TODO:
LA: Orthogonalität, LinComb, GS, B/A
A: Reihen, Bsp, Teleskop, Konv-Kriterien

MATHE 1 (CES) – GLOBALÜBUNG 06 – 14.11.19

LA

Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_m\} \subset V$ falls:

Next week!

1) $\mathcal{B}$ ist Basis von V
2) Orthogonalität: $\langle x_i, x_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$
3) Normalität: $\|x_i\|_2 = \sqrt{\langle x_i, x_i \rangle} = 1$

Orthonormalität: $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

"Kronecker-Delta"

Linearkombination in ONB

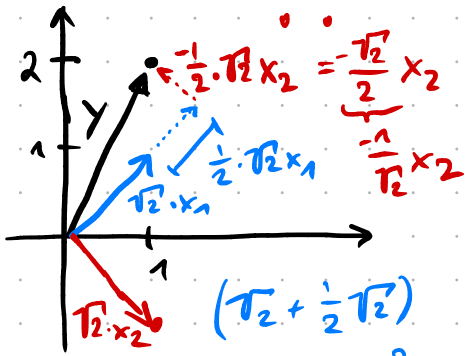
$$y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \in V \quad \text{mit} \quad \alpha_k = \langle y, x_k \rangle \quad \left(\alpha_k = \frac{\langle y, x_k \rangle}{\langle x_k, x_k \rangle} \text{ für "nur" orthog.}\right)$$

→ **Bsp:** $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} =: y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \quad \text{mit}$$

$$\alpha_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(3) = 3/\sqrt{2}$$

$$\alpha_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1) = -1/\sqrt{2}$$



$$\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Gram-Schmidt Orthogonalisierung:

Jede Menge $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_m\} \subset V$ lin. unabh. Vektoren lässt sich zu einem ON-System $\mathcal{B}' = \{y_1, \dots, y_m\} \subset V$ umwandeln, sodass

$$\operatorname{span}(\mathcal{B}) = \operatorname{span}(\mathcal{B}').$$

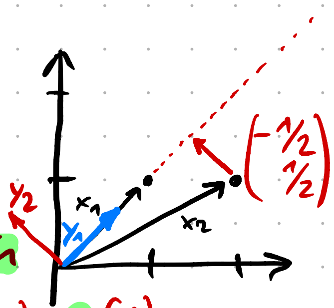
→ **Algorithmus für $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_m\}$**

1) $y_1 = x_1 / \|x_1\|$
2) Für $i = 2 \dots m$:
   $\tilde{y}_i = x_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle x_i, y_j \rangle y_j$
   $y_i = \tilde{y}_i / \|\tilde{y}_i\|$
3) $\mathcal{B}' = \{y_1, \dots, y_m\}$ ist ONB

Frage: LAbh. in GS:
$\mathcal{B} = \Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overset{y_2 = x_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}_{\text{Basis}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Unnötig}} \Big\}, \quad \tilde{y}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ⇒ Nullvektor entsteht!

→ **Beispiel:** $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

1) $y_1 = x_1 / \|x_1\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



2) $\tilde{y}_2 = x_2 - \langle x_2, y_1 \rangle y_1$
$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

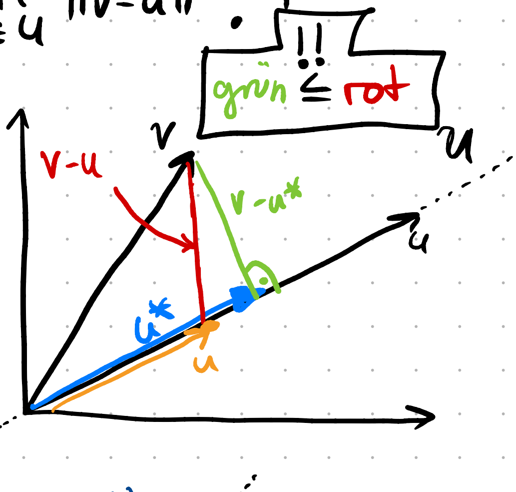
$y_2 = \tilde{y}_2 / \|\tilde{y}_2\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \tilde{y}_2$

Bestapproximation: zB $\mathbb{R}^2 = V$

Sei V $\mathbb{R}$-Vektorraum mit SkP $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $U \leq V$ UR. Dann:

$$\forall v \in V: \exists u^* \in U \text{ mit } \|v - u^*\| = \inf_{u \in U} \|v - u\|.$$

Außerdem: $\langle v - u^*, u \rangle = 0 \quad \forall u \in U$



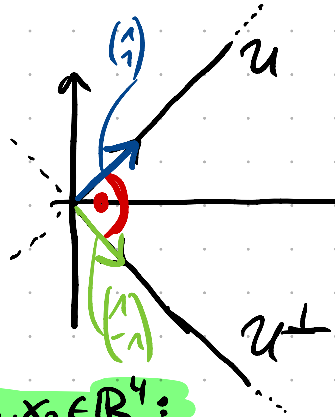
→ **Berechnung in $\boxed{\text{ONB}}$ $\{u_1, \ldots, u_m\}$:**

$u^* = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k u_k$ wobei (easy, wenn ONB vorliegt. GS falls keine ONB ...)

$\alpha_k = \langle v, u_i \rangle$

Orthogonales Komplement:

$$\mathcal{U}^\perp := \{ x \in V : \langle x, u \rangle = 0 \ \forall u \in \mathcal{U} \}$$



→ **Bsp**: $\mathcal{U} = \{ x \in \mathbb{R}^2 : x = \alpha \cdot \binom{1}{1}, \alpha \in \mathbb{R} \}$

$\Rightarrow \mathcal{U}^\perp = \{ x \in \mathbb{R}^2 : x = \beta \cdot \binom{1}{-1}, \beta \in \mathbb{R} \}$

→ **Strategie für zB. $\mathcal{U} = \operatorname{span}(x_1, x_2)$ wobei $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^4$:**

1) Erweiterung von $\{x_1, x_2\}$ zu Basis von $\mathbb{R}^4$ mit $\{x_3, x_4\}$
2) Erstellung ONB aus $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ mit GS
3) Ortho. Komplement zu $\operatorname{span}\{y_1, y_2\}$ ist dann $\operatorname{span}\{y_3, y_4\}$

y_i mit Gram-Schmidt

A Reihen

$(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ ist Folge.

→ **n-te Partialsumme**: $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

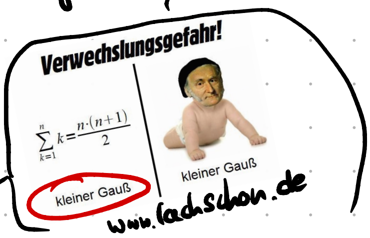
→ **Reihe** ≙ Folge der Partialsummen: $(S_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_1, a_1 + a_2, \ldots)$

mit $\lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (falls existent)

→ **Beispiele**:

1) Arithmetische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k$ divergiert, denn: $1 + 2 + 3 + \ldots$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow{n \to \infty} \infty$$



2) **Geometrische Reihe**: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert für $|q|<1$, denn: ③

n=5 $\quad S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für $q \neq 1$ (Euklid, ≈ 300 v. Chr.)

Grenzwert für $|q|<1$: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

HA-Tipp: Gilt auch für $q \in \mathbb{C}$

3) **Harmonische Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ obwohl $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ NF !

3) NF (a_k) $\not\Rightarrow$ Reihe konvergiert.

Teleskop-Trick:

→ **Bsp**: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$

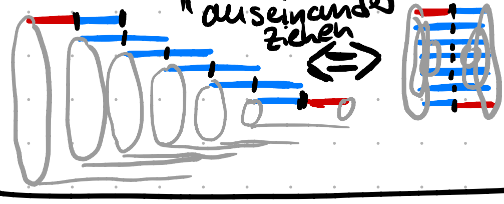
k^0 I) $1 \cdot a = 1$ ⇑ $a=1$

k^1 II) $k(a+b) = 0 \cdot k$ ⇒ $b=-1$

Partialbruchzerlegung (PBZ):
→ SRÜ morgen, oder jetzt?

live → $\frac{1+0k}{k(k+1)} \overset{!}{=} \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{a(k+1)+b\cdot k}{k(k+1)}$

Teleskop:



$k=1 \; \cdots\cdots = 1 - \frac{1}{2}$

$k=2 \; \cdots\cdots + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

$k=3 \; \cdots\cdots + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

$k =$ u.s.w. $\cdots\cdots + \ldots$

$k=n \; \cdots\cdots + \ldots - \frac{1}{n+1}$

etwas formaler $\overset{}{=}$ $\left(1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{n+1} \right)$

$= \left(1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}}_{=0} + \frac{1}{n+1} \right) \xrightarrow{n\to\infty} 1$

Index-Shift: $\sum_{k=2}^{n} k = \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)$ legit.

Konvergenzkriterien:

1) **Trivialkriterium**: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert $\Rightarrow (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge

$\Leftrightarrow$ a_k keine NF $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert.

Rezept (Wikipedia) ④

→ PDF in Moodle ;-)

2) Leibnitz-Kriterium:

Alternierende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$ konvergiert falls a_k monotone Nullfolge.

3) Quotienten-Kriterium:

Abs. konv. $\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ konv.}\right)$

falls:

$$\exists\, q<1 : \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \le q \;\; \forall k \ge N$$

4) Wurzel-Kriterium:

Abs. konv. falls:

$$\exists\, q<1 : \sqrt[k]{|a_k|} \le q \;\; \forall k \ge N$$

5) Majoranten-Kriterium:

Absolute Konvergenz, falls:

$\exists$ konv. Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, $c_k \in \mathbb{R}_+$

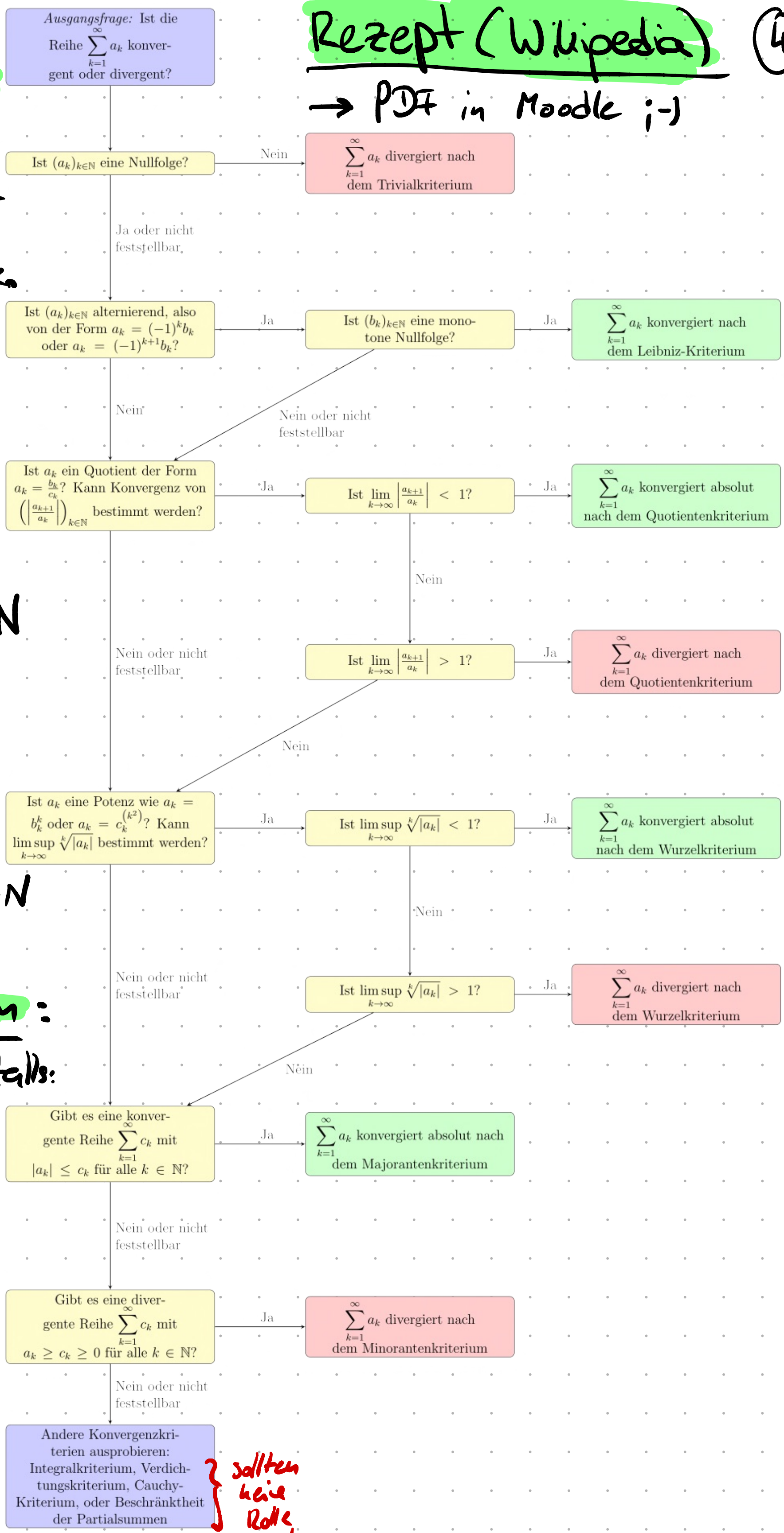
mit $|a_k| \le c_k \;\; \forall k \ge N$

6) Minoranten-Kriterium

Divergenz falls:

$\exists$ diverg. Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$

mit $a_k \ge d_k \ge 0 \;\; \forall k \in \mathbb{N}$

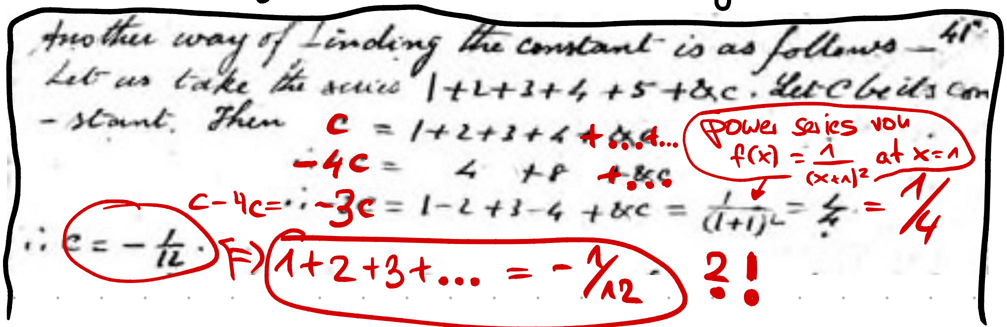


} sollten keine Rolle spielen

Absolute Konvergenz: von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

→ Summationsreihenfolge egal. Warum ist das eigentlich wichtig?

Ramanujan:
(1887-1920)



Another way of finding the constant is as follows — 41
Let us take the series $1+2+3+4+5+\&c$. Let C be its constant. Then

$c = 1+2+3+4+\&c\ldots$

$-4c = \quad 4 \quad +8 \quad +\&c$

$c-4c = \; \therefore -3c = 1-2+3-4+\&c = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$

power series von $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ at $x=1$

$\therefore c = -\frac{1}{12}$ ⇒ $1+2+3+\ldots = -\frac{1}{12}$?!

Sei nun $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Dann ist

$s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (k+1) = 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + (-1)^n (n+1)$

5

$$\begin{aligned}
4s &= (1-2+3-4+\cdots) \quad +(1-2+3-4+\cdots) \quad +(1-2+3-4+\cdots) \quad +(1-2+3-4+\cdots) \\
&= (1-2+3-4+\cdots) \quad +1+(-2+3-4+5-\cdots) \quad +1+(-2+3-4+5-\cdots) \quad -1+(3-4+5-6+\cdots) \\
&= 1+[\ (1-2-2+3) \quad +(-2+3+3-4) \quad +(3-4-4+5) \quad +(-4+5+5-6)+\cdots] \\
&= 1+[\ 0+0+0+0+\cdots] \\
4s &= 1
\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 \overset{?!}{=} 1/4$

Euler: Paradoxon von alternierenden Reihen