TODO [0]: PÜ4
[A]: Stokes
[N]: Constrained Optimization, KKT

Globalübung 13

– Mathe 3 –

03.02.21 ①
Lambert Theisen

---

[0]: → PÜ4 am Donnerstag QR QR/mit shift qr()

→ Letzte GÜ: Fragestunde? (E-Mail Ankündigung
↳ Altklausur Aufgaben) ✓

[A] **Satz von Stokes** Für stetig diffbares Vektorfeld f auf reguläreres Fläche F gilt

rot f nur in 3D definiert. $\hat{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

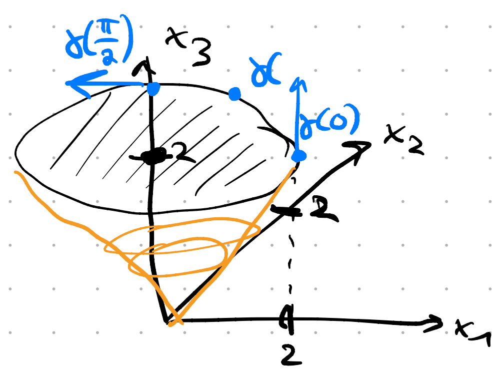
$$\boxed{\int_F \operatorname{rot} f \cdot \nu \, ds = \int_\gamma f \cdot ds}$$

wobei γ parametrisiert Randkurve ∂F mit positiver Orientierung
("Fläche liegt links beim Durchlaufen von γ")

Beispiel: Sei $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_2 \\ -x_1x_3 \\ x_2x_3^2 \end{pmatrix}$ sowie die Fläche

$$F = \left\{ \underbrace{x_3 \geq \tfrac{1}{2}(x_2^2 + x_1^2)}_{\sqrt{x_1^2+x_2^2} \leq 2 = R} \wedge x_3 = 2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$ Verifiziere Stokes.

$x_3 = 2 \geq \frac{1}{2}(x_2^2 + x_1^2)$
$\Leftrightarrow 4 \geq x_2^2 + x_1^2$
$2 \geq \sqrt{x_2^2 + x_1^2} = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_2$



I) **Berechne RHS:** $\int_\gamma f \cdot ds$

Randkurve $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ 2 \end{pmatrix}, \; t \in [0, 2\pi]$

ist "positiv orientiert" ✓

Daher $\int_\gamma f \cdot ds = \int_0^{2\pi} \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt$

$\boxed{\text{GÜ10: Arbeitsintegral}}$

mit $\gamma'(t) = \begin{bmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{bmatrix}$, $f(\gamma(t)) = \begin{bmatrix} 6 \cdot \sin(t) \\ -4\cos(t) \\ 4\sin(t)\cos^2(t) \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \oint f \cdot ds = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{bmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6\sin(t) \\ -4\cos(t) \\ 4\sin(t)\cos^2(t) \end{bmatrix} \right\rangle dt$$

RHS Stokes

$$= \int_0^{2\pi} \left[-12\sin^2(t) - 8\cos^2(t) \right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-12\left(1-\cos^2(t)\right) - 8\cos^2(t) \right]$$

$$= -12\int_0^{2\pi} 1\, dt + 4\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2(t)}_{\pi} = -24\pi + 4\cdot\pi = -20\pi$$

II) LHS: $\int_F \operatorname{rot} f \bullet \nu \, ds$

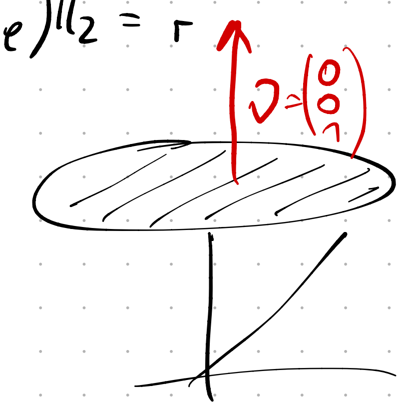
$$\nabla \times f = \begin{bmatrix} \partial_{x_2} f_3 - \partial_{x_3} f_2 \\ \partial_{x_3} f_1 - \partial_{x_1} f_3 \\ \partial_{x_1} f_2 - \partial_{x_2} f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3^2 - (-x_1) \\ 0 - 0 \\ -x_3 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_3^2 \\ 0 \\ -x_3 - 3 \end{bmatrix}$$

Fläche F : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \Phi(r,\varphi) = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad 0 \le r \le 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$

$$\Rightarrow \|\nu\|_2 = \left\| \frac{\partial\Phi}{\partial r} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \right\|_2$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi \end{pmatrix} \right\|_2 = r$$

$$\Rightarrow \nu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left(= \frac{\partial\phi/\partial r \times \partial\phi/\partial\varphi}{\|\cdot\partial\phi/\partial r \times \partial\phi/\partial r\|_2} \right)$$



$$\Rightarrow \int_F \operatorname{rot} f \bullet \nu \, ds = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (\operatorname{rot} f)(\Phi(r,\varphi)) \bullet \nu \, d\varphi\, dr$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} r\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi \\ 0 \\ -3-2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\varphi\, dr$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} -5 \, d\varphi\, dr = \int_0^2 -10\pi \, dr = -20\pi$$

Stokes verifiziert weil LHS = RHS.

N Constraint Optimization

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{subject to} \begin{cases} g_i(x) \geq 0 \\ h_j(x) = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q \end{array}}$$

$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f$
mit
$2x \leq y \;\hat{=}\; \tilde{g}(x)$
$\Leftrightarrow 0 \leq \underbrace{y - 2x}_{g(x)}$

LP (Linear Progr.): f, g, h linear

NLP (Nonlinear Prog.): f oder g oder h nicht linear

Feasability Region $\mathcal{X}$ (\chi): $\min_{x\in\mathcal{X}} f(x)$ mit $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \geq 0, h_j(x) = 0\}$

Minimizer: $x^* = \operatorname{argmin}_{x\in\mathcal{X}} f(x)$

KKT-Bedingungen: Sind notwendig für kritischen Punkt (Min, Max, Sattel)
(wenn bestimmte Regularität → LICQ)

→ Aber wo kommen die her?

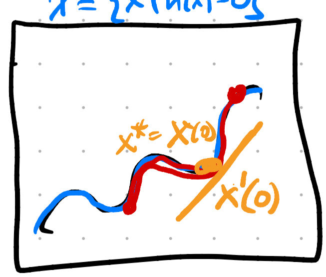
Equality Constraints: Betrachte $\begin{cases} \min f(x) \\ \text{s.t. } h(x) = 0 \end{cases}$

→ Wir wollen natürlich ein x^* mit: $\boxed{h(x^*) = 0}$ $\boxed{A}$

→ Weiterhin: $\nabla h(x^*)$ muss parallel zu $\nabla f(x^*)$.

Warum?: Sei $\chi: (-1,1) \to \mathcal{X} = \{x \mid h(x)\}$ Param. mit
$\chi(0) = x^*$

$\chi: (-1,1) \to \mathcal{X}$
$\mathcal{X} = \{x \mid h(x) = 0\}$



Nun gehe entlang $F(t) := f(\chi(t))$. Wir haben $f(\chi(0)) = f(x^*) = F(0)$ ist kritischer Pkt.

④

kritischer Punkt heißt : $F'(0)=0 \Rightarrow \frac{d}{dt} f(\tilde{x}(t))\Big|_{t=0} = 0$ ist eig. egal

$\overset{\text{Kettenregel}}{\Rightarrow} \nabla f(\underbrace{\tilde{x}(0)}_{x^*})^T \cdot \tilde{x}'(0) = 0 \iff \boxed{\nabla f(x^*) \perp \tilde{x}'(0)}$

Weiterhin ist ja per Definition : $h(\tilde{x}(t)) = 0 \ \forall t \Rightarrow \frac{d}{dt} h(\tilde{x}(t))\Big|_{t=0} = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla h(x^*) \perp \tilde{x}'(0)}$

Daher im kritischen Punkt x^* : $\boxed{\nabla f(x^*) \parallel \nabla h(x^*) \iff \nabla f(x^*) = \mu^* \nabla h(x^*)}$ $\boxed{B}$

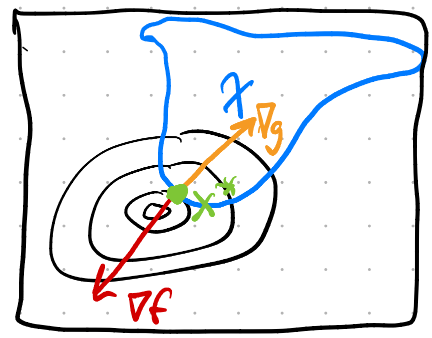
$\mu^* \in \mathbb{R}$

Jetzt klevere Idee

Definiere Lagrange function : $\mathcal{L}(x,\mu) := f(x) - \mu h(x)$ why?!

und suche $\overset{\text{ein } \mu^* \in \mathbb{R}}{\nabla \mathcal{L}(x^*,\mu^*)} = \begin{bmatrix} \nabla_x \mathcal{L}(x^*,\mu^*) \\ \nabla_\mu \mathcal{L}(x^*,\mu^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f(x^*) - \mu^* \nabla h(x^*) \\ -h(x^*) \end{bmatrix} \overset{!}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\boxed{B}$ $\boxed{A}$

→ Das kombiniert $\boxed{A}$ & $\boxed{B}$!



Inequality Constraint

$\boxed{A}$ $\boxed{g(x^*) \geq 0}$ (Def)

I) Inactive ($g(x^*) > 0$) $\Rightarrow$ $\boxed{\nabla f(x^*) = 0}$ $\boxed{B1}$ wie in Güna

II) Active ($g(x^*) = 0$) $\Rightarrow$ $\boxed{\nabla f(x^*) = \lambda^* \nabla g(x^*)}$ $\boxed{B2}$ (Wie oben)

↳ siehe oben

$\boxed{\lambda^* \geq 0}$ $\boxed{C}$

→ $\lambda^* \geq 0$ muss sein sodass $\nabla f(x^*)$ und $\nabla g(x^*)$ in entgegengesetzte Richtg. für Minimum.

→ Kombination von $\boxed{A}$, $\boxed{B1}$, $\boxed{B2}$, $\boxed{C}$:

nur aktive...

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) - \lambda^* \nabla g_i(x^*) = 0 & \\ g_i(x^*) \geq 0 & \boxed{A} \\ \lambda^* \geq 0 & \boxed{C} \\ g_i(x^*) \lambda^* = 0 & \text{Komplementär} \end{cases}$$

$\boxed{B1} + \boxed{B2}$

wenn $g(x^*) = 0$ B1

wenn $g(x^*) > 0$ B2

weil $\lambda^* = 0$ dann

✓

Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen (kombiniert alle Bdg. für mehrere Constraints)

5

$$\begin{cases} \nabla \mathcal{L}(x,\lambda,\mu) = \nabla f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x) - \sum_{j=1}^{q} \mu_j \nabla h_j(x) = 0 \\ h_j(x) = 0 \\ g_i(x) \geq 0 \\ \lambda_i \geq 0 \\ g_i(x)\lambda_i = 0 \end{cases}$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\mu \in \mathbb{R}^q$. $\underbrace{\text{KKT-Point}}_{\text{kritische Punkte}} \hat{=} (x^*, \underbrace{\lambda^*, \mu^*}_{\text{Lagrange Multipliers.}})$ wenn Bdg. erfüllt.

Nun: Berechnung der Kandidaten als KKT-Punkte?

Problem: Es gibt NLP für die das Minimum kein KKT Punkt ist.
(Nur wenn bestimmte Glattheits/Regularitäts eigenschaften erfüllt sind)

LICQ: ("Linear Independence Constraint Qualification")

Punkt $x \in \mathcal{X}$ hat LICQ falls: $\left(\{\nabla h_j(x)\}_{j=1}^{q}, \{\nabla g_i(x)\}_{i \in I_g(x)} \right)$ linear unabhängig

mit $I_g(x) = \{ i \in \{1,\dots,m\} \mid g_i(x) = 0 \}$ Menge aller aktiven Bedingungen
z.B. $I_g(x) = \{1, 2, 5, 8\}$

=> Wenn LICQ in x^* gilt, dann sind KKT FONC für kritische Punkte x^*
(1st-order necessary condition) (wie $\nabla f = 0$)
2nd $\nabla^2 f > 0$
=> min

In der ~~Praxis~~ HW:
I) Potentielle KKT Punkte finden
II) LICQ dort prüfen
III) Falls LICQ gilt => Hessematrix (z.B.) untersuchen für Min/Max/Sat.

Demo: KKT & LICQ

Define Lagrangian

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) - \sum_{j=1}^{q} \lambda_i h_i(x)$$

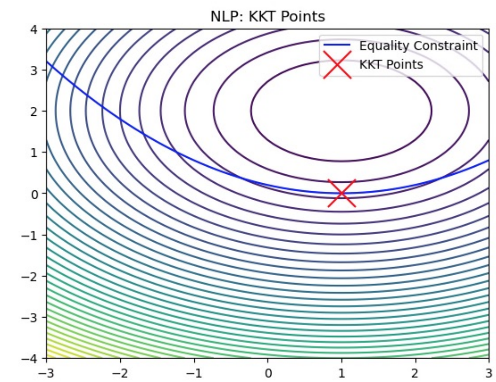
lagrangian (generic function with 1 method)

```
function lagrangian(x, f, g, h, λs, μs, Ig)
    # TODO: Include only active gs with Ig
    return (
        f(x)
        # - reduce(+, [g[i](x) * λs[i] for i=1:size(g)[1]], init=0)  # TODO: Include
        - reduce(+, [h[i](x) * μs[i] for i=1:size(h)[1]], init=0)
    )
end
```

$$-\mu\left(-5x_2 + (x_1 - 1)^2\right) + (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2$$

```
lagrangian(x, f1, [], h, lambdas, mus, [])
```

Visualize KKT Points



Linear Independence Constraint Quality (LICQ)

Point $x \in \chi$ satisfies LICQ if:

$$\{\nabla h_j(x)\}_{j=1}^{q}, \{\nabla g_i(x)\}_{i \in I_g(x)}$$

are linearly independent. The set of active inequality constraints at point x is labelled with $I_g(x)$.

Index Set of Active Constraints:

Ig (generic function with 1 method)

```
function Ig(x,g)
    return [i for i=1:size(g)[1] if g[i](x)==0]
end
```

LICQ (generic function with 1 method)

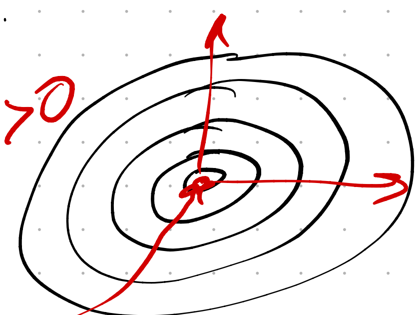
```
function LICQ(ξ, g, Ig, h)
    set = hcat(
        # [diff(g[i](x), x) for i ∈ Ig(ξ,g)],
        [diff(h[i](x), x) for i ∈ 1:size(h)[1]]
    )
    return set
end
```

I) KTT

1) $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Kandidaten

2) $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$\nabla f^2 \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} > 0$$



$\Rightarrow$ MIN