[O]: Fragen? HW3 bisschen Rate
[N]: SkP, Linkomb, Unterraum, LinUnabh.
[A]: ✓

Globalübung 4
Mathe 1 (CES)
WS25

07.11.2025 ①
Lambert Theisen

[N]

Recap Vektorraum V und Norm $\|\cdot\|$ für Längen, was ist mit Winkeln?

Skalarprodukt: Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to \mathbb{R}$ für V als $\mathbb{R}$-VR wenn $\forall x,y\in V$ gilt:

Symmetrie a) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

Bilinearität b) $\langle \alpha x_1+\beta x_2, y\rangle = \alpha\langle x_1,y\rangle + \beta\langle x_2,y\rangle \quad \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

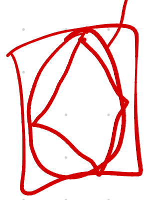
Positiv Definit c) $\langle x,x\rangle \geq 0 \quad \wedge \quad \langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0$

$f(1)=\alpha\cdot 1$
$f(1+1)=1+1 = f(1)+f(1)$

$f(x)=\alpha\cdot x$
$f(y+w)=\alpha(y+w)$
$=\alpha y+\alpha w$
$=_\alpha f(y)+\alpha f(w)$

→ viel algemeiner als $\langle u,v\rangle_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = u_1v_1+u_2v_2 = u^Tv = [u_1\ u_2]\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}$ {geht zB auch für Funktionen...}

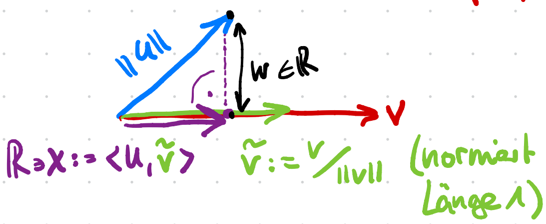
→ **Induzierte Norm**: $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$, $\|u\|_{\mathbb{R}^2} = \sqrt{\langle u,u\rangle} = \sqrt{\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}} = \sqrt{u_1^2+u_2^2}$ ✓ $\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_\infty$



→ **Cauchy Schwarz**: $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\|$

Hölder: $\|x\|_p\cdot\|x\|_q \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

Merkhilfe:



$4 = 3+1^2 \Rightarrow 4 \geq 3$

$\|u\|^2 = x^2+w^2$ (Pythagoras)
$\|u\|^2 \geq x^2$ $(w^2\geq 0)$
$\|u\| \geq |\langle u,\tilde v\rangle|$ (Def)
$\|u\| \geq |\langle u,\frac{v}{\|v\|}\rangle|$ (Def)
$\|u\|\,\|v\| \geq |\langle u,v\rangle|$ (CS)

Bsp.:

Aufgabe 4. (Skalarprodukt)
Sei $V := \mathbb{R}^2$ mit einem Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to \mathbb{R}$. Prüfen Sie, ob es sich um ein Skalarprodukt handelt.

a)
$$\langle\vec x,\vec y\rangle := x_1 - y_1$$

b)
$$\left\langle \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right\rangle = \langle\vec x,\vec y\rangle := 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

a) Prüfe Symmetrie: Sei $x=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, y=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\in V \Rightarrow \langle x,y\rangle = 1-0=1$
$\langle y,x\rangle = 0-1=-1$ $\neq$ ⇒ keine Symmetrie ⇒ kein SkP

b) ① Sym: $\langle x,y\rangle = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$
$= 3y_1x_1 + y_1x_2 + y_2x_1 + y_2x_2 = \langle y,x\rangle$ ✓

② Bilinearität: $\langle \alpha x+\beta y, z\rangle = 3(\alpha x_1+\beta y_1)z_1 + (\alpha x_1+\beta y_2)z_2 + (\alpha x_2+\beta y_2)z_1 + (\alpha x_2+\beta y_2)z_2$
Sei $x,y,z\in V$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$
$= \alpha\underbrace{(3x_1z_1 + x_1z_2 + x_2z_1 + x_2z_2)}_{\langle x,z\rangle} + \beta\underbrace{(3y_1z_1 + y_1z_2 + y_2z_1 + y_2z_2)}_{\langle y,z\rangle}$
$= \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle$ ✓

③ Pos Definitheit: Sei $x\in V$. Zunächst $\langle x,x\rangle = 3x_1x_1 + x_1x_2 + x_2x_1 + x_2x_2$
$= 2x_1x_1 + \underbrace{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}$ [Binomische Formel]
$= \underbrace{2x_1^2}_{\geq 0} + (x_1+x_2)^2 \geq 0$ ✓

Jetzt $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^2}$

"$\Rightarrow$" Sei $\langle x,x\rangle = 0 \Rightarrow 2x_1^2 + (x_1+x_2)^2 = 0$

beide Summanden $=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{I)}\ 2x_1^2 = 0 \\ \text{II)}\ (x_1+x_2)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x_1=0}$ in II) $(0+x_2)^2=0 \Rightarrow \boxed{x_2=0} \Rightarrow \underline{x=0}$ ✓

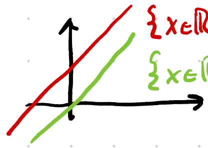
"$\Leftarrow$" Sei $x = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Dann gilt $0 = 2\cdot 0^2 + (0+0)^2 = 2\cdot x_1^2 + (x_1+x_2)^2 = \langle x,x\rangle$ ✓

Also: Es ist SkP. Man kann auch $\langle x,y\rangle = \langle x, Ay\rangle =: \langle x,y\rangle_A$ schreiben mit

$A = \begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und A ist symmetrisch positiv definit. $B = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Unterraum: Teilmenge $U \subset V$ von $\mathbb{K}$-Vektorraum V falls $\forall x,y \in U \Rightarrow \alpha x + \beta y \in U\ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}$ (Körper $(\mathbb{R},\dots)$)

$\rightarrow U$ ist dann ebenfalls ein $\mathbb{K}$-VR



$\{x \in \mathbb{R}^2 : x = \alpha \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}\}$ ✗

$\{x \in \mathbb{R}^2 : x = \alpha \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}\}$ ✓

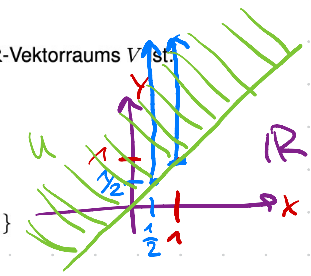
Bsp:

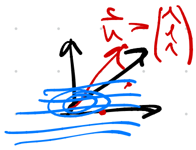
Aufgabe 1. **(Unterräume)**
Entscheiden und begründen Sie, ob U ein Unterraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums V ist:

a) $V = \mathbb{R}^3, U = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\rangle = 0\}$

b) $V = \mathbb{R}^2, U = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$

c) $V = \mathbb{R}^2, U = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2, a,b \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+3b\\2b-a\end{pmatrix}\}$





$\alpha v + \beta w \in U\ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

$0 \cdot v + 0 \cdot w = 0 \in U$

a) Sei $v,w \in U$ und $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$: $\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \alpha v + \beta w\rangle = \alpha \underbrace{\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, v\rangle + \beta \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, w\rangle}_{=0 \text{ weil } v \in U, w \in U} = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$

Somit $\alpha u + \beta w \in U \Rightarrow U$ ist UR ✓

b) Sei zB $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \in U$ und $-1 \in \mathbb{R}$, dann $(-1)\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \notin U$ denn $1 > 0$

Somit $\alpha \cdot u \notin U$ für $u \in U, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$ kein UR ✗

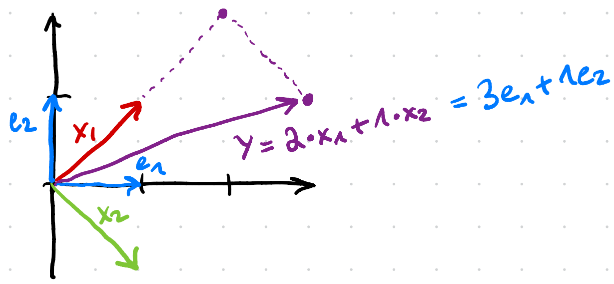
c) Sei $u,w \in U$ und $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Dann

$$\alpha v + \beta w \overset{v \in U}{=} \alpha \begin{pmatrix}v_1 + 3v_2\\ 2v_2 - v_1\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}w_1 + 3w_2\\ 2w_2 - w_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\overset{a}{(\alpha v_1 + \beta w_1)} + 3\overset{b}{(\alpha v_2 + \beta w_2)}\\ 2(\alpha v_2 + \beta w_2) - (\alpha v_1 + \beta w_1)\end{pmatrix} \in U \text{ per Def.}$$

$\Rightarrow U$ ist UR

⤳ Warum dieses ganze "Business"?

Linearkombination: $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset V$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots \in \mathbb{K}$. Dann ist $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \in V$ eine Linkomb. von $\{x_i\}_{i=1}^{n}$.



Related Bsp:

Aufgabe 1. (Geraden)
Entscheiden Sie, ob die Paare von Geraden im $\mathbb{R}^2$ Schnittpunkte besitzen und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

a)
$$g_1 = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \middle| s \in \mathbb{R} \right\}, \quad g_2 = \left\{ \begin{pmatrix}8\\17\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

b)
$$g_3 = \left\{ \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \middle| s \in \mathbb{R} \right\}, \quad g_4 = \left\{ \begin{pmatrix}9\\7\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ 2

b) Geraden gleichsetzen $\quad \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix}9\\7\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

Gleichungssystem $\Rightarrow$
$$3 + s = 9 + 2t$$
$$1 + 2s = 7 + t$$

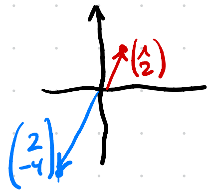
$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \text{I} \quad s &= 6 + 2t \\ \text{II} \quad 2s &= 6 + t \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} s &= 6 + 2t = 6 + 2(-2) = 2 \Rightarrow \boxed{s=2} \\ \text{II} - 2\text{I}: \quad 0 &= -6 - 3t \Rightarrow \boxed{t=-2} \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Einsetzen von $s=2$ in $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$ liefert Schnittpunkt (t in g_4 geht auch)

a) Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$ sind so dass $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$

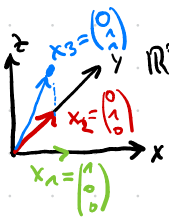
$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ kann durch Linkomb von $\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$ dargestellt werden....



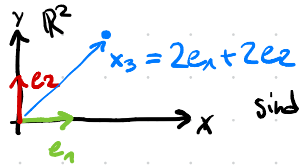
Lineare (Un-) Abhängigkeit: $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ sind...

1) linear unabhängig falls: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

2) linear abhängig falls: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ mit mindestens einem $\alpha_i \neq 0$ möglich ist.



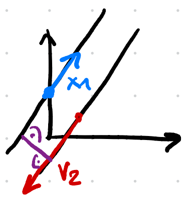
sind lin. unabhängig



sind linear abhängig.

$\rightsquigarrow$ Geraden Bsp oben a), Richtungsvektoren lin. abhängig $\Rightarrow$ Geraden parallel

Stützpunkt von g_1 liegt nicht auf g_2 $\Rightarrow$ kein SP



Bsp

Aufgabe 1. (Lineare Abhängigkeit)

a) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ sind
$$v_1 = \begin{pmatrix}a^2\\1\\b\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix}b\\-1\\1\end{pmatrix}$$
linear abhängig?

b) Sind v_1, v_2 für $a = b = 1$ und $v_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ linear unabhängig?

a) Für lin. Abhängigkeit brauchen wir $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ sodass:

$$0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} a^2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} b \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{matrix}$$

Aus II folgt $\boxed{\alpha_1 = \alpha_2}$. Aus III) $\alpha_1 \cdot b + \alpha_2 = 0 \overset{\alpha_2 = \alpha_1}{\Leftrightarrow} \alpha_1 (b+1) = 0 \Rightarrow \boxed{b = -1}$

Aus I) $\alpha_1 \cdot a^2 + \alpha_2 \cdot b \Rightarrow \alpha_1 (a^2 - 1) = 0 \Rightarrow \boxed{a = \pm 1}$

Für diese a, b Wahl, sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ✓

b) Sind v_1, v_2 für $a = b = 1$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ lin. unabhängig?

Lin unabh $\Leftrightarrow$ $\alpha \cdot v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$ geht nur für $\alpha = \beta = \gamma = 0$

$\Leftrightarrow$ $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ "

3 Gl.

$$\Leftrightarrow \begin{array}{llllll} \mathrm{I}) & \alpha & + \beta & + \gamma & = 0 \\ \mathrm{II}) & \alpha & - \beta & - \gamma & = 0 \\ \mathrm{III}) & \alpha & + \beta & - \gamma & = 0 \end{array} \quad "$$

LGS für α, β, γ

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad " \quad \overset{(\dots)}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ✓ \quad \Rightarrow v_1, v_2, v_3 \text{ lin unabh.}$$

$\boxed{A}$: Fragen?