TODO: Pü (Klausur 25.08, keine SRümorgen)

A: Trennung Var, Poisson, MW, max

N: Fourieranalyse Poisson

Mathe 4 – Übung 4

30.04.20

A: Recap: Trennung der Variablen:

(1)

→ zum Lösen von z.B. $\Delta u = 0$

→ Bsp:

Aufgabe 91. **(Trennung der Variablen)**
Lösen Sie die folgenden PDEs mittels Trennung der Variablen:

(i) $u_{xx} + u_{tt} + u_x + u = 0$

(ii) $(u_x)^2 + (u_y)^2 = 1$

Hinweis: Benutzen Sie in Aufgabe (ii) den additiven Ansatz $u(x,y) = X(x) + Y(y)$.

I) Ansatz: $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

$$\Rightarrow X''T + XT'' + X'T + XT = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{X \cdot T}$$

$$\Leftrightarrow \frac{T''}{T} = -\frac{X'' + X' + X}{X} \overset{!}{=} c^2 \quad \forall (x,t)$$

$0 = 1 \cdot \mu^2 + 0 \cdot \mu - c^2 \Rightarrow \mu_{1,2} = \pm c$

Char. Poly, see last week...

ODEs: 1) $T''(t) - c^2 T(t) = 0 \Rightarrow \boxed{T(t) = \tilde{C} e^{ct} + D e^{-ct}}$

2) $X''(x) + X'(x) + (1 - c^2) X(x) = 0$

mit $p(\mu) = \mu^2 + \mu + (1 - c^2) = 0 \Leftrightarrow \mu_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (1 - c^2)}$

$= -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4(1 - c^2)}$

$$\Rightarrow \boxed{X(x) = A \exp\left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - 4(1 - c^2))^{\frac{1}{2}}\right) x\right) + B \exp\left(\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}[1 - 4(1 - c^2)]^{\frac{1}{2}}\right) x\right)}$$

Letztlich: $u(x,t) = X \cdot T$ löst PDE (RB für $A, \dots, D, c$)

$\cancel{c} + (1 - \cancel{c}) = 1$

II) PDE: $(u_x)^2 + (u_y)^2 = 1$

Multi: $u = X \cdot Y \Rightarrow (X' \cdot Y)^2 + (X \cdot Y')^2 = 1$ ↯

$$\frac{(X')^2}{X^2} + \frac{(Y')^2}{Y^2} = \frac{1}{X^2 Y^2}$$

Ansatz $u = X(x) + Y(y)$ (Additiv)

$\Rightarrow (X')^2 + (Y')^2 = 1 \Leftrightarrow (X')^2 = 1 - (Y')^2 \overset{!}{=} c$

ODEs: 1) $X'(x) = \pm\sqrt{c}$ (skip $-\sqrt{c}$)

$\Rightarrow X(x) = \sqrt{c} \cdot x + A$

2) $Y'(y) = \pm\sqrt{1-c}$ (skip "-")

$\Rightarrow Y(y) = \sqrt{1-c} \cdot y + B$

(Eine) Lösung: $u(x,y) = \sqrt{c} \cdot x + A + \sqrt{1-c} \cdot y + B$

$= \sqrt{c} \cdot x + \sqrt{1-c} \cdot y + \tilde{C}$ für bel. c

Poisson-Lösungstheorie:

→ **Fundamentallösung**: Wird später in VL noch relevanter (Distributionen)

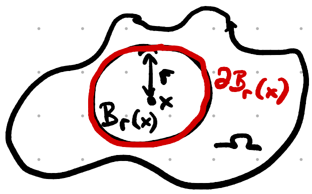
→ **Lösung**: (Eindeutigkeit + stetige Abh. von Daten) ⟹ VL
Poisson ist "gut"

Eigenschaften Harmonischer Funktionen:

→ Reminder: u harmonisch $\Leftrightarrow$ $\Delta u = 0$

I) Mittelwerteigenschaft:

Sei u harm. in Ω, $x \in \Omega$ und $r > 0$ sodass ~~Kugel~~ Kugel mit Rand $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$, dann:



$$u(x) = \frac{1}{|B_r(x)|} \cdot \int_{B_r(x)} u(y)\, dy \qquad \text{(Mittelwert in } B_r(x)\text{)}$$

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \cdot \int_{\partial B_r(x)} u(s)\, ds \qquad \text{(Mittelwert auf } \partial B_r(x)\text{)}$$

mit Kugelvolumen $|B_r(x)|$ und Kugel-Oberfläche $|\partial B_r(x)|$

Das n-dimensionale Volumen einer n-dimensionalen Kugel mit dem Radius r ist

$$V_n = r^n \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

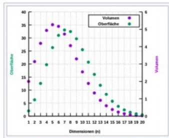
Hier ist Γ die Gammafunktion, eine kontinuierliche Erweiterung der Fakultät. Den $(n-1)$-dimensionalen Inhalt der $(n-1)$-dimensionalen Oberfläche, also der $(n-1)$-Sphäre erhält man durch Ableitung des Volumens nach dem Radius:

$$O_n = n r^{n-1} \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = 2 r^{n-1} \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Für eine Einheitskugel in n Dimensionen findet man also folgende Volumen und Oberflächeninhalte:

Dimensionen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	2n	2n+1
Volumen	2	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{\pi^2}{2}$	$\frac{8\pi^2}{15}$	$\frac{\pi^3}{6}$	$\frac{16\pi^3}{105}$	$\frac{\pi^4}{24}$	$\frac{32\pi^4}{945}$	$\frac{\pi^5}{120}$	...	$\frac{\pi^n}{n!}$	$\frac{2^{n+1}\pi^n}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n+1)}$
Oberfläche	2	2π	4π	$2\pi^2$	$\frac{8\pi^2}{3}$	π^3	$\frac{16\pi^3}{15}$	$\frac{\pi^4}{3}$	$\frac{32\pi^4}{105}$	$\frac{\pi^5}{12}$	...	$\frac{2\pi^n}{(n-1)!}$	$\frac{2^{n+1}\pi^n}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}$

Eine n-Sphäre ist ein Beispiel einer kompakten n-Mannigfaltigkeit.



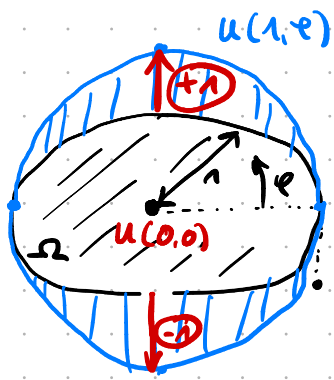
Volumen und Oberflächen von Einheitskugeln in n Dimensionen

Bsp in Polarkoordinaten: (HA!)

Sei $\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi \\ y = r \cdot \sin \varphi \end{cases}$ mit $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$

Sei $u(r, \varphi)$ harmonisch in $\Omega = B_{\underset{r}{1}}(\underset{x_0}{0}) = \{(r,\varphi) : r < 1\}$

und $u(1, \varphi) = \sin \varphi$



$$\Rightarrow u(0,0) = \frac{1}{|\partial B_1(0)|} \int_{\partial B_1(0)} u(1,\varphi)\, d\varphi$$

$\boxed{2\pi \cdot r}$

$$= \frac{1}{2\pi \cdot 1} \int_0^{2\pi} \sin \varphi \, d\varphi = 0$$

$\Rightarrow u(0,0)$ ist Mittelwert von u auf Rand $= 0$.

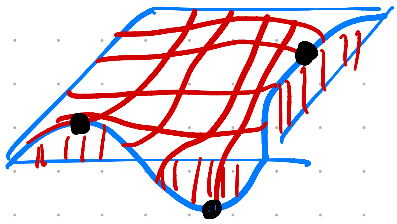
II) Maximumsprinzip: Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ harmonisch in Ω, dann:

I) $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$ („Falls u nicht konstant, dann Max. auf Rand")

II) Wenn Ω zsm. hängend und $\exists\, x_0 \in \Omega$ mit:

$$u(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} u,$$

dann ist u konstant in Ω.

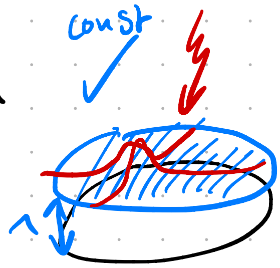


Bsp (von oben): u harmonisch in $B_1(0) =: \Omega$

I) $u(1,\varphi) = \sin\varphi \implies \max_{(r,\varphi)\in\bar{\Omega}} u = \max_{\varphi\in[0,2\pi)} u(1,\varphi) = 1$

II) $u(1,\varphi) = 1 \implies u(r,\varphi) = 1$ konstant, da

$$\min_{\partial\Omega} u \le u \le \max_{\partial\Omega} u \quad (VL)$$



N: Fourieranalyse (Poisson auf Einheitsquadrat) $\Omega = [0,1]^2$ mit Null-RB

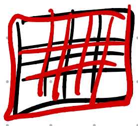
$\boxed{e^{\nu,\mu} \mathrel{\hat{=}} \text{Eigenfunktion}}$

→ **Kontinuierlicher Fall:**

$$\left\{\begin{array}{l} e^{\nu,\mu}(x,y) = \sin(\nu\pi x)\,\sin(\mu\pi y) \\ \lambda^{\nu,\mu} = (\nu^2+\mu^2)\cdot\pi^2 \end{array}\right\}$$

denn $-\Delta e^{\nu,\mu}(x,y) = \lambda^{\nu,\mu} e^{\nu,\mu}(x,y)$

$\boxed{\text{vgl. } A\cdot v = \lambda\cdot v \ (LA)}$



→ **Diskreter Fall:** $\xi \in \bar{\Omega}_h$

$$\left\{\begin{array}{l} e_h^{\nu,\mu}(\xi) := e^{\nu,\mu}(\xi) \\ \lambda_h^{\nu,\mu} = \frac{4}{h^2}\left(\sin^2(\tfrac{1}{2}\pi\nu h) + \sin^2(\tfrac{1}{2}\pi\mu h)\right) \end{array}\right.$$

$1 \le \nu,\mu \le n-1$

(→ VL)

FD ⟿ $Ax = b$

$\boxed{\text{Iterative Lösen später in VL}}$

⇒ **In a Nutshell:**

→ Poisson Matrix ist symmetrisch ($A = A^T$) und positiv definit ($\lambda_h^{\nu,\mu} > 0$)

→ Kondition wird schlecht $\kappa_2(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \overset{(..)}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{h^2}\right)$

$h \downarrow \implies \kappa_2(A) \uparrow$

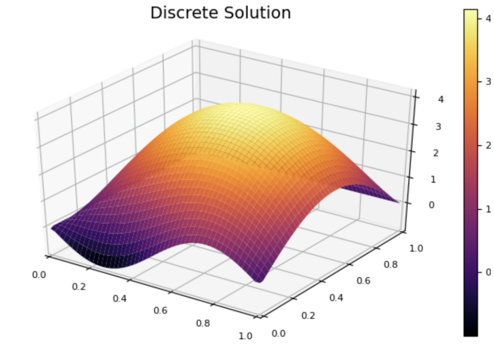
Jupyter NB: Diesmal in Julia: Schneller, Nice Syntax, OpenSource

4

- → Poisson again
- → Konvergenz
- → Kondition (Zeit, Iterationen)
- → Helmholtz

In [4]:
```julia
Ω = UnitSquare(50)
bcs = UnitSquareBCs(x -> -sin(2pi*x), y -> 2sin(pi*y), x -> 0, y -> 0)
f(x,y) = 50
u = solvePoisson(Ω, f, bcs)
plotSol(Ω, u, bcs)
```

Out[4]:




```julia
function solveHelmholtz(Ω::UnitSquare, f, k::Number, bcs::UnitSquareBCs)
    A = Δₕ(Ω) + k^2 * I((Ω.N-2)^2)
    b = bₕ(Ω, f, bcs)
    return (A) \ b
end
Ω = UnitSquare(75)
bcsHelm = UnitSquareBCs(x -> 0, y -> 0, x -> 0, y -> 0)
f(x,y) = sqrt((x-0.5)^2+(y-0.5)^2) < 0.37 ? 1 : 0
u = solveHelmholtz(Ω, f, 25, bcsHelm)
plotSol(Ω, u, bcsHelm)
```