[0]: Fragen?
[E]: Lineare Abbildungen, Determinanten

Vortragsübung 04 HM1 – WS22

Lambert Theisen 14.12.2022

E8

Aufgabe V 8. *Lineare Abbildungen*

(a) Wir betrachten die lineare Abbildung $\delta\colon \operatorname{Pol}_2\mathbb{R} \to \operatorname{Pol}_2\mathbb{R}\colon p(X) \mapsto p(X) + p'(X)$. Bestimmen Sie ${}_M\delta_M$ bezüglich der Basis $M\colon 1, X, X^2$ von $\operatorname{Pol}_2\mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{Kern}(\delta)$ und $\operatorname{Bild}(\delta)$ für δ aus **(a)**. Ist δ bijektiv?

(c) Sei $\gamma\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an der Ebene $\operatorname{L}\left((1,3,2)^\intercal, (-1,0,1)^\intercal\right)$. Bestimmen Sie ${}_E\gamma_E$ bezüglich der Standardbasis $E\colon e_1, e_2, e_3$ von $\mathbb{R}^3$.
Hinweis: Finden Sie zunächst eine Basis $B\colon b_1, b_2, b_3$ von $\mathbb{R}^3$, bezüglich derer sich die Spiegelung leicht beschreiben lässt, und berechnen Sie danach ${}_E\gamma_E$ aus ${}_B\gamma_B$.

Gegeben: Lin. Abb.: $\delta: \operatorname{Pol}_2\mathbb{R} \to \operatorname{Pol}_2\mathbb{R}$, $p(x) \mapsto p(x) + p'(x)$

$\operatorname{Pol}_2\mathbb{R}$-Basis: $M: m_1, m_2, m_3$ mit $m_1 = 1$, $m_2 = X$, $m_3 = X^2$

a) Gesucht: ${}_M\delta_M$

Zur Erinnerung:
Nach Wahl einer Basis $B\colon b_1, \ldots, b_n$ in einem n-dimensionalen Vektorraum V über $\mathbb{K}$ ordnet man jedem Vektor $v \in V$ dessen Koordinatentupel ${}_Bv = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^\intercal$ zu:
Es gilt dann $v = \sum_{j=1}^n \lambda_j\, b_j$.
Nun sei W ein k-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, mit Basis $C\colon c_1, \ldots, c_k$. Dann wird jeder Vektor $w \in W$ durch ein Koordinatentupel ${}_Cw$ bezüglich C beschrieben.

3.8.8. Satz.

Jede lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ wird bezüglich der Basen B und C beschrieben durch eine Matrix ${}_C\varphi_B$:

$${}_C(\varphi(v)) = {}_C\varphi_B\ {}_Bv\,.$$

Die Spalten der Matrix ${}_C\varphi_B$ sind die Koordinatenvektoren bezüglich C der Bilder der Basisvektoren aus B unter φ:

$${}_C\varphi_B = \left({}_C(\varphi(b_1)) \cdots {}_C(\varphi(b_n))\right).$$

Berechnung der Bilder der Basisvektoren von M "unter" δ & Darstellung dieser in M

$$\leadsto {}_M\delta_M = \left[{}_M(\delta(m_1)) \quad {}_M(\delta(m_2)) \quad {}_M(\delta(m_3)) \right]$$

Wie können wir "1" darstellen? 🤔

$\boxed{m_1 = 1}$ $\boxed{m_2 = X}$ $\boxed{m_3 = X^2}$

$$\delta(m_1) = \delta(1) = 1 + (1)' = 1 = 1 \cdot m_1 + 0 \cdot m_2 + 0 \cdot m_3 \Rightarrow {}_M\delta(m_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta(m_2) = \delta(X) = X + X' = X + 1 = 1 \cdot m_1 + 1 \cdot m_2 + 0 \cdot m_3 \Rightarrow {}_M\delta(m_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta(m_3) = \delta(X^2) = X^2 + (X^2)' = X^2 + 2X = 0 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + 1 \cdot m_3 \Rightarrow {}_M\delta(m_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad {}_M\delta_M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.8.15. Definition.

Es sei $\alpha\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

- Kern $(\alpha) := \{v \in V \mid \alpha(v) = 0\}$ heißt der Kern von α.
- Bild $(\alpha) := \{\alpha(v) \mid v \in V\}$ heißt das Bild von α.

3.8.16. Bemerkungen.

- Sowohl Kern (α) als auch Bild (α) sind Untervektorräume.
- Sind B und C Basen für V bzw. W, so gilt Kern $(\alpha) = \{v \in V \mid {}_C\alpha_B\, {}_Bv = 0\}$.
- Die Abbildung α ist genau dann injektiv, wenn Kern $(\alpha) = \{\vec{0}\}$ gilt.

b) i) Kern (δ)

$\leadsto$ Definition $\overset{3.8.16}{=} \{v \in \mathrm{Pol}_2\mathbb{R} \mid \underbrace{{}_M\delta_M \cdot {}_Mv = 0}\}$

$\Rightarrow$ Betrachte homogenes LGS: ${}_M\delta_M \cdot x = 0$

$$[{}_M\delta_M \| 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{Z_2 - Z_3}{\leadsto} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{Z_1 - Z_2}{\leadsto} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ Die einzige Lösung ist $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Kern$(\delta) = \{\vec{0}\}$

$\overset{3.8.16}{\Rightarrow}$ δ ist injektiv

ii) Bild (δ)

$\delta : V \to W$ ist linear, $V = W = \mathrm{Pol}_2\mathbb{R}$

$\leadsto$ Definition Bild$(\delta) \overset{3.8.15}{=} \{\delta(v) \mid v \in V\} \subseteq W$ ("Menge aller Objekte, die getroffen werden können")

Sei $w(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0 \in \mathrm{Pol}_2\mathbb{R}$. Suche $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathrm{Pol}_2\mathbb{R}$

sodass $w(x) = \delta(p(x))$ (*). [Gibt es überhaupt immer ein $p(x)$?]

$$\Leftrightarrow b_2x^2 + b_1x + b_0 \overset{!}{=} p(x) + p'(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 + 2a_2x + a_1$$

$$= a_2x^2 + (a_1 + 2a_2)x + (a_0 + a_1)$$

Koeff. Vgl.

$$\begin{aligned} a_2 &= b_2 \\ \Leftrightarrow a_1 + 2a_2 &= b_1 \\ a_0 + a_1 &= b_0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\Rightarrow a_1 = b_1 - 2a_2 = b_1 - 2b_2 \\ &\Rightarrow a_0 = b_2 - a_1 = b_0 - b_1 + 2b_2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow p(x) = b_2 X^2 + (-2b_2 + b_1) X + (2b_2 - b_1 + b_0) \in \mathrm{Pol}_2\mathbb{R}$ erfüllt $(*)$ ✓

Damit folgt $\mathrm{Bild}(\delta) = W = \mathrm{Pol}_2\mathbb{R}$ & es gibt zu jedem $w(x) \in \mathrm{Pol}_2\mathbb{R} = W$ ein $p(x) \in \mathrm{Pol}_2\mathbb{R} = V$ mit $w(x) = \delta(p(x))$

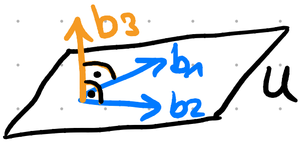
$\overset{1.6.5\ (\text{Def. Surj.})}{\Rightarrow}$ δ ist surjektiv.

(iii) δ bijective? Ja, denn δ injektiv, δ surjectiv $\Rightarrow$ δ bijective.

c) $\gamma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist Spiegelung an der Ebene $U := L\left(\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

I Finde "leichte" Basis $B: b_1, b_2, b_3$ von $\mathbb{R}^3$ bzgl. derer γ leicht bescheibbar

$\rightsquigarrow$ Wähle $b_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$



$\rightsquigarrow$ Ergänze zur Basis: $b_3 := b_1 \times b_2 = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 - 2\cdot 0 \\ 2\cdot(-1) - 1\cdot 1 \\ 1\cdot 0 - 3(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}$

b_1, b_2, b_3 sind linear unabhängig, da

$$\mathrm{Rg}(b_1, b_2, b_3) = \mathrm{Rg}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{\substack{z_2 - 3z_1 \\ z_3 - 2z_1}}{\overset{3.9.7}{=}} \mathrm{Rg}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -12 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \underset{z_3 - z_2}{=} \mathrm{Rg}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Rang-Operationen

$$\underset{\text{Normieren}}{=} \mathrm{Rg}\begin{bmatrix} 1 & \overset{(*)}{-1} & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

(*) kann mittels operationen zu Null gebracht werden.

④

$\Rightarrow b_1, b_2, b_3$ lin. unabh. weil voller (Rang $\Leftrightarrow$ max # unab. Spalten) nach 3.9.2

2.7.16 $\Rightarrow$ dim($\mathbb{R}^3$)=3

$\mathcal{B}: b_1, b_2, b_3$ ist Basis von $\mathbb{R}^3$.

3.9.2. Bemerkung.

Der Zeilenrang ist die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen von A, entsprechend ist der Spaltenrang die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten.
Insbesondere ist der Spaltenrang gleich der Dimension des Bildes der linearen Abbildung $\alpha\colon \mathbb{K}^s \to \mathbb{K}^z\colon v \mapsto Av$.
[Es ist ja Bild (α) gleich dem Aufspann der Spalten von A, vgl. 3.8.19.]

2.7.16. Satz.

1. *Hat V ein endliches Erzeugendensystem E, so kann man aus E eine Basis gewinnen, indem man geeignete Vektoren aus E weglässt.*
2. *Umgekehrt kann man jede linear unabhängige Menge in V zu einer Basis ergänzen.*
3. *Ist $\dim V = n$, so bildet*
   - *jede linear unabhängige Menge mit n Vektoren eine Basis, und*
   - *jedes Erzeugendensystem mit n Vektoren eine Basis.*

3.9.7. Lemma (Bestimmung des Rangs).

Bei elementaren Zeilenumformungen (VZ), (mZ) und (aZ), vgl. 3.7.1, ändert sich der (Zeilen-) Rang einer Matrix nicht.
Analog ändert sich der (Spalten-) Rang nicht bei den folgenden elementaren Spaltenumformungen:

(VS) *Vertauschen von Spalten*

(mS) *Multiplizieren einer Spalte mit einem Skalar $s \neq 0$,*

(aS) *Addition eines Vielfachen einer Spalte zu einer anderen.*

Mit Hilfe von elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen kann man jede Matrix auf die Gestalt $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{E}_r & B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ bringen und daran den Rang r ablesen.

① Berechne ${}_E\gamma_E$ mit Hilfe von ${}_B\gamma_B$ mit 3.10.11

$${}_E\gamma_E = ({}_E\mathrm{id}_B) \cdot ({}_B\gamma_B) \cdot ({}_B\mathrm{id}_E)$$

3.10.11. Satz.

Es seien B und C Basen für V.

1. ${}_B\mathrm{id}_B = E_{\dim V}$.
2. ${}_C\mathrm{id}_B$ *ist invertierbar, es gilt* ${}_B\mathrm{id}_C = ({}_C\mathrm{id}_B)^{-1}$.
3. *Man kann mit Hilfe von Matrizen für die identische Abbildung Koordinaten auf andere Basen umrechnen:*
   Für $v \in V$ gilt ${}_C\mathrm{id}_B\, {}_Bv = {}_Cv$.
4. *Man kann sogar die Matrixbeschreibung einer beliebigen linearen Abbildung $\varphi\colon V \to W$ bequem auf andere Basen umrechnen:*

$${}_E\mathrm{id}_D\ {}_D\varphi_C\ {}_C\mathrm{id}_B = {}_E\varphi_B$$

(hier sind D und E Basen für W).

• Nach Definition des Spiegelung gilt:

$$\left.\begin{aligned} \gamma(b_1) &= 1\,b_1 + 0\,b_2 + 0\,b_3 \\ \gamma(b_2) &= 0\,b_1 + 1\,b_2 + 0\,b_3 \\ \gamma(b_3) &= 0\,b_1 + 0\,b_2 + (-1)\,b_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow {}_B\gamma_B = \left({}_B(\gamma(b_1)),\ {}_B(\gamma(b_2)),\ {}_B(\gamma(b_3))\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

• $${}_E\mathrm{id}_B = \left({}_E(\mathrm{id}(b_1)),\ {}_E(\mathrm{id}(b_2)),\ {}_E(\mathrm{id}(b_3))\right)$$

$$= \left({}_E b_1,\ {}_E b_2,\ {}_E b_3\right)$$

$$= \left(b_1,\ b_2,\ b_3\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

• Nach 3.10.11 ist ${}_E\mathrm{id}_B$ invertierbar mit ${}_B\mathrm{id}_E = ({}_E\mathrm{id}_B)^{-1}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{matrix} z_2 - 3z_1 \\ z_3 - 2z_1 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -12 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{z_3 - z_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -12 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \begin{matrix} \frac{1}{3}z_2 \\ \frac{1}{9}z_3 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/9 & -1/9 & 1/9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\begin{smallmatrix} z_1 - 3z_3 \\ z_2 + 4z_3 \end{smallmatrix}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -5/9 & -1/9 & 4/9 \\ 0 & 0 & 1 & 1/9 & -1/9 & 1/9 \end{array}\right] \rightarrow z_1 + z_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/9 & 2/9 & 1/9 \\ 0 & 1 & 0 & -5/9 & -1/9 & 4/9 \\ 0 & 0 & 1 & 1/9 & -1/9 & 1/9 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow {}_B\mathrm{id}_E = ({}_E\mathrm{id}_B)^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -5 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow {}_E\gamma_E = ({}_E\mathrm{id}_B)\cdot({}_B\gamma_B)\cdot({}_B\mathrm{id}_E) = \ldots = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{E9}$

Aufgabe V 9. *Determinanten*

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ seien die Matrizen A und B_α gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \mathrm{e} & 0 & \pi \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \alpha+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $\det(A)$.

(b) Bestimmen Sie $\det(B_\alpha)$ in Abhängigkeit von α.
Für welche Parameterwerte von α ist B_α invertierbar?

a) Entwicklung nach der 3-ten Spalte gemäß 3.13.4

3.13.4. Entwicklungssatz.

Es sei $A = (a_{jk}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann gilt für alle j, k:

1. $\det A = \sum_{\ell=1}^{n} a_{j\ell}\, \widetilde{a}_{j\ell}$ (*Entwicklung nach der j-ten Zeile*)
2. $\det A = \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell k}\, \widetilde{a}_{\ell k}$ (*Entwicklung nach der k-ten Spalte*)

Außerdem gilt:

3. $A\, \widetilde{A}^\mathsf{T} = (\det A)\, \mathrm{E}_n = \widetilde{A}^\mathsf{T} A$.

3.13.1. Definition.

Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix.
Mit $\widetilde{A}_{jk}$ bezeichnen wir die $((n-1)\times(n-1))$-Matrix,
die aus A entsteht, indem man die j-te Zeile und die k-te Spalte streicht.
Der (j,k)-Cofaktor von A
ist die vorzeichenbehaftete Unterdeterminante

$$\widetilde{a}_{jk} := (-1)^{j+k} \det \widetilde{A}_{jk}.$$

Die Cofaktor-Matrix von A ist $\widetilde{A} := (\widetilde{a}_{jk})_{1\le j,k\le n}$.

Viele Nullen in Spalte

$$\det A = \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{4} a_{\ell 3}\, \underbrace{\tilde{a}_{\ell 3}}_{(\ell,3)\text{-Cofaktor aus } 3.13.1} =$$

$$= 0 \cdot \tilde{a}_{13} + 2 \cdot \tilde{a}_{23} + 0 \cdot \tilde{a}_{33} + 0 \cdot \tilde{a}_{43}$$

$$= 2 \cdot \tilde{a}_{23} = \underbrace{2 \cdot (-1)^{2+3}}_{-2} \cdot \det \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{verschiedene Möglichkeiten}}$$

Möglichkeit 1: Entwichlung nach erster Zeile

$$\det\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{bmatrix} = \sum_{\ell=1}^{3} a_{1\ell}\,\tilde{a}_{1\ell} = (-1)\det\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$= -1\big(3\cdot 1 - 1\cdot 0\big) + 1\big(2\cdot 1 - (-2)\cdot 3\big)$$

$$= -3 + 8 \quad = 5$$

3.11.3. Definitionen.

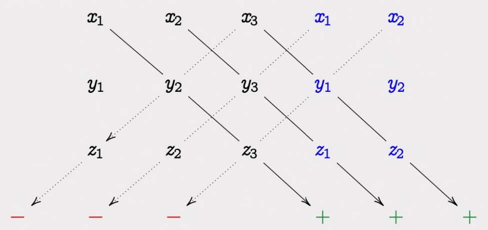
① Die Determinante einer 2×2-Matrix wird definiert als die orientierte Fläche des Parallelogramms, das von ihren Zeilenvektoren aufgespannt wird:

$$\det\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{pmatrix} := x_1\,y_2 - x_2\,y_1\,.$$

Möglichkeit 2: Regel von Sarrus 3.13.4

3.11.5. Regel von Sarrus.

Um die Determinante einer 3×3-Matrix mit Spalten $S_1 = (x_1, y_1, z_1)^\top$, $S_2 = (x_2, y_2, z_2)^\top$, $S_3 = (x_3, y_3, z_3)^\top$ zu berechnen, fügen wir die Spalten S_1 und S_2 rechts noch einmal an und ordnen den entstehenden Diagonalen Vorzeichen zu:



Die Determinante $\det(S_1, S_2, S_3)$ erhält man, indem man die mit + markierten Diagonalen aufmultipliziert, die Produkte addiert und davon die Produkte der mit − markierten Diagonalen abzieht. [nachrechnen]

$$\left[\begin{array}{ccc|cc}-1 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 2 & 3\\ -2 & 1 & 1 & -2 & 1\end{array}\right]$$

$\ominus_3 \quad \ominus_2 \quad \ominus_1 \quad \oplus_1 \quad \oplus_2 \quad \oplus_3$

$$\det\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{bmatrix} = \overbrace{(-1)\cdot 3\cdot 1}^{\oplus_1} + \overbrace{0\cdot 0\cdot(-2)}^{\oplus_2} + \overbrace{1\cdot 2\cdot 1}^{\oplus_3}$$
$$\underbrace{-(1)\cdot(3)\cdot(-2)}_{\ominus_1} - \underbrace{(-1)\cdot 0\cdot 1}_{\ominus_2} - \underbrace{0\cdot 2\cdot 1}_{\ominus_3}$$

$$= -3 + 0 + 2 + 6 + 0 - 0 = 5$$

3. Möglichkeit: Mittels elementarer Zeilenumformung 3.12.1

→ Matrix auf Δ-Struktur bringen weil Determinante dann easy

3.12.1. Lemma.

Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, mit Zeilen $Z_1, \dots, Z_n$.

(mZ) *Multipliziert man eine Zeile von A mit μ, so multipliziert sich auch die Determinante mit diesem Faktor:*

$$\det\begin{pmatrix}Z_1\\ \vdots\\ \mu\,Z_j\\ \vdots\\ Z_n\end{pmatrix} = \mu\det\begin{pmatrix}Z_1\\ \vdots\\ Z_j\\ \vdots\\ Z_n\end{pmatrix}$$

(VZ) *Vertauscht man in A zwei Zeilen, so ändert $\det A$ das Vorzeichen.*

(aZ) *Addiert man in A ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen, so ändert sich die Determinante nicht.*

$$\rightarrow \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{Z_2+2Z_1 \\ Z_3-2Z_1}}{=} \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{Z_2 \leftrightarrow Z_3}{=} -\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{Z_3-3Z_2}{=} -\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = -(-1)\cdot(1)\cdot(5) = 5$$

3.12.4

3.12.4. Lemma (Dreiecksmatrizen).

Es sei T eine quadratische obere Dreiecksmatrix, also eine Matrix der Form

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \clubsuit & \cdots & \clubsuit \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \clubsuit \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dann ergibt sich die Determinante von T als Produkt der Hauptdiagonalelemente: D. h. es gilt $\det T = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.
Analoges gilt für untere Dreiecksmatrizen.
[Dies sind ja Transponierte von oberen Dreiecksmatrizen.]

3.12.5. Strategie zur Berechnung von Determinanten.

Bringe A durch Zeilen- und Spaltenumformungen auf Dreiecksgestalt T, berechne $\det T$ (nach 3.12.4) und führe die notwendigen Korrekturen durch (Vorzeichen wg. (VZ), Skalare wg. (mZ), siehe 3.12.1).

$\Rightarrow$ Letztlich $\det(A) = 2\cdot(-1)\cdot 5 = -10$

b) Blockmatrix

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\det\left[\begin{array}{cccc|ccc} -1 & 1 & 2 & -2 & 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & e & 0 & \pi \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & -5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \alpha+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

3.13.8. Determinanten von Block-Dreiecksmatrizen.

Mit Hilfe des Entwicklungssatzes beweist man:
Ist A eine Block-Dreiecksmatrix mit d^2 Blöcken, also

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & \cdots & A_{1d} \\ \hline 0 & A_{22} & \cdots & \cdots & A_{2d} \\ \hline 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{dd} \end{array}\right),$$

so gilt $\det A = (\det A_{11})\cdots(\det A_{dd})$.

Zum Beispiel ist die in 3.11.6.3 betrachtete Matrix $\left(\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline 0 & 0 & z_3 \end{array}\right)$ eine Block-Dreiecksmatrix; die Blöcke sind
$A_{11} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$, $A_{12} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{22} = \begin{pmatrix} z_3 \end{pmatrix}$,
die Determinante ist $(\det A_{11})(\det A_{22}) = (x_1 y_2 - x_2 y_1) z_3$.

$$\overset{3.13.8}{=} \det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} \alpha-1 & 2 & 0 \\ 2 & \alpha+1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{3.12\text{-}1}{\underset{3.13.8}{=}} \frac{3}{2} \underbrace{\det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=: \det(A^T) \overset{3.13.7}{=} \det(A)} \cdot \det \begin{pmatrix} \alpha-1 & 2 \\ 2 & \alpha+1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\det(2)}_{2}$$

Teil a)

$= -10$

3.12.1. Lemma.

Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, mit Zeilen $Z_1, \dots, Z_n$.

(mZ) *Multipliziert man eine Zeile von A mit μ, so multipliziert sich auch die Determinante mit diesem Faktor:*

$$\det \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ \mu Z_j \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \mu \det \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_j \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}$$

(VZ) *Vertauscht man in A zwei Zeilen, so ändert* $\det A$ *das Vorzeichen.*

(aZ) *Addiert man in A ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen, so ändert sich die Determinante nicht.*

3.13.7. Lemma.

Für jede quadratische Matrix A gilt $\det A = \det A^{\mathsf{T}}$.

2x2 Formel Instant

$$= \frac{3}{2}(-10) \cdot ((\alpha-1)(\alpha+1) - 2\cdot 2) \cdot 2$$

$$= -30 \cdot [\alpha^2 \underbrace{-1 - 4}_{-5}]$$

$$= -30 \cdot (\alpha^2 - 5)$$

$\rightarrow$ B_α ist genau dann invertierbar nach 3.12.3, wenn $\det(B_\alpha) \neq 0$.

Dies ist genau der Fall wenn $\alpha^2 - 5 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{5}\}$.

3.12.3. Multiplikativität der Determinante.

❶ *Für* $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *gilt* $\det(A\,B) = \det A \cdot \det B$.

[Den Beweis überlassen wir den Mathematikern.]

❷ *Es gilt* $\det \mathrm{E}_n = 1$.

❸ *Die Matrix* A *ist genau dann invertierbar, wenn* $\det A \neq 0$.
In diesem Fall gilt $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

[Aus $A^{-1} \cdot A = \mathrm{E}_n$ folgt $\det(A^{-1}) \cdot \det A = \det \mathrm{E}_n = 1$.]

Die Determinante ist nicht additiv:
Im Allgemeinen gilt $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

[Zum Beispiel ist ja $1 = \det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \neq \det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \det\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.]