

⑩ : Fragen?

⑪ : Recap: Folgen, Funktionenfolgen

⑫ : Eigenwerte & -vektoren, Recap: BA

Globalübung 15 Mathe 1 - WS 25 (CES)

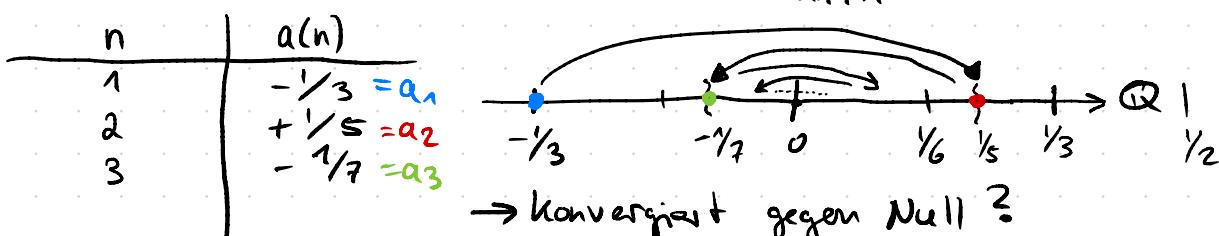
Lambert Theisen
06.02.2026

⑪

⑬ : → Fragen?

A Folgen : Sei $A \neq \emptyset$ Menge. Abbildung $a: \mathbb{N} \rightarrow A$, $n \mapsto a(n)$ heißt Folge

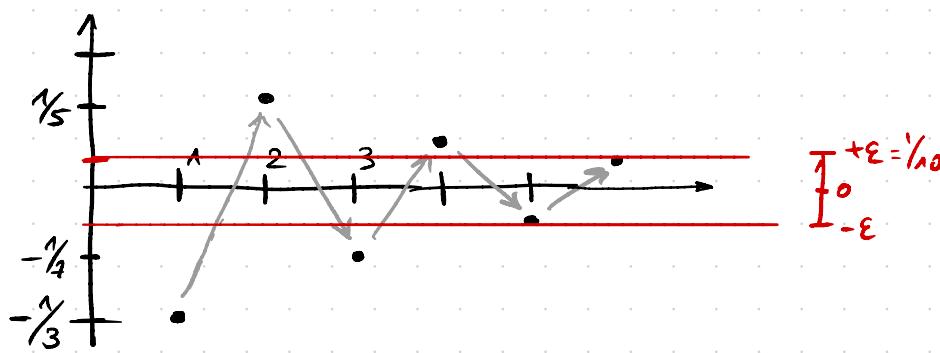
Bsp: $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, $n \mapsto a(n) = : a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$



Grenzwert : Folge $(a_n) \subset \mathbb{K}$ hat GW $a \in \mathbb{K}$, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

"Für alle $\varepsilon > 0$ (also auch für $\varepsilon = 0.0000\dots 1$) müssen wir eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass für alle $n \geq n_0$ ab diesem Zeitpunkt die Abweichung der Folge zum Grenzwert kleiner als ε ist."



Intuition:

ε	n_0
1	1
$0.1 = \Gamma_{10}$	5
$0.01 = \Gamma_{100}$	50
...	...

Formaler Beweis: Nehme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ an.

Noch großzügiger möglich... $\leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$

$$\text{Sei } \varepsilon > 0. \text{ Dann gilt: } \left| \frac{(-1)^n}{2n+1} - 0 \right| = \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n} \leq \varepsilon$$

$$\text{Sofern } \frac{1}{2n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} \leq 2n \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{2\varepsilon}$$

$$\text{Da } n_0 \in \mathbb{N}, \text{ wähle } n_0 = \left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} \right\rceil + 1 \text{ oder } n_0 = \left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} \right\rceil$$

Untere Großenklammer ("abrunden", $\lfloor 0.999 \rfloor = 0$)

Dann dann gilt: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = \lceil \frac{1}{2\varepsilon} \rceil : |a_n - 0| \leq \varepsilon \forall n \geq n_0$

Test: $\varepsilon = \frac{1}{314} \Rightarrow n_0 = \left\lceil \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{314}} \right\rceil = \lceil 157 \rceil = 157$

$$\text{Und } |a_{157} - 0| = \left| \frac{(-1)^{157}}{2 \cdot 157 + 1} \right| = \left| -\frac{1}{315} \right| = \frac{1}{315} < \frac{1}{314}$$

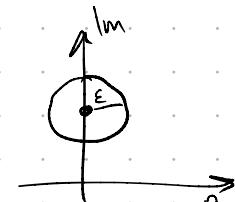
$$|a_m - 0| < \frac{1}{314} \quad \forall m > n_0 = 157$$

Fun Fact zur Folge an:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + a_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\underbrace{\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n+1} \right)}_{n \in \mathbb{N}} \right] = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4} \quad \begin{array}{l} \text{Vergleiche:} \\ \text{Leibniz-Reihe,} \\ \text{nächste A.-VL.} \end{array}$$

Nullfolge: Folge mit GW Null, z.B. $a_n = 0$ von oben.

Im Komplexen C: ε -Umgebung $B_\varepsilon(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \varepsilon\}$



Beschränktheit: $(a_n) \subset \mathbb{K}$ beschränkt $\Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R}, s > 0$ mit $|a_n| \leq s \quad \forall n \in \mathbb{N}$

\rightarrow Bsp: a_n von oben ist beschränkt denn $|a_n| \leq s := 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

\rightarrow Konvergenz \Rightarrow Beschränktheit $\Leftrightarrow \neg(\text{Beschränktheit}) \Rightarrow \neg(\text{Konvergenz})$

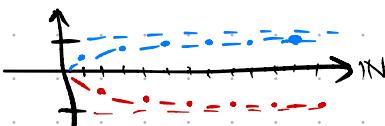
\rightarrow Acht: Beschränktheit \neq Konvergenz ($b_n = (-1)^n$)

\hookrightarrow Rettung: Beschränktheit + Monotonie \Rightarrow Konvergenz

Aber: " " + " $\not\Rightarrow$ Konvergenz $\left[(-1)^n \cdot \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right]$

Bolzano/Weierstraß: Jede beschränkte Folge besitzt min. 1 konvergente Teilfolge.

\rightarrow Bsp: $a_n = (-1)^{n-1} + \frac{(-1)^n}{n+1}$



$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{2} & a_4 &= -\frac{4}{5} \\ a_2 &= -\frac{1}{3} & a_5 &= \frac{5}{6} \\ a_3 &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Cauchy-Folge: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$$

("Ab n_0 wird Abstand zweier Folgenglieder beliebig klein")

→ Bsp: Ist $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ Cauchy?

Sei $\varepsilon > 0$, dann $|a_n - a_m| = \left| \frac{(-1)^n}{2n+1} - \frac{(-1)^m}{2m+1} \right|$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n} &< \frac{\varepsilon}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2\varepsilon} &< \frac{n}{2} \quad \forall n, \varepsilon > 0 \\ \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} &\Rightarrow n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil \end{aligned}$$

mit $n, m > n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\Delta-\text{Ung.}}{\leq} \left| \frac{(-1)^n}{2n+1} \right| + \left| \frac{(-1)^m}{2m+1} \right| \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2m+1} \\ &< \frac{1}{2n} + \frac{1}{2m} \end{aligned}$$

$$< \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon} = \varepsilon \quad \forall n, m > n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$$

→ Nice to know: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\Leftrightarrow (a_n)$ ist Cauchy

Manchmal einfacher zu zeigen, da kein expliziter Grenzwert bekannt sein muss

Sandwich-Lemma: Sei $(a_n), (b_n), (c_n)$ reelle Folgen mit

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq n_0$$

und konvergierten $(a_n), (c_n)$ zum selben Grenzwert d. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = d$$

Bsp: $b_n := \sqrt{n^2 + 2} - n$. Sei $a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt: } a_n = 0 &\stackrel{n \in \mathbb{N}}{=} \sqrt{n^2} - n \leq \sqrt{n^2 + 2} - n = b_n \\ &\leq \sqrt{n^2 + 2 + \frac{1}{n^2}} - n = \sqrt{(n + \frac{1}{n})^2} - n \\ &= n + \frac{1}{n} - n = \frac{1}{n} = c_n \end{aligned}$$

Mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ sowie $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ folgt direkt:

b_n konvergiert ebenfalls mit Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Funktionenfolgen:

DEF): Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $\mathcal{Y}(D, \mathbb{R})$ Menge aller **Funktionen** $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Dann heißt die **Folge** der Flächen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{Y}(D, \mathbb{R})$ **Funktionenfolge**

→ vgl. Zahlenfolgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. ↳ Verallgemeinerung der Begriffe nötig.

Konvergenz (von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen f): $(f \stackrel{\Delta}{=} \text{Begrenzfunktion})$

I) **Punktweise**: $\forall x \in D$ gilt: $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n \geq N$

II) **Gleichmäßig**: $\forall x \in D$ gilt: $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n \geq N$

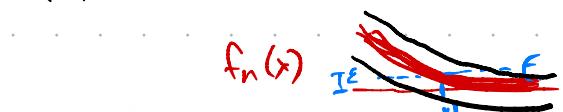
Beispiel: Aufgabe 33

- a) Untersuchen Sie die Funktionenfolge $(f_n)_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) jeweils auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(i) $f_n(x) = nx e^{-nx^2}$ für $x \in D := \mathbb{R}$

(Hinweis: $\lim_{y \rightarrow \infty} ye^{-y} = 0$)

Fälle $\boxed{x=0}$: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = n \cdot 0 \cdot 1 = 0$



$\boxed{x \neq 0}$: $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot x^2 = \infty$, daher mit Hinweis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} (nx^2) e^{-(nx^2)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{x} y e^{-y} \xrightarrow{\text{Hinweis}} 0$$

⇒ Funktionenfolge konvergiert punktweise gegen Nullfunktion.

Vermutung: Konvergenz nicht gleichmäßig.

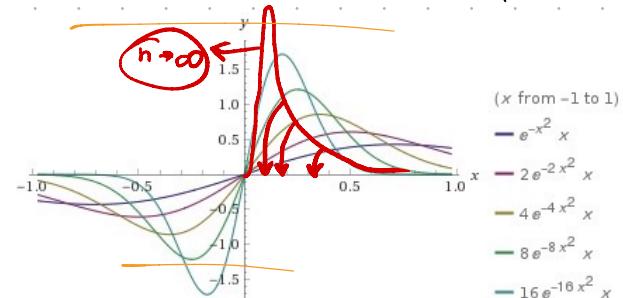
Wäre Konvergenz gleichmäßig, dann gäbe es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in D$ mit $n \geq n_0$

Insbesondere müsste dann auch $|f_n(\frac{1}{n})| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

Es müsste also $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\frac{1}{n})$ doch wir haben:

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n \cdot \frac{1}{n} \cdot e^{-n \cdot \frac{1}{n^2}} = e^{-\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

⇒ Keine Gleichmäßige Konvergenz



LA7 Eigenwerte & Eigenvektoren (Wdh.)

$$A^2 = (S^{-1} \tilde{D} S)(S^{-1} \tilde{D} S) = S^{-1} \tilde{D}^2 S$$

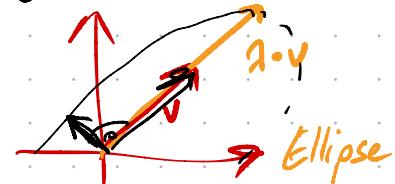
Motivation: Wir wollen $\tilde{D} \doteq S^{-1} A S$ wobei \tilde{D} diagonal.

Ahnliche Matrizen: $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $B = T A T^{-1}$ haben gleiches Spektrum. Daraus muss $\tilde{D} = \text{diag}(\lambda_i(A))$ sein.

Terminologie: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Falls $\exists v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ mit $A v = \lambda v$, dann:

→ Eigenwert λ → zugehöriger Eigenvektor v

→ Spektrum einer Matrix: $\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}^n : Ax = \lambda x\}$



Bestimmung EW/EV: mit Nullstellen des char. Polynoms

$$p_A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto p_A(t) = \det(t \cdot I_n - A)$$

denn falls $\lambda \in \sigma(A)$, dann $p_A(\lambda) = 0$.

Eigenraum: $ER(\lambda) := \ker(\lambda \cdot I_n - A)$

Bedingungen für Diagonalisierbarkeit (für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$)

I) A diagbar $\Leftrightarrow \exists n$ lin. unabh. EV $v_i (i=1 \dots n)$.

II) Algebraische = Geometrische Vielfachheiten $\Leftrightarrow A$ diag. $\forall \lambda$.

$$k_{\lambda_i} = \# \text{NS von } p_A(t) \text{ bei } \lambda_i \quad \text{Dimension Eigenraum } (\lambda_i) = \dim(ER(\lambda_i))$$

III) Falls $p_A(t)$ n paarweise-versch. NS hat $\Leftrightarrow A$ diag.

ZB $\{1, 2, 3\}$ aber nicht $\{1, 1, 2\}$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} p &= (x-2)^3 \\ p_1 &= (x-2)^2(x-1) \quad \text{ly nicht } p_1 \\ p_2 &= (x-1)(x-2)(x-3) \quad \checkmark \quad P_{\text{real}} \end{aligned}$$

$$\dim = 2$$

$$\dim = 1$$

Aufgabe 5.
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

für die bekannt ist, dass ein Eigenwert gleich 2 ist.

- a) Berechnen Sie die übrigen Eigenwerten von A sowie den zum Eigenwert 2 zugehörigen Eigenvektor.
- b) Ist A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.
- c) Zeigen Sie, dass A invertierbar ist.
- d) Es bezeichne I_3 die 3×3 -Einheitsmatrix. Geben Sie die Eigenwerte von

$$B := A - I_3$$

an.

a) $\det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix} \quad \leftarrow$

Laplace Entw. $\equiv (-1)^4 (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-2)[(\lambda-1)(\lambda-4)-1]$

$\lambda_1 = 2$ behaup.
 \uparrow

$= (\lambda-2)(\lambda^2 - 5\lambda + 3)$! \leftarrow Im Zweifel:
→ Polynomdivision

pq-F: $\lambda_{2,3} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 3}$

$\quad \quad \quad = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$

$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$

Eigenräume: $ER_{\lambda_1}(A) = \ker(\lambda_1 \cdot I_3 - A)$

$= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II} \leftrightarrow \text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 - x_3 = 0$

$\Rightarrow x_2 \text{ beliebig}$

$$= \left\{ r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} \right\}$$

$\uparrow e_2$

$\Rightarrow \text{Eigenvektor } v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ zu } \lambda_1 = 2.$

b) Diag'barkeit: Drei paarweise versch. EW.

Wert $\lambda \leq \text{"geom. VFH}(\lambda_i)\text{"} \leq \text{"alg. VFH}(\lambda_i)\text{"} = \lambda_i$

$$\Rightarrow \text{GVFH}(\lambda_i) = \text{AVFH}(\lambda_i) \quad \forall i$$

$\Rightarrow A$ diag'bar.

c) Invertierbarkeit $\Leftrightarrow \exists A^{-1}$ mit $A^{-1}A = AA^{-1} = I$

$$\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Wir wissen $\det(A) = \det(D) [D = SAS^{-1} \text{ (ähnlich)}]$

Daher $\det(A) = \prod_{i=1}^3 \lambda_i = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0$ denn $\lambda_i \neq 0 \forall i$.

$\Rightarrow A$ invertierbar.

d) Spektralshift: $\sigma(B)$ gesucht mit $B := A - \lambda I_3$

Easy denn $\lambda_i(B) = \lambda_i(A) - \underbrace{\lambda_i(I_3)}_{=1}$

Gram-Schmidt Orthogonalisierung:

Jede Menge $B = \{x_1, \dots, x_m\} \subset V$ lin. unabh. Vektoren lässt sich zu einem ON-System $B' = \{y_1, \dots, y_m\} \subset V$ umwandeln, sodass

$$\text{span}(B) = \text{span}(B')$$

Algorithmus für $B = \{x_1, \dots, x_m\}$ \rightarrow Beispiel: $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

$$1) y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$$

2) Für $i = 2 \dots m$:

$$\tilde{y}_i = x_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle x_i, y_j \rangle y_j$$

$$y_i = \frac{\tilde{y}_i}{\|\tilde{y}_i\|}$$

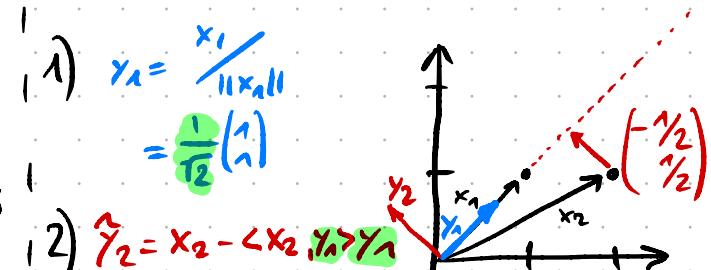
3) $B' = \{y_1, \dots, y_m\}$ ist ONB

$$1) y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2) \tilde{y}_2 = x_2 - \langle x_2, y_1 \rangle y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \cdot 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$y_2 = \frac{\tilde{y}_2}{\|\tilde{y}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



Best approximation: $\exists \mathbb{B} \subset \mathbb{R}^2 = V$

Sei V \mathbb{R} -Vektorraum mit SkP $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $U \subseteq V$ UR. Dann:

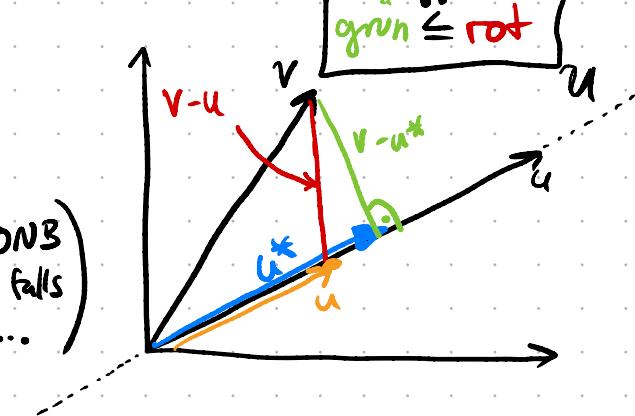
$\forall v \in V : \exists u^* \in U$ mit $\|v - u^*\| = \inf_{u \in U} \|v - u\|$.

Außerdem: $\langle v - u^*, u \rangle = 0 \quad \forall u \in U$

→ Berechnung in ONB $\{u_1, \dots, u_m\}$:

$$u^* = \sum_{k=1}^m \alpha_k u_k \quad \text{wobei (easy, wenn ONB)} \\ \text{vorliegt. GS falls} \\ \text{keine ONB ...}$$

$$\alpha_k = \langle v, u_i \rangle$$



Beispiel (Klausur 2014):

Aufgabe 11.
Seien

$$w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vektoren im \mathbb{R}^4 und $U := \text{span}\{w_1, w_2\} \leq \mathbb{R}^4$ ein Untervektorraum. Bestimmen Sie die Bestapproximation von b bezüglich U , d.h. finden Sie $v^* \in U$ mit

$$\|v^* - b\| \leq \|v - b\| \quad \text{für alle } v \in U.$$

Tipp: Berechnen Sie zuerst eine Orthonormalbasis von U .

3 Punkte

$$\textcircled{1} \text{ GS: } v_1 = \frac{1}{\|w_1\|_2} w_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2+(-1)^2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \tilde{v}_2 = w_2 - \langle w_2, v_1 \rangle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

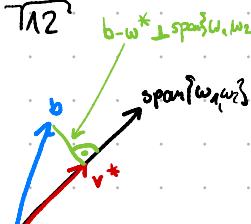
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} (-2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot v_2 = \frac{1}{\|w_2\|_2} \tilde{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} \tilde{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Koeffizienten der Bestapproximation: $\alpha_1 = \langle v_1, b \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = -6$

$$\alpha_2 = \langle v_2, b \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{12}{\sqrt{12}}$$

$$\text{Also } v^* = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 v_2 = -6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{12}{\sqrt{12}} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ = -3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$



Test Fehler mit senkrecht auf $\text{span}\{w_1, w_2\}$: $\langle w_1, v^* - b \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \checkmark$, $\langle w_2, v^* - b \rangle = \dots = 0 \checkmark$

Orthogonales Komplement:

$$U^\perp := \{x \in V : \langle x, u \rangle = 0 \forall u \in U\}$$

→ Bsp: $U = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}\}$

$$\Rightarrow U^\perp = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, B \in \mathbb{R}\}$$

→ Strategie für z.B. $U = \text{span}(x_1, x_2)$ wobei $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^4$:

- 1) Erweiterung von $\{x_1, x_2\}$ zu Basis von \mathbb{R}^4 mit $\{x_3, x_4\}$
- 2) Erstellung ONB aus $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ mit GS
- 3) Ortho. Komplement zu $\text{span}\{y_1, y_2\}$ ist dann $\text{span}\{y_3, y_4\}$

↑ y_i mit Gram-Schmidt

