TODO [A]: • PI, Substitution
• Funktionenfolgen

[LA] • Eigenwerte
• Adjungierte

Mathe 1 – Globalübung 14 – 23.01.20

• Test Exam ↳ Übung!

①

[A] Integration:

1) **Partielle Integration (Wdh.):** folgt aus PR $(f\cdot g)' = f'g + fg'$

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \Big[f(x)\,g(x)\Big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

Beispiel:

→ Mehrmaliges Anwenden bei trigonom. Fkt.

Aufgabe 9.

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a)

$$\int_{-1}^{1} x^2 \sin(\pi x)\,dx,$$

1) Sei $f(x) = x^2$ und $g'(x) = \sin(\pi x)$

$\Rightarrow$ $f'(x) = 2x$ $\quad g(x) = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)$

Daher: $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 \sin(\pi x)\,dx \overset{1)}{=} \Big[x^2\cdot\Big(-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\Big)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 2x\Big(-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\Big)dx$

$$= -\frac{1}{\pi}\Big(\underbrace{\cos(\pi) - \cos(-\pi)}_{0}\Big) + \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} x\cdot\cos(\pi x)\,dx}_{(*)}$$

$\Delta\varphi = 2\pi$

2) Erneut PI: Sei $\tilde f(x) = x$, $\tilde g'(x) = \cos(\pi x)$

$\Rightarrow$ $\tilde f'(x) = 1$, $\tilde g(x) = \frac{1}{\pi}\sin(\pi x)$

Dann gilt für $(*)$: $\displaystyle\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} x\cos(\pi x)\,dx = \frac{2}{\pi}\Bigg(\underbrace{\Big[x\cdot\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\Big]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1}\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\,dx\Bigg)$

$$= -\frac{2}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\sin(\pi x)\,dx$$

$$= -\frac{2}{\pi^2}\Big[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\Big]_{-1}^{1}$$

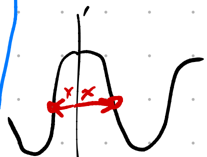
$$= \frac{2}{\pi^3}\Big(\cos(\pi) - \cos(-\pi)\Big)$$

$$= \frac{2}{\pi^3}\Big(\cos(\pi) - \cos(\pi)\Big) = 0$$

$\int(..) \overset{PI}{=} [..] + \int(..)$

$2\int(..) = [..]$

$\Rightarrow \int(..) = \frac{1}{2}[..]$



Cosinus ist gerade:
$\cos(x) = \cos(-x)$

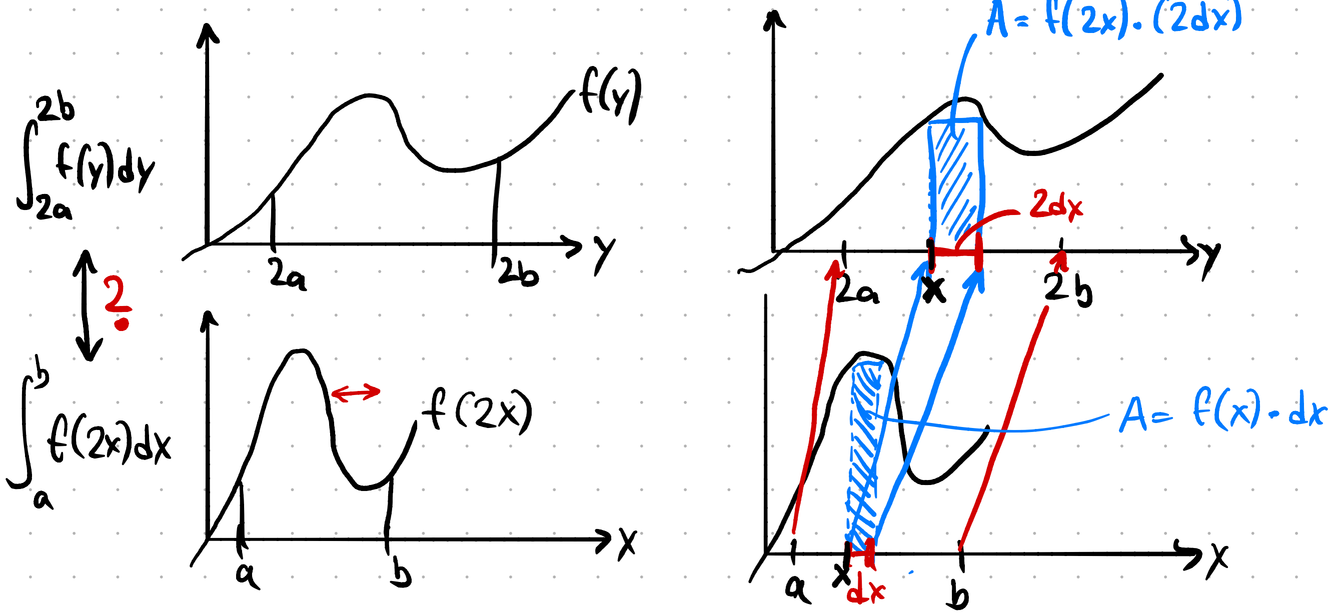
3er product: $\displaystyle\int \underbrace{a\cdot b}_{f}\cdot\underbrace{c}_{g'}$

II) Integration durch Substitution:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\ \varphi'(x)\ dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\ dy$$

→ Vorraussetzungen:
1) $f: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ ist stetig
2) $\varphi: [a,b] \to [\alpha,\beta]$ ist stetig diff'bar.

Intuition mit $y = \varphi(x) = 2x$ (→ Weitz Youtube)



Beispiel 1: $\displaystyle\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

$\phi(4) = (\sqrt{x})(4)$

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{Sub } u = \sqrt{x}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &\rightsquigarrow dx = 2\sqrt{x}\ du = 2u\ du\end{aligned}}$$

$$= \int_{\sqrt{1}}^{\sqrt{4}} \frac{1+u}{u}\ 2u\ du = \int_1^2 \frac{1+u}{1} \cdot 2\ du -$$

$$= \int_1^2 2(1+u)du = \left[2u + u^2\right]_1^2 = (2\cdot 2 + 2^2) - (2\cdot 1 + 1^2)$$
$$= 8 - 3 = 5$$

Beispiel 2: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left[\sin^3(t) + e^{\sin(t)}\right] \cos(t)\ dt$

$$\boxed{\begin{aligned}&x = \phi(t) = \sin(t) \\ &\Rightarrow dx = \cos(t)\ dt\end{aligned}}$$

$$\overset{\text{Sub}}{=} \int_{\sin(0)=0}^{\sin(\pi/2)=1} \left[x^3 + e^x\right] dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + e^x\right]_0^1 = \left(\frac{1}{4} + e\right) - (0+1) = e - \frac{3}{4}$$

Achtung: Grenzen Transformieren!

Funktionenfolgen:

DEF): Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$ Menge aller Funktionen $f: D \to \mathbb{R}$.

Dann heißt die Folge der Fktn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}(D,\mathbb{R})$ Funktionenfolge

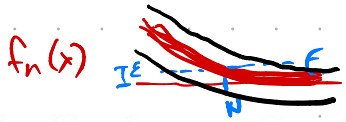
→ vgl. Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ⇝ Verallgemeinerung der Begriffe nötig.

Konvergenz (von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f):

($f \mathrel{\hat=}$ Grenzfunktion)

I) Punktweise: $\forall x \in D$ gilt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(x,\varepsilon): |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall n \geq N$

II) Gleichmäßig: $\forall x \in D$ gilt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon): |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall n \geq N$



Beispiel:

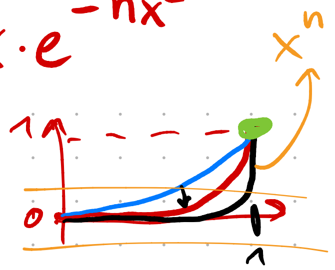
Aufgabe 33

a) Untersuchen Sie die Funktionenfolge $(f_n)_n : D \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ jeweils auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(i) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ für $x \in D := \mathbb{R}$

(*Hinweis:* $\lim_{y\to\infty} ye^{-y} = 0$.)

$h \cdot x \cdot e^{-nx^2}$



Fälle $\boxed{x=0}$: $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = n \cdot 0 \cdot 1 = 0$

$\boxed{x\neq 0}$: $\lim_{n\to\infty} n \cdot x^2 = \infty$, daher mit Hinweis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x}(nx^2)\, e^{-(nx^2)} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{x}\, ye^{-y} \underbrace{=}_{\text{Hinweis}} 0$$

⇒ Funktionenfolge konvergiert punktweise gegen Nullfunktion.

Vermutung: Konvergenz nicht gleichmäßig.

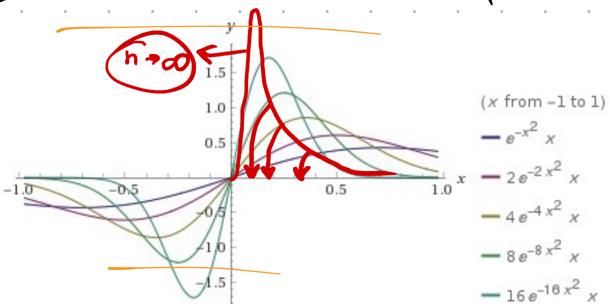
Wäre Konvergenz gleichmäßig, dann gäbe es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in D$ mit $n \geq n_0$

Insbesondere müsste dann auch $|f_n(\frac{1}{n})| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

Es müsste also $\lim_{n\to\infty} f_n(\frac{1}{n})$ doch wir haben:

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n \cdot \frac{1}{n} \cdot e^{-n \cdot \frac{1}{n^2}} = e^{-\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \quad ↯$$

⇒ Keine Gleichmäßige Konvergenz



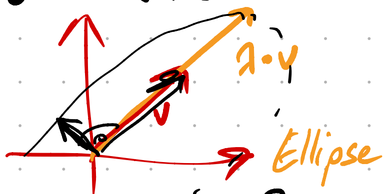
LA Eigenwerte & Eigenvektoren (Wdh.)

$A^2 = (S^{-1} D S)(S^{-1} D S) = S^{-1} D^2 S$

Motivation: Wir wollen $D \overset{!}{=} S^{-1} A S$ wobei D diagonal.

Ähnliche Matrizen: $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $B = T A T^{-1}$ haben gleiches Spektrum. Daher muss $D = \operatorname{diag}(\lambda_i(A))$ sein.

Terminologie: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Falls $\exists v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ mit $Av = \lambda v$, dann:



→ **Eigenwert** λ → zugeh. **Eigenvektor** v

→ **Spektrum** einer Matrix: $\sigma(A) := \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}^n : Ax = \lambda x \}$

Bestimmung EW/EV: mit Nullstellen des char. Polynoms

$$p_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto p_A(t) = \det(t \cdot I_n - A)$$

denn falls $\lambda \in \sigma(A)$, dann $p_A(\lambda) = 0$.

Eigenraum: $ER(\lambda) := \ker(\lambda \cdot I_n - A)$

Bedingungen für Diagonalisierbarkeit (für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$)

I) A diagbar $\Leftrightarrow$ $\exists$ n lin. unabh. EV v_i $(i = 1 \dots n)$.

II) $\underbrace{\text{Algebraische}}_{k_{\lambda_i} = \#\text{NS von } p_A(t) \text{ bei } \lambda_i} = \underbrace{\text{Geometrische}}_{\text{Dimension Eigenraum } (\lambda_i) : \dim(ER(\lambda_i))}$ Vielfachheiten $\Leftrightarrow$ A diag. $\forall \lambda$

III) Falls $p_A(t)$ $\underbrace{n \text{ paarweise-versch.}}$ NS hat $\Leftrightarrow$ A diag.

zB $\{1, 2, 3\}$ aber nicht $\{1, 1, 2\}$

Nebenrechnung:

$p = (x-2)^2$ | $ER = \{ x \in \mathbb{R}^2 : x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cancel{\beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \beta, \alpha \in \mathbb{R} \}$

$p_1 = (x-2)^2 (x-1)$ ↯ nicht p.v. | $\dim = 2$

$p_2 = (x-1)(x-2)(x-3)$ ✓ paarw. versch. | $\dim = 1$

Beispiel:

Aufgabe 5.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

für die bekannt ist, dass ein Eigenwert gleich 2 ist.

a) Berechnen Sie die übrigen Eigenwerten von A sowie den zum Eigenwert 2 zugehörigen Eigenvektor.

b) Ist A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Zeigen Sie, dass A invertierbar ist.

d) Es bezeichne I_3 die 3×3-Einheitsmatrix. Geben Sie die Eigenwerte von

$$B := A - I_3$$

an.

a) $$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{Laplace Entw.}}{=} (-1)^4 (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\left[(\lambda-1)(\lambda-4)-1\right]$$

$\lambda_1 = 2$ bekannt.

$$= (\lambda-2)(\lambda^2-5\lambda+3) \; !$$

Im Zweifel: → Polynomdivision

pq-F: $$\lambda_{2,3} = -\frac{-5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 3} \qquad \left(\tfrac{25}{4}\right) \quad \tfrac{12}{4}$$

$$= \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Eigenräume: $$ER_{\lambda_1}(A) = \ker(\lambda_1 \cdot I_3 - A)$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \overset{\text{I}}{\Longleftrightarrow}: x_1 - x_3 = 0 \quad \Rightarrow x_2 \text{ beliebig}$$

$$= \left\{ r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; r \in \mathbb{R} \right\}$$

$\Uparrow e_2$

$\Rightarrow$ Eigenvektor $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu $\lambda_1 = 2$.

b) **Diagbarkeit**: Drei paarweise versch. EW.

Weil $1 \leq$ „geom. VFH(λ_i)" $\leq$ " alg. VFH(λ_i)" $= 1 \; \forall i$

$\Rightarrow$ GVFH (λ_i) = AVFH (λ_i) $\forall i$

$\Rightarrow$ A diag'bar.

c) **Invertierbarkeit** $\Leftrightarrow \exists A^{-1}$ mit $A^{-1}A = AA^{-1} = I$

$\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Wir wissen $\det(A) = \det(D)$ $[D = SAS^{-1}$ (ähnlich)$]$

Daher $\det(A) = \prod_{i=1}^{3} \lambda_i = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$ denn $\lambda_i \neq 0 \; \forall i$.

$\Rightarrow$ A invertierbar.

d) **Spektralshift**: $\sigma(B)$ gesucht mit $B := A - 1 I_3$

Easy denn $\lambda_i(B) = \lambda_i(A) - \underbrace{\lambda_i(I_3)}_{=1}$

$B = 2A$

$\lambda(B) = 2\lambda(A)$

Beweis HA

$(A+I)v \overset{!}{=} \lambda v \quad | -Iv$

$Av = -Iv + \lambda v$

$= (\lambda - 1)v$

$\rightarrow$ Weitere Fragen? $\Rightarrow$ EW/EV können $\in \mathbb{C}$

SkP in $\mathbb{C}$: $\langle v, w \rangle := \sum_{j=1}^{n} v_j \overline{w_j}$

Hermitesche Matrix: $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ falls $A^H := (\overline{A})^T = \overline{(A^T)} = A$

zB. $H = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix}$ denn $H^T = \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{bmatrix}$

und $H^H = \overline{(H^T)} = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix} = H$

Adjungierte Abbildung $\quad K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

$V \hat{=}$ K-Vektorraum. Sei $\phi: V \to V$ lin. Abb. in V mit SKP $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Die adjungierte Abbildung ϕ^* ist def. durch

$$\langle \phi(v), w \rangle = \langle v, \phi^*(w) \rangle \quad \forall v, w \in V.$$

Sie existiert und ist eindeutig.

→ **Proof:**

1) Eindeutigkeit: Angenommen ϕ_1^*, ϕ_2^* seien Adjungierte zu ϕ.

Dann folgt aus Additivität/Multiplikativität des SKP dass

$$\langle v, \phi_1^*(w) - \phi_2^*(w) \rangle = \langle v, \phi_1^*(w) \rangle - \langle v, \phi_2^*(w) \rangle$$

$$= \langle \phi(v), w \rangle - \langle \phi(v), w \rangle = 0 \quad \forall v \in V$$

$$\Rightarrow \phi_1^*(w) - \phi_2^*(w) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \text{Eindeutigkeit.}$$

2) Existenz: Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ ONB von V ($\to$ GS).

$\phi^*(w) := \sum_{i=1}^n e_i \langle w, \phi(e_i) \rangle$ ist eine Adj. von ϕ denn:

$$\langle v, \phi^*(w) \rangle \overset{\text{Def}}{=} \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \underbrace{\langle w, \phi(e_i) \rangle}_{\text{Skalar + Def. SKP}} \rangle = \sum_{i=1}^n \underbrace{\langle v, e_i \rangle}_{= v_i} \overline{\langle w, \phi(e_i) \rangle}$$

$$= \sum_{i=1}^n v_i \langle \phi(e_i), w \rangle \overset{\phi \text{ lin.}}{=} \langle \phi\left(\sum_1^n v_i e_i\right), w \rangle$$

$$= \langle \phi(v), w \rangle \quad \checkmark$$