[0]: Fragen?
[A]: Komplexe Zahlen, Polynomdiv, Einheitswurzeln
[LA]: Basis, Span, Gram-Schmidt, Orthonormalbasen

Globalübung 5
Mathe 1 – WS25

14.11.2025
Lambert Theisen

(1)

[A] Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$:

$\mathbb{C} \ni z = a + i \cdot b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ $\quad$ $\mathrm{Im}(z) = b$

Realteil $\mathrm{Re}(z) = a$ $\quad$ Imaginäre Einheit i, $\boxed{i^2 = -1}$

" $x^2 + 1 = 0$ lösbar "

Körperregeln (siehe VL):

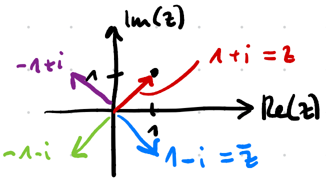
① $z_1 + z_2 = \underbrace{(a_1 + ib_1)}_{z_1} + \underbrace{(a_2 + ib_2)}_{z_2} = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \in \mathbb{C}$

② $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = a_1a_2 + i(b_1a_2 + a_1b_2) + i^2 b_1b_2$ $\quad \boxed{i^2 = -1}$

$= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(b_1a_2 + a_1b_2) \in \mathbb{C}$

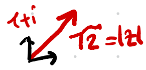
→ Multipl. **Inverse**: $z \cdot z^{-1} = [a + ib] \cdot \left[\frac{a}{a^2+b^2} + i\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)\right] \overset{(\ldots)}{=} 1 + i0$ ✓

→ **Gaußsche Zahlenebene**:



→ Komplex konjugiert $\bar{z} = \overline{(a + ib)} := a - ib$

→ Betrag $|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} \overset{(\ldots)}{=} \sqrt{a^2 + b^2}$



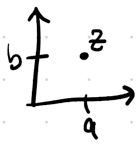
Tipps & Tricks:

① Löse $x^2 - 2x + 5 = 0$ $\quad$ ($p = -2$, $q = 5$)

⇝ pq-Formel $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 1 \pm \sqrt{1 - 5} = 1 \pm 2\sqrt{-1} = 1 \pm 2i$

② $i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{-1} = -i$

③ Zeichne $\frac{a + bi}{c + di}$ in Komplexer Zahlenebene. Problem: Wir brauchen Form $z = a + ib$ ✓



⇒ Mache Nenner reell durch Erweiterung des Komplex Konjugierten des Nenners:

$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot 1 = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + i\left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)$ $\quad$ $c^2 + d^2 \in \mathbb{R}$ ✓

⇝ Beweis $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} \overset{\text{Def}}{=} \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{\underbrace{|z_2|^2}_{\in \mathbb{R}}}$

Bsp)

Aufgabe 1. (Komplexe Zahlen)
Berechnen Sie Betrag, Real- und Imaginärteil und jeweils die komplex Konjugierte der folgenden komplexen Zahlen:

a) $z_1 = \frac{i(2i+2)}{5+i}$,

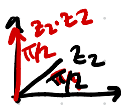
b) $z_2 = (i+1)^{16}$.

a) $z_1 = \frac{i(2i+2)}{5+i} \cdot \frac{5-i}{5-i} = \frac{(2i-2) \cdot (5-i)}{25+1} = \frac{-8+12i}{26} = \underbrace{-\frac{4}{13}}_{\mathrm{Re}(z_1)} + \underbrace{\frac{6}{13}}_{\mathrm{Im}(z_1)} i \Rightarrow \bar{z}_1 = -\frac{4}{13} - \frac{6}{13} i$, $\quad |z_1| = \sqrt{\left(\frac{4}{13}\right)^2 + \left(\frac{6}{13}\right)^2} \overset{(\ldots)}{=} \frac{2}{\sqrt{13}}$

b) $z_2 = ((i+1)^2)^8 = (\underline{i^2} + 2i + \underline{1})^8 = (2i)^8 = (4i^2)^4 = (-4)^4 = \underbrace{256}_{\mathrm{Re}(z_2)}$ $\quad$ $i^2 + 1 = 0$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(z_2) = 0$

$|z_2| = 256$ easy weil $b = 0$



$\rightarrow (i+1)^{16}$ was noch okay, aber was wäre mit $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{137}$?

Polarkoordinaten: $z = a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$ mit $r = |z|$, $\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{b}{a} \in [0, 2\pi)$

$z = 1 + i = \sqrt{2}\cdot\left(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\right)$

$\frac{\pi}{4} = \operatorname{atan}\left(\frac{1}{1}\right) \approx 0.785 = \frac{0.785}{\pi}\pi = 0.25\pi = \frac{\pi}{4}$

$\rightarrow$ Vorteil: Multiplikation easy : $z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2)\cdot\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$ [Drehung!!]

Moivre Formel: Sei $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Dann $z^n = r^n\left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right)$ für $n \in \mathbb{N}$

Polynome: $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ hat n (evtl. mehrfache) NS in $\mathbb{C}$ $(n \geq 1)$

Nullstelle x $\Leftrightarrow p(x) = 0$

$\rightarrow p(x) = (x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot \ldots \cdot(x - x_n)$ [Produkt aus Linearfaktoren]

x_1: NS_1, x_2: NS_2

Bsp Polynomdivision

c) Das Polynom $p(x) := 2x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 16x - 64$ hat die Nullstellen $x = -2$ und $x = 4$. Ermitteln Sie alle weiteren Nullstellen von p in $\mathbb{C}$.

Grad $\neq 2$, pq-Formel ↯

Wir suchen ein q mit $q(x)\cdot\underbrace{(x-(-2))}_{x+2}\cdot(x-4) \overset{!}{=} p(x) \Leftrightarrow q(x) = \frac{p(x)}{(x+2)(x-4)}$ ("Division")

Danach NS von q easy.

$$
\begin{array}{l}
2x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 16x - 64 \;:\; (x+2) = 2x^3 - 8x^2 + 8x - 32 \\
-(2x^4 + 4x^3) \quad \downarrow \text{move down} \\
\quad - 8x^3 - 8x^2 \\
\quad -(-8x^3 - 16x^2) \\
\qquad + 8x^2 - 16x \\
\qquad -(8x^2 + 16x) \\
\qquad\quad - 32x - 64 \\
\qquad\quad -(32x - 64) \\
\qquad\qquad 0 \checkmark
\end{array}
$$

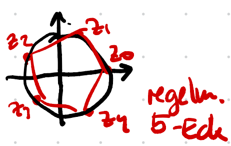
Danach analog $2x^3 - 8x^2 + 8x - 32 : x - 4 \overset{(\ldots)}{=} 2x^2 + 8$

$\Rightarrow$ Letztlich $p(x) = (2x^2+8)(x+2)(x-4) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow 2x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4$

$x_{1,2} = \pm 2\sqrt{-1} = \pm 2i$ ← NS 3 & 4 von p

Einheitswurzeln: $p(z) = z^n - 1$ für $n \geq 1$ hat genau n NS z_k $(k = 0, \ldots, n-1)$ mit $|z_k| = 1$



und $z_k = \cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(k\frac{2\pi}{n}\right)i$ (EHWs) (⇝ Beweis VL)

⇝ Wer weiß "intuitiv" warum? (Tipp: Drehung)

$\Rightarrow$ Im allgemeinen $z^n - w \overset{!}{=} 0$ mit $z, w \in \mathbb{C}$ (siehe VL)

$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\right)$

Bsp: Welche z lösen $z^3 = (1-i)^6$

b) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z für die gilt

$$z^3 = (1-i)^6.$$

Geben Sie für jede Lösung sowohl den Betrag $|z|$ und Argument ϕ aus dem Interval $[0, 2\pi)$ als auch Real- und Imaginärteil an und zeichnen Sie alle Lösungen in der komplexen Zahlenebene ein.

Hinweis: $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

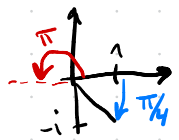
2 Punkte

Zuerst RHS $(1-i)^6$ in PK

$$r = \left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^6 = (\sqrt{2})^6 = 2^3 = 8$$

$$\phi = 6 \cdot \left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 6 \cdot \frac{7}{4}\pi$$



$$= \frac{42}{4}\pi = \frac{21}{4}(2\pi) = \left(5 + \frac{1}{4}\right) 2\pi \Rightarrow \phi = \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$$

Winkel im Gradmass	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Winkel im Bogenmass	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
Tangens	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0

685 × 477

Merken! (Oder Zettel)

$$\Rightarrow z_k \overset{\text{s.o.}}{=} \sqrt[n]{r}\left(\cos\Big(\underbrace{\frac{\phi}{n} + k\frac{2\pi}{n}}\Big) + i\sin\left(\frac{\phi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)\right)$$

$$=: \phi_k \overset{\boxed{n=3}}{=} \frac{\pi/2}{3} + k\frac{2\pi}{3} = \frac{1+4k}{6} \cdot \pi$$

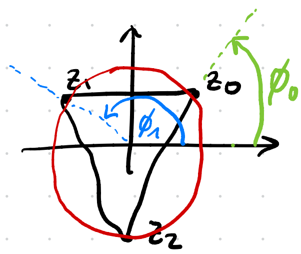
$$\sqrt[3]{8} = 2$$

Also

$$z_0 = 2\left(\cos\Big(\overbrace{\frac{1+4\cdot 0}{6} \cdot \pi}^{\pi/6}\Big) + i\sin\left(\frac{1+4\cdot 0}{6} \cdot \pi\right)\right) \overset{\text{Tab.}}{=} 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$$

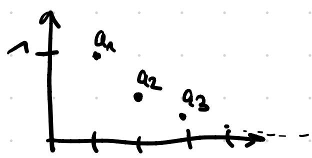
$$z_1 = 2\left(\cos\Big(\underbrace{\frac{1+4\cdot 1}{6}\pi}_{5/6\,\pi}\Big) + i\sin\left(\frac{1+4\cdot 1}{6} \cdot \pi\right)\right) \overset{(..)}{=} -\sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2\left(\cos\Big(\underbrace{\frac{1+4\cdot 2}{6}\pi}_{\frac{3\pi}{2}}\Big) + i\sin\left(\frac{1+4\cdot 2}{6}\pi\right)\right) \overset{(..)}{=} -2i$$



Folgen: Fragen? $a_n := \frac{1}{n}$

n	a_n
1	1
2	1/2
3	1/3
⋮	⋮



 Basis: Teilmenge $B = \{x_1, x_2, \dots x_n\} \subset V$ (VR) ist Basis wenn

I) Alle Elemente von B lin. unabh. $\rightsquigarrow$ Dimension $|B| :=$ "Anzahl Basisvektoren"

II) $\forall x \subset V : x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ (jedes x ist Linearkombination aus Basisvektoren)

Linearkombination: $y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \in V$ $\quad \alpha \in \mathbb{K}$

mit $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ Basis von V. $\quad$ zB $V = \mathbb{R}^2$

("Erzeugnis") $\hat{=}$ **Span**: Menge aller Linkomb: $\text{span}(\{x_1 \dots x_n\}) := \{x \in V : x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \ \alpha_i \in \mathbb{K}\}$

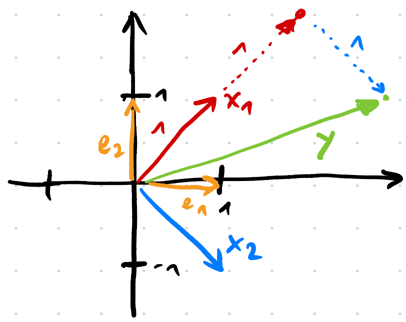
→ **Beispiel**: $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. $B_1 := \{x_1, x_2\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^2$

denn $\alpha \cdot x_1 + \beta x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha, \beta = 0$ ("Nullvektor nur trivial darstellbar", "Auslöschung nicht möglich")

gilt (linear unabh.).

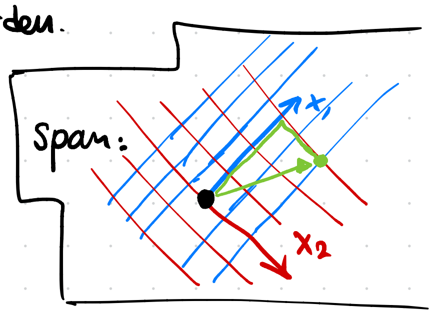
$\boxed{\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \text{ keine Basis des } \mathbb{R}^2 \text{ weil } 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

$\Rightarrow \mathbb{R}^2 = \text{span}\{x_1, x_2\} \Leftrightarrow$ Jeder Vektor $y \in \mathbb{R}^2$ kann als Lin. komb. von x_1 & x_2 dargestellt werden.



$\boxed{y = 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2}$

$\boxed{\text{vs. } y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = 3e_1 + 1e_2}$



Dimension von Erzeugnis = max. Anzahl lin. unabh. Elemente:

1) $\dim\left(\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right) = 2 \neq 3$ denn $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (l.a.).

2) $\dim\left(\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right) = 2 \neq 3$ denn $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) $\dim\left(\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right) = 0$ denn $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist lin. abh. weil $\alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

4) $\dim\left(\text{span}\left\{\underbrace{x_1, \dots, x_{n-1}}_{x_i \in \mathbb{R}^n}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right) < n$ denn x_i ist lin. abh. zu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \forall i$

Bsp:) Stellen Sie $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in der Basis $B = \{b_1, b_2\}$ dar als:

$y = \gamma \cdot b_1 + \delta \cdot b_2$ wobei $b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\rightsquigarrow y \overset{!}{=} \gamma \cdot b_1 + \delta \cdot b_2$ $\quad$ mit $\langle b_1, b_2 \rangle \neq 0$

$= \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \delta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \cdot \gamma + 1 \cdot \delta = 2 \\ -1 \cdot \gamma + 3 \cdot \delta = 3 \end{cases} \overset{\text{LGS}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{1}{2}}$ $\quad \boxed{\gamma = -\frac{3}{2}}$

... Nützlich für Basiswechsel

Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_m\} \subset V$ falls:

1) $\mathcal{B}$ ist Basis von V
2) Orthogonalität: $\langle x_i, x_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$
3) Normalität: $\|x_i\|_2 := \sqrt{\langle x_i, x_i \rangle} = 1$

$\Big\}$ Orthonormalität: $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

"Kronecker-Delta"

Linearkombination in ONB

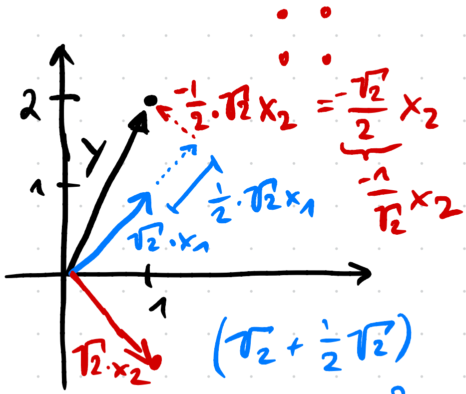
$$y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \in V \quad \text{mit} \quad \alpha_k = \langle y, x_k \rangle \quad \left(\alpha_k = \frac{\langle y, x_k \rangle}{\langle x_k, x_k \rangle} \text{ für "nur" ortho}\right)$$

→ Bsp: $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} =: y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \quad \text{mit}$$

$$\alpha_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(3) = 3/\sqrt{2}$$

$$\alpha_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1) = -1/\sqrt{2}$$



$$\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Gram-Schmidt Orthogonalisierung:

Jede Menge $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_m\} \subset V$ lin. unabh. Vektoren lässt sich zu einem ON-System $\mathcal{B}' = \{y_1, \dots, y_m\} \subset V$ umwandeln, sodass

$$\text{span}(\mathcal{B}) = \text{span}(\mathcal{B}').$$

→ Algorithmus für $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_m\}$

1) $y_1 = x_1 / \|x_1\|$

2) Für $i = 2 \dots m$:

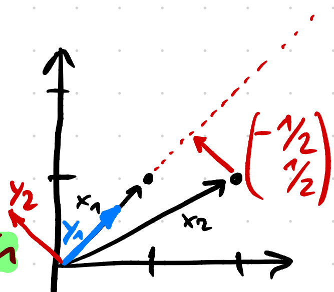
$$\tilde{y}_i = x_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle x_i, y_j \rangle y_j$$

$$y_i = \tilde{y}_i / \|\tilde{y}_i\|$$

3) $\mathcal{B}' = \{y_1, \dots, y_m\}$ ist ONB

→ Beispiel: $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

1) $y_1 = x_1 / \|x_1\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



2) $\tilde{y}_2 = x_2 - \langle x_2, y_1 \rangle y_1$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = \tilde{y}_2 / \|\tilde{y}_2\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \tilde{y}_2$$

Bsp)

Aufgabe 4. (Gram-Schmidt Orthogonalisierung)
Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ mit euklidischem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und induzierter Norm $\|\cdot\|_2 = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. Gegeben seien die drei Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Wenden Sie das Gram-Schmidt Verfahren auf die drei Vektoren an. Was passiert im dritten Schritt des Gram-Schmidt Verfahrens? Erklären Sie die Ursache für das beobachtete Verhalten der Orthogonalisierung.

→ Normiere v_1 : $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

→ Orthogonalisiere v_2 gegen u_1 : $\tilde{v}_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \cdot \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

→ Normiere v_2 : $u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ easy

→ Orthogonalisiere v_3 gegen u_1 und u_2 :

$$\tilde{v}_3 = v_3 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \underbrace{\frac{10}{5}}_{=2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

∴ Warum Nullvektor?! (v_1, v_2, v_3 sind lin. abh.)