O: HA working?
G: Abbildungen,

Mathe 1
Globalübung 2
WS25

24.10.25
Lambert Theisen

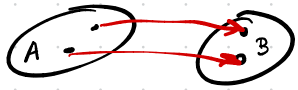
O : **Orga:**
→ Fragen ?
→ Moodle + HA funktioniert?

G : **Abbildungen** $f \subset A \times B$ ist Abbildung/Funktion falls $\forall x \in A : \exists! \, y \in B : (x,y) \in f$

genau ein

↑ karthesisches Produkt

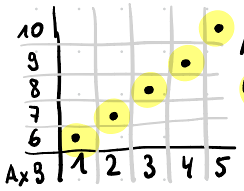
"wird abgebildet/ersetzt"



Notation: $\boxed{f: \; A \to B \; , \; x \mapsto f(x)}$ $A \hat{=}$ Definitionsbereich, $B \hat{=}$ Bildbereich

→ **Wertebereich** ($\neq$ Bildbereich) ($\approx$ alle Werte die "angenommen werden"): $W_f := \{ y \in B : \exists x \in A : f(x) = y \}$

→ **Graph**: $G_f := \{ (x, f(x)) \in A \times B : x \in A \}$



$A \ni x \mapsto f(x) := x + 5 \in B$

$G_f = \{ (1,6), (2,7), (3,8), (4,9), (5,10) \}$

→ **Identität**: $id_A : A \to A, \; x \mapsto id_A(x) := x$

Eigenschaften: $f: X \to Y$

1) f surjektiv $\Leftrightarrow$ $\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$ (f ist Abb. von X auf Y) ("alle y getroffen")
2) f injektiv $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ ("jedes y nur 1x")
3) f bijektiv $\Leftrightarrow$ f surjektiv und injektiv

Aufgabe 1. (Abbildungen)
Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv oder bijektiv?

(a) $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0, \; i(x) := |x|$,

(b) $j : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \; j(x) := 3x - 7$,

(c) $k : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \; k(x) := 3x - 7$

Geben Sie Abbildungen mit den folgenden Eigenschaften an:

(d) $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.

(e) $F : I_1 = [-1, 1] \to I_2 = [1, 10]$ ist bijektiv.

Hinweis: zu e) Wählen Sie eine geeignete Geradengleichung.

Beispiel a) $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, \ldots\}$, $\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

Da $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z}$ und $\underbrace{i(n) = |n| = n}_{\text{Identität}}$ $\forall n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow$ Surjektiv

$i(-5) = |-5| = |5| = i(5) \Rightarrow$ nicht injektiv

b) Inj.: Sei $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ mit $j(x_1) = j(x_2)$, für injektiv, muss nun $x_1 = x_2$ folgen.

$j(x_1) = 3x_1 - 7 = 3x_2 - 7 = j(x_2)$
$\Leftrightarrow \; 3x_1 = 3x_2 \; \Leftrightarrow \; x_1 = x_2$ ✓ → injektiv

$e^x \cdot (-e^{-x}) = \frac{e^x}{-e^x} = \frac{1}{-1} = -1$

j surjektiv $:\Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{Z} \; \exists x \in \mathbb{Z} : z = f(x)$ ⇝ Gilt das?

NR: Sei $z \in \mathbb{Z}$ beliebig $z = j(x) = 3x - 7 \Rightarrow x = \frac{z-7}{3}$
⇝ Ist $x \in \mathbb{Z} \; \forall z$? ⇝ Nein

Sei $z = 0 \in \mathbb{Z}$. Angenommen $\exists x \in \mathbb{Z}$ mit $0 = z = f(x) = 3x - 7$
Dann wäre $3x = 7 \Leftrightarrow x = 7/3 \notin \mathbb{Z}$ ↯ $\Rightarrow j$ nicht surjektiv (& nicht bijektiv daher)

c) Injektivität wie b). Sei $z \in \mathbb{Q}$ beliebig, dann gilt $z = p/q$ mit $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$

Wähle nun $x = \frac{p + 7q}{3q} \in \mathbb{Q}$, dann gilt

$k(x) = 3 \, \frac{p+7q}{3q} - 7 = \frac{p}{q} + \frac{7q}{q} - 7 = \frac{p}{q} = z$

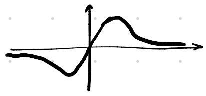
NR: $z = k(x) \Leftrightarrow \frac{p}{q} = z = k(x) = 3x - 7 \Rightarrow \frac{p + 7q}{q} = \frac{p}{q} + 7 = 3x$

$\Rightarrow x = \frac{p + 7q}{q}$ mit $\underbrace{p}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{7q}_{\in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}$ und $3q \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$

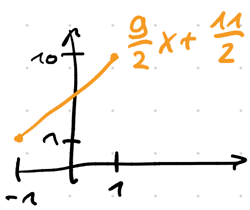
$\Rightarrow k$ surjektiv $\Rightarrow k$ bijektiv

d) $f(x) = \sin(x)$

oder $\frac{2x}{x^2+1}$

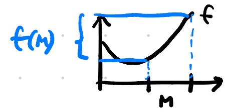


e) $f(x) = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ die durch die Punkte $(-1, 1)$ & $(1, 10)$ geht

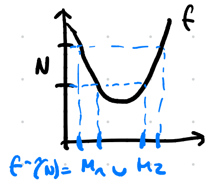


$\frac{9}{2}x + \frac{11}{2}$

Bild $f(M)$ von Menge M: $f(M) := \{ f(x) \in Y : x \in M \}$



Urbild $f^{-1}(N)$ von N: $f^{-1}(N) := \{ x \in X : f(x) \in N \}$



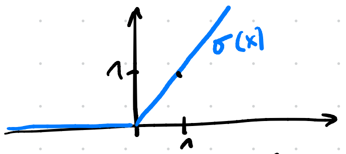
Komposition $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$. $g \circ f : X \to Z$

$x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$

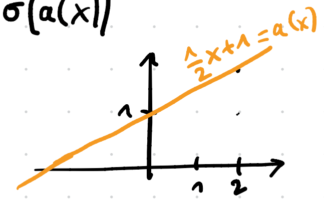
Bsp: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) := \sigma(a(x))$

Neural Net: $f(x) = g_N \circ g_{N-1} \circ \ldots \circ g_1(x)$

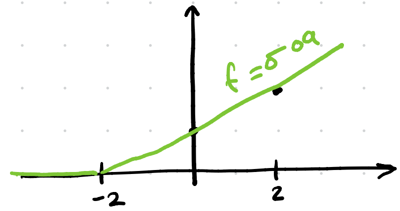


mit $\sigma(x) := \max\{0, x\}$



$a(x) := w \cdot x + b$

$\rightsquigarrow$



$2x^2+1$

f $x \mapsto x+1$

g $y \mapsto 2y$

h $z \mapsto z^2$

$f(g(h(x)))$

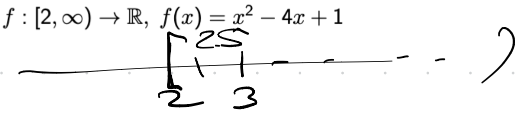
Umkehrfunktion: $f: X \to Y$ bijektiv, dann ex. $f^{-1}: Y \to X$ sodass $f \circ f^{-1} = id_Y$, $f^{-1} \circ f = id_X$

Bsp: $y = x^2 - 4x + 1 = (x-1)^2 - 3$

$\Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{y+3}$

Aufgabe 1. **(Umkehrfunktionen)**
Bestimmen Sie die Umkehrfunktion der folgenden Funktionen:

a) $f : [2, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 4x + 1$



Da $x \in D_f$ kommt nur $g(y) = 2 + \sqrt{y+3}$ mit $y \geq -3$ in Frage.

ZZ: g und f invers zueinander: $g(f(x)) = 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 1 + 3} = 2 + \sqrt{(x-2)^2} = x$ ✓

$f(g(y)) = (2 + \sqrt{y+3})^2 - 4(2 + \sqrt{y+3}) + 1$

$= 4 + 4\sqrt{y+3} + (y+3) - 8 - 4\sqrt{y+3} + 1$

$= y$ ✓

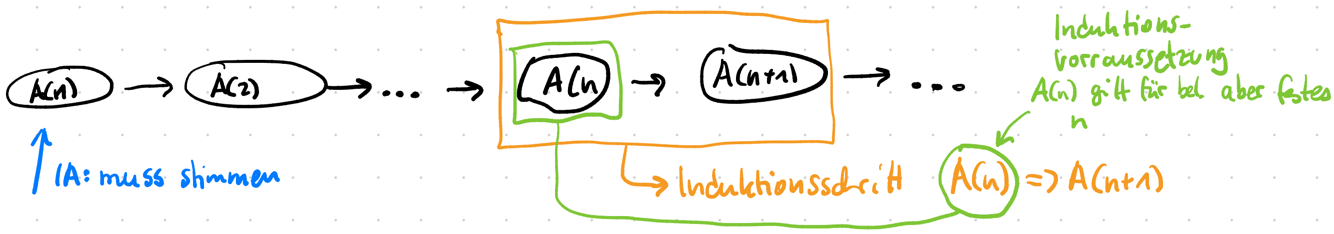
Induktionsbeweise: **Minimal-Bsp**: $\forall n \in \mathbb{N}$: $\underbrace{(1+1+1+\ldots+1)}_{n\text{-mal}} =: \sum_{i=1}^{n} 1 = n \quad :\Leftrightarrow: A(n)$ ist wahr

① **Induktionsanfang** (IA): $\sum_{i=1}^{1} 1 = 1$ ist wahr $\Rightarrow A(1)$ ist wahr

② **Induktionsvorraussetzung** (IV): $A(n)$ sei wahr für beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$ [auch I-Hypothese, Induktionsannahme]

③ **Induktionsschritt** (IS): $\sum_{i=1}^{n+1} 1 = \underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{n\text{-mal}} + 1 = \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} 1}_{= n\ (IV)} \Big) + 1 \overset{(IV)}{=} n + 1 \Rightarrow A(n+1)$ wahr ✓

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Aussage $A(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.



Bsp:

Aufgabe 1.
Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

3 Punkte

(IA) $(n=1)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{(2\cdot 1-1)(2\cdot 1+1)} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2\cdot 1+1}$ ✓ wahr

(IV) Sei die Aussage für beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ wahr. Das heißt:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}} = \frac{n}{2n+1} \quad \text{gilt.}$$

(IS) $:(n \to n+1)$: Unter Annahme der (IV) gilt:

Ziel 1: Wir müssen (IV) "finden & nutzen"

Summe auseinander ziehen

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}}_{\text{ist gleich:}} + \underbrace{\frac{1}{[2(n+1)-1][2(n+1)+1]}}_{(n+1)\text{ter Teil der Summe}}$$

$$\overset{(IV)}{=} \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{n(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{1}{(2n+1)\underbrace{(2n+3)}_{=2\cdot(n+1)+1}}$$

sieht gut aus

das sollte weg.

$$= \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3} = \boxed{\frac{n+1}{2(n+1)+1}}$$ ✓ $A(n+1)$ wahr.

Ziel 2: Wir müssen $A(n+1)$ "erkennen" $\dfrac{n+1}{2(n+1)+1}$

weil

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{\overset{n+1}{\cancel{n}}}{2\underset{n+1}{\cancel{n}}+1}$$

$\Rightarrow$ Mit dem Prinzip der vollst. Induktion gilt die Aussage $\forall n \in \mathbb{N}$.

1 1 2 3 5

Bsp: (IA) $(n=1)$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} x_k^2 = x_1^2 = 1 = 1\cdot 1 = x_1 \cdot x_2$ ✓

Aufgabe 1.
Die Fibonacci-Folge $\{x_k\}$ ist durch

$$x_1 := 1, \qquad x_2 := 1, \qquad \boxed{x_k := x_{k-1} + x_{k-2}}$$

rekursiv definiert. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = x_n x_{n+1}$$

gilt.

$$x_{n+1} \cdot \underbrace{x_{(n+1)+1}}_{x_{n+2}}$$

(IV) Behauptung gelte für bel. aber festes $n \in \mathbb{N}$

(IS) $(n \to n+1)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + x_{n+1}^2$

$$\overset{(IV)}{=} x_n \cdot x_{n+1} + x_{n+1}^2$$

$$= x_{n+1} \cdot (\underbrace{x_n + x_{n+1}}_{})$$

$$\overset{\text{Def.}}{=} x_{n+1} \cdot x_{n+2} \quad ✓$$

$\Rightarrow$ Mit dem .... (s.o.)

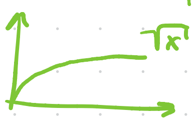
Bsp: Zeigen Sie dass $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ gilt: $n \cdot \sqrt{n} \geq n + \sqrt{n}$

IA $n=3$: $3 \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \geq \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} = 3 + \sqrt{3}$ ✓

→ Why $n \geq 3$? $\boxed{n=1}$: $1 \cdot \sqrt{1} = 1 < 1 + \sqrt{1}$
$\boxed{n=2}$: $2 \cdot \sqrt{2} = \underbrace{\sqrt{2}}_{<2} + \sqrt{2} < 2 + \sqrt{2}$ gilt nicht.

IV $n \cdot \sqrt{n} \geq n + \sqrt{n}$ gilt für bel. aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$.

IS $(n \to n+1)$: $(n+1)\sqrt{n+1} = n\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}$



$$\overset{\text{Monotonie Wurzelfunkt.}}{>} n \cdot \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$$

$$\overset{\text{IV}}{\geq} n + \underbrace{\sqrt{n}}_{>1} + \sqrt{n+1}$$

$$\overset{n \geq 3}{>} n + 1 + \sqrt{n+1} \quad ✓$$

⇒ Aussage gezeigt mit dem Prinzip der vollst. Induktion.