

TODO : 2.

- A: Potentiale, Existenz, Flächen
 B: QR, Optimierungs Basics

Globalübung 11 Mathe 3 - WS21

22.12.2021
Lambert Theisen

Nemisches Potential: Falls $f = \nabla \varphi$, $\varphi \in \text{Pot}$.

Einfach zsm. hängende Mengen: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt einfache Weg zsm. hängend, falls Ω weg zsm. hängend & sich jeder geschlossene Weg in stetiger Art und Weise auf einen Pkt. in Ω zsm. Zielen lässt.

Satz 2 zu

Existenz eines Potentials: Sei Ω einfache weg zsm. hängend ($\{\bullet\}, \{\circlearrowleft\}, \{\circlearrowright\}, \{\circlearrowuparrow\}$)

und $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein diff'bares Vektorfeld. Falls ∇F symmetrisch ($\text{rot } F = 0, \nabla \times F = 0$), genau dann hat F ein Potential.

Bsp 1 (VL): $F(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 x_2^2 \\ 2x_1^2 x_2 + 1 \end{pmatrix}$ auf \mathbb{R}^2

$$\Rightarrow \nabla F = \begin{bmatrix} 2x_2^2 & 4x_1 x_2 \\ 4x_1 x_2 & 2x_1^2 \end{bmatrix} \text{ symmetrisch!}$$

$$\rightarrow \frac{\partial F(x)}{\partial x_1} \doteqdot F_1 = 2x_1 x_2^2 \Rightarrow \varphi(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 + g(x_2)$$

$$\rightarrow \frac{\partial F(x)}{\partial x_2} = 2x_1^2 x_2 + g'(x_2) \doteqdot F_2 = 2x_1^2 x_2 + 1 \Rightarrow g(x_2) = x_2$$

$$\Rightarrow \varphi = x_1^2 x_2^2 + x_2$$

Beispiel: a) $D_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

weil $\ln(y)$ \Rightarrow einfache Weg zsm.

D_f ist einfache zsm. hängend ✓

$$b) \text{ rot } f = \nabla \times f = \begin{pmatrix} \partial_y f_3 - \partial_z f_2 \\ \partial_z f_1 - \partial_x f_3 \\ \partial_x f_2 - \partial_y f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3x^2 \sin(z) - (-3x^2 \sin(z)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

nf Diagonale weglassen

$= 0 \Rightarrow f$ hat Potential! nach Satz 2

Bestimmung Potential φ :

$$\begin{aligned} \partial_x \varphi \doteqdot f_1 &= 3x^2 \cos(z) & \Rightarrow \varphi(x, y, z) = x^3 \cos(z) + k_1(y, z) \\ \partial_y \varphi \doteqdot f_2 &= \ln(y) & \Rightarrow \varphi(x, y, z) = y \ln(y) - y + k_2(x, z) \\ \partial_z \varphi \doteqdot f_3 &= -x^3 \sin(z) & \Rightarrow \varphi(x, y, z) = x^3 \cos(z) + k_3(x, y) \end{aligned}$$

Folgerung:

Kann nur eine Konstante sein

$$\Rightarrow \varphi(x, y, z) = y \ln(y) - y + x^3 \cos(z) + k, k \in \mathbb{R}$$

c) Arbeitsintegral direkt: $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}, t \in [0, 1]$ (Parametrisierung)

$$\int_0^1 \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 3t^2 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 (3t^2 + te^t) dt = \left[t^3 + te^t \right]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = 1 + e - e + 1 = 2$$

d) Arbeitsintegral mit Potential: \rightsquigarrow Einsetzen {Anfangs} & {Endpunkt} von γ
 $\{(0,1,0)^T\}$ $\{(1,e,0)^T\}$

$\Rightarrow \int_{\gamma} f \cdot dx = \Phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ e \\ 0 \end{pmatrix}\right) - \Phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left[\underbrace{e \ln(e)}_0 - \underbrace{e + 1^3 \cos(0)}_1 \right] - \left[\underbrace{1 \ln(1)}_0 - \underbrace{1 + 0^3 \cos(0)}_1 \right] = 2$

Flächen
(in n Dim)

Sei $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^m$ Parameterbereich und $\underline{\Phi}: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\underline{\Phi}\left(\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix}\right) \mapsto \underline{\Phi}\left(\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix}\right)$ stetig
und diffbar mit mch. Das Bild $F = \underline{\Phi}(\mathcal{B})$ ist eine Fläche falls $\forall (p_1, \dots, p_m) \in \mathcal{B}$, die Vektoren

$$\left\{ \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial p_m} \right\}$$

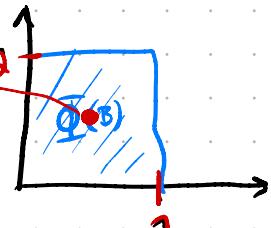
linear unabhängig sind
 \Rightarrow Bei uns $m=2$.

"Fläche wird aufgespannt"

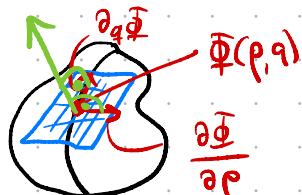
Beispiel Einfache Ebene mit $\mathcal{B} = [0,1]^2$

$$\underline{\Phi}\left(\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}\right) = p_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \underline{\Phi}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + 0 \cdot \underline{\Phi}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \in \underline{\Phi}(\mathcal{B})$$



Tangentialebene in $(p,q) \in \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$



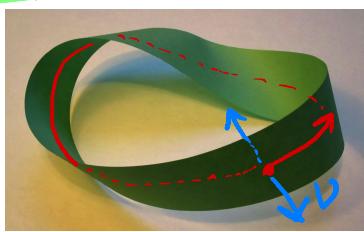
$$(\sigma, \tau) \mapsto \Psi_{(p,q)}(\sigma, \tau) = \underline{\Phi}(p, q) + \sigma \frac{\partial \underline{\Phi}(p, q)}{\partial p} + \tau \frac{\partial \underline{\Phi}(p, q)}{\partial q}$$

Normalenfeld einer Fläche: ("Flächennormale")

$$N(p, q) = \left(\frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial p} \times \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial q} \right) / \| \left(\frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial p} \times \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial q} \right) \|_2 \quad \text{(Vorzeichen gibt Orientierung an)}$$

Orientierung einer Fläche : Fläche F orientierbar falls Normalenfeld $N: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig.

Beispiel (Möbiusband VL)



Wikipedia

Sei $(r, \alpha) \in [-1, 1] \times [0, 2\pi] =: \mathcal{B}$.

$$\begin{pmatrix} r \\ \alpha \end{pmatrix} \mapsto \underline{\Phi}\left(\begin{pmatrix} r \\ \alpha \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cdot (1 + \frac{r}{2} \cos \frac{\alpha}{2}) \\ \sin \alpha \cdot (1 + \frac{r}{2} \cos \frac{\alpha}{2}) \\ \frac{r}{2} \sin(\frac{\alpha}{2}) \end{bmatrix}$$

Wir haben:

$$\partial_r \underline{\Phi}(r, \alpha) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cos \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \\ \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \\ \frac{1}{2} \sin(\frac{\alpha}{2}) \end{bmatrix} \quad \partial_\alpha \underline{\Phi}(r, \alpha) = \begin{bmatrix} \dots \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \text{Normalenfeld } v(r, \alpha) = \partial_r \vec{\varphi} \times \partial_\alpha \vec{\varphi} / \| \partial_r \vec{\varphi} \times \partial_\alpha \vec{\varphi} \| \quad (3)$$

$$\stackrel{(1)}{=} \begin{bmatrix} -\frac{r}{2} \sin \alpha + (1+r \cos \frac{k}{2}) \cos(\alpha) \sin \frac{k}{2} \\ \frac{r}{2} \cos \alpha + (1+r \cos \frac{k}{2}) \sin(\alpha) \sin \frac{k}{2} \\ -(1+r \cos \frac{k}{2}) \cos \frac{k}{2} \end{bmatrix}$$

Stetigkeit von $v(r, \alpha)$?

$$v(r, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{r}{2} \\ \frac{1}{2}(1+\frac{r}{2}) \end{bmatrix} \neq v(r, 2\pi) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{r}{2} \\ -\frac{1}{2}(1-\frac{r}{2}) \end{bmatrix}$$

\Rightarrow Unstetig beim Übergang $0 \rightarrow 2\pi$

\Rightarrow Möbiusband nicht orientierbar.

Flächeninhalt: $\vec{\varphi}: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ Parameterdarstellung einer Fläche $F = \vec{\varphi}(S)$.

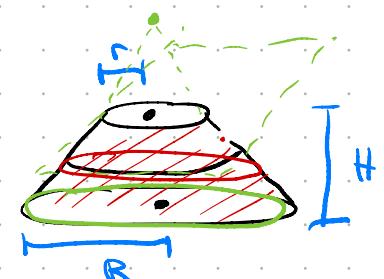
$$|F| = \int_S \| \partial_p \vec{\varphi} \times \partial_q \vec{\varphi} \|_2 dp dq \text{ ist Flächeninhalt.}$$

Beispiel:

Aufgabe 71. (Flächenintegral)
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Mantels vom Kegelstumpf

$$K = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x_3 < H, 0 \leq x_1^2 + x_2^2 < \left(R - \frac{R-r}{H} x_3 \right)^2 \right\}$$

mit Höhe $H > 0$ und Radien $0 < r \leq R$.



I) Zylinderkoordinaten Parameterisierung des Mantelfläche:

$$\delta(\rho, z) = \begin{bmatrix} \left(R - \frac{R-r}{H} z \right) \cos \phi \\ \left(R - \frac{R-r}{H} z \right) \sin \phi \\ z \end{bmatrix} \text{ mit } \delta: (0, 2\pi) \times (0, H) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\text{II) Normalenfeld: } \partial_\phi \delta = \begin{bmatrix} -\left(R - \frac{R-r}{H} z \right) \sin \phi \\ \left(R - \frac{R-r}{H} z \right) \cos \phi \\ 0 \end{bmatrix}, \partial_z \delta = \begin{bmatrix} -\frac{R-r}{H} \cos \phi \\ -\frac{R-r}{H} \sin \phi \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{v}(\phi, z) = \partial_\phi \delta \times \partial_z \delta = \begin{bmatrix} R - \frac{R-r}{H} z \cos \phi \\ -\left(R - \frac{R-r}{H} z \right) \sin \phi \\ \left(R - \frac{R-r}{H} z \right) \frac{R-r}{H} \end{bmatrix}$$

(4)

$$\|\tilde{G}(\phi, z)\|_2 = \dots = \left(R - \frac{R-r}{H} z \right) \sqrt{1 + \frac{(R-r)^2}{H^2}}$$

III) Integral:

$$\int_0^{2\pi} \|\tilde{G}(\phi, z)\|_2 d\phi dz = \int_0^{2\pi} \int_0^H \|\tilde{G}(\phi, z)\|_2 dz$$

$$= 2\pi \cdot \sqrt{1 + \frac{(R-r)^2}{H^2}} \int_0^H \left(R - \frac{R-r}{H} z \right) dz$$

(calculate....)

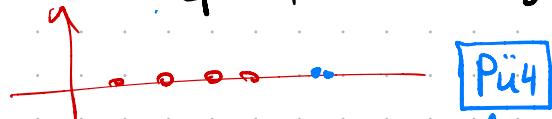
$$\stackrel{?}{=} \pi \sqrt{H^2 + (R-r)^2} (R+r)$$

Reminder : QR Methode :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = A \\ Q_m R_m = A_m \\ A_{m+n} = R_m Q_n \end{array} \right.$$

→ Konvergenz: (siehe Lecture) : $A_m = \Lambda + O(\rho^m)$, mit $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$\text{mit } p := \max_{i=1 \dots n} \left| \frac{2it_1}{x_i} \right|$$



Pü4

↳ Wenn zwei Elbl nahe beieinander \Rightarrow nicht so gut (und QR mit Shift)

↪ Wenn komplexe konjugierte Eigenwerte \Rightarrow Am konvergiert zu oberer Block A-Matr.

$$23 \quad A_m \rightarrow \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & [*] \\ 0 & 0 & 0 & [*] \end{bmatrix}$$

\hat{A} hat dann Elvals λ_j & λ_{jn}

→ Implementierung: → Problem: Jede QR-Decomp. braucht $O(n^3)$

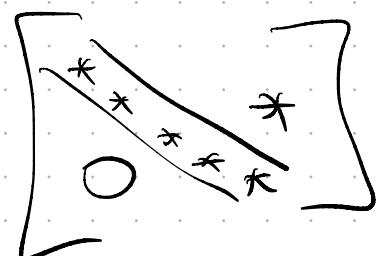
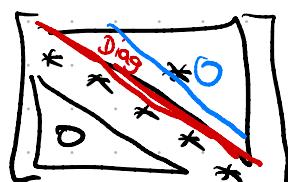
Beobachtung: QR-Decomp für Hessenberg-Matrizen braucht nur $O(n^2)$ und $\tilde{H} = RQ$ bleibt obere Hessenberg (\rightarrow siehe HA).

\Rightarrow Vorbereitung der Matrix auf obere Hessenberg Gestalt (per Ähnlichkeitskolo)

\Rightarrow Hessenberg braucht zwar auch $O(n^3)$, dann aber pro Iterationsschritt nur noch $O(n^2)$ Operationen.

\Rightarrow Für symmetrische Matrizen braucht man nur $O(n)$ Givens - Rotationen mit konstantem Aufwand.

$$\sum A_{ij} = 0$$



Optimization

(kommt überall vor)

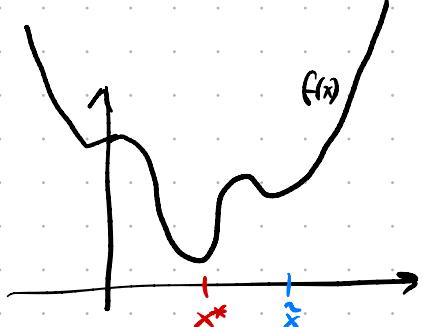
6

Framework:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} h(x) = 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

"Eq. constraints"
"Ineq. constraints"

Goal/Objective $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$



→ Feasibility region $\mathcal{X} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0 \wedge g(x) \geq 0\}$

→ Global Minimum x^* , Local Minimum x

→ Siehe viele Bsp. in der VL

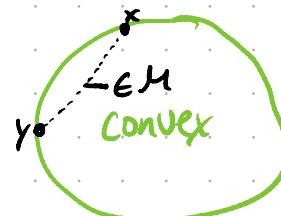
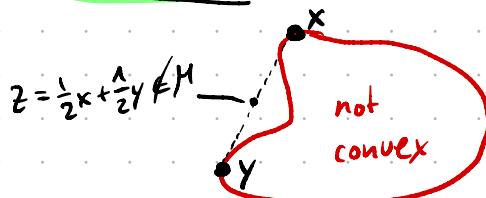
Konvexität: I) Let $M \subset \mathbb{R}^n$ be closed and bounded. Every $f \in C$, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ has at least one minimum and one maximum

II) If for $f \in C^2(M, \mathbb{R})$: A) $\nabla f(x^*) = 0 \wedge \nabla^2 f(x^*) \text{ pos. def.} \Rightarrow$ striktes lokales Minimum
Hessematrix

Frage: Wie können wir sicher sein, dass ein lokales Minimum ein globales ist?

→ Every local minimum of a convex fct. $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ on a convex set M is a global minimum.

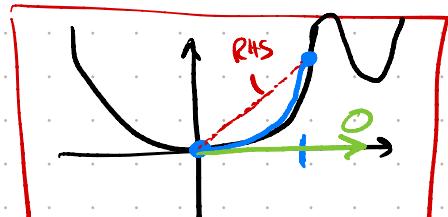
Konvexität von M : Ist $\forall x, y \in M: \lambda x + (1-\lambda)y \in M \quad \forall \lambda \in [0, 1]$



Konvexität von f auf M :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \underbrace{\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)}_{\text{RHS}}$$

LHS



Demo: → Von letzterer Gü : QR, Shift, Givens, Kessenberg