & Eigenvektoren (Wdh.)

$A^2 = (S^{-1}DS)(S^{-1}DS) = S^{-1}D^2S$

Motivation: Wir wollen $D \stackrel{!}{=} S^{-1}AS$ wobei D diagonal.

Ähnliche Matrizen: $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $B = TAT^{-1}$ haben gleichs Spektrum. Daher muss $D = \mathrm{diag}(\lambda_i(A))$ sein.

Terminologie: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Falls $\exists v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ mit $Av = \lambda v$, dann:



→ **Eigenwert** λ → zugeh. **Eigenvektor** v

→ **Spektrum** einer Matrix: $\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}: Ax = \lambda x\}$

$\Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0$

Bestimmung EW/EV: mit Nullstellen des char. Polynoms

$p_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto p_A(t) = \det(t \cdot I_n - A)$

denn falls $\lambda \in \sigma(A)$, dann $p_A(\lambda) = 0$.

Eigenraum: $ER(\lambda) := \ker(\lambda \cdot I_n - A)$

Bedingungen für Diagonalisierbarkeit (für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$)

I) A diagbar $\Leftrightarrow$ $\exists\, n$ lin. unabh. EV $v_i\ (i = 1 \ldots n)$.

II) $\underbrace{\text{Algebraische}}_{k_{\lambda_i} = \#\text{NS von } p_A(t) \text{ bei } \lambda_i} = \underbrace{\text{Geometrische Vielfachheiten}}_{\text{Dimension Eigenraum } (\lambda_i):\ \dim(ER(\lambda_i))} \Leftrightarrow A$ diag. $\forall \lambda$.

III) Falls $p_A(t)$ $\underbrace{n \text{ paarweise-versch.}}_{}$ NS hat $\Leftrightarrow$ A diag.

ZB $\{1,2,3\}$ aber nicht $\{1,1,2\}$

Beispiel:

Aufgabe 5.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

für die bekannt ist, dass ein Eigenwert gleich 2 ist.

a) Berechnen Sie die übrigen Eigenwerten von A sowie den zum Eigenwert 2 zugehörigen Eigenvektor.

b) Ist A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Zeigen Sie, dass A invertierbar ist.

d) Es bezeichne I_3 die 3×3-Einheitsmatrix. Geben Sie die Eigenwerte von

$$B := A - I_3$$

an.

a) $p_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix}$

$$\underset{\text{Laplace Entw.}}{=} (-1)^4 (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\left[(\lambda-1)(\lambda-4) - 1\right]$$

$\lambda_1 = 2$ bekannt.

$$= (\lambda-2)(\lambda^2 - 5\lambda + 3) \;!$$

Im Zweifel: → Polynomdivision

pq-F: $\lambda_{2,3} = -\frac{-5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 3}$ $\quad \left(\frac{25}{4}\right) \quad \frac{12}{4}$

$$= \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Eigenräume: $ER_{\lambda_1}(A) = \operatorname{Kern}(\lambda_1 \cdot I_3 - A)$

$$= \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ I: $x_1 - x_3 = 0$

$\Rightarrow x_2$ beliebig

$$= \left\{ r \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2}, \; r \in \mathbb{R} \right\}$$

$\Rightarrow$ Eigenvektor $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu $\lambda_1 = 2$.

b) **Diagbarkeit**: Drei paarweise versch. EW.

Weil $1 \le$ „geom. VFH(λ_i)" $\le$ "alg. VFH(λ_i)" $= 1 \ \forall i$

$\Rightarrow$ GVFH(λ_i) = AVFH(λ_i) $\forall i$

$\Rightarrow$ A diag'bar.

c) **Invertierbarkeit** $\Leftrightarrow \exists A^{-1}$ mit $A^{-1}A = AA^{-1} = I$

$$\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Wir wissen $\det(A) = \det(D)$ $[D = SAS^{-1}$ (ähnlich)$]$

Daher $\det(A) = \prod_{i=1}^{3} \lambda_i = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$ denn $\lambda_i \neq 0 \ \forall i$.

$\Rightarrow$ A invertierbar.

d) **Spektralshift**: $\sigma(B)$ gesucht mit $B := A - 1 I_3$

Easy denn $\lambda_i(B) = \lambda_i(A) - \underbrace{\lambda_i(I_3)}_{=1}$

Gram-Schmidt Orthogonalisierung:

Jede Menge $B = \{x_1, \dots, x_m\} \subset V$ lin. unabh. Vektoren lässt sich zu einem ON-System $B' = \{y_1, \dots, y_m\} \subset V$ umwandeln, sodass

$$\text{span}(B) = \text{span}(B').$$

→ **Algorithmus** für $B = \{x_1, \dots, x_m\}$

1) $y_1 = x_1 / \|x_1\|$

2) Für $i = 2 \dots m$:

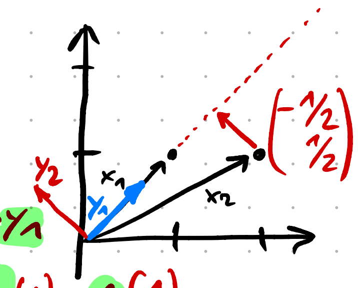
$$\tilde{y}_i = x_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle x_i, y_j \rangle y_j$$

$$y_i = \tilde{y}_i / \|\tilde{y}_i\|$$

3) $B' = \{y_1, \dots, y_m\}$ ist ONB

→ **Beispiel**: $B = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$

1) $y_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$



2) $\tilde{y}_2 = x_2 - \langle x_2, y_1 \rangle y_1$

$= \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot 3 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\end{pmatrix}$

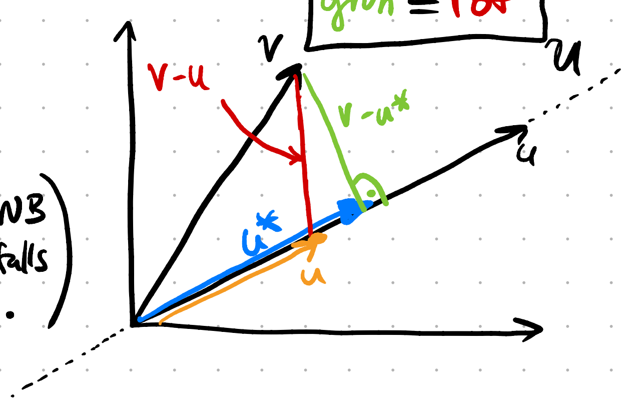
$y_2 = \tilde{y}_2 / \|\tilde{y}_2\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \tilde{y}_2$

Bestapproximation: ZB $\mathbb{R}^2 = V$

Sei V $\mathbb{R}$-Vektorraum mit SkP $\langle \cdot,\cdot \rangle$ und $U \leq V$ UR. Dann:

$$\forall v \in V: \exists u^* \in U \text{ mit } \|v - u^*\| = \inf_{u \in U} \|v - u\|.$$

Außerdem: $\langle v - u^*, u \rangle = 0 \quad \forall u \in U$



→ Berechnung in $\boxed{\text{ONB}}$ $\{u_1, \dots, u_m\}$:

$u^* = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k u_k$ wobei (easy, wenn ONB vorliegt. GS falls keine ONB...)

$\alpha_k = \langle v, u_i \rangle$

Beispiel (Klausur 2014):

Aufgabe 11.
Seien

$$w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vektoren im $\mathbb{R}^4$ und $U := \text{span}\{w_1, w_2\} \leq \mathbb{R}^4$ ein Untervektorraum. Bestimmen Sie die Bestapproximation von b bezüglich U, d.h. finden Sie $v^* \in U$ mit

$$\|v^* - b\| \leq \|v - b\| \quad \text{für alle } v \in U.$$

Tipp: Berechnen Sie zuerst eine Orthonormalbasis von U.

3 Punkte

① GS: $\cdot\ v_1 = \frac{1}{\|w_1\|_2} w_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\cdot\ \tilde{v}_2 = w_2 - \langle w_2, v_1 \rangle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}(-2) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\cdot\ v_2 = \frac{1}{\|\tilde{v}_2\|_2} \tilde{v}_2 = \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right]^{0.5}} \tilde{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

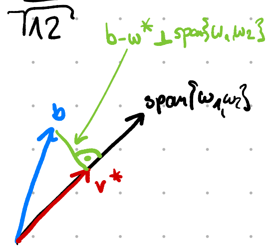
Koeffizienten der Bestapproximation:

$\alpha_1 = \langle v_1, b \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = -6$

$\alpha_2 = \langle v_2, b \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{12}{\sqrt{12}}$

Also $v^* = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 v_2 = -6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{12}{\sqrt{12}} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

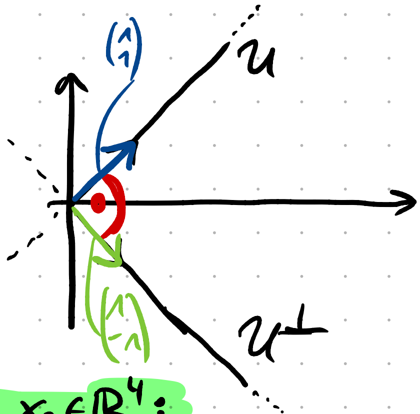
$= -3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$



Test Fehler mit senkrecht auf span$\{w_1, w_2\}$: $\langle w_1, v^* - b \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \checkmark$, $\langle w_2, v^* - b \rangle = \dots = 0 \checkmark$

Orthogonales Komplement:

$U^\perp := \{ x \in V : \langle x, u \rangle = 0 \ \forall u \in U \}$



→ **Bsp**: $U = \{ x \in \mathbb{R}^2 : x = \alpha \cdot \binom{1}{1}, \alpha \in \mathbb{R} \}$

$\Rightarrow U^\perp = \{ x \in \mathbb{R}^2 : x = \beta \cdot \binom{1}{-1}, \beta \in \mathbb{R} \}$

→ **Strategie für zB. $U = \text{span}(x_1, x_2)$ wobei $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^4$:**

1) Erweiterung von $\{x_1, x_2\}$ zu Basis von $\mathbb{R}^4$ mit $\{x_3, x_4\}$
2) Erstellung ONB aus $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ mit GS
3) Ortho. Komplement zu span$\{y_1, y_2\}$ ist dann span$\{y_3, y_4\}$

y_i mit Gram-Schmidt