



Interpolation,  
Gauß

## Vorleseübung 3 HM1 - WS 22

Lambert Theisen ①  
30.11.2022

- ② : → Fragen?
- Videos gut so?

E6

Interpolation:**Aufgabe V 6. Interpolation**

Sei  $\text{Pol}_2 \mathbb{R} := \left\{ \sum_{j=0}^2 \lambda_j X^j \mid \lambda_j \in \mathbb{R} \right\}$  die Menge aller reellen Polynome vom Grad höchstens 2 und  $f(X) = \sin(X) + \cos(X)$ .

- (a) Finden Sie  $p(X) \in \text{Pol}_2 \mathbb{R}$  so, dass  $p(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2})$ ,  $p(\pi) = f(\pi)$  und  $p(\frac{3\pi}{2}) = f(\frac{3\pi}{2})$ . Ist das Polynom eindeutig bestimmt?

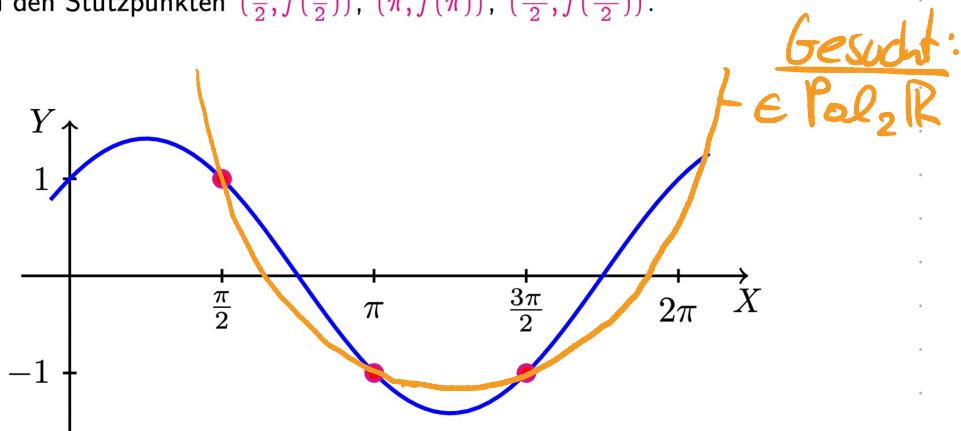
- (b) Bestimmen Sie für  $k = 0, 1, 2$  und  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $x_1 = \pi$  und  $x_2 = \frac{3\pi}{2}$  die Lagrange-Polynome

$$L_k(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^2 \frac{X - x_j}{x_k - x_j}$$

und schreiben Sie das Polynom  $p(X)$  aus Teil (a) als Linearkombination der  $L_k(X)$ .

a) Interpolationsbedingung:  $p(x_i) = f(x_i)$ ,  $\{x_i\}_{i=0}^2$  Stützstellen

**Bedingung:** Übereinstimmung von  $f(X) = \sin(X) + \cos(X)$  mit  $p(X) \in \text{Pol}_2 \mathbb{R}$  an den Stützpunkten  $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2})), (\pi, f(\pi)), (\frac{3\pi}{2}, f(\frac{3\pi}{2}))$ .



Also: Suche  $p(x) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x + \lambda_3 \in \text{Pol}_2 \mathbb{R}$  mit

$$\begin{cases} \text{I)} \quad p(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = 1 \\ \text{II)} \quad p(\pi) = f(\pi) = -1 \\ \text{III)} \quad p(\frac{3\pi}{2}) = f(\frac{3\pi}{2}) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 \frac{\pi^2}{4} + \lambda_2 \frac{\pi}{2} + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 \pi^2 + \lambda_2 \pi + \lambda_3 = -1 \\ \lambda_1 \frac{9\pi^2}{4} + \lambda_2 \frac{3\pi}{2} + \lambda_3 = -1 \end{cases}$$

(3.5)  
mb

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{4} & \frac{\pi}{2} & 1 \\ \pi^2 & \pi & 1 \\ \frac{9\pi^2}{4} & \frac{3\pi}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{A:=} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}}_{x:=} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{b:=}$$

## 3.5.1 Beispiel.

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 7x_2 - 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \\ 3x_1 + 2x_3 & = & 1 \end{array}$$

wird zu  $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

# Gaußalgorithmus (3.7) auf erweiterte Systemmatrix $[A \parallel b]$

## 3.7. Gauß-Algorithmus

Folgende Umformungen ändern die Lösungsmenge eines LGS nicht:

### 3.7.1. Elementare Umformungen.

(VZ) Vertauschen von Gleichungen

(also Vertauschen von Zeilen der erweiterten Koeffizientenmatrix  $[A \parallel b]$ ).

(mZ) Multiplizieren einer Gleichung mit einem Skalar  $s \neq 0$

(also Multiplizieren einer Zeile von  $[A \parallel b]$  mit  $s \neq 0$ ).

(aZ) Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen

(also Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen).

(VS) Vertauschen von Unbestimmten

(also Vertauschen von Spalten in  $A$  — nicht in  $[A \parallel b]$ !).

Mindestens die Schritte vom Typ (VS) muss man genau protokollieren, da sich die Reihenfolge der Variablen ändert.

Auch bei den anderen Schritten ist eine Dokumentation sinnvoll

(insbesondere zur Fehlersuche!)

### 3.7.2. Satz.

Mit Hilfe elementarer Umformungen kann man jedes LGS der Form  $Ax = b$  mit  $A \in \mathbb{K}^{z \times s}$  transformieren auf ein LGS der Gestalt  $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ , wobei

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}}^r \text{ Spalten} & \overbrace{\begin{array}{c} C \\ \vdots \\ 0 \end{array}}^{s-r \text{ Spalten}} \\ \hline & 0 \end{array} \right) \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \hline \tilde{b}_r \\ \tilde{b}_{r+1} \\ \vdots \\ \tilde{b}_z \end{pmatrix}$$

mit  $C \in \mathbb{K}^{r \times (s-r)}$ .

Der Vektor  $\tilde{x}$  entsteht aus  $x$  durch Vertauschung von Variablen.

Das LGS  $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$  ist genau dann lösbar, wenn für alle  $j > r$  gilt:  $\tilde{b}_j = 0$ .

$$[A \parallel b] = \left[ \begin{array}{ccc|c} \frac{\pi^2}{4} & \frac{\pi}{2} & 1 & 1 \\ \pi^2 & \pi & 1 & -1 \\ \frac{9\pi^2}{4} & \frac{3\pi}{2} & 1 & -1 \end{array} \right] \rightsquigarrow z_2 - 4z_1 \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} \frac{\pi^2}{4} & \frac{\pi}{2} & 1 & 1 \\ 0 & -\pi & -3 & -5 \\ 0 & -3\pi & -8 & -10 \end{array} \right]$$

$$\rightsquigarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} \frac{\pi^2}{4} & \frac{\pi}{2} & 1 & 1 \\ 0 & -\pi & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right] \quad z_1 - z_3 \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} \frac{\pi^2}{4} & \frac{\pi}{2} & 0 & -4 \\ 0 & -\pi & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

(4)

$$\sim \begin{bmatrix} \frac{\pi^2}{4} & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & -\pi & 0 & | & 10 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{4}{\pi^2} z_1 & 0 & 0 & | & \frac{4}{\pi^2} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{10}{\pi} \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 \end{bmatrix}$$

Was heißt das jetzt?:  $\tilde{A}x = \tilde{b}$  hat selbe Lösungsmenge wie  $Ax = b$

$$1 \cdot \lambda_1 \quad 0 \cdot \lambda_2 \quad 0 \cdot \lambda_3 = \frac{4}{\pi^2}$$

$$0 \cdot \lambda_1 \quad 1 \cdot \lambda_2 \quad 0 \cdot \lambda_3 = -\frac{10}{\pi}$$

$$0 \cdot \lambda_1 \quad 0 \cdot \lambda_2 \quad 1 \cdot \lambda_3 = 5$$

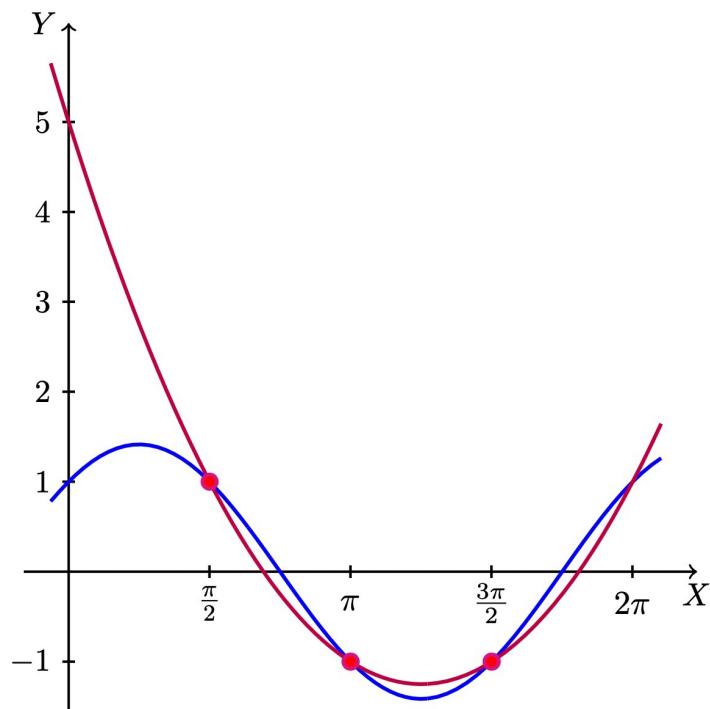
Die einzige Lösung ist

$$x = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{\pi^2} \\ -\frac{10}{\pi} \\ 5 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow p(x) = \frac{4}{\pi^2} \cdot x^2 - \frac{10}{\pi} \cdot x + 5$  ist eindeutig bestimmt.

## Plotten

Graphen von  $f(X) = \sin(X) + \cos(X)$  und  $p(X) = \frac{4}{\pi^2} X^2 - \frac{10}{\pi} X + 5 \in \text{Pol}_2 \mathbb{R}$



## b) Lagrange-Polynome

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^2 \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad \text{bestimmen f\"ur } x_0 = \frac{\pi}{2}, x_1 = \pi, x_2 = \frac{3\pi}{2}$$

$$L_0(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^2 \frac{x - x_j}{x_k - x_j} = \left( \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) \cdot \left( \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \right) = \left( \frac{x - \pi}{\frac{\pi}{2} - \pi} \right) \cdot \left( \frac{x - \frac{3\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}} \right) = \frac{2x^2}{\pi^2} - \frac{5x}{\pi} + 3$$

$$L_1(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^2 \frac{x - x_j}{x_k - x_j} = \left( \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) \left( \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \right) = \left( \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\pi - \frac{\pi}{2}} \right) \left( \frac{x - \frac{3\pi}{2}}{\pi - \frac{3\pi}{2}} \right) = -\frac{4}{\pi^2} x^2 + \frac{8}{\pi} x - 3$$

$$L_2(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 2}}^2 \frac{x - x_j}{x_k - x_j} = \left( \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \right) \cdot \left( \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) = \left( \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}} \right) \left( \frac{x - \pi}{\frac{3\pi}{2} - \pi} \right) = \frac{2}{\pi^2} x^2 - \frac{3}{\pi} x + 1$$

→ Für Lagrange Polynome gilt mit  $k, l \in \{0, 1, 2\}$ :

$$L_k(x_e) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^2 \frac{x_e - x_j}{x_k - x_j} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{coole Eigenschaft, denn...})$$

$$\Rightarrow p(x_k) L_k(x_e) = \begin{cases} p(x_e), & k = e \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \stackrel{T(x_k)}{=} \begin{cases} f(x_e), & k = e \\ 0, & k \neq e \end{cases}$$

$$\Rightarrow q(x) := \sum_{k=0}^2 p(x_k) L_k(x) \in \text{Pol}_2 \mathbb{R} \text{ erfüllt } q(x_e) = \sum_{k=0}^2 p(x_k) L_k(x_e) \stackrel{(*)}{=} f(x_e)$$

Eindringlichkeit von  $p(x)$  in  $T(x)$  (IP Bd.)

$$p(x) = q(x) = \sum_{k=0}^2 p(x_k) L_k(x) = \underbrace{+1}_{f(x_0)} L_0(x) - \underbrace{1}_{f(x_1)} L_1(x) - \underbrace{1}_{f(x_2)} L_2(x)$$

Beachte: Lagrange Polynome  $L_k(x)$  sind unabh. von den gesuchten Funktionswerten.

⇒ Nutzlich wenn man mehrere Interpolationen mit selben  $\{x_i\}$ , untersch.  $\{f(x_i)\}$

E7

6

**Aufgabe V 7.** Lösungsraum eines LGSFür  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  seien die Matrix  $A_\alpha$  und der Vektor  $b_\beta$  gegeben durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & \alpha & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \alpha+2 & -1 \end{pmatrix}, \quad b_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ \beta-4 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

- (a) Für welche Werte von  $\alpha, \beta$  ist das LGS  $A_\alpha x = b_\beta$  lösbar?  
(b) Bestimmen Sie für  $\alpha = -1$  und  $\beta = 2$  den Lösungsraum von  $A_{-1}x = b_2$ .

Sei nun die Matrix  $B$  und die Vektoren  $\{c_i\}_{i=1}^3$  gegeben durch

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

- (c) Bestimmen Sie jeweils die Lösungsräume von

$$Bx = c_1, \quad Bx = c_2, \quad Bx = c_3.$$

a) Erweiterte Koeffizientenmatrix  $[A_\alpha \parallel b_\beta]$  für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

*hier schon Null-zeilen tausch!*

$$[A_\alpha \parallel b_\beta] = \left[ \begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & \alpha & -1 & 1 & \beta-4 \\ 1 & -2 & 1 & \alpha+2 & -1 & \beta \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Z}_1 \leftrightarrow \text{Z}_2} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-2 & 0 & 3 & \beta+1 \\ 0 & 0 & 3 & \alpha+1 & -3 & \beta-5 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Z}_3 + \text{Z}_2} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-2 & 0 & 3 & \beta+1 \\ 0 & 0 & 3 & \alpha+1 & -3 & \beta-5 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Z}_4 - 3\text{Z}_2} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-2 & 0 & 3 & \beta+1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+1 & 0 & \beta-2 \end{array} \right]$$

Spalten tausch

$$\text{MD } S_2 \leftrightarrow S_5 \quad \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & \alpha-2 & 0 & 0 & \beta+1 \\ 0 & -3 & 3 & \alpha+1 & 0 & \beta-5 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Z}_3 - 3\text{Z}_2} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & 0 & 0 & \beta-2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+1 & 0 & \beta-2 \end{array} \right]$$

## 3.7.2. Satz.

Mit Hilfe elementarer Umformungen kann man jedes LGS der Form  $Ax = b$  mit  $A \in \mathbb{K}^{r \times s}$  transformieren auf ein LGS der Gestalt  $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ , wobei

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}}^r \text{ Spalten} & \overbrace{\begin{array}{c} C \\ \hline 0 \end{array}}^{s-r \text{ Spalten}} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_r \\ \hline \tilde{b}_{r+1} \\ \vdots \\ \tilde{b}_z \end{pmatrix}$$

mit  $C \in \mathbb{K}^{r \times (s-r)}$ .Der Vektor  $\tilde{x}$  entsteht aus  $x$  durch Vertauschung von Variablen.Das LGS  $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$  ist genau dann lösbar, wenn für alle  $j > r$  gilt:  $\tilde{b}_j = 0$ .

Fall 1:  $\alpha \neq -1, \beta \in \mathbb{R}$

$$\xrightarrow{[A \parallel b]} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & 0 & 0 & \beta-2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+1 & 0 & \beta-2 \end{array} \right]$$

(\*) können mittels Umformung zu Null gebracht werden

(?) ist ungleich Null, kann zu Eins gebracht werden durch Normierung.

$\Rightarrow$  Lösbar weil keine Nullzeilen!

Fall 2:  $\alpha=1, \beta=2$

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \left. \begin{array}{l} \{ \\ \sim \\ b_j = 0 \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow$  Lösbar weil  $\tilde{b}_j = 0$  mit  $j \geq 3$  (rechte Seite kompatibel mit D2)

Fall 3:  $\alpha=1, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta-2 \end{array} \right] \quad \left. \begin{array}{l} \{ \\ \sim \\ b_j \neq 0 \end{array} \right\}$$

Letztlich: LGS lösbar für  $(\alpha, \beta) \in \{(-1, 2)\} \cup (\mathbb{R} \setminus \{-1\}) \times \mathbb{R}$

b) Lösungsmenge bestimmen (von  $A_{-1} x = b_2$ )

Aus Teil a) folgt für  $[A_{-1} \parallel b_2]$  mit den elementaren Umformungen (3.7.1):

(8)

$$\left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$z_1 - 2 \cdot z_2 \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|ccccc} & & x_1 & x_5 & x_3 & x_4 & x_2 \\ & & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ \hline & & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{cc|ccccc} & & x_1 & x_5 & x_3 & x_4 & x_2 \\ & & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ \hline & & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Nach (3.76) gilt mit  $\tilde{x} := (x_1, x_5, x_3, x_4, x_2)$

### 3.7.6. Satz.

Führt der Gauß-Algorithmus für das LGS  $Ax = b$  auf  $\tilde{A} \tilde{x} = \tilde{b}$  mit

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{c|c} E_r & C \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \quad C = (c_{jk})_{1 \leq j \leq r, r+1 \leq k \leq s},$$

so hat der Lösungsraum des zugehörigen homogenen Systems die Dimension  $s - r$ . Wenn keine Spalten vertauscht wurden, erhält man eine Basis für den Lösungsraum dieses homogenen Systems aus

$$h_1 := \begin{pmatrix} -c_{1,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad h_j := \begin{pmatrix} -c_{1,r+j} \\ \vdots \\ -c_{r,r+j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad h_{s-r} := \begin{pmatrix} -c_{1,s} \\ \vdots \\ -c_{r,s} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(r + j)-te Zeile

Zur Bestimmung aller Lösungen des inhomogenen Systems genügt es, irgendeine spezielle Lösung  $v_{sp}$  zu bestimmen:

Dann hat der Lösungsraum die Parameterdarstellung

$$v_{sp} + \lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_j h_j + \dots + \lambda_{s-r} h_{s-r} \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_{s-r} \in \mathbb{K}).$$

Irgend eine Lösung?  $\rightsquigarrow$  easy:

$$\left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & \dots & 3 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{cc|ccccc} x_1 & x_5 & x_3 & x_4 & x_2 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], h_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, h_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, h_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(3)

Also:  $\vec{x}^2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + L \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  Tausch

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + L \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \text{Lösungsraum } \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \dots, \lambda_3 \in \mathbb{K} \right\}$$

## b) Gauß mit mehreren rechten Seiten

→ Simultane Anwendung

$$[A \parallel c_1 \ c_2 \ c_3] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 3 & 5 & 8 \\ 6 & 8 & 9 & 6 & 8 & 14 \end{array} \right] \rightsquigarrow z_2 - 3z_1 \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & -1 & -1 \\ 6 & 8 & 9 & 0 & -4 & -15 \end{array} \right] \rightsquigarrow z_3 - 6z_1 \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -15 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right]$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$   
 $c_1 \quad c_2 \quad c_3$

$$\rightsquigarrow z_3 - 4z_2 \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightsquigarrow z_2 + z_3 \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightsquigarrow 5z_1 - 4z_3 \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 5 & 10 & 0 & 5 & 10 & 15 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\rightsquigarrow z_1 + 10z_3 \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightsquigarrow \frac{1}{5}z_1 \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow Bx_1 = c_1 \quad \text{mit} \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Bx_2 = c_2 \quad \text{mit} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Bx_3 = c_3 \quad \text{mit} \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Trick:  $c_1$  ist erste Spalte von  $B \Rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$c_2$  ist zweite Spalte von  $B \Rightarrow x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$c_3 = c_1 + c_2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Bx_3 &= c_3 = c_1 + c_2 \\ &= Bx_1 + Bx_2 \\ &= B(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

$$x_3 = x_1 + x_2$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}.$$