

- : Evaluierung
- : Potential, Existenz, Flächen
- : Stepsize, Armijo, Wolfe

Globalübung 12

Mathe 3 - WS24/25

15.01.2025
Lambert Thiesen

Neminder Potential: Falls $f = \nabla \varphi$, $\varphi \in \text{Pot.}$

Einfach zsm. hängende Mengen: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt einfach weg zsm. hängend, falls Ω weg zsm. hängend & sich jeder geschlossene Weg in stetiger Art und Weise auf einen Pkt. in Ω zsm. ziehen lässt.

Satz 2 zu

Existenz eines Potentials: Sei Ω einfach weg zsm. hängend ($\{\bullet\}, \{\circlearrowleft\}, \{\circlearrowright\}, \{\circlearrowuparrow\}$) und $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein diff'bares Vektorfeld. Falls ∇F symmetrisch ($\text{rot } F = 0, \nabla \times F = 0$), genau dann hat F ein Potential.

Bsp 1 (VL): $F(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 x_2^2 \\ 2x_1^2 x_2 + 1 \end{pmatrix}$ auf \mathbb{R}^2
 $\Rightarrow \nabla F = \begin{bmatrix} 2x_2^2 & 4x_1 x_2 \\ 4x_1 x_2 & 2x_1^2 \end{bmatrix}$ symmetrisch!

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1} &= F_1 = 2x_1 x_2^2 \Rightarrow \varphi(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2 + g(x_2) \\ \rightarrow \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_2} &= 2x_1^2 x_2 + g'(x_2) \Rightarrow F_2 = 2x_1^2 x_2 + 1 \Rightarrow g(x_2) = x_2 \\ &\Rightarrow \varphi = x_1^2 x_2^2 + x_2 \end{aligned}$$

Beispiel: a) $D_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$
 \uparrow
weil $\ln(y)$ \Rightarrow einfach weg zsm.

b) D_f ist einfach zsm. hängend ✓
 $\text{rot } f = \nabla \times f = \begin{pmatrix} \partial_y f_3 - \partial_z f_2 \\ \partial_z f_1 - \partial_x f_3 \\ \partial_x f_2 - \partial_y f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3x^2 \sin(z) - (-3x^2 \sin(z)) \\ 0 \end{pmatrix}$
 Diagonale weglassen
 $= 0 \Rightarrow f$ hat Potential! nach Satz 2

Bestimmung Potential ϕ :

$$\begin{aligned} \partial_x \phi &= f_1 = 3x^2 \cos(z) \Rightarrow \phi(x, y, z) = x^3 \cos(z) + k_1(y, z) \\ \partial_y \phi &= f_2 = \ln(y) \Rightarrow \phi(x, y, z) = y \ln(y) - y + k_2(x, z) \\ \partial_z \phi &= f_3 = -x^3 \sin(z) \Rightarrow \phi(x, y, z) = x^3 \cos(z) + k_3(x, y) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \phi(x, y, z) = y \ln(y) - y + x^3 \cos(z) + k, k \in \mathbb{R}$$

c) Arbeitsintegral direkt: $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}, t \in [0, 1]$ (Parametrisierung)

$$\int_0^1 \langle f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 3t^2 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 (3t^2 + t e^t) dt = \left[t^3 + t e^t \right]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = 1 + e - e + 1 = 2$$

Bsp 2 (VL): $F(x) = \begin{bmatrix} -x_2 / (x_1^2 + x_2^2) \\ x_1 / (x_1^2 + x_2^2) \end{bmatrix}$ auf $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

hätte ∇F symmetrisch (und würde $\varphi(x) = -\arctan(\frac{x_1}{x_2})$ haben)

Allerdings gilt für geschl. Weg $\Gamma = \gamma([0, 2\pi])$ mit $\gamma(t) = \begin{cases} \cos(t) \\ \sin(t) \end{cases}$: $\int_{\Gamma} F = \dots = 2\pi \neq 0$

\Rightarrow Einfach zsm. hängend ist entscheidend!

Aufgabe 45. (Arbeitsintegral / Potential)
Gegeben sei das Vektorfeld

$$f: D_f \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2 \cos z \\ \ln y \\ -x^3 \sin z \end{pmatrix}.$$

a) Was ist der Definitionsbereich D_f von f ?

b) Weisen Sie nach, dass f ein Potential besitzt, und berechnen Sie dieses.

c) Berechnen Sie das Arbeitsintegral

$$\int_{\Gamma} f \cdot dx$$

direkt. Die Kurve γ ist dabei die Verbindung der Punkte $(0, 1, 0)^T$ und $(1, e, 0)^T$ entlang des Graphen der Funktion $g(x) = e^x$ in der xy -Ebene.

d) Berechnen Sie das Arbeitsintegral

$$\int_{\Gamma} f \cdot dx$$

mit Hilfe des in b) bestimmten Potentials.

Folgerung:
Kann nur eine Konstante sein

2

d) Arbeitsintegral mit Potential: \rightsquigarrow Einsetzen [Anfangs] & [Endpunkt] von γ
 $\begin{cases} (0, 1, 0)^T \\ (1, e, 0)^T \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} f \cdot dx = \Phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ e \\ 0 \end{pmatrix}\right) - \Phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left[\underbrace{e \ln(e)}_{=e} - \underbrace{e + 1^3 \cos(0)}_1 \right] - \left[\underbrace{1 \ln(1)}_0 - \underbrace{1 + 0^3 \cos(0)}_0 \right] = 2$$

Flächen
(in nDim)

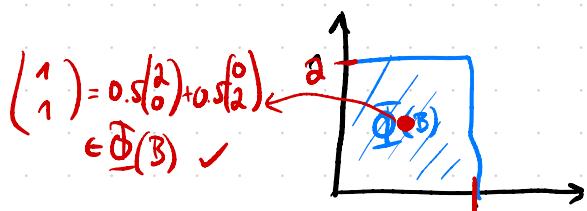
Sei $B \subset \mathbb{R}^m$ Parameterbereich und $\Phi: B \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix} \mapsto \Phi\left(\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix}\right)$ stetig
und diffbar mit mcn. Das Bild $F = \Phi(B)$ ist eine Fläche falls $\forall (p_1, \dots, p_m) \in B$, die Vektoren

$\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial p_m} \right\}$ linear unabhängig sind
 \Rightarrow Bei uns $m=2$.

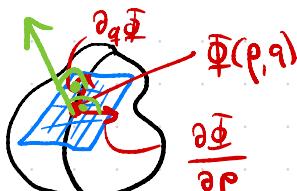
"Fläche wird aufgespannt"

Beispiel Eine Ebene mit $B = [0, 1]^2$

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}\right) = p_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Tangentialebene in $(p_1, p_2) \in B \subset \mathbb{R}^2$



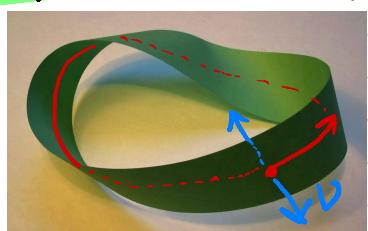
$$(\sigma, \tau) \mapsto \Psi_{(p_1, p_2)}(\sigma, \tau) = \Phi(p_1, p_2) + \sigma \frac{\partial \Phi(p_1, p_2)}{\partial p} + \tau \frac{\partial \Phi(p_1, p_2)}{\partial q}$$

Normalenfeld einer Fläche: ("Flächennormale")

$$N(p_1, p_2) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \times \frac{\partial \Phi}{\partial q} \right) / \| \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \times \frac{\partial \Phi}{\partial q} \right) \|_2 \quad \text{(Vorzeichen gibt Orientierung an)}$$

Orientierung einer Fläche: Fläche F orientierbar falls Normalenfeld $N: B \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig.

Beispiel (Köbiusband VL)



Wikipedia

Sei $(r, \alpha) \in [-1, 1] \times [0, 2\pi] =: B$.

$$\begin{pmatrix} r \\ \alpha \end{pmatrix} \mapsto \Phi(r, \alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cdot (1 + \frac{r}{2} \cos \frac{\alpha}{2}) \\ \sin \alpha \cdot (1 + \frac{r}{2} \cos \frac{\alpha}{2}) \\ \frac{r}{2} \sin(\frac{\alpha}{2}) \end{bmatrix}$$

Wir haben:

$$\partial_r \Phi(r, \alpha) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cos \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \\ \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \\ \frac{1}{2} \sin(\frac{\alpha}{2}) \end{bmatrix}, \quad \partial_\alpha \Phi(r, \alpha) = \begin{bmatrix} \dots \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \text{Normalenfeld } \nu(r, \alpha) = \partial_r \vec{\varphi} \times \partial_\alpha \vec{\varphi} / \| \partial_r \vec{\varphi} \times \partial_\alpha \vec{\varphi} \| \quad (3)$$

$$\stackrel{(=)}{=} \begin{bmatrix} -\frac{r}{2} \sin \alpha + (1+r \cos \frac{k}{2}) \cos(\alpha) \sin \frac{k}{2} \\ \frac{r}{2} \cos \alpha + (1+r \cos \frac{k}{2}) \sin(\alpha) \sin \frac{k}{2} \\ -(1+r \cos \frac{k}{2}) \cos \frac{k}{2} \end{bmatrix}$$

Stetigkeit von $\nu(r, \alpha)$?

$$\nu(r, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -r/8 \\ \frac{1}{2}(1+r/2) \end{bmatrix} \neq \nu(r, 2\pi) = \begin{bmatrix} 0 \\ r/8 \\ -\frac{1}{2}(1-r/2) \end{bmatrix}$$

\Rightarrow Unstetig beim Übergang $0 \rightarrow 2\pi$

\Rightarrow Möbiusband nicht orientierbar.

Flächeninhalt: $\vec{\varphi}: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ Parameterdarstellung einer Fläche $F = \vec{\varphi}(S)$.

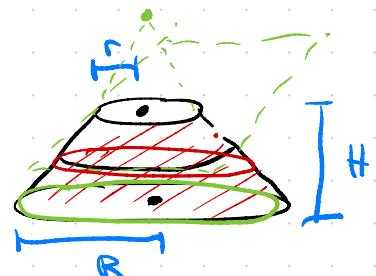
$|F| = \int_S \| \partial_p \vec{\varphi} \times \partial_q \vec{\varphi} \|_2 dp dq$ ist Flächeninhalt.

Beispiel:

Aufgabe 71. (Flächenintegral)
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Mantels vom Kegelstumpf

$$K = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x_3 < H, 0 \leq x_1^2 + x_2^2 < \left(R - \frac{R-r}{H} x_3 \right)^2 \right\}$$

mit Höhe $H > 0$ und Radien $0 < r \leq R$.



I) Zylinderkoordinaten Parameterisierung des Mantelfläche:

$$\gamma(\rho, z) = \begin{bmatrix} \left(R - \frac{R-r}{H} z \right) \cos \phi \\ \left(R - \frac{R-r}{H} z \right) \sin \phi \\ z \end{bmatrix} \quad \text{mit } \gamma: (0, 2\pi) \times (0, H) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

II) Normalenfeld: $\partial_\rho \gamma = \begin{bmatrix} -\left(R - \frac{R-r}{H} z \right) \sin \phi \\ \left(R - \frac{R-r}{H} z \right) \cos \phi \\ 0 \end{bmatrix}, \partial_z \gamma = \begin{bmatrix} -\frac{R-r}{H} \cos \phi \\ -\frac{R-r}{H} \sin \phi \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \tilde{\nu}(\phi, z) = \partial_\rho \gamma \times \partial_z \gamma = \begin{bmatrix} R - \frac{R-r}{H} z \cos \phi \\ -\left(R - \frac{R-r}{H} z \right) \sin \phi \\ \left(R - \frac{R-r}{H} z \right) \frac{R-r}{H} \end{bmatrix}$$

$$\|\tilde{G}(\phi, z)\|_2 = \dots = \left(R - \frac{R-r}{H} z \right) \sqrt{1 + \frac{(R-r)^2}{H^2}}$$

III) Integral:

$$\int_0^{2\pi} \|\tilde{G}(\phi, z)\|_2 d\phi dz = \int_0^H \int_0^{2\pi} \|\tilde{G}(\phi, z)\|_2 d\phi dz$$

$$= 2\pi \cdot \sqrt{1 + \frac{(R-r)^2}{H^2}} \int_0^H \left(R - \frac{R-r}{H} z \right) dz$$

(calculate....)

$$\stackrel{!}{=} \pi \sqrt{H^2 + (R-r)^2} (R+r)$$

N: Recap: Line Search Methods (GD, Newton, ...) mit Schrittweite α_k .

Schrittweiten-Wahl:

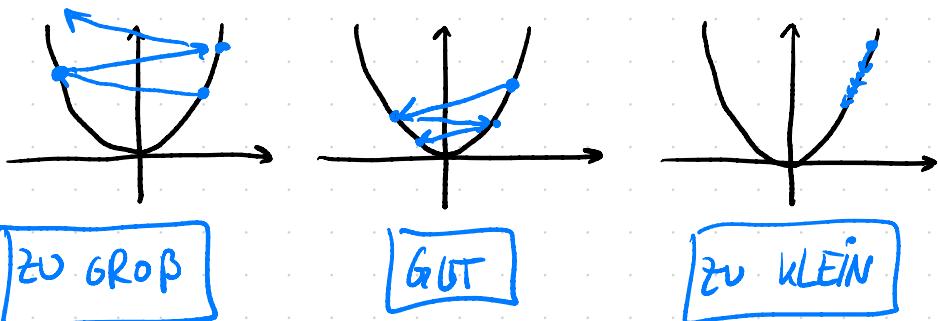
→ Wir haben letzte Woche im Itag NB geschen, dass die Wahl von α_k entscheidend ist für:

I) Konvergenz

II) Schnelligkeit der Konvergenz

Daher stellt sich die Frage: "Wie wählt man das α_k ?"

Trial-And-Error:



und wir brauchen etwas besseres.

Stepsize Control Algorithmus

```

• Given  $x^{(k)}$ ,  $\alpha_{\max} > 0$ , shrinking factor  $\beta \in (0, 1)$ 
• Init:  $\alpha = \alpha_{\max}$ 
• While ! CONDITION( $\alpha_k$ ) do
    •  $\alpha_k \leftarrow \beta \cdot \alpha_{k-1}$  (Decrease stepsize)
• end
  
```

→ Backtracking Algorithmus $\hat{=}$ Stepsize Control mit Armijo Bedingung:

Armijo-Bedingung:

Für $c_1 \in (0, 1)$, wähle $\alpha_k > 0$ sodass:

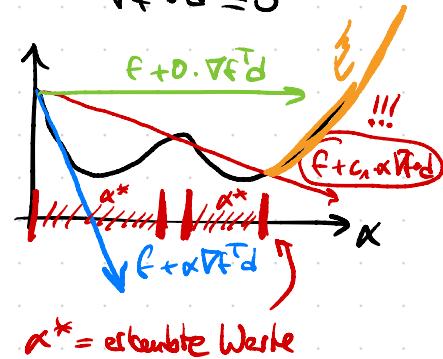
$$f(x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}) \leq f(x^{(k)}) + c_1 \cdot \alpha_k \cdot \nabla f(x^{(k)})^T d^{(k)}$$

$\overbrace{\alpha_k}^{>0} \overbrace{\nabla f(x^{(k)})^T d^{(k)}}^{>0} \underbrace{\leq 0}_{\leq 0} \Rightarrow$ Strenger als "nur" $\nabla f \cdot d \leq 0$

\Rightarrow Verbietet zu große Schritte

\Rightarrow Problem: Sehr kleine Schritte sind erlaubt.

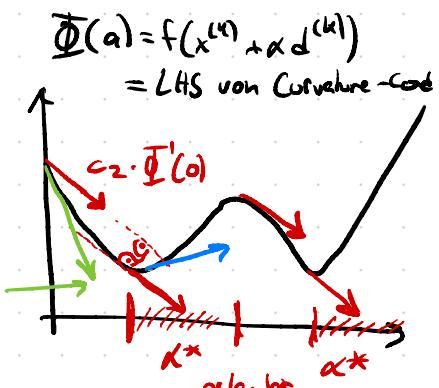
Daher: Krümmungsbedingung



Curvature-Bedingung:

Für $c_2 \in (0, 1)$, wähle $\alpha_k > 0$ sodass:

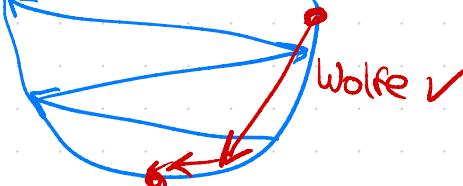
$$\nabla f(x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)})^T d^{(k)} \geq c_2 \cdot \nabla f(x^{(k)})^T d^{(k)}$$



\rightarrow Verbietet zu kurze Schrittweiten.

Wolfe Bedingungen:

- I) Armijo Bedingung
- II) Krümmungsbedingung



Mit Wolfe Bedingungen: $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f(x^{(k)})\| = 0$ (Konvergenz zu einem stationären Punkt)

Demo:

Line Search GD

