TODO

LA : • Matrixdarst. L.Abb.
• Identität, Inverse
• Kern / Bild / Rang

A : • Exp/Log • Reelle Fkt. / GW

Mathe 1 – GUE 08
28.11.19

LA Matrixdarstellung linearer Abbildungen:

Seien $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$, $C = \{w_1, \dots, w_m\} \subset W$ Basen von V, W sowie $\phi: V \to W$ lineare Abbildung mit $\phi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i \;\; \forall j = 1 \dots n$. Dann ist

$$ {}_C\phi_B := \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} $$ Matrixdarstellung von ϕ bzg. B, C.

→ **Beispiel:**

Aufgabe 66. **(Matrixdarstellung linearer Abbildungen)**
Es sei

$$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 3x - y \end{pmatrix},$$

eine Abbildung.

a) Ermitteln Sie die Matrixdarstellung ${}_{E_2}F_{E_2}$ von F bezüglich der Standardbasis

$$E_2 = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

b) Ermitteln Sie die Matrixdarstellung ${}_SF_{E_2}$ von F, wobei die Basis S gegeben ist durch

$$S = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Euklidische Matrixdarstellung
→ DIREKT ABLESEN

$$\begin{pmatrix} 2y \\ 3x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0x + 2y \\ 3x + -1y \end{pmatrix}$$

a) $F(e_1) = F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2 \Rightarrow {}_{E_2}F_{E_2} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

$F(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2e_1 - e_2$

Matrix-Prod.:
$\underbrace{C}_{l \times n} = \underbrace{A}_{l \times m} \cdot \underbrace{B}_{m \times n}$ mit $C_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik} B_{kj}$

denn ${}_{E_2}F_{E_2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y \\ 3x - y \end{bmatrix} = F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ✓

b) Zunächst: Basisdarstellung von $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ in S mit

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \overset{!}{=} r\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = r + 2s \\ b = 3r + 5s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2b - 5a \\ s = 3a - b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (-5a + 2b)u_1 + (3a - b)u_2$$

Weiterhin: $F(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = (\overbrace{-5 \cdot 0 + 2 \cdot 3}^{6})u_1 + (\overbrace{3 \cdot 0 - 3}^{-3})u_2$

$F(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (\underbrace{-5 \cdot 2 - 2 \cdot 1}_{-12})u_1 + (\underbrace{3 \cdot 2 - (-1)}_{7})u_2$

$$\Rightarrow {}_SF_{E_2} = \begin{bmatrix} 6 & -12 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$$

Hinweis: Falls z.B. ${}_SF_S$ gesucht, dann $\boxed{F(u_1), F(u_2)}$ nutzen.

Einheitsmatrix: (neutrales El. bzgl. "·")

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad A I_n = I_n A = A \ \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

quadratisch

Inverse Matrix: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar falls $\exists B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

→ **Beispiel:** **Aufgabe 77. (Inverse einer Matrix)**

Gegeben sei die allgemeine Darstellung einer Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

a) Leiten sie die Formel zur Berechnung der Inversen $A^{-1} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ der Matrix A her.

a) Sei $\varphi(x) := Ax$ mit $x \in \mathbb{R}^2$. Dann

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x_1 = 1/a_{11}\,(\varphi_1 - a_{12}x_2)}_{(\mathrm{I})}, \quad \underbrace{x_2 = 1/a_{22}\,(\varphi_2 - a_{21}x_1)}_{(\mathrm{II})}$$

- (I) in (II): $x_2 = 1/a_{22}\left(\varphi_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}\left[\varphi_1 - a_{12}x_2\right]\right)$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}\right)}\, x_2 = \varphi_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}\varphi_1$$

$$\boxed{\frac{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}}{a_{11}} = \frac{d}{a_{11}} \quad \text{mit} \quad d := a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{a_{11}}{d}\varphi_2 - \frac{a_{21}}{d}\varphi_1 \qquad (\mathrm{III})$$

- (III) in (I): $x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(\varphi_1 - a_{12}\left[\frac{a_{11}}{d}\varphi_1 - \frac{a_{21}}{d}\varphi_1\right]\right)$

$$\Leftrightarrow (\ldots) \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{a_{22}}{d}\varphi_1 - \frac{a_{12}}{d}\varphi_2 \qquad (\mathrm{IV})$$

- Letztlich (mit III/IV): $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{d}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}}_{=: A^{-1}} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$

denn $\varphi = Ax \Leftrightarrow x = A^{-1}\varphi$ & $A \cdot A^{-1} = A^{-1}A = I$

Kern / Bild einer Matrix: $\to \ker(A) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = 0 \}$

$\to \operatorname{Im}(A) := \{ Ax \mid x \in \mathbb{R}^n \}$

→ **Beispiel:** (Klausur WS 2011)

Aufgabe 48. **(Rang, Kern und Bild einer Abbildung)**
Gegeben sei die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$,

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_2 - x_4 \end{pmatrix}. \quad \Rightarrow A \overset{\text{ablesen}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Geben Sie die Matrix der Abbildung an und bestimmen Sie deren Rang.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns und des Bildes der Abbildung.

a) Rang (A) = rank (A) = max. # lin. unabh. Spalten von A
= —"— Zeilen —"—

Weil $A \in \mathbb{R}^{2\times 4} \Rightarrow \text{Rang}(A) \le 2$!

Prüfe Lin Abh. von Zeilen:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ * \\ * \\ \beta = 0 \end{cases} \quad ✓ \Rightarrow \text{Rang}(A) = 2$$

b) I) $y \in \operatorname{Im}(A) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^4 : Ax = y$

$$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_2 - x_4 \end{pmatrix} \overset{\alpha_i \in \mathbb{R}}{=} \underbrace{\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{Spalten von } A}$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ ist Basis von Im (A)

II) $x \in \text{kern}(A) \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 & \Rightarrow x_1 = -x_2 \\ 2x_2 - x_4 = 0 & \Rightarrow x_4 = -2x_1 \end{cases}$

x_3 beliebig

Sei $\alpha = x_1$, $\beta = x_3$. Dann

$$Ax = 0 \Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \\ -2\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{Basis von Kern}(A).}$$

A **Exponentialreihe**: $e^z = \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad z \in \mathbb{C}$

Beispiel (hilfreich für HA ;-)): $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{3^k k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2/3)^k}{k!} \to e^{2/3}$

Euler-Formel: $e^{i\varphi} = \exp(i\varphi) = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$

Beispiel: $e^{i \cdot \pi/4} = \cos(\pi/4) + i \cdot \sin(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}$

Angle θ				
Degrees	Radians	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0	0	0	1	0
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	undefined
180	π	0	-1	0
270	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	undefined
360	2π	0	1	0

Note the pattern:

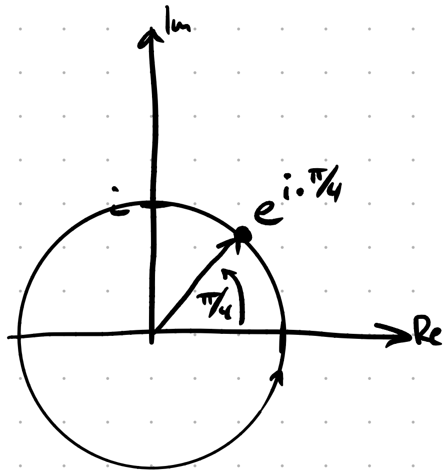
$\sin 0^\circ = \frac{\sqrt{0}}{2}$

$\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{1}}{2}$

$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 90^\circ = \frac{\sqrt{4}}{2}$

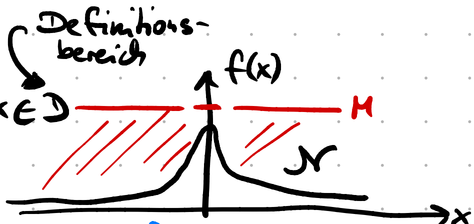


KLAUSURZETTEL! (Quelle: math.stackexchange)

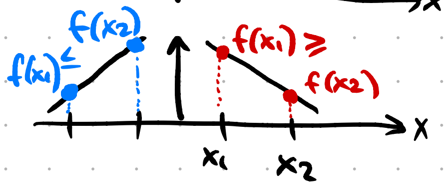
Natürlicher Logarithmus: $\ln := \exp^{-1}$ mit $\exp^{-1}: \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

Reelle Funktionen:

a) **Beschränktheit**: $\exists M > 0 : |f(x)| \leq M \ \forall x \in D$

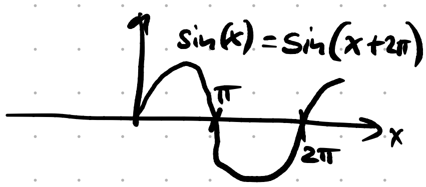


b) **Monoton fallend**: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$



c) **Mon. steigend**: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

d) **Periodisch**: $f(x+L) = f(x) \ \forall x \in D$



Grenzwert: $b \in \mathbb{R}$ ist GW von f an Stelle a $\forall$ Folgen $(x_n) \subset \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ und...

a) **rechtsseitig:** ... $\boxed{x_n > a}$ $\forall n$ gilt: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to a+} f(x) = b$

b) **linkseitig:** ... $\boxed{x_n < a}$ $\forall n$ gilt: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to a-} f(x) = b$

c) **Grenzwert:** falls: $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = b$

→ **Beispiel:**

Aufgabe 53. (Grenzwert von Funktionen)
Untersuchen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - |x|}{x^3}$$

Vorlesung: $\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \in \mathbb{R}$

Intuition: GW existiert nicht bei $x=0$

• mit $e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}$

abs. konv. ⇒ R. egal

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2\ell}}{(2\ell)!} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!}$$

$(i)^{2\ell} = (-1)^\ell$, $(i)^{2\ell+1} = i(-1)^\ell$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} x^{2\ell} + i \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} x^{2\ell+1}$$

• Analog: $e^{-ix} = (\ldots) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} x^{2\ell} - i \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} x^{2\ell+1}$

• Es folgt: $e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} x^{2\ell+1}$

• Daher: $\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} x^{2\ell+1}$

"Taylorreihe" von $\sin(x)$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \ldots$$

$\mathcal{O}(x^7) = \alpha x^7 + \beta x^8 + \gamma x^9 + \ldots$

I) $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin(x) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \mathcal{O}(x^7)}{x^3} = \boxed{-\frac{1}{6}} + \lim_{x\to 0+} \frac{1}{120}x^2 + \ldots$

II) $\lim_{x\to 0-} \frac{\sin(x) + x}{x^3} = \lim_{x\to 0-} \frac{2x - \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}(x^5)}{x^3} = \lim_{x\to 0-} \frac{2}{x^2} + \ldots = \boxed{\infty}$

Ungleich, daher kein GW