

Fragen?

SkP, Linkomb, Unterraum, LinUnabh.

A:

Globalübung 4
Mathe 1 (CES)
WS 25

07.11.2025 ①
Lambert Theisen

N

Recap Vektorraum V und Norm ||·|| für Längen, was ist mit Winkeln?

Skalarprodukt: Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ für V als \mathbb{R} -VR wenn $\forall x, y \in V$ gilt:

Symmetrie a) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

Bilinearität b) $\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y \rangle = \alpha \langle x_1, y \rangle + \beta \langle x_2, y \rangle \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

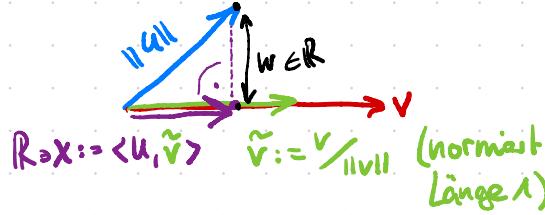
Positiv Definit c) $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \wedge \quad \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

→ viel allgemeiner als $\langle u, v \rangle_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = \bar{u}^T v = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ {geht zB auch für Funktionen...}

→ Induzierte Norm: $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $\|u\|_{\mathbb{R}^2} = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \checkmark$

→ Cauchy-Schwarz: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Hilfshilfe:



$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= x^2 + w^2 && (\text{Pythagoras}) \\ \|u\|^2 &\geq x^2 && (w^2 \geq 0) \\ \|u\| &\geq |\langle u, \tilde{v} \rangle| && (\text{Def}) \\ \|u\| &\geq |\langle u, \frac{v}{\|v\|} \rangle| && (\text{Def}) \\ \|u\| \|v\| &\geq |\langle u, v \rangle| && (\text{LS}) \end{aligned}$$

Bsp:

Aufgabe 4. (Skalarprodukt)

Sei $V := \mathbb{R}^2$ mit einem Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Prüfen Sie, ob es sich um ein Skalarprodukt handelt.

a)

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := x_1 - y_1$$

b)

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

a) Prüfe Symmetrie: Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V \Rightarrow \langle x, y \rangle = 1 - 0 = 1 \neq \langle y, x \rangle = 0 - 1 = -1 \Rightarrow$ keine Symmetrie \Rightarrow kein SkP

b) ① Sym: $\langle x, y \rangle = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$
 $= 3y_1x_1 + y_1x_2 + y_2x_1 + y_2x_2 = \langle y, x \rangle \checkmark$

② Bilinearität: $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = 3(\alpha x_1 + \beta y_1)z_1 + (\alpha x_1 + \beta y_1)z_2 + (\alpha x_2 + \beta y_2)z_1 + (\alpha x_2 + \beta y_2)z_2$
Sei $x, y, z \in V$
 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
 $= \alpha(3x_1z_1 + x_1z_2 + x_2z_1 + x_2z_2) + \beta(3y_1z_1 + y_1z_2 + y_2z_1 + y_2z_2)$
 $= \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \checkmark$

③ Pos. Definitheit: zunächst $\langle x, x \rangle = 3x_1x_1 + x_1x_2 + x_2x_1 + x_2x_2$
Sei $x \in V$
 $= 2x_1x_1 + \underline{x_1^2} + \underline{2x_1x_2 + x_2x_1} \geq 0$ [Binomische Formel]
 $= \underline{2x_1^2} + \underline{(x_1 + x_2)^2} \geq 0 \checkmark$

Jetzt $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$\Rightarrow \text{Sei } \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow \underbrace{2x_1^2}_{\geq 0} + \underbrace{(x_1+x_2)^2}_{\geq 0} = 0 \Rightarrow \begin{cases} I) 2x_1^2 = 0 \\ II) (x_1+x_2)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 = 0 \quad \text{in II)} \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \quad \checkmark$$

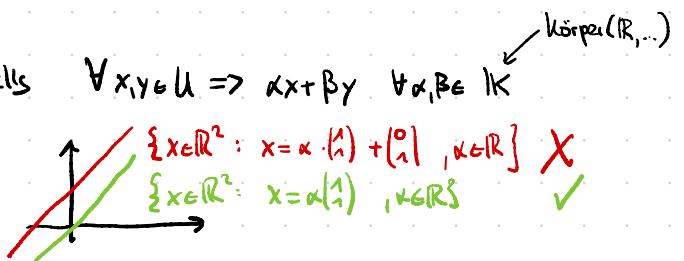
$$\Leftrightarrow \text{Sei } x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Dann gilt } 0 = 2 \cdot 0^2 + (0+0)^2 = 2 \cdot x_1^2 + (x_1+x_2)^2 = \langle x, x \rangle \quad \checkmark$$

Also: Es ist SkP. Man kann auch $\langle x, y \rangle = x^T A y =: \langle x, y \rangle_A$ schreiben mit

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \text{ und } A \text{ ist symmetrisch positiv definit.}$$

Unterraum: Teilmenge $U \subset V$ von K -Vektorraum V falls $\forall x, y \in U \Rightarrow \alpha x + \beta y \quad \forall \alpha, \beta \in K$

$\rightarrow U$ ist dann ebenfalls ein $|K$ -VR



Bsp:

Aufgabe 1. (Unterräume)

Entscheiden und begründen Sie, ob U ein Unterraum des \mathbb{R} -Vektorraums V ist:

a) $V = \mathbb{R}^3, U = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = 0\}$

b) $V = \mathbb{R}^2, U = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$

c) $V = \mathbb{R}^2, U = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2, a, b \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3b \\ 2b-a \end{pmatrix}\}$

a) Sei $v, w \in U$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha v + \beta w \rangle = \alpha \underbrace{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v \rangle}_{=0 \text{ weil } v \in U, \text{ weil}} + \beta \underbrace{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w \rangle}_{=0 \text{ weil } w \in U, \text{ weil}} = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$

Somit $\alpha v + \beta w \in U \Rightarrow U$ ist UR \checkmark

b) Sei $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$ und $-1 \in \mathbb{R}$, dann $(-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U$ denn $1 > 0$

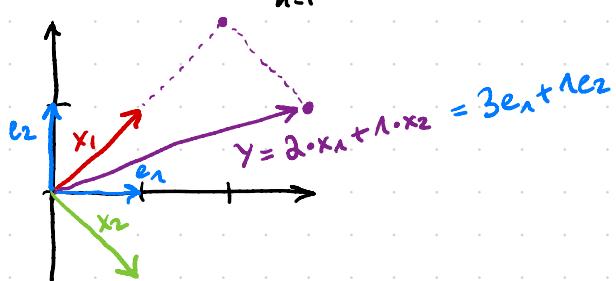
Somit $\alpha \cdot u \notin U$ für $u \in U, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$ kein VR \times

c) Sei $v, w \in U$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann

$$\alpha v + \beta w = \alpha \left(\begin{pmatrix} v_1 + 3v_2 \\ 2v_1 - v_2 \end{pmatrix} \right) + \beta \left(\begin{pmatrix} w_1 + 3w_2 \\ 2w_1 - w_2 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} (\alpha v_1 + \beta w_1) + 3(\alpha v_2 + \beta w_2) \\ 2(\alpha v_1 + \beta w_1) - (\alpha v_2 + \beta w_2) \end{pmatrix} \right) \in U \text{ per Det.} \Rightarrow U \text{ ist UR}$$

Woran dieses ganze "Business"?

Linear kombination: $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset V, \alpha_1, \alpha_2, \dots \in \mathbb{K}$. Dann ist $\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \in V$ eine LinKomb. von $\{x_i\}_{i=1}^n$.



Relevanter Bsp:

Aufgabe 1. (Geraden)

Entscheiden Sie, ob die Paare von Geraden im \mathbb{R}^2 Schnittpunkte besitzen und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

(3)

a)

$$g_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}, \quad g_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 17 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

b)

$$g_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}, \quad g_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

b) Geraden gleichsetzen

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(gleichen?)
=>

$$\begin{aligned} 3 + s &= 9 + 2t \\ 1 + 2s &= 7 + t \end{aligned}$$

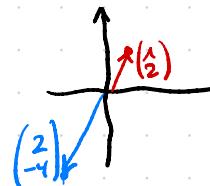
\Leftrightarrow

$$\begin{array}{lcl} I & s & = 6 + 2t \\ II & 2s & = 6 + t \end{array}$$

$$\Leftrightarrow II - 2I: \begin{array}{lcl} s & = 6 + 2t \\ 0 & = -6 - 3t & \Rightarrow \boxed{t = -2} \end{array} \rightarrow = 6 + 2(-2) = 2 \Rightarrow \boxed{s = 2}$$

\rightsquigarrow Einsetzen von $s=2$ in $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$ liefert Schnittpunkt (t in g_4 geht auch)

a) Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ sind so dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ kann durch Linkskomb von $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ dargestellt werden...

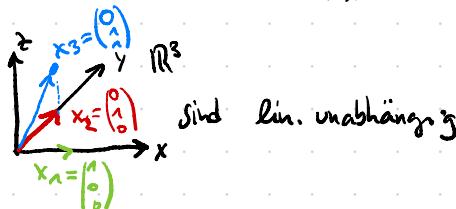
Lineare (Un-) Abhängigkeit: $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ sind ...

1) linear unabhängig falls:

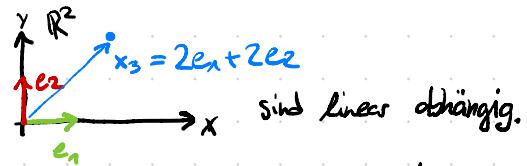
$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

2) linear abhängig falls:

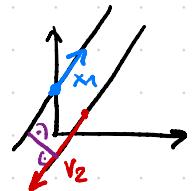
$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0 \quad \text{mit mindestens einem } \alpha_i \neq 0 \text{ möglich ist.}$$



\rightsquigarrow Geraden Bsp oben a), Richtungsvektoren lin abhängig \Rightarrow Geraden parallel



Schützpunkt von g_1 liegt nicht auf $g_2 \Rightarrow$ kein Sp



Bsp

Aufgabe 1. (Lineare Abhängigkeit)

a) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} a^2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} b \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear abhängig?

b) Sind v_1, v_2 für $a = b = 1$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig?

a) Für lin. Abhängigkeit brauchen wir $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ sodass:

$$0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} a^2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} b \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{I} \quad \text{II} \quad \text{III}$$

Aus II folgt $\boxed{\alpha_1 = \alpha_2}$, Aus III) $\alpha_1 \cdot b + \alpha_2 = 0 \stackrel{\alpha_2 = \alpha_1}{\Leftrightarrow} \alpha_1(b+1) = 0 \Rightarrow \boxed{b = -1}$

$$\text{Aus I)} \quad \alpha_1 \cdot a^2 + \alpha_2 \cdot b \Rightarrow \alpha_1(a^2 - 1) = 0 \Rightarrow \boxed{a = \pm 1}$$

Für diese a, b Wahl, sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ✓

b) Sind v_1, v_2 für $a=b=1$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ lin. unabhängig?

Lin. unabh. $\Leftrightarrow \alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2 + \gamma \cdot v_3 = 0$ geht nur für $\alpha = \beta = \gamma$

$$\Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad "$$

$$\begin{array}{l} 3 \text{ Gl.} \\ \Leftrightarrow \text{I)} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \text{II)} \alpha - \beta - \gamma = 0 \\ \text{III)} \alpha + \beta - \gamma = 0 \end{array} \quad "$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{LGS für } \alpha, \beta, \gamma} \left[\begin{array}{c|ccc} & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & -1 & -1 \\ \beta & 1 & 1 & -1 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark \quad \Rightarrow v_1, v_2, v_3 \text{ lin. unabh.}$$

A: Fragen?

