5.5.

V3 Abbildungen:

Aufgabe V 3. *Abbildungen*

Gegeben sind die beiden endlichen Mengen $\boxed{X = \{1,2\}}$ und $\boxed{Y = \{2,3,4\}}$.

(a) Bestimmen Sie die Anzahl aller Abbildungen $X \longrightarrow Y$ sowie die Anzahl aller Abbildungen $Y \longrightarrow X$.

(b) Bestimmen Sie die Anzahl aller injektiven Abbildungen $X \longrightarrow Y$.

(c) Bestimmen Sie die Anzahl aller surjektiven Abbildungen $Y \longrightarrow X$.

Stellen Sie zudem in Teil (a) und in Teil (b) Vermutungen für den allgemeinen Fall auf, das heißt, für den Fall, dass X und Y zwei beliebige nichtleere endliche Mengen sind. Der allgemeine Fall in Teil (c) ist etwas kniffliger. Überlegen Sie auch hier, wie man vorgehen könnte.

Bsp:

$x \in \boxed{X}$	$f(x) \in \boxed{Y}$
1	2
2	4

Die Abbildung $f: X \to Y$ ist:

→ injektiv: $f(a) \neq f(b)$ wenn $a \neq b$

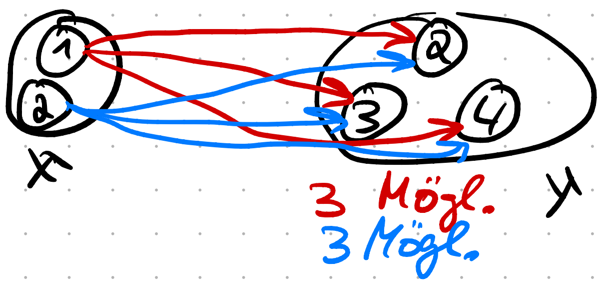
→ nicht surjektiv: denn für $3 \in Y$ existiert kein $x \in X$ sodass $f(x) = 3$.

1.6.5. Definitionen.

Eine Abbildung $f\colon A \to Z$ heißt

- **injektiv**, falls für $a \neq b$ stets $f(a) \neq f(b)$ gilt $\big(\forall\, a, b \in A\colon\ a \neq b \implies f(a) \neq f(b)\big)$
- **surjektiv**, falls zu jedem $z \in Z$ ein $a \in A$ mit $f(a) = z$ existiert $\big(\forall z \in Z\, \exists\, a \in A\colon f(a) = z\big)$
- **bijektiv**, falls f sowohl injektiv als auch surjektiv ist. (In diesem Fall gibt es eine **Umkehrabbildung** $f^{-1}\colon Z \to A$.)

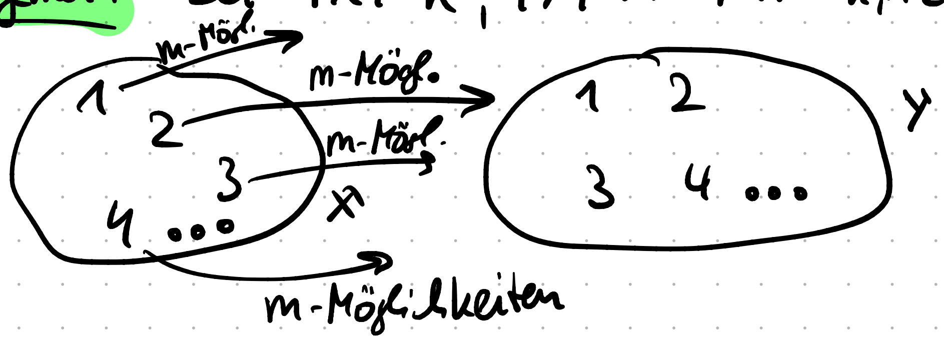
3a): **Gesucht:** $\# \operatorname{Abb}(X, Y)$



$\Rightarrow \# \operatorname{Abb}(X,Y) = 3 \cdot 3 = 3^2 = 9$

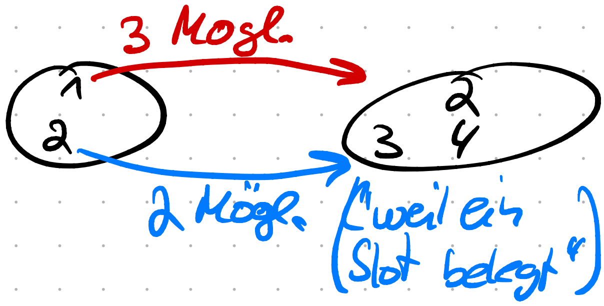
Umgekehrt $\# \operatorname{Abb}(Y,X) = 2^3 = 8$

Allgemein: Sei $|X| = k$, $|Y| = m$ mit $k, m \in \mathbb{N}$



$\Rightarrow \# \operatorname{Abb}(X,Y) = m^k$

3b): **Gesucht**: # injektive Abb(X,Y)



$\Rightarrow$ # inj. Abb$(X,Y) = 2 \cdot 3 = 6$

Allgemein: (mit $k \leq m$)

$$\# \text{injAbb}(X,Y) = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-k+1) = \frac{m!}{(m-k)!}$$

3c): **Gesucht**: $\# \text{surj.Abb}(Y,X) = \# \text{Abb}(Y,X) - \underbrace{\# \text{konstAbb}(Y,X)}$

$= 8-2$

$= 6$

Was kann schiefgehen? Wenn alle $y \in Y$ auf nur ein einziges $x \in X$ mappen.

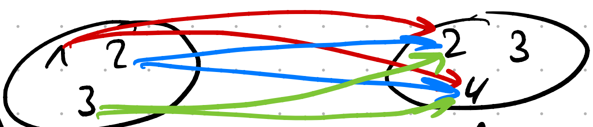
Allgemein: Wieder $|X| = k$, $|Y| = m$, $k \geq m$

zB $m=3$, $Y = \{2,3,4\}$.

Sei $A_y := \{ f: X \to Y \mid \nexists x \in X : f(x) = y \}$ für $y \in Y$

Wir haben dann $|A_y| = 2^k$

(weil ein y ja nicht "getroffen" werden kann)



$\rightarrow$ alle Abb. $\in A_3$

Weiterhin $|A_2 \cap A_3| = 1$ (weil alle auf 4 mappen müssen

$$\Rightarrow \# \text{SurjAbb}(X,Y) = \# \text{Abb}(X,Y) - \Big[\underbrace{(|A_2| + |A_3| + |A_4|)}_{\text{haben Duplikate}} \underbrace{- |A_2 \cap A_3| - |A_3 \cap A_4| - |A_2 \cap A_4|}_{\text{Duplikate subtrahieren}} \Big]$$

$$= 3^k - [3 \cdot 2^k - 3]$$

m beliebig: zB $Y = \{1, \ldots, m\}$

Sei A_y definiert wie vorher

Für $0 \leq \ell \leq m$: $\left| \bigcap_{j=1}^{\ell} A_{y_j} \right| = (m-\ell)^k$ mit y_j paarweise verschieden

Vermutung: $\# \text{SurAbb}(X,Y) = m^k - m(m-1)^k + \binom{m}{2}(m-2)^k - \ldots$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \binom{m}{j} (m-j)^k$$