0 : Fragen?
A : Recap: Parametrisierungen
N : Backup: Penalty Methods
→ Klausur durchscrollen

Globalübung 15
WS21 - Mathe 3

02.02.2022
Lambert Theisen

RECAP Parametrisierungen :

→ **Generell:** Standard Parametrisierungen kennen : Kugel, Zylinder, Polar....

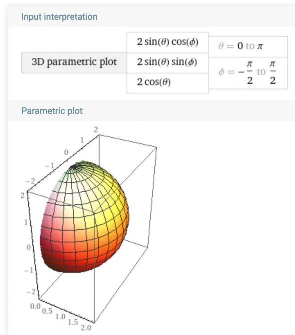
Kugel: $\begin{bmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{bmatrix}$ $\begin{cases} r = \text{const} \\ \theta \in [0,\pi) \\ \varphi \in [0,2\pi) \end{cases}$

Zylinder: $\begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ h \end{bmatrix}$ $r = \text{const}$, $h \in [0,H]$, $\theta \in [0,2\pi)$

Polar: $\begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{bmatrix}$ $r = \text{const}$, $\theta \in [0,2\pi)$

Bsp 1) (Klausur):

$$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \geq 0\},$$
$$F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y^2 + z^2 = 4, x \geq 0\},$$



Strategie : Bekannte Std.-Parametrisierungen "erkennen"

1) $\|\vec{x}\|_2^2 = 4 \Leftrightarrow$ Kugelhälfte mit $x \geq 0$

⇝ Versuchen, Std. Parametrisierungen zu benutzen.

→ "Truncated Kugelkoords" : $F_1 = \begin{bmatrix} 2\sin\theta\cos\varphi \\ 2\sin\theta\sin\varphi \\ 2\cos\theta \end{bmatrix}$ mit $\theta \in [0,\pi)$, $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (geändert sodass $x \geq 0$)

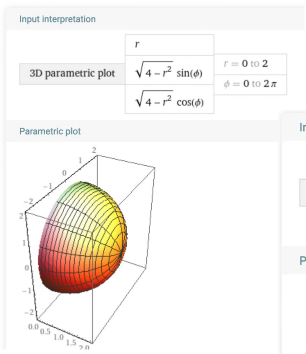
https://www.wolframalpha.com/input/?i=parametricplot3d%5B%7B2*sin%28theta%29*cos%28phi%29%2C+2*sin%28theta%29*sin%28phi%29%2C+2*cos%28theta%29%7D%2C+%7Btheta%2C0%2CPi%7D%2C%7Bphi%2C-Pi%2F2%2CPi%2F2%7D%5D

2) Idee: x ist speziell mit $x \geq 0$. Daher $x^2 + y^2 + z^2 = 4 \Rightarrow y^2 + z^2 = 4 - x^2$

$\left\|\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}\right\|_2 = \sqrt{4 - x^2}$

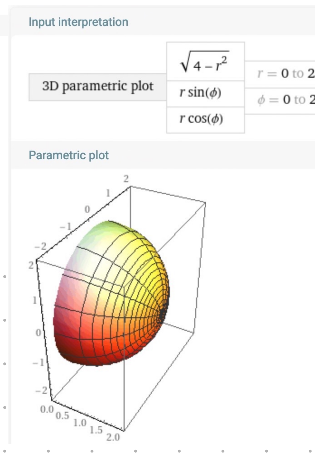
⇝ Zylinderkoordinaten mit x-abh. Radius.

$$F_1 = \begin{bmatrix} x \\ \sqrt{4-x^2}\cos\varphi \\ \sqrt{4-x^2}\sin\varphi \end{bmatrix} \quad \varphi \in [0,2\pi), \; x \in [0,2]$$



3) Idee: Statt $r = r(x)$, nutze $x = x(r)$

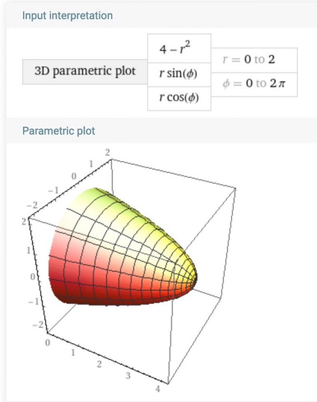
$$\Rightarrow F_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{4-r^2} \\ r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{bmatrix} \quad \varphi \in [0,2\pi], \; r \in [0,2]$$



⇝ Geht auch!

→ Ist sogar einfacher für $F_2 = \{ \dots \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \geq 0 \}$

$$\Rightarrow F_2 = \begin{bmatrix} 4 - r^2 \\ r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \varphi \in [0, 2\pi] \\ r \in [0, 2] \end{matrix}$$

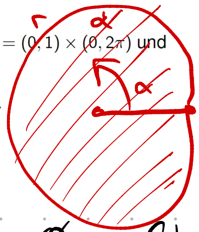


Bsp 2)

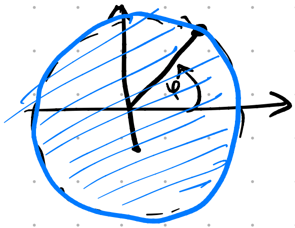
Aufgabe 3.
Sei die Fläche F parametrisiert durch $\phi : B \to \mathbb{R}^3$ mit $B = (0,1) \times (0, 2\pi)$ und

$$\phi(r, \alpha) = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha) \\ r\sin(\alpha) \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

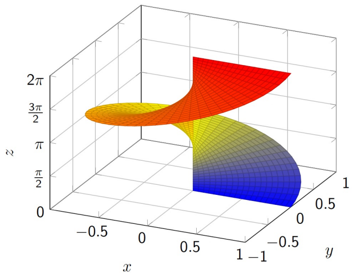
(a) Skizzieren Sie die Fläche.

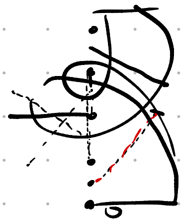


- Beobachtung: Wenn α = Fix, dann ϕ = Scheibe in $z = \alpha$
- Weil α = Variabel, z-Ebene verschiebt sich wenn "Zeiger" rotiert mit α



- Daher:



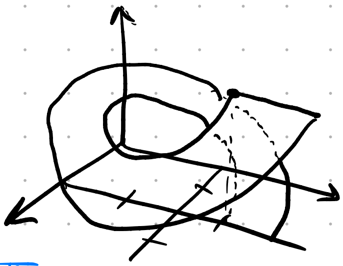


⟹ Helix

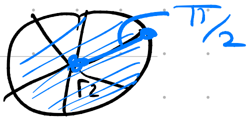
Bsp 3)

Aufgabe 2.
Betrachten Sie die Fläche $F = \{x \in \mathbb{R} | x = \phi(s,t), (s,t) \in B\}$ mit

$$\phi(s,t) = \begin{pmatrix} s\cos t \\ s\sin t \\ t \end{pmatrix}, \qquad B = (1,2) \times (0, 2\pi).$$



Wer weiß wie ϕ aussieht?



Bsp 4):

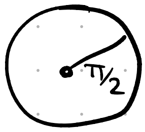
Aufgabe 4.
Sei P die Fläche

$$P := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \overbrace{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}^{r_2} < \frac{\pi}{2}, \sin\left(\underbrace{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}_{r}\right) = x_3 \right\}.$$

(a) Finden Sie eine Parametrisierung von P.

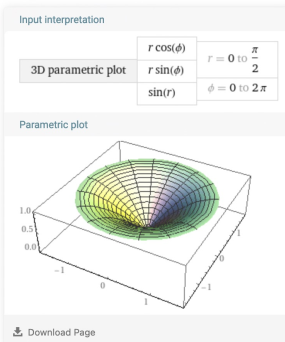
Scheibe

- Sieht kompliziert aus, aber wir erkennen dass $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$



$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ \sin(r) \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} r \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ \theta \in [0, 2\pi) \end{matrix}$$

einfach eingesetzt



"Schwarzes Loch" :-D