TODO: Pü-Termin Slots 2W. m: Hw. 15-18 Uhr

[A]: Wohlgestelltes, Poisson Trenn. Var.

[N]: FD, Poisson-FD mit Interaktiv

Übung 3 - Mathe IV

23.4.20 | 2.81 ill posed

HW: NW: Δ in polar

[A]: Wohlgestelltheit, RB, AB

RB, AB

①

Wohlgestelltes Problem: I) ∃! eine eindeutige Lösung
II) Lösung hängt stetig von Daten ab

Eindeutigkeit: → PDE alleine liefert oft mehrere Lösungen
zB: $\partial_{xy} = 0$ liefert Summe von $X(x)$, $Y(y)$ als Lösung

→ Vorgabe von "Daten"

SpaceTime

I) Anfangswerte (zB $u_t - \Delta u = 0$, $u(x,0) = u_0(x)$ auf $\mathbb{R}^n$) ⇒ Anfangswertproblem

II) Randwerte (zB $-\Delta u = 0$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$) ⇒ Randwertproblem

→ in der Praxis oft: Anfangs-Randwert-Probleme

Stetigkeit in "Daten":

→ Bsp:

Aufgabe 81. (Wohlgestelltheit)
Gegeben sei die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0,\ (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \ !$$

Wir definieren die Funktionen Dämpf./Verst.

$$u_k(x,t) = e^{-k^2 t}\sin(xk),\ k \in \mathbb{N}.$$

a) Zeigen Sie, dass $u_k(x,t)$ die Wärmeleitungsgleichung erfüllt.

Nun sei $v(x,t)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, die die Anfangsbedingung

$$v(x,0) = g(x)$$

erfüllt. Wir nun betrachten das Problem mit einer gestörten Anfangsbedingung

$$g_k(x) = g(x) + \frac{1}{k}\sin(xk),\ x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$$

mit zugehöriger Lösung $w_k(x,t)$.

b) Ist $|v(x,t) - w_k(x,t)|$ beschränkt? Was passiert für verschwindende Störung $k \to \infty$? Betrachten Sie die Fälle $t > 0$ und $t < 0$ getrennt und interpretieren Sie das Ergebnis.

a) $\partial_t u_k(x,t) = -k^2 e^{-k^2 t}\sin(xk)$

$\partial_x u_k(x,t) = k e^{-k^2 t}\cos(xk)$

$\partial_{xx} u_k(x,t) = -k^2 e^{-k^2 t}\sin(xk)$

$\Rightarrow \partial_t u_k - \partial_{xx} u_k = 0$ ✓

b) $v(x,t)$ ist Lsg. zu AB $v(x,0) = g(x)$

Wie lautet $w_k(x,t)$?

Gestörte AB: $g_k(x) = g(x) + \frac{1}{k}\sin(x k) = g(x) + \frac{1}{k}u_k(x,0)$

VL, später

$\Rightarrow w_k(x,t) = v(x,t) + \frac{1}{k}u_k(x,t)$

$= v(x,t) + \frac{1}{k}e^{-k^2 t}\sin(k \cdot t)$!

Verschwindende Störung: $|g(x) - g_k(x)| = |\frac{1}{k}\sin(x \cdot k)| \leq \frac{1}{k} \to 0$ für $k \to \infty$

Voraussetzung für stetige Abh. der Lösung: $|g(x) - g_k(x)| \to 0 \Rightarrow |w_k(x,t) - v(x,t)| \to 0$

$$|w_k(x,t) - v(x,t)| = |\frac{1}{k}e^{-k^2 t}\sin(kt)| \xrightarrow{k\to\infty} \begin{cases} 0 & \text{für } t \geq 0 \\ \infty & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

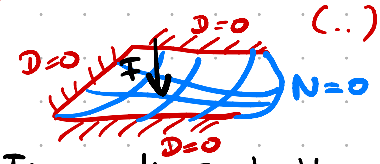
I) ⇒ Well-posed für $t \geq 0$ (Temperaturverlauf in Zukunft leicht)

II) ⇒ Ill-posed: $t < 0$ (Temp.verl. in Vergangenheit schwer)

Laplace / Poisson Gl.: ($\Delta u = 0$ bzw. $\Delta u = f$) ②

Harmonische Funktionen: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offene Menge, $u: \Omega \to \mathbb{R}$, $u \in C^2(\Omega)$

u harmonisch $\Leftrightarrow$ $\Delta u = 0$ $\rightsquigarrow$ Next Week: M. Helwert (..)



Herleitung: $\rightsquigarrow$ siehe VL

Physik: $\Delta u = f(x,y,..)$ mit $u \in \{$Temp., Konzentration, Verschiebung, ...$\}$
$f \in \{$Wärmequelle, Einspritzung, Kraft, ...$\}$

Lösung: 1D: $\to$ Gerade $u(x) = mx + b$ mit $(m,b) = F(RB)$
2D: $\to$ Trennung der Variablen

Trennung der Variablen (Separationsansatz):

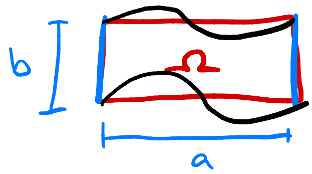
I) Ansatz: $u(x,y) := X(x) \cdot Y(y)$
II) in PDE einsetzen — $\Delta u \rightsquigarrow$ 2-mal ableiten
III) Variablen Trennen / Separieren sodass

$$F(X(x), X'(x), \dots) = G(Y(y), Y'(y), \dots) \overset{\forall x,y!}{=} \text{Const} \overset{\text{z.B.}}{=} \lambda^2 \quad \text{da } \forall x,y \text{ gültig}$$

IV) Separate ODEs für $X(x)$, $Y(y)$ lösen und u-Prototyp erstellen
V) Randwerte nutzen um Konstanten zu bestimmen
↳ Ggf. Superpositionsprinzip für lineare PDE $\Delta u = 0$ nutzen!

Bsp:

Aufgabe 10. (Laplace-Gleichung in 2D)
Lösen Sie das Randwertproblem auf $\Omega = (0,a) \times (0,b)$



$$\Delta u(x,y) = 0 \qquad (x,y) \in \Omega$$
$$u(0,y) = 0 = u(a,y), \qquad y \in [0,b]$$
$$u(x,0) = u_0 \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right), \quad x \in [0,a]$$
$$u(x,b) = u_b \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right), \quad x \in [0,a]$$

mit $u_a, u_b \in \mathbb{R}$.

$u = X(x) Y(y)$; $Y, X \neq 0$

PDE $\Rightarrow Y X'' + X Y'' = 0 \;\Big|\cdot \frac{1}{X \cdot Y}$

$$\Leftrightarrow -\frac{X''(x)}{X(x)} = + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \overset{!}{=} \lambda^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sinh &= \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ \cosh &= \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \end{aligned}}$$

ODEs I) $\underset{a}{1} X''(x) \underset{b}{+0X'} + \underset{c}{\lambda^2} X(x) = 0$ $\qquad P(\mu) = a\mu^2 + b\mu + c = \mu^2 + \lambda^2 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \mu_{1,2} = \pm i\lambda$

<Mathe X> $\Rightarrow$ $X(x) = B_1 e^{+i\lambda x} + B_2 e^{-i\lambda x} = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x)$

II) $Y'' - \lambda^2 Y = 0 \rightsquigarrow \mu_{1,2} = \pm\lambda$

$\Rightarrow Y(y) = B_3 e^{+\lambda x} + B_4 e^{-\lambda x} = C_3 \sinh(\lambda y) + C_4 \cosh(\lambda y)$

RB: $u(0,y) = 0 \Leftrightarrow (C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1) \cdot Y = 0 \overset{Y \neq 0}{\Leftrightarrow} \boxed{C_2 = 0}$

$u(a,y) = 0 \Leftrightarrow [C_1 \cdot \sin(\lambda a)] \cdot Y = 0 \overset{Y \neq 0}{\Leftrightarrow} \boxed{\lambda_n = \frac{n\pi}{a},\ n \in \mathbb{N}}$

Restliche RB mit Superpositionsprinzip:

$$u(x,y) = X(x)\cdot Y(y) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\underbrace{a_n}_{=C_1\cdot C_3}\cdot\sinh(\lambda_n\cdot y) + \underbrace{b_n}_{=C_1\cdot C_4}\cosh(\lambda_n y)\Big)\cdot\sin(\lambda_n x)$$

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(a_n\underbrace{\sinh(0)}_{=0} + b_n\underbrace{\cosh(0)}_{=1}\Big)\cdot\sin(\lambda_n\cdot x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n\cdot\sin(\lambda_n\cdot x) \overset{!}{=} u_0\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{a}\cdot x\right) \overset{\text{Koeff.}}{\Rightarrow} \boxed{\begin{matrix} b_2 = u_0 \\ b_n = 0\ \forall n\neq 2\end{matrix}}$$

$$u(x,b) = \sum_{n=0}^{\infty}\big(a_n\sinh(\lambda_n\cdot b) + b_n\cosh(\lambda_n\cdot b)\big)\sin(\lambda_n\cdot x)$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n\sinh\left(\frac{n\cdot\pi}{a}\cdot b\right)\sin\left(\frac{n\cdot\pi}{a}\cdot x\right)\right] + u_0\cdot\cosh\left(\frac{2\pi}{a}\cdot b\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{a}\cdot x\right)$$

$$\overset{!}{=} u_b\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{a}\cdot x\right) \quad \text{RB}$$

$$\overset{\text{Koeffvgl.}}{\Rightarrow} u_b = a_2\sinh\left(\frac{2\pi}{a}\cdot b\right) + u_0\cosh\left(\frac{2\pi}{a}\cdot b\right), \quad \boxed{a_n = 0\ \forall n\neq 2}$$

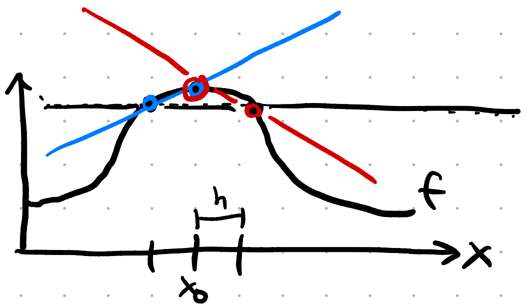
$$\Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{u_b - u_0\cosh\left(\frac{2\pi}{a}\cdot b\right)}{\sinh\left(\frac{2\pi}{a}\cdot b\right)}} \quad \text{algebraische}$$

Letztliche Lösung: $u(x,y) = \left(u_0\cdot\cosh\left(\frac{2\pi}{a}\cdot y\right) + a_2\sinh\left(\frac{2\pi}{a}\cdot y\right)\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{a}\cdot x\right)$

N Finite Differenzen

Link Wiki Table

- Problem bei PDE: Ableitungen
- (Eine) Lösung: Approximation
- **Intuition**: → $f\in C^1$ gegeben
  → Betrachte h-Gitter



$$\frac{\partial}{\partial x}f(x)\Big|_{x_0} \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Zentral ($\mathcal{O}(h^2)$) Ordnung 2 (besser) | Rückwärts ($\mathcal{O}(h)$) Ordnung 1 | Vorwärts ($\mathcal{O}(h)$) Ordnung 1

- Herleitung über truncated Taylor, viele Möglichkeiten (siehe Bild)

- **Ordnung Bestimmen Beispiel:**

Beispiel 6.4 Hier noch zwei weitere Beispiele für finite Differenzen (Übung):

$$\frac{1}{2h}\left(f(x-2h)-4f(x-h)+3f(x)\right)=f'(x)+\mathcal{O}(h^2)\,,$$

Finite difference coefficient

From Wikipedia, the free encyclopedia

In mathematics, to approximate a derivative to an arbitrary order of accuracy, it is possible to use the finite difference. A finite difference can be **central**, **forward** or **backward**.

Contents [hide]

$$\frac{1}{2h}\left(-\frac{1}{2}u_{-1}+\frac{1}{2}u_{+1}\right)$$

Central finite difference [edit]

This table contains the coefficients of the central differences, for several orders of accuracy and with uniform grid spacing:[1]

Derivative	Accuracy	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
1	2					−1/2	0	1/2				
	4				1/12	−2/3	0	2/3	−1/12			
	6			−1/60	3/20	−3/4	0	3/4	−3/20	1/60		
	8		1/280	−4/105	1/5	−4/5	0	4/5	−1/5	4/105	−1/280	
2	2					1	−2	1				
	4				−1/12	4/3	−5/2	4/3	−1/12			
	6			1/90	−3/20	3/2	−49/18	3/2	−3/20	1/90		
	8		−1/560	8/315	−1/5	8/5	−205/72	8/5	−1/5	8/315	−1/560	
3	2				−1/2	1	0	−1	1/2			
	4			1/8	−1	13/8	0	−13/8	1	−1/8		
	6		7/240	3/10	169/120	61/30	0	61/30	169/120	3/10	7/240	

Entwickeln:

$$\underline{f(x-2h)} \overset{\text{Taylor}}{=} f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(2h) + \frac{f''(x)}{2!}(2h)^2 + \mathcal{O}(h^3)$$

$$\underline{f(x-h)} = f(x) - f'(x)\cdot h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \mathcal{O}(h^3)$$

$$f(x) = f(x)$$

Einsetzen: $\frac{1}{2h}\left(\underline{f-2hf'+2h^2f''+\mathcal{O}(h^3)} - 4\underline{\left[f-h\cdot f'+\frac{h^2}{2}f''+\mathcal{O}(h^3)\right]}+3f\right)$

$$= \frac{1}{2h}\left[\underbrace{(1-4+3)}_{=0}f + (-2h+4h)f' + \underbrace{(2h^2-2h^2)}_{=0}f'' + \mathcal{O}(h^3)\right)$$

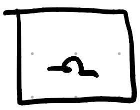
$$= \frac{1}{2h}\left(2hf' + \mathcal{O}(h^3)\right) = f' + \frac{\mathcal{O}(h^3)}{h} = f' + \mathcal{O}(h^2)$$

$\Rightarrow$ (Mindestens) 2-te Ordnung

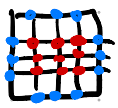
(da $\mathcal{O}(h^2)=\mathcal{O}(h^3)$ sein könnte, daher vollst. Beweis muss bis $\mathcal{O}(h^4)$ entwickeln am Anfang)

- **FD-Diskretisiertes Poisson Problem:**

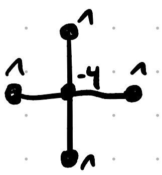
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega \\ u = g & \partial\Omega \end{cases}$$



$$\rightsquigarrow \begin{cases} -\Delta_h u_h(\xi) = f(\xi) & \xi\in\Omega_h \\ u_h(\xi) = g(\xi) & \xi\in\partial\Omega_h \end{cases}$$



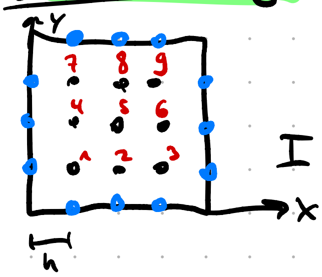
Approximation: $(\Delta u)(x,y) = (\Delta_h u) + \mathcal{O}(h^2)$



mit $[\Delta_h u(x,y)] = \dfrac{u(x-h,y)+u(x+h,y)+u(x,y-h)+u(x,y+h)-4u(x,y)}{h^2}$

LGS für Std.-Nummerierung: $Ax = b$ mit

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} T & -I & & 0 \\ -I & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -I \\ 0 & & -I & T \end{bmatrix},\quad x = \begin{bmatrix} u(h,h) \\ u(2h,h) \\ \vdots \\ u(h,2h) \\ \vdots \\ u((n-1)h,(n-1)h) \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \\ 4 \\ \\ 9 \end{matrix}$$



$$I \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)},\quad T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$$

Rechte Seite $b \in \mathbb{R}^{n-1}$ mit RB, zB für $i=1$: 5

$$\frac{4u_1 - u_2 - u_4 - u(0,h) - u(h,0)}{h^2} = f(h,h) = f_1$$

$u(0,h) = g(0,h)$
$u(h,0) = g(0,h)$
$\Longleftrightarrow$

$$\frac{4u_1 - u_2 - u_4}{h^2} = \underbrace{f_1 + \frac{1}{h^2} g(0,h) + \frac{1}{h^2} g(h,0)}_{= b_1}$$

bekannt

Jupyter-NB : Poisson Problem

→ Wärme, Displacement, ...

→ Matrix Assembly

→ Source Experiment

→ Error Comparison mit Resultaten aus Analysis Part (so)

```
L=1
N = 20
d = L/(N-1)
xVals = [i*d for i in range(1,N-1)]
yVals = [i*d for i in range(1,N-1)]

def source(x,y):
    return 0.1
def bot(x):
    return -1*np.sin(5*np.pi*x)
def right(y):
    return 2*np.sin(np.pi*y)
def top(x):
    return 0
def left(y):
    return 0

A = setupSystemMatrix(N)
b = setupRHSVector(source,bot,right,top,left)

u = np.linalg.solve(A, b)

plotSolutionWithBCs(u)
```