

- TODD**
- Eval, Pi, CES Mathe 2!
 - Satz von Gauß, Flächen
 - Optimierung, Lie Search, Grad Desc., ...

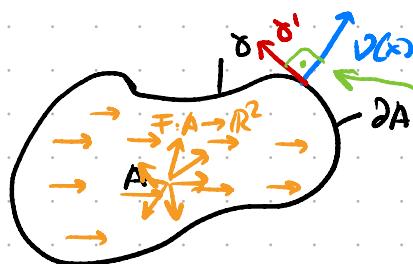
Globalübung 11 Mathe 3 - WS20

20.01.2021
Lambert Theisen

- O:**
- Programmierübung 4 → Moodle → QR Algorithmus
 - Evaluierung noch offen, siehe Güto Notes! (Post links into chat)

A: Satz von Gauß in \mathbb{R}^2

Framework:



- Vektorfeld $F: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ ("Strömung")
- A stückweise glatt berandet
- $\bar{A} = A \cup \partial A$ ($\overline{(0,1)} = [0,1]$)

Außere Normale in $x \in \partial A$ falls:

$$I): \|v(x)\| = 1$$

$$II): v(x) \cdot \gamma'(t_0) = 0 \quad \forall \text{ Randkurven mit } \gamma(t_0) = x$$

$$III): \exists c \in (0, \infty) \text{ sodass } x + cv(x) \notin A \quad \forall c \in (0, c) \\ \text{"Zeigt nach außen"}$$

Satz von Gauß 2D: Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ stückweise glatt berandet und $F: \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig diff'bares Vektorfeld mit ÄN $v(x)$ auf ∂A . Dann:

$$\int_{\partial A} F \cdot v \, ds = \int_A \underbrace{\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \right)}_{\text{div}(F)} dx \quad (\text{"Fluss durch } \partial A \hat{=} \text{ Divergenz in } A\text{"})$$

\cong Maß für Quellen/Senken

Beispiel:

$$\text{zu: } \int_{\partial P} F \cdot v \, ds = \int_A \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \right) dx$$

Aufgabe 114. (Gauss's theorem)
Verify Gauss's theorem for the region bounded by

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 = x^2 + y^2\}$$

for the vector field

I) LHS: Parametrisierung $\partial P = \gamma([0, 2\pi])$

$$F(x, y) = (x, y)^T.$$

$$\text{mit } \gamma(t) = \begin{bmatrix} 4 \cos(t) \\ 4 \sin(t) \end{bmatrix} \Rightarrow T(t) = \gamma'(t) = 4 \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow N(t) = T'(t) = 4 \begin{bmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix}$$

Güg $\|T'(t)\|_2$

$N(t)$ zeigt nach innen. BdG III) der äußeren Normalen bringt daher:

$$v(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} = -N(t)$$

$$\text{Daten: } \int_{\partial P} F \cdot v \, ds = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} 4 \cos(t) \\ 4 \sin(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt = 4 \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 8\pi$$

II) RHS:

$$\int_P \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \right) dx = \int_P (1+1) dx = \int_0^2 \int_0^{2\pi} 2 d\varphi dr = \int_0^2 4\pi r dr = 8\pi \quad (2)$$

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow LHS = RHS$, wie nach Grapf. ✓

Flächen

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ Parameterbereich und $\Phi: B \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix} \mapsto \Phi \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix}$ stetig und diffbar mit $m < n$. Das Bild $F = \Phi(B)$ ist eine Fläche falls $\forall (p_1, \dots, p_m) \in B$, die Vektoren

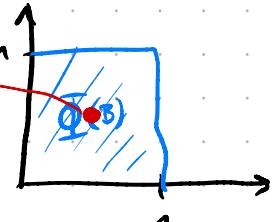
$$\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial p_m} \right\} \text{ linear unabhängig sind}$$

"Fläche wird aufgespannt"

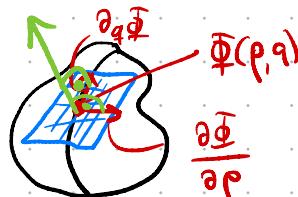
Beispiel Einfache Ebene mit $B = [0, 1]^2$

$$\Phi \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = p_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} = 0.5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \Phi(B) \quad \checkmark$$



Tangentialebene in $(p, q) \in B \subset \mathbb{R}^2$



$$(p, q) \mapsto \Psi_{(p, q)}(\sigma, \tau) = \Phi(p, q) + \sigma \frac{\partial \Phi(p, q)}{\partial p} + \tau \frac{\partial \Phi(p, q)}{\partial q}$$

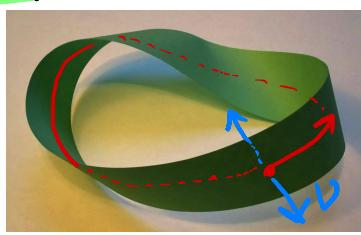
Normalenfeld einer Fläche:

$$\begin{aligned} v_1(p, q) &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \times \frac{\partial \Phi}{\partial q} \right) / \left\| \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \times \frac{\partial \Phi}{\partial q} \right) \right\| \\ v_2(p, q) &= -v_1(p, q) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Vorzeichen gibt} \\ \text{Orientierung} \\ \text{an} \end{array} \right\}$$

Orientierung einer Fläche

: Fläche F orientierbar falls Normalenfeld $v: B \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig.

Beispiel (Köbiusband VL)



Wikipedia

Sei $(r, \alpha) \in [-1, 1] \times [0, 2\pi] =: B$.

$$\begin{pmatrix} r \\ \alpha \end{pmatrix} \mapsto \Phi \begin{pmatrix} r \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{cases} \cos \alpha \cdot \left(1 + \frac{r}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) \\ \sin \alpha \cdot \left(1 + \frac{r}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) \\ \frac{r}{2} \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \end{cases}$$

Wir haben:

$$\frac{\partial_r}{\partial_r} \Phi(r, \alpha) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cos \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \\ \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \\ \frac{r}{2} \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \end{bmatrix}, \frac{\partial_\alpha}{\partial_\alpha} \Phi(r, \alpha) = \begin{bmatrix} \dots \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \text{Normalenfeld } v(r, \alpha) = \partial_r \vec{\varphi} \times \partial_\alpha \vec{\varphi} / \| \partial_r \vec{\varphi} \times \partial_\alpha \vec{\varphi} \| \quad (3)$$

$$\stackrel{(1)}{=} \begin{bmatrix} -\frac{r}{2} \sin \alpha + (1+r \cos \frac{k}{2}) \cos(\alpha) \sin \frac{k}{2} \\ \frac{r}{2} \cos \alpha + (1+r \cos \frac{k}{2}) \sin(\alpha) \sin \frac{k}{2} \\ -(1+r \cos \frac{k}{2}) \cos \frac{k}{2} \end{bmatrix}$$

Scherheit von $v(r, \alpha)$?

$$v(r, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{r}{8} \\ \frac{1}{2}(1+\frac{r}{2}) \end{bmatrix} \neq v(r, 2\pi) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{r}{8} \\ -\frac{1}{2}(1-\frac{r}{2}) \end{bmatrix}$$

\Rightarrow Unstetig beim Übergang $0 \rightarrow 2\pi$

\Rightarrow Möbiusband nicht orientierbar.

Flächeninhalt: $\vec{\varphi}: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$ Parameterdarstellung einer Fläche $F = \vec{\varphi}(\mathbb{S})$.

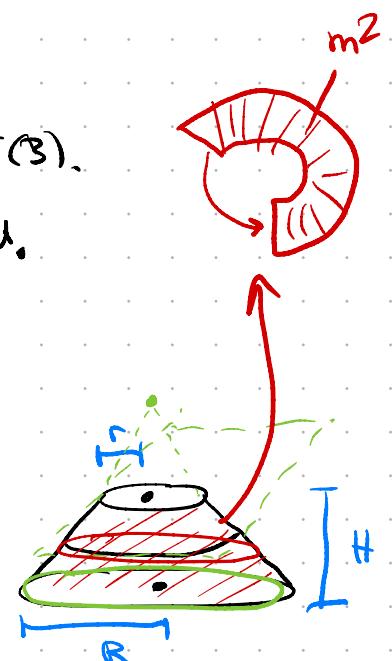
$$|F| = \int_{\mathbb{S}} \| \partial_p \vec{\varphi} \times \partial_q \vec{\varphi} \|_2 dp dq \text{ ist Flächeninhalt.}$$

Beispiel:

Aufgabe 71. (Flächenintegral)
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Mantels vom Kegelstumpf

$$K = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x_3 < H, 0 \leq x_1^2 + x_2^2 < \left(R - \frac{R-r}{H} x_3 \right)^2 \right\}$$

mit Höhe $H > 0$ und Radien $0 < r \leq R$.



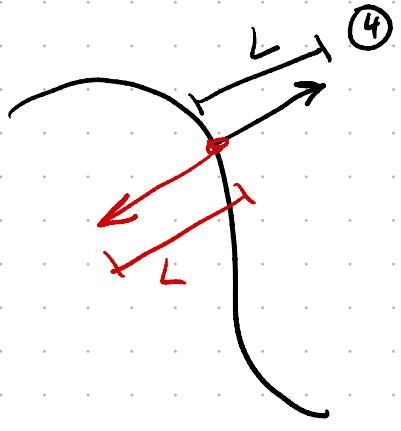
I) Zylinderkoordinaten Parameterisierung des Mantelfläche:

$$\delta(\phi, z) = \begin{bmatrix} \left(R - \frac{R-r}{H} z \right) \cos \phi \\ \left(R - \frac{R-r}{H} z \right) \sin \phi \\ z \end{bmatrix} \text{ mit } \delta: (0, 2\pi) \times (0, H) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\text{II) Normalenfeld: } \partial_\phi \delta = \begin{bmatrix} -\left(R - \frac{R-r}{H} z \right) \sin \phi \\ \left(R - \frac{R-r}{H} z \right) \cos \phi \\ 0 \end{bmatrix}, \partial_z \delta = \begin{bmatrix} -\frac{R-r}{H} \cos \phi \\ -\frac{R-r}{H} \sin \phi \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{v}(\phi, z) = \partial_\phi \delta \times \partial_z \delta = \begin{bmatrix} R - \frac{R-r}{H} z \cos \phi \\ -\left(R - \frac{R-r}{H} z \right) \sin \phi \\ \left(R - \frac{R-r}{H} z \right) \frac{R-r}{H} \end{bmatrix}$$

$$\|\tilde{G}(\phi, z)\|_2 = \dots = \left(R - \frac{R-r}{H}z\right) \sqrt{1 + \frac{(R-r)^2}{H^2}}$$



III) Integral:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^H \underbrace{\|\tilde{G}(\phi, z)\|_2}_{\geq 0} d\phi dz = \int_0^{2\pi} \int_0^H \|\tilde{G}(\phi, z)\|_2 d\phi dz$$

$$= 2\pi \cdot \sqrt{1 + \frac{(R-r)^2}{H^2}} \int_0^H \left(R - \frac{R-r}{H}z\right) dz$$

(calculate....)

$$\stackrel{!}{=} \pi \sqrt{H^2 + (R-r)^2} (R+r) \text{ m}^2 \quad \text{div(F)}$$

N

Optimization

(kommt überall vor)

Framework:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} h(x) = 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

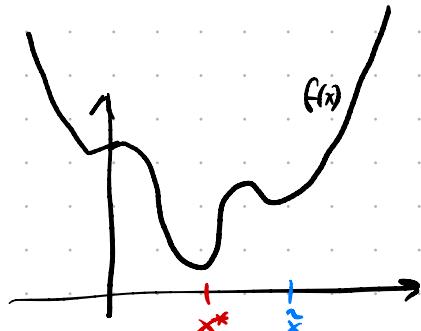
"Eq. constraints"
"Ineq. constraints"

Goal/Objective $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

→ Feasibility region $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0 \wedge g(x) \geq 0\}$

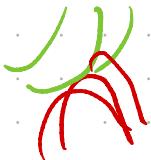
→ Global Minimum x^* , Local Minimum \tilde{x}

→ Siehe viele Bsp. in der VL



Konvexität: I) Let $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ be closed and bounded. Every $f \in C$, $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ has at least one minimum and one maximum.

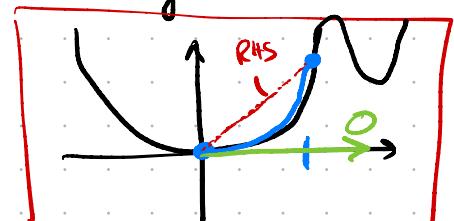
II) If for $f \in C^2(\mathcal{M}, \mathbb{R})$:
 A) $\nabla f(x^*) = 0 \wedge \nabla^2 f(x^*) \geq 0 \Rightarrow$ Lokales Minimum
 B) $\nabla f(x^*) = 0 \wedge \nabla^2 f(x^*) < 0 \Rightarrow$ Lokales Maximum



Frage: Wie können wir sicher sein, dass ein lokales Minimum ein globales ist?

→ Every local minimum of a convex fct. $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ ist a global minimum!

$$\underbrace{f(\lambda x + (1-\lambda)y)}_{\text{LHS}} \leq \underbrace{\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)}_{\text{RHS}} \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

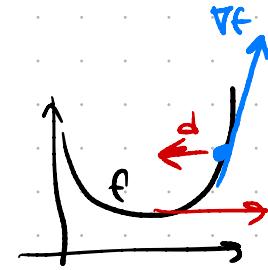


Liniensuche (Line Search):

Allgemeines Framework:

- Given $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$
- For $k=0, 1, \dots$ do
 - Compute Descent Direction: $d^{(k)} \in \mathbb{R}^n$
 - Choose Step Size $\alpha_k > 0$
 - Update: $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}$
- end

- Cool wäre: $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^*$
- Sinnvoll wäre: $\nabla f(x^k) d^k \leq 0$ ("Gehe in Richtung Abstieg")
- Optimal wäre: $\alpha_k = \arg \min_{\alpha} f(x^k + \alpha d^{(k)})$



Spezifische Varianten (bestimmt durch $d^{(k)}$ und α_k):

I) Gradient Descent: $d^{(k)} := -\nabla f(x^{(k)})$ "Gehe in Richtung des Abgangs"

II) Newton auf ∇f : $d^{(k)} := -[\nabla^2 f(x^{(k)})]^{-1} \nabla f(x^{(k)})$ [hat 2nd-order Information durch die Hessematrix (Krümmung)]

→ Findet NS von ∇f (genau das wollen wir)

III) Many more... $\alpha = ?$

Demo : Line Search, Gradient. Descent

