

- TODO
- Orga
 - Analysis: Maß, Integration mehrdimensional
 - Numerik: SVD, Basen-Fitne, Gaußg.

Globalübung 08

Mathe 3 - WS 2020

16.12.2020 0.4 km

Lambert Theisen (1)

QUESTION **Orga**: → Woche 08-14 macht Lambert.

→ Kontakt per:

- Moodle Forum
- theisen@acom.rwth-aachen.de (MathCCES → ACoM)
- Website acom.rwth-aachen.de

→ Klausuregistration

↳ Kein Gewähr! Bitte nochmals im RWTHOnline überprüfen.

→ HW08 über Weihnachtsferien
weil 23.12.20 (Mi) keine VL-Zeit.

→ PUE 3 bis 14.01.2021 über Ferien?
RK implizit

11.PV0335	20W	FA	Mathematische Grundlagen III (WS)	Terrilhon M (P)	18.03.2021	TEMP1 (1515001), trivago-Hörsaal (H02) (1385 102)	RWTHOnline	26.10.2020 00:00																																																																																	
Erstermin, zentral geplant																																																																																									
Prüfungsbezogene Daten																																																																																									
<table border="1"> <tr> <td>Nr.</td><td>11.PV0335</td> <td>Prüfungsmodus</td><td>Schriftlich</td> <td>Fachprüfung</td> <td colspan="4">Weitere Aktionen</td></tr> <tr> <td>Titel</td><td>Mathematische Grundlagen III (WS)</td> <td>Prüfungstyp</td><td></td> <td></td> <td colspan="4">Details der Veranstaltung anzeigen</td></tr> <tr> <td>Datum</td><td>18.03.2021</td> <td>Sem.</td><td>20W</td> <td></td> <td colspan="4"></td></tr> <tr> <td>Prüfungsbeginn</td><td>14:00</td> <td>Std.</td><td>0</td> <td></td> <td colspan="4">Prüfungsorte</td></tr> <tr> <td>Prüfungsende</td><td>16:30</td> <td>Akt. Anmeldungen</td><td>45</td> <td></td> <td colspan="4">TEMP1 (1515001), trivago-Hörsaal (H02) (1385 102)</td></tr> <tr> <td>Anmeldung ab</td><td>26.10.2020 00:00</td> <td>Max. Anmeldungen</td><td>9999</td> <td></td> <td colspan="4">Beteiligte Personen</td></tr> <tr> <td>Anmeldung bis</td><td>15.01.2021 23:59</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td colspan="4">Terrilhon, Manuel (PrüferIn)</td></tr> <tr> <td>Abmeldung bis</td><td>17.03.2021 14:00</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td colspan="4" rowspan="2"></td></tr> <tr> <td colspan="9">Erstermin, zentral geplant</td></tr> </table>									Nr.	11.PV0335	Prüfungsmodus	Schriftlich	Fachprüfung	Weitere Aktionen				Titel	Mathematische Grundlagen III (WS)	Prüfungstyp			Details der Veranstaltung anzeigen				Datum	18.03.2021	Sem.	20W						Prüfungsbeginn	14:00	Std.	0		Prüfungsorte				Prüfungsende	16:30	Akt. Anmeldungen	45		TEMP1 (1515001), trivago-Hörsaal (H02) (1385 102)				Anmeldung ab	26.10.2020 00:00	Max. Anmeldungen	9999		Beteiligte Personen				Anmeldung bis	15.01.2021 23:59				Terrilhon, Manuel (PrüferIn)				Abmeldung bis	17.03.2021 14:00								Erstermin, zentral geplant								
Nr.	11.PV0335	Prüfungsmodus	Schriftlich	Fachprüfung	Weitere Aktionen																																																																																				
Titel	Mathematische Grundlagen III (WS)	Prüfungstyp			Details der Veranstaltung anzeigen																																																																																				
Datum	18.03.2021	Sem.	20W																																																																																						
Prüfungsbeginn	14:00	Std.	0		Prüfungsorte																																																																																				
Prüfungsende	16:30	Akt. Anmeldungen	45		TEMP1 (1515001), trivago-Hörsaal (H02) (1385 102)																																																																																				
Anmeldung ab	26.10.2020 00:00	Max. Anmeldungen	9999		Beteiligte Personen																																																																																				
Anmeldung bis	15.01.2021 23:59				Terrilhon, Manuel (PrüferIn)																																																																																				
Abmeldung bis	17.03.2021 14:00																																																																																								
Erstermin, zentral geplant																																																																																									

A) Integralrechnung

Mehrfache Integrale (3.1)

Prinzip von Cavalieri:

M messbar $\Rightarrow \begin{cases} M_1(y) \text{ messbar } \forall y \text{ a.e. (almost everywhere)} \\ M_2(x) \text{ messbar } \forall x \text{ a.e.} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y \mapsto \lambda_m(M_1(y)) \text{ messbar} \\ x \mapsto \lambda_m(M_2(x)) \text{ messbar} \end{cases}$

Lebesgue-Maß

$$\Rightarrow \lambda_{n+m}(M) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_m(M_1(y)) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_m(M_2(x)) dx$$



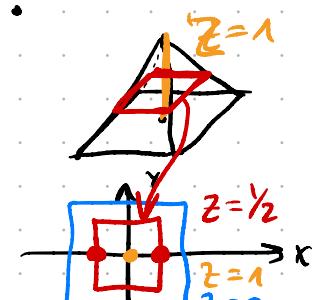
Beispiel:

Berechne das Volumen der Pyramide $K \subset \mathbb{R}^3$ mit Eckpunkten $(-1, 1, 0), (-1, -1, 0), (1, -1, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1)$.

→ Konstruktion: $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1, |x| \leq 1-z, |y| \leq 1-z \right\}$ (1)

→ Realisation: Volumen von $K \stackrel{?}{=} \lambda_3(K)$ (2)

$$\forall z: |x| \leq 1-z$$



$$\boxed{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x| \leq \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \text{Cavalieri: } \lambda_3(k) = \lambda_{2+1}^{n+m}(k) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_2(A(z)) dz \quad (2)$$

mit der Schnittfläche $A(z) = \begin{cases} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1-z, |y| \leq 1-z\}, & z \in [0, 1] \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$

mit Flächeninhalt: $\lambda_2(A(z)) = \begin{cases} [2 \cdot (1-z)]^2, & z \in [0, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$\Rightarrow \lambda_3(k) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_2(A(z)) dz$$

$$= \int_0^1 [2(1-z)]^2 dz = \int_0^1 4(1-z)^2 = 4 \left[-\frac{1}{3}(1-z)^3 \right]_0^1 = \frac{4}{3} \quad \checkmark$$

Zusammenfassung Cavalieri: \rightarrow "Integration schreiben-/schnittweise"

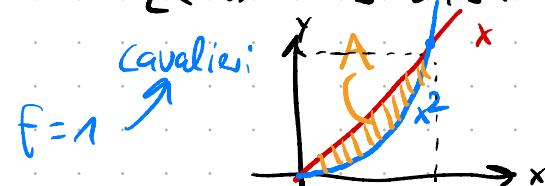
Satz von Fubini: Sei $M \in \mathbb{R}^{n+m}$ messbar & fkt. $f: M \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$

Lebesgue int'bar ($\Leftrightarrow f \in L^1(\lambda_{n+m})$), dann (VL) &

$$\int_M f = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{M_1(y)} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{M_2(x)} f(x, y) dx \right) dy$$

Beispiel: Berechne $\int_A f$ wobei $A = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid x \geq y \geq x^2\}$

und $f(x, y) = 2 \cdot x \cdot y$



Fubini: $\int_A f(x, y) dA = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \cdot \chi_A(x, y) dx dy$

$$\chi_A(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$x^2 \leq x \forall x \in (0, 1)$

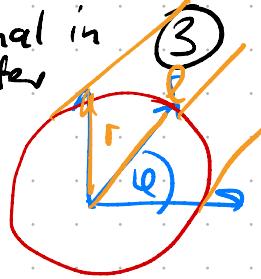
$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) \chi_A(x, y) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x 2xy dy \right) dx = 2 \int_0^1 x \left(\int_{x^2}^x y dy \right) dx$$

$$= 2 \int_0^1 x \cdot \frac{1}{2} (x^2 - x^4) dx = \int_0^1 (x^3 - x^5) dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \quad \checkmark$$

Oft gibt es eine "einfache" Reihenfolge von x & y Integration

Transformationsformel (3.2): → Motivation: Integrale sind manchmal in nicht-kartesischen Koordinaten leichter zu berechnen.



→ Quasi: Verallgemeinerung von Integration durch Substitution.

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\phi(y)) \cdot \phi'(y) dy \quad S = (\dots)$$

→ Welche Substitutionen sind allgemein in \mathbb{R}^n zulässig? ⇒ Diffeomorphismen

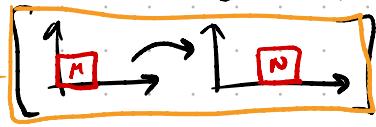
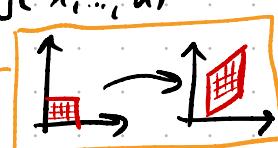
↪ Große Brüder/Schwester von ϕ

Diffeomorphismus: Sei $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$. Die Fl. $\Phi: M \rightarrow N$

heißt Diffeomorphismus falls:

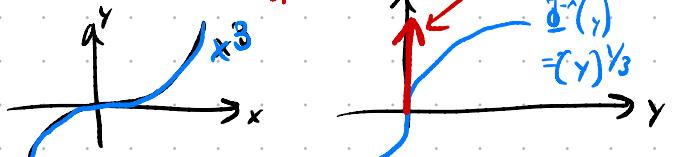
- I) Φ bijektiv (↔) II) Φ stetig diff'bar III) Φ^{-1} stetig diff'bar
- "1-zu-1 Map"
- " $D\Phi \in C(N)$ "
- " $D\Phi^{-1} \in C(M)$ "

→ Beispiele:
(siehe VL)

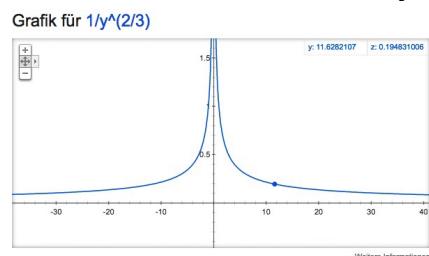
- I) Verschiebung: $y \mapsto y + z$ 
- II) Drehung / Spiegelung: $y \mapsto Uy$ mit $U^T = U^{-1}$ orthogonal
- III) Streckung / Dehnung: $y \mapsto \Sigma y$ mit $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$
- IV) Affine Abbildung: $y \mapsto Ay + b$ 
- V) Allgemeine Diffeomorphismen
(können auch nichtlinear.)

Beispiel für "kein Diffeomorphismus":

$$\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \Phi(x) := x^3$$



- I) bijektiv ✓ weil injektiv (kein doppeltes Bildelement) & surjektiv ("Bildbereich wird gefüllt")
- II) $D\Phi = 3x^2 \in C(\mathbb{R})$ ✓ (stetig diff'bar)
- III) $D\Phi^{-1} = D(y^{1/3}) = \left(\frac{1}{3}\right)y^{-2/3} = \frac{1}{3}y^{-2/3} \notin C(\mathbb{R})$ weil nicht stetig bei Null.
⇒ $\Phi(x) = x^3$ kein Diffeomorphismus.



Transformationsformel: Sei $\Phi: M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus. Dann gilt 4)

$$\int_{\Phi(M)} f(x) dx = \int_M f(\Phi(y)) |\det(D\Phi(y))| dy$$

"Volumenänderung"
Jacobimatrix

Beispiel

Wir haben:

$$M^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - xy + y^2 \leq 2\}$$

Außerdem gilt: $x^2 - xy + y^2 = 2u^2 + 2v^2$

Daher liegt nahe:

Sei $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}u - \sqrt{\frac{2}{3}}v \\ \sqrt{2}u + \sqrt{\frac{2}{3}}v \end{pmatrix}$$

eine lineare Transformation von M zu M^*

$$\text{mit } M = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq ? \right\}.$$

Die Jacobimatrix lautet

$$D\Phi(x,y) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{2} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix} \Rightarrow |\det(D\Phi)| = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

hier const

$$\text{Also: } \int_{M^*} f(x,y) dxdy = \int_M f(\Phi(x,y)) |\det(D\Phi)| du dv$$

$$= \int_M (2u^2 + 2v^2) \frac{4}{\sqrt{3}} du dv$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r^2 \frac{4}{\sqrt{3}} r dr d\varphi$$

$$= \frac{8}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 dr d\varphi = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} 1 d\varphi = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}$$

Φ_2 = Zylinderkoordinaten

mit $|du| |D\Phi_2| = r$

→ Gute YouTube Playlist zur Maßtheorie:

"The Bright Side of Mathematics" → "Maßtheorie und Integrationstheorie"

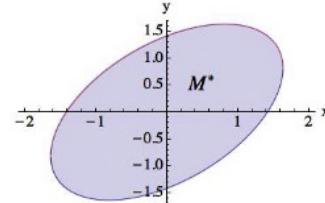


Abbildung 1: Domain of integration

N

Singular Value Decomposition (SVD):

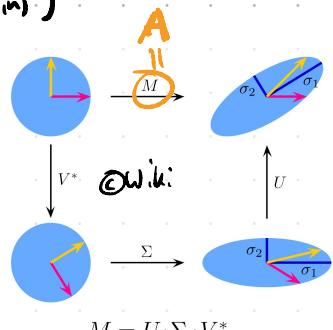
$$\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n} \exists U^T = U^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times m}, V^T = V^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{\min(m,n)})$$

with $\sigma_i \geq 0 \quad \forall i=1.. \min(m,n)$. Such that:

$$A = U \Sigma V^T$$

→ Sehr viele Anwendungen:

↳ Bildkompression, Model-Order-Reduction, Ausgleichsrechnung, Data Science, ML, Computer Vision, ...



Anmerkungen:

$$\rightarrow \|A\|_2 = \sup_{\|u\|=1} \|Au\| = \sigma_1, \quad \text{cond}(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_{\min(m,n)}}$$

$$\rightarrow A = [u_1 \dots u_k] \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_k^T \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^k u_j \sigma_j v_j^T$$

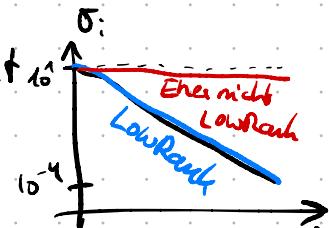
sodass $\sum_{\{j | \sigma_j \geq \varepsilon\}} u_j \sigma_j v_j =: A^\varepsilon \approx A \quad \text{wenn } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (\text{Kompression})$

Das klappt insbesondere gut wenn A "LowRank" Structure hat.

$$\rightarrow \text{Pseudoinverse } A^+ := V \Sigma^+ U^T$$

mit $(\Sigma^+)^{ij} := \begin{cases} \frac{1}{\sigma_i} & i=j \leq r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

gilt auch für nicht quadratische Matrizen
aber für Singuläre Matrizen
 $A^+ = A^{-1} b$ wenn A regulär



$$\rightarrow \text{Ausgleichsrechnung} \quad \min_x \|Ax - b\|_2 = \|Ax^* - b\| \quad \text{mit } x^* = A^+ b \quad (\text{s.o.})$$

(Curve-Fitting z.B.)

c.f. $x = A^{-1} b$ bei regulärem A

Beispiel (Berechnung SVD): Find the SVD of $A = U \Sigma V^T$

where $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

1) Singulärwerte berechnen: mit EW von $AA^T = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}$ (kleinere Dimension)
 $\det(AA^T - \lambda I) = (\lambda - 17)^2 - 8^2 = \lambda^2 - 34\lambda + 225 = (\lambda - 25)(\lambda - 9)$
 $\Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{25} = 5 \quad \sigma_2 = \sqrt{9} = 3$

AA^T müsste auf gleiche Dimension sein

2) Rechte Singulärvektoren: (Zeilen von V) berechnen (linke Singulärvektoren) gelten auch (6)

als Eigenvektoren von $A^T A \in \mathbb{R}^{n,n} \rightarrow$ diese orthogonal.

$$\text{kern}(A^T A - \sigma_1^2 I) = \begin{bmatrix} -12 & 12 & 2 \\ 12 & -12 & -2 \\ 2 & -2 & -17 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauß}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A^T A - \sigma_2^2 I) = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 2 \\ 12 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauß}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ liegt im Kern.}$$

Der rechte Eigenvektor von $A^T A$ liegt im Kern und ist ortho zu v_1 & v_2 .

$$\text{I) } v_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \perp v_1 \Rightarrow \underline{-a = b}$$

$$\text{II) } v_3 \perp v_2 \Rightarrow v_2^T v_3 = 0 \Leftrightarrow \frac{2a}{\sqrt{18}} + \frac{4c}{\sqrt{18}} = 0 \Leftrightarrow \underline{-a = 2c}$$

$$\Rightarrow v_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir haben: $A = U \Sigma V^T = U \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{4}{\sqrt{18}} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Linke Singulärvektoren: $\sigma_i u_i = A v_i \Leftrightarrow u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$ [$\sigma_i v_i = A^T u_i$ wenn v_i gesucht wäre]

$$\Rightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{125}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{150}} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{150}}}_{=\frac{1}{\sqrt{12}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u_2 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Stickwort:
Rechnungsauglichkeit
Float

Kondition von Eigenwerten: \rightarrow benötigt für numerische Berechnung

Satz von Bauer-Fike: Let $A = T \Lambda T^{-1} \in \mathbb{R}^{n,n}$ with $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

and perturbation $\Delta A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Then $\forall \mu \in \sigma(A + \Delta A)$:

"Messfehler"

$$\min_{\lambda \in \sigma(A)} |\mu - \lambda| \leq \text{cond}_p(T) \|\Delta A\|_p$$

Gut-conditioniertes EV-Probl.
 $\Leftrightarrow \text{cond}_p(T)$ klein
A symm. ($U = U^T$)

\Rightarrow "Je nachdem wie $\text{cond}_p(T)$ ist, ändert sich σ der perturbierten Matrix"

Satz von Gershgorin

"Abschätzen von Eigenwerten"

Let $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and $\gamma_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ ("Summe der Spaltenabsoluteinträge ohne Diag.").
 $\sum_{j \neq i} |a_{ij}| \leftarrow$ (Summe der Reihenabsoluteinträge) "geht auf!"

Dann liegen jeder EW von A in mindestens einem Gershgorin-Kreis G_i :

$$\text{mit } G_i := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq \gamma_i\}$$

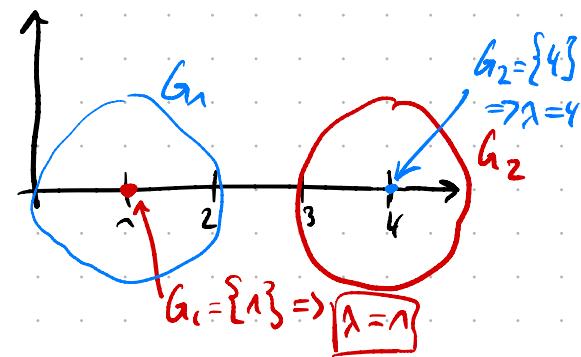
→ Falls alle G_i disjunkt ("keine Überlappung"), dann pro Kreis ein EW.

Einfaches Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma(A) = \{1, 4\}$$



Passt ✓ Eigentlich wissen wir sogar, dass bei Δ -Matrizen die EW auf den Diagonalen stehen... 🤓

Image Compression Using SVD

We consider an grayscale image $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ with entries $A_{ij} \in [0, 1]$ representing the gray intensity.

Singular Value Decomposition

A square matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ can be written as SVD, defined as:

$$A = U \Sigma V^T = \sum_{i=1}^n u_i \sigma_i v_i^T = u_1 \sigma_1 v_1^T + \dots + u_r \sigma_r v_r^T$$

using Images, Testimages, LinearAlgebra, PlutoUI, Plots

Load test image from the Testimages package.



compressed(img, rank)

Live-Demo:

Image Compression
Using SVD

Compressed Image

We construct the compressed image $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ as rank $r = 21$ approximation, defined as:

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^r u_i \sigma_i v_i^T = u_1 \sigma_1 v_1^T + \dots + u_r \sigma_r v_r^T$$

with rank r .

Storage Requirement of Compressed Matrix

Instead of storing n^2 matrix entries, we could now only store the r -times the summation tuple $\{\{u_i, \sigma_i, v_i^T\}\}$ which leads to a size

$$\text{size}(\tilde{A}) = r(n+1+n) = r(2n+1) \ll n^2 = \text{size}(A)$$

```
compressed (generic function with 1 method)
  • function compressed(img, rank)
    • U, R, Vt = svd(img);
    • return Gray.(sum([(U[:,i] * R[i] * Vt[:,i]) for i=1:rank])) # Gray
  • end
```

Check the Singular Values

Rule of thumb: If the decrease of SVs is strong, we have a low rank structure and can compress.

```
> Plots.PlotlyBackend()
  • plotly()
```

Singular Values

