

- Vorstellung, HW, SRL, Termine
- Aussagenlogik, Mengen, Relationen

MATTHE 1 [CES]

Globalübung 1

WS25

17.10.25 ①
Lambert Theisen,

0

Lambert:

CES:

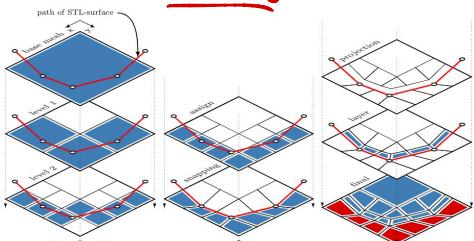
- B.Sc. 2014 - 2018 (Thesis @ Torriconi)
- M.Sc. 2018 - 2019 (Thesis @ Torriconi)

Applied Math:

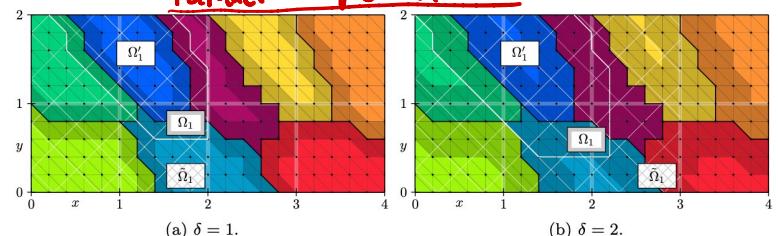
- Dr. 2019 - 2024 (Thesis @ Stamm in Aachen/Stuttgart)
- Post-doc 2024 - now @ ACOM

Fragen: Per Moodle oder Mail (\rightarrow www.thsn.de)

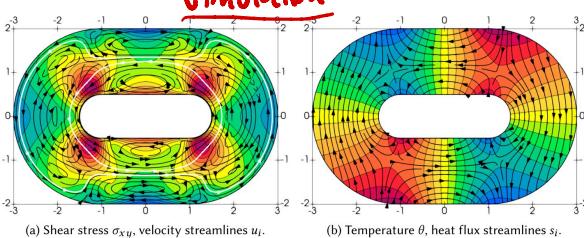
Meshing:



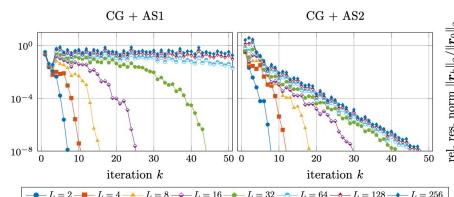
Parallel implementation:



Simulation:



Mathematische Analyse:



Ablauf:

\rightarrow GU: Lambert (erste Hälfte) & Gerogi (zweite)

\rightarrow Probeklausur vor Weihnachten (Ankündigung folgt) mit SP

\rightarrow Relation HW zu Note
 \rightarrow ACOM Website

Organisation

Vorlesungen

Dienstag, 08:30 - 10:00 Uhr, KIPHYS im Rogowski.
Mittwoch, 08:30 - 10:00 Uhr, KIPHYS im Rogowski.
Freitag, 14:30 - 16:00 Uhr, Hörsaal I im Hauptgebäude.

Vorlesungsfreie Tage: 17.10 (Freitag), 31.10 (Freitag), 5.11 (Mittwoch), 21.11 (Freitag), 28.11 (Freitag), 12.12 (Freitag), 9.1 (Freitag), 23.1 (Freitag), 6.2 (Freitag)

Globalübung

Freitag (Lambert & Gerogi), 12:30 - 14:00 Uhr, E1 (Raum 301) im Rogowski (ab 17.10.25).

Kleingruppenübung

Selbststreichübung Gruppe 1 (Konrad Ansorg): Mittwoch, 10:30 - 12:00 Uhr, Z4 im Audimax.
Selbststreichübung Gruppe 2 (Jan Habscheid): Donnerstag, 16:30 - 18:00 Uhr, Z3 (1420|302) im Audimax.
Diese Übungen sind in der selben Woche inhaltlich äquivalent.

Hausaufgaben

Es gibt wöchentliche Hausaufgaben, über die Bonuspunkte für die Klausur verdient werden können. Die Hausaufgaben werden in moodle freitags hochgeladen (ab 17.10.2024) und sollen innerhalb einer Woche von Vierergruppen bearbeitet und online abgegeben werden.
Die Hausaufgaben sind freiwillig. Das bedeutet, dass Sie die volle Punktzahl in der Prüfung erreichen können, ohne die Hausaufgaben zu erledigen.

- Für das Erreichen des maximalen Klausurbonus von 10% sind 60% der Hausaufgabenpunkte notwendig. Dazwischen wird anteilig vergeben (linear).

G Aussagenlogik: Aussagen: zur Beschreibung & Darstellung von Sachverhalten. (2)

Mathematische Aussage: 1) ist wahr oder falsch.
2) kann nicht gleichzeitig wahr und falsch sein.

Bsp: a) Alle Katzen sind grau c) Wenn $a \perp b$, dann gilt $a^2 + b^2 = c^2$ a \triangleleft b
b) $2 < 3$

Logische Negierung $\neg P$ einer Aussage P : Gegeben durch

| | |
|---|----------|
| P | $\neg P$ |
| w | f |
| f | w |

(Wahrheitstabelle)

(\neg heißt "nicht")

Verknüpfungen: Sei p, q zwei Aussagen. Wir definieren die Verknüpfungen

- a) Konjunktion $p \wedge q$ (logisches "und")
 - b) Alternative $p \vee q$ (log. "oder")
 - c) Implikation $p \Rightarrow q$ ("impliziert")
 - d) Äquivalenz $p \Leftrightarrow q$ ("ist äquivalent zu")
- wie folgt: $| p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

| P | q | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \Rightarrow q$ | $q \Rightarrow p$ | $p \Leftrightarrow q$ | $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ |
|---|---|--------------|------------|-------------------|-------------------|-----------------------|--|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

→ $p \Rightarrow q$ genau dann wahr wenn p falsch und q wahr.

→ Materielle Implikation (\Rightarrow): Aus falschem folgt beliebiges \exists :

=> Macht Sinn denn: I) Deja Vu: andere Definitionen liefern bereits bekanntes

[Wie Nestmann: über die Wahrheit der matr. Implikation]

| P | q | $p \Rightarrow q$ | $p \Leftarrow q$ | q | $p \wedge q$ |
|---|---|-------------------|------------------|---|--------------|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

II) Modus Ponens: $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ nur dann möglich

→ Warum das ganze?

- i) Direktes Beweis (Voraussetzung) $p \Rightarrow p_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow$ (Behauptung) q
- ii) Indirektes Beweis ($\neg q \Rightarrow \neg p$) $\Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
- iii) Induktion (bald)
- ⋮

Beispiel: Seien p, q bel. Aussagen, dann gilt $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

| P | q | $p \Rightarrow q$ | $\neg q$ | $\neg p$ | $\neg q \Rightarrow \neg p$ | $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ |
|---|---|-------------------|----------|----------|-----------------------------|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 (wahr) |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 (wahr) |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 (wahr) |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 (wahr) |

⇒ Letzte Spalte immer wahr für alle Input-Kombinationen (Tautologie)
⇒ Aussage wahr.

Mengen: "Zsm. Fassung unterscheidbarer Elemente", z.B. $M = \{\text{Butter}, \text{Brot}\}$, $N = \{1, 2, 3\}$

→ Leere Menge: $\emptyset := \{\}$ → Notation: $1 \in N$, $4 \notin N$

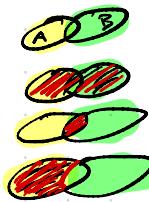
→ Teilmengen Def: $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$

→ manchmal auch anders definiert:
pa. def. äquivalent

- $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in B$ Teilmenge
- $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$ echte Teilmenge

→ Operationen:

| | |
|--|--------------|
| $A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}$ | Vereinigung |
| $A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ | Durchschnitt |
| $A \setminus B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$ | Differenz |



→ Rechenregeln:

- $A \setminus \emptyset = A$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \subseteq (A \cup B)$, $(A \cap B) \subseteq A$
- Kommutativ: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
- Assoziativ: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- Distributiv: $M \cup (A \cap B) = (M \cup A) \cap (M \cup B)$, $M \cap (B \cup C) = (M \cap B) \cup (M \cap C)$
- DeMorgan: $M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$, $M \setminus (A \cap B) = (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$

→ Differenz $A \cap B = \emptyset$ (\oplus \ominus), Komplement von $A \subset B$ in B



Beispiel:

Aufgabe 1. (Mengen)

Seien A und B Mengen. Zeigen Sie, dass die folgende Identität gilt:

$$(B \setminus A) \cup A = A \cup B.$$

Sei x bel. Element aus $(B \setminus A) \cup A$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x \in (B \setminus A) \cup A &\Leftrightarrow (x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A) \\ &\stackrel{\text{distributiv.}}{\Leftrightarrow} (x \in B \vee x \in A) \wedge ((x \notin A) \vee (x \in A)) \\ &\Leftrightarrow x \in B \vee x \in A \end{aligned}$$

Dq. x beliebiges Element, folgt die Aussage.

Relationen: → Wir wollen Sachverhalte beschreiben zwischen Mengen.

Kartesisches Produkt: $A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$

→ Bsp: $P = \{L, M\}$, $T = \{H, K\}$

| | | H | K |
|---|---|--------|--------|
| L | H | (L, H) | (L, K) |
| | K | (M, H) | (M, K) |

$A \times B$ ist die Menge der 4 möglichen 2-Tupel (Paare)

Relation: Teilmenge von $A \times B$ heißt Relation zw. A und B. Für $R \subseteq A \times B$ schreiben wir $a R b := (a, b) \in R$. Wenn $A = B$, dann ist R Relation auf A.

| | | H | K |
|---|---|---|---|
| L | H | 0 | 0 |
| | K | 0 | 0 |

$$\text{House} = \{(L, H), (M, H), (M, K)\}$$

$L \text{ House} = L$ steht in Relation zu K
"hat Haus"

Ordnungsrelation: R in A ist (**Total-**) Ordnungsrelation wenn:

- Reflexivität ("Reflektion, Spiegel"): $\forall x \in A : xRx$ (d.h. $(x,x) \in R$)
- Transitivität ("Transition, Übergang"): $\forall x,y,z \in A : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
- Antisymmetrie: $xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y$
- Totalität** ("alles"): $\forall x,y \in A : xRy \vee yRx$

Bsp.: " \leq " Totalrelation auf $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ weil a) $\forall i \in \mathbb{N} : i \leq i$, b) $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$
c) $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ d) $\forall a,b : a \leq b \vee b \leq a$

Äquivalenzrelation R: Falls

- R ist reflexiv (s.o.)
- R ist transitiv
- R ist symmetrisch $\forall x,y \in A : xRy \Rightarrow yRx$

→ keine Totalität, R beschreibt "ähnliche" Elemente in A, $x \sim y \Rightarrow xRy$

Äquivalenzklasse für \sim : $[x]_\sim := \{y \in A : y \sim x\}$ zum Repräsentanten x

Faktormenge: Menge aller Äquivalenzklassen $A/\sim := \{[a]_\sim : a \in A\}$, $A = \bigcup_{K \in A/\sim} K$

Bsp.: $A = \{1, 2, 3, 4\}$

| \sim | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | | |
| 2 | | 0 | 0 | |
| 3 | 0 | 0 | | |
| 4 | 0 | 0 | | |

\sim haben gleichen Rest bei Division durch 2

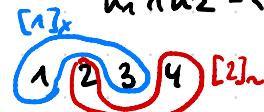
$$[1]_\sim := \{1, 3\}$$

$$[2]_\sim := \{2, 4\}$$

$$A = [1]_\sim \cup [2]_\sim$$

Partition

$\forall K_1, K_2 \in A/\sim$ mit $K_1 \neq K_2 \Rightarrow K_1 \cap K_2 = \emptyset$



Bsp.: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $x \sim y \Leftrightarrow [(x \leq 3.5) \wedge (y \leq 3.5)] \vee [(x > 3.5) \wedge (y > 3.5)]$

Reflexivität:

$$a) \forall x \in A : x \sim x \Leftrightarrow [(x \leq 3.5) \wedge (x \leq 3.5)] \vee [x > 3.5 \wedge x > 3.5]$$

$$\Leftrightarrow x \leq 3.5 \quad \vee \quad x > 3.5$$

$$\Leftrightarrow x \leq 3.5 \quad \vee \quad \neg(x \leq 3.5) \quad \text{gilt immer}$$

b) Transitivität

$$\underline{\text{zz:}} \quad (x \sim y) \wedge (y \sim z) \Rightarrow (x \sim z)$$

Fallunterscheidung $y \leq 3.5$

$$\begin{aligned} x \sim y &\Rightarrow (x \leq 3.5 \wedge y \leq 3.5) \Rightarrow x \leq 3.5 \\ y \sim z &\Rightarrow (y \leq 3.5 \wedge z \leq 3.5) \Rightarrow z \leq 3.5 \\ \Rightarrow (x \leq 3.5) \wedge (z \leq 3.5) &\Rightarrow x \sim z \quad \checkmark \end{aligned}$$

Fall 2 $y > 3.5$

$$\begin{aligned} x \sim y &\Rightarrow \dots \Rightarrow x > 3.5 \\ y \sim z &\Rightarrow \dots \Rightarrow z > 3.5 \end{aligned} \quad \Rightarrow \dots \Rightarrow x \sim z \quad \checkmark$$

| $x \leq 3.5$ | $\neg(x \leq 3.5)$ | $(x \leq 3.5) \vee \neg(x \leq 3.5)$ |
|--------------|--------------------|--------------------------------------|
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |

Definition
oder

c) Symmetrie: Sei $x \sim y$, betrachten
① $(x \leq 3.5) \wedge (y \leq 3.5) \Leftrightarrow (y \leq 3.5) \wedge (x \leq 3.5) \Leftrightarrow y \sim x$
oder ② $(x > 3.5) \wedge (y > 3.5) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow y \sim x \quad \checkmark$

Äquivalenzklassen $A = [1]_\sim \cup [4]_\sim$

$$[1]_\sim = \{1, 2, 3\} \quad [4]_\sim = \{4, 5, 6\}$$

Praxisbeispiel: Partition eines Bauteils für Simulation auf mehreren Prozessorkernen (Domain Decomposition)

