

TODO:
 A:
 N:

Globalübung 09 Mathe 3 - WS24

11.12.24 ①
Lambert Theisen

Frage? • Per Mail, siehe Infos aus GU2

- PÜ 314 vmtl. in 2025
- Moodle HW hat Bonuktioniert?

A

L^p -Räume:

Def

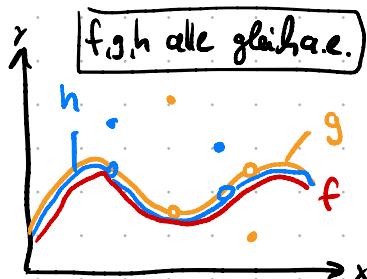
Wobei $L^p := \{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ Lebesgue-mesbar}, \int_{\Omega} |f|^p dx < \infty \}$

c.f.
forms: $\int (\alpha f(x)) = \int x \alpha f(x) \forall \alpha$

TRIVIA!
C'est française
Lebesgue
= "Lebeck"

$[f] \hat{=} \text{Repräsentant der Äquivalenzklasse } [f] = \{ g \in L^p \mid f \sim g \}$
bzgl. Gleichheit "fast überall" (a.e.), sprich:

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ a.e.}$$

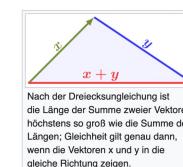


Definition [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Eine Norm ist eine Abbildung $\|\cdot\|$ von einem Vektorraum V über dem Körper \mathbb{K} der reellen oder der komplexen Zahlen in die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen \mathbb{R}_0^+ .

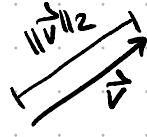
die für alle Vektoren $x, y \in V$ und alle Skalare $\alpha \in \mathbb{K}$ die folgenden drei Axiome erfüllt:

- (1) Definitheit: $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.
- (2) absolute Homogenität: $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.
- (3) Subadditivität oder Dreiecksungleichung: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.



L^p -Norm: $\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ (vgl. $\|\vec{v}\|_2 = \left(v_1^2 + v_2^2 + \dots \right)^{\frac{1}{2}}$)

→ Warum überhaupt die Äquivalenzklassen? → Weil Definitheit der Norm sonst nicht gilt ↴



$\rightarrow \left\| \begin{cases} 1 & \text{if } x=0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \right\|_{L^2((0,1), \mathbb{R})} = 0$ obwohl $f(x) \neq 0$, aber $f(x)=0 \text{ a.e.} \Rightarrow$ Use Äquivalenzklasse (2)

Properties:

I) **A-Inequality (Minkowski):** Let $f, g \in L^p(\Omega; \mathbb{R})$

$$\begin{array}{c} \|fg\| \\ \triangle \\ \|f\| \|g\| \end{array}$$

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

TRIVIA
p, q sind "Hölder-Konjugat"

II) **Hölder-Inequality:** Let $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Then for $f \in L^p, g \in L^q$

$$\text{we have } \|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q < \infty$$

$$\int_{\Omega} |f \cdot g| dx$$

↳ Spezialfall $p=q=2 \Rightarrow$ (Cauchy-Schwarz)

$$\|f \cdot g\|_{L^1} = |\langle f, g \rangle_{L^2}| \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|g\|_{L^2}$$

$\left| \int f \cdot g \right|$

III) $L^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ ist besonders denn der Raum enthält alle Funktionen f , die

$$\|f\|_\infty := \max \{ |f(x)| \mid x \in \Omega \setminus N \} < \infty \quad (\text{"essentially bounded"}).$$

wobei N Nullmenge ist.

Konvergenzbegriffe:

Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dann konvergiert f_k gegen f

Stark

I) **GLEICHMÄIG:** falls f, f_k beschränkt ($|f, f_k| \leq C$) und: $\max_{x \in \Omega} |f_k(x) - f(x)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

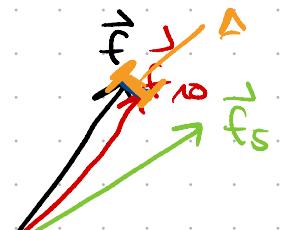
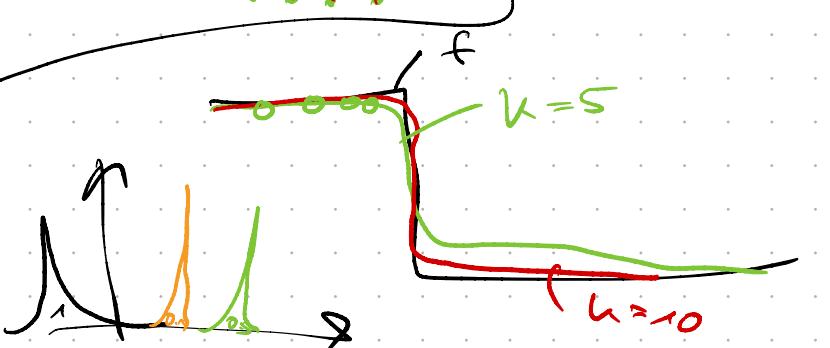
II) **PUNKTWEISE:** falls $\forall x \in \Omega : |f_k(x) - f(x)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

III) **FAST ÜBERALL**: falls $\forall x \in \Omega \setminus N : |f_k(x) - f(x)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, $N \triangleq$ Nullmenge

schwach

keine Relation

$$\left(\int |f - g|^p \right)^{1/p}$$



\Rightarrow Konvergenz

Aufgabe 2. // (0,1)
Gegeben sei $\Omega = [0, 1]$ sowie die Funktionen

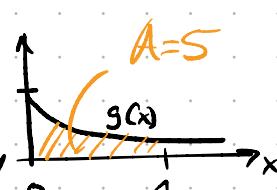
$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \exp(-x)$$



(3)

Beispiel-Aufgabe #1:

- a) g ist stetig 
 $\Rightarrow g$ ist L -messbar. ✓

$$\int_0^1 g(x) dx = \left[-\exp(-x) \right]_0^1 = 1 - \exp(-1) < \infty$$

$\Rightarrow g$ ist L -int'bar. ✓

b) $h(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ sonst} \\ 42 & , x = \frac{1}{2} \end{cases}$

ist fast überall (bis auf Nullmenge) gleich f .

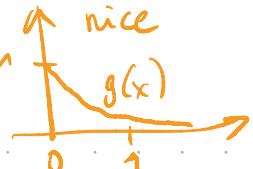
(c) Zeigen Sie dass

$$(i) f \in L^p(\Omega) \text{ für } 1 \leq p < 2,$$

$$(ii) g \in L^q(\Omega) \text{ für } 1 \leq q \leq \infty.$$

$$(d) Folgern Sie aus (c) dass $f \cdot g \in L^1(\Omega)$.$$

$$f \in L^p(\Omega) \Leftrightarrow \int_{\Omega} |f|^p < \infty$$



WS19



c) $\|f\|_p^p = \int_0^1 |f(x)|^p dx = \int_0^1 \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \right|^p dx = \int_0^1 x^{-p/2} dx = \left[\frac{1}{-\frac{p}{2} + 1} \cdot x^{-\frac{p}{2} + 1} \right]_0^1 < \infty \text{ für } p < 2$

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \min \{ C \in \mathbb{R} \mid |f(x)| \leq C \text{ a.e. } x \in \Omega \}$$

$\Rightarrow f \in L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < 2$.

II) f für $2 > p$

II) g ist durch $h(x)=1$ nach oben beschränkt.

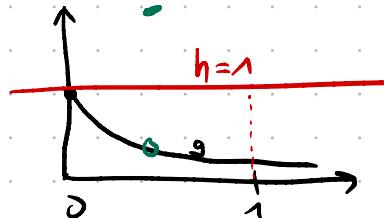
$$\Rightarrow \int_0^1 |g(x)|^p dx \leq \int_0^1 1^p dx = 1 < \infty$$

$\Rightarrow g \in L^p(\Omega)$ mit $1 \leq p \leq \infty$

$$\frac{p}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

d) $f \in L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ und $g \in L^3(\Omega)$ und $\frac{1}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$

Je größer p , desto "schöner" ist f in L^p .
Ziemlich, mehr Regularität, Glättlichkeit



Je größer p , desto "schöner" ist f in L^p .

=> Hölder-Ungl.: $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_{\frac{3}{2}}^{\frac{2}{3}} \|g\|_3^{\frac{1}{3}} < \infty \Rightarrow (f \cdot g) \in L^1(\Omega)$

$$\underbrace{\|f\|_{\frac{3}{2}}^{\frac{2}{3}}}_{<\infty \text{ p=3}} \text{ deft. dann } f \in L^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \int |f|^{\frac{3}{2}} < \infty \Leftrightarrow (\int |f|^p)^{\frac{2}{3}}$$

N

Satz von Gershgorin

"Abschätzen von Eigenwerten"

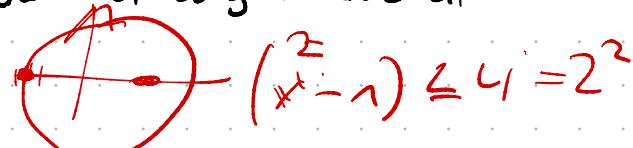
$$Ax = \lambda x$$

(4)

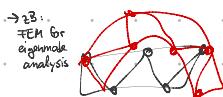
Let $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and $\gamma_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ ("Summe der Spaltenabsoluteinträge ohne Diag.").
 $|a_{ii}| \leftarrow$ (Summe der Reihenabsoluteinträge) "geht daneben!"

Dann liegen jeder EW von A in mindestens einem Gershgorin-Kreis G_i :

mit $G_i := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq \gamma_i\}$

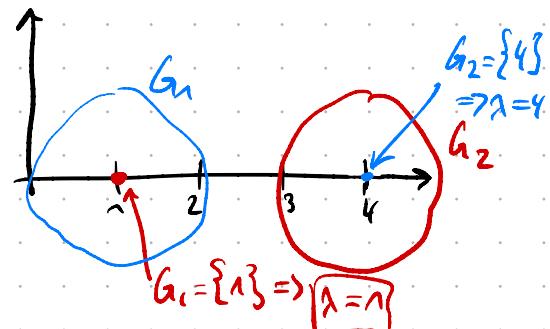
→ Falls alle G_i disjunkt ("keine Überlappung"), dann pro Kreis ein EW.Einfaches Beispiel

Teaser Eigenwert-Probleme



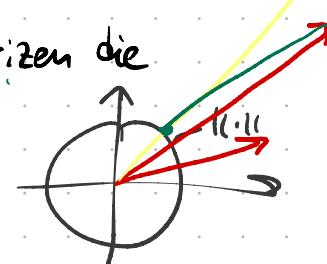
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow \sigma(A) = \{1, 4\}$$

Passt ✓ Eigentlich wissen wir sogar, dass bei Δ -Matrizen die EW auf den Diagonalelementen stehen... 🧑

N Poweriteration (Vektoriteration):

- Let $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- Choose $x^0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- While $(k \leq k_{\max} \wedge |\sigma_A(x^k) - \sigma_A(x^{k+1})| > \epsilon)$
 - $\tilde{x}^k = A x^{k-1}$ // iterate
 - $x^k = \tilde{x}^k / \|\tilde{x}^k\|$ // normalize (Rayleigh Quotient s.b.)
 - $\lambda^k = \sigma_A(x^k)$ // eval estimate
- Return (λ^k, x^k)

"Mehrmaliges Anwenden der Matrix"

$$Ax = \lambda x$$

$$x_1 = Ax_0$$

$$x_2 = Ax_1$$

(Rayleigh Quotient s.b.)

Aus x Näherung $\Rightarrow \lambda$ Näherung

$$q = \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}$$

→ Convergence (usually):

I) $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^k \rightarrow \lambda_n$

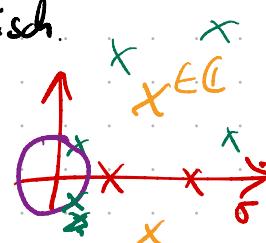
Fehler:
 $e \in O(q^k)$

II) $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k \rightarrow x_n \in \mathbb{E}(\lambda_n)$ $e \in O(q^k)$

Rayleigh-Quotient: $\sigma_A(x) = \left[\sigma_A(x) = \right] R(x) := \frac{x^T A x}{x^T x}$ für A symmetrisch.

$$\lambda_{\min} = \inf_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} R(x) \leq R(x) \leq \max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} R(x) = \lambda_{\max}$$

(Rayleigh Prinzip)



Finde Eigenwert zu gegebenem Eigenvektor:

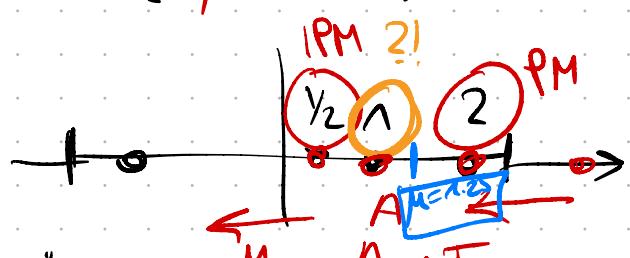
$$R(v_i) = \lambda_i v_i$$

(Shifted)
Inverse Power Iteration: ("PM für A^{-1} findet kleinsten EWert")

One Variant:

Let $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and Shift μ
Choose $x^0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
While ("not finished") do
 Solve $(A - \mu I)x^{k+1} = x^k$ (" $\Leftrightarrow x^{k+1} = (A - \mu I)^{-1}x^k$ ")
 Normalize x^{k+1}
 $\lambda^{k+1} = p_A(x^{k+1})$
Return (λ^k, x^k)

$$\begin{aligned} x_{\text{new}} &= A^{-1}x \text{ alt} \\ &\Leftrightarrow \\ Ax_{\text{new}} &= x \text{ alt} \end{aligned}$$



→ Shifted IPM konvergiert zu λ "closest to μ ".

→ Nützlich wenn Näherung bekannt oder für Nicht-extreme EWerte.

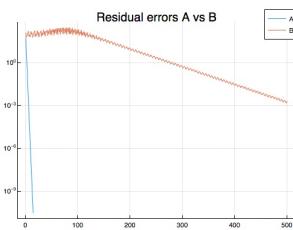
Demo

→ Numerik: PM, IPM, SIPM

Comparison of Matrices with Different Fundamental Ratios

- Matrix A has ratio $q = 0.13333333333333336$
- Matrix B has ratio $q = 0.9718253158073516$

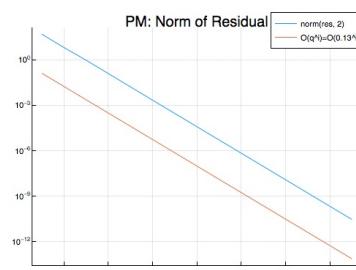
Therefore, much faster converge for A .



```
plot(map(X -> PM(X, ones(3), maxit=500)[3].errors, [A, B]), yaxis=log, label="A"
    "B"), title="Residual errors A vs B"
```

Residual Error

The normed error of the residual $e = ||x_k - x^*||_2$ is in $O(q^k)$ with the eigenvalue ratio $q = \lambda_1/\lambda_2$ of the considered matrix.

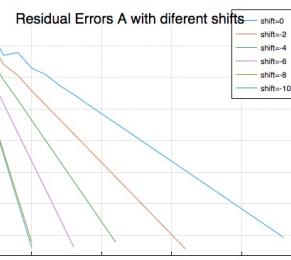


```
plot([pm[3].errors, 1 * abs(eigvals(A)[end-1] / eigvals(A)[end])^i for i = 1 : size(pm[3].errors)[1]], yaxis=log, title="PM: Norm of Residual", label="norm(res,
2)" "O(q^i)=O(0.13^i)")
```

Check the Convergence Behavior for Different Shifts

Notice that better shifts significantly improve the performance of the algorithm. Shift eight and ten are the same because they have the same absolute distance to the real eigenvalue.

```
shifts = 0:-2:-10
# Compare zeros shift with good estimation
shifts = 0:-2:-10 # real lowest eval is -9
```



```
plot(map(X -> IPM(A, ones(3), tol=1E-5, shift=x)[3].errors, shifts), yaxis=log,
label=reshape(map(x -> string("shift=", x), shifts), 1, :), title="Residual Error
with different shifts")
```