0: Fragen?

E: Lineare Abbildungen, Determinanten

# Vortragsübung 04 HM1 – WS22

Lambert Theisen 14.12.2022

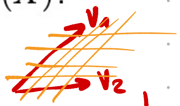
---

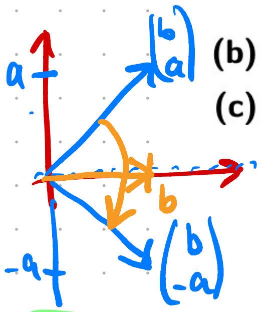
E8

**Aufgabe V 8.** *Lineare Abbildungen*

z.B.: $x^2 \mapsto x^2 + 2x$

**(a)** Wir betrachten die lineare Abbildung $\delta\colon \operatorname{Pol}_2\mathbb{R} \to \operatorname{Pol}_2\mathbb{R}\colon p(X) \mapsto p(X) + p'(X)$. Bestimmen Sie ${}_M\delta_M$ bezüglich der Basis $M\colon 1, X, X^2$ von $\operatorname{Pol}_2\mathbb{R}$.




**(b)** Bestimmen Sie Kern$(\delta)$ und Bild$(\delta)$ für $\delta$ aus **(a)**. Ist $\delta$ bijektiv?

**(c)** Sei $\gamma\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an der Ebene $\mathrm{L}\left(\underbrace{(1,3,2)^\intercal}_{v_1}, \underbrace{(-1,0,1)^\intercal}_{v_2}\right) \hat{=} \{\alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Bestimmen Sie ${}_E\gamma_E$ bezüglich der Standardbasis $E\colon e_1, e_2, e_3$ von $\mathbb{R}^3$.
*Hinweis:* Finden Sie zunächst eine Basis $B\colon b_1, b_2, b_3$ von $\mathbb{R}^3$, bezüglich derer sich die Spiegelung leicht beschreiben lässt, und berechnen Sie danach ${}_E\gamma_E$ aus ${}_B\gamma_B$.

**Gegeben:** Lin. Abb.: $\delta\colon \operatorname{Pol}_2\mathbb{R} \to \operatorname{Pol}_2\mathbb{R}$, $p(x) \mapsto p(x) + p'(x)$

$\operatorname{Pol}_2\mathbb{R}$-Basis: $M\colon m_1, m_2, m_3$ mit $m_1 = 1$, $m_2 = X$, $m_3 = X^2$

**a) Gesucht:** ${}_M\delta_M$

Zur Erinnerung:
Nach Wahl einer Basis $B\colon b_1, \dots, b_n$ in einem $n$-dimensionalen Vektorraum $V$ über $\mathbb{K}$ ordnet man jedem Vektor $v \in V$ dessen Koordinatentupel ${}_Bv = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^\intercal$ zu:
Es gilt dann $v = \sum_{j=1}^n \lambda_j\, b_j$.
Nun sei $W$ ein $k$-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, mit Basis $C\colon c_1, \dots, c_k$. Dann wird jeder Vektor $w \in W$ durch ein Koordinatentupel ${}_Cw$ bezüglich $C$ beschrieben.

**3.8.8. Satz.**

*Jede lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ wird bezüglich der Basen $B$ und $C$ beschrieben durch eine Matrix ${}_C\varphi_B$:*

$${}_C(\varphi(v)) = {}_C\varphi_B\ {}_Bv\,.$$

*Die Spalten der Matrix ${}_C\varphi_B$ sind die Koordinatenvektoren bezüglich $C$ der Bilder der Basisvektoren aus $B$ unter $\varphi$:*

$${}_C\varphi_B = \left({}_C(\varphi(b_1)) \cdots {}_C(\varphi(b_n))\right).$$

**Berechnung der Bilder der Basisvektoren von M "unter" δ & Darstellung dieser in M**

$$\leadsto {}_M\delta_M = \left[\ {}_M(\delta(m_1))\quad {}_M(\delta(m_2))\quad {}_M(\delta(m_3))\ \right]$$

Wie können wir "1" darstellen? 🤔

$\boxed{m_1 = 1}$ $\boxed{m_2 = X}$ $\boxed{m_3 = X^2}$

$$\delta(m_1) = \delta(1) = 1 + (1)' = 1 = 1 \cdot m_1 + 0 \cdot m_2 + 0 \cdot m_3 \Rightarrow {}_M\delta(m_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta(m_2) = \delta(X) = X + X' = \boxed{X + 1} = 1 \cdot m_1 + 1 \cdot m_2 + 0 \cdot m_3 \Rightarrow {}_M\delta(m_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta(m_3) = \delta(X^2) = X^2 + (X^2)' = X^2 + 2X = 0 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + 1 \cdot m_3 \Rightarrow {}_M\delta(m_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad {}_M\delta_M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$1+x, x, x^2$

**3.8.15. Definition.**

Es sei $\alpha\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

- $\operatorname{Kern}(\alpha) := \{v \in V \mid \alpha(v) = 0\}$ heißt der Kern von $\alpha$.
- $\operatorname{Bild}(\alpha) := \{\alpha(v) \mid v \in V\}$ heißt das Bild von $\alpha$.

**3.8.16. Bemerkungen.**

- Sowohl $\operatorname{Kern}(\alpha)$ als auch $\operatorname{Bild}(\alpha)$ sind Untervektorräume.
- Sind $B$ und $C$ Basen für $V$ bzw. $W$, so gilt $\operatorname{Kern}(\alpha) = \{v \in V \mid {}_C\alpha_B\, {}_Bv = 0\}$.
- Die Abbildung $\alpha$ ist genau dann injektiv, wenn $\operatorname{Kern}(\alpha) = \{\vec{0}\}$ gilt.

## b) i) Kern ($\delta$)

$\leadsto$ Definition $\overset{3.8.16}{=} \{ v \in \mathrm{Pol}_2\mathbb{R} \mid \underbrace{{}_M\delta_M \cdot {}_Mv = \vec{0}}\}$

$\Rightarrow$ Betrachte homogenes LGS: ${}_M\delta_M \cdot x = \vec{0}$

$$[{}_M\delta_M \| 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \leadsto_{Z_2 - 2Z_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \leadsto_{Z_1 - Z_2} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]}$$

$1 \cdot x_1 = 0$
$1 \cdot x_2 = 0$
$1 \cdot x_3 = 0$

$\Rightarrow$ Die einzige Lösung ist $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \operatorname{Kern}(\delta) = \{\vec{0}\}$

$\overset{3.8.16}{\Rightarrow}$ $\delta$ ist injektiv

Vorüberlegung: $2 \in W$, $\delta(2) = 2 + (2)' = 2$

## ii) Bild ($\delta$)

$\delta: V \to W$ ist linear, $V = W = \mathrm{Pol}_2\mathbb{R}$

$\leadsto$ Definition $\operatorname{Bild}(\delta) \overset{3.8.15}{=} \{ \delta(v) \mid v \in V \} \subseteq W$ ("Menge aller Objekte, die getroffen werden können")

$(b_i \in \mathbb{R})$

Sei $w(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0 \in \mathrm{Pol}_2\mathbb{R}$. Suche $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathrm{Pol}_2\mathbb{R}$

sodass $w(x) = \delta(p(x))$ $(*)$. [Gibt es überhaupt immer ein $p(x)$ ?]

$$\Leftrightarrow \underline{b_2x^2} + \underline{b_1x} + \underline{b_0} \overset{!}{=} p(x) + p'(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 + 2a_2x + a_1$$

$$= \underline{a_2x^2} + \underline{(a_1 + 2a_2)x} + \underline{(a_0 + a_1)}$$

Koeff. Vgl.

$$\begin{aligned} a_2 &= b_2 \\ \Leftrightarrow\ a_1 + 2a_2 &= b_1 \qquad \Rightarrow a_1 = b_1 - 2a_2 = b_1 - 2b_2 \\ a_0 + a_1 &= b_0 \qquad \Rightarrow a_0 = b_0 - a_1 = b_0 - b_1 + 2b_2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow p(x) = \underbrace{b_2}_{\alpha} X^2 + (\underbrace{-2b_2 + b_1}_{\beta :=}) X + (\underbrace{2b_2 - b_1 + b_0}_{\gamma :=}) \in Pol_2 \mathbb{R}$ erfüllt (*) ✓

Damit folgt $Bild(\delta) = W = Pol_2\mathbb{R}$ & es gibt zu jedem $w(x) \in Pol_2\mathbb{R} = W$ ein $p(x) \in Pol_2\mathbb{R} = V$ mit $w(x) = \delta(p(x))$

1.6.5 (Def. Surj.) $\Rightarrow$ $\delta$ ist surjektiv.

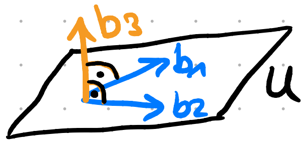
$Bild(w) = \{\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma \cdot 1 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$

(ii) $\delta$ bijective? Ja, denn $\delta$ injektiv, $\delta$ surjectiv $\Rightarrow$ $\delta$ bijective.

c) $\gamma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist Spiegelung an der Ebene $U := L\left(\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

(I) Finde "leichte" Basis $B: b_1, b_2, b_3$ von $\mathbb{R}^3$ bzgl. derer $\gamma$ leicht beschreibbar

$\rightsquigarrow$ Wähle $b_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$




$\rightsquigarrow$ Ergänze zur Basis: $b_3 := b_1 \times b_2 = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 - 2\cdot 0 \\ 2\cdot(-1) - 1\cdot 1 \\ 1\cdot 0 - 3(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}$

$b_1, b_2, b_3$ sind linear unabhängig, da

← Rang-Operationen

$$Rg(b_1, b_2, b_3) = Rg\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix} \underset{\substack{z_2 - 3z_1\\ z_3 - 2z_1}}{\overset{3.9.7}{=}} Rg\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 3 & -12 \\ 0 & 3 & -3\end{bmatrix} \underset{z_3 - z_2}{=} Rg\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & 9\end{bmatrix}$$

$$\underset{\text{Normieren}}{=} Rg\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = 3$$

(*) kann mittels Operationen zu Null gebracht werden.

$\Rightarrow b_1, b_2, b_3$ lin. unabh. weil voller (Rang $\Leftrightarrow$ max # unab. Spalten) nach 3.9.2

2.7.16 $\Rightarrow$ 3: $b_1, b_2, b_3$ ist Basis von $\mathbb{R}^3$.
$\dim(\mathbb{R}^3) = 3$

Frage MI 8:30:
Man kann auch $\operatorname{Rg} A < n \Leftrightarrow \det A = 0$ 3.12.2

für die Vollständigkeit...

**3.9.2. Bemerkung.**

Der Zeilenrang ist die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen von $A$, entsprechend ist der Spaltenrang die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten.
Insbesondere ist der Spaltenrang gleich der Dimension des Bildes der linearen Abbildung $\alpha\colon \mathbb{K}^s \to \mathbb{K}^z\colon v \mapsto Av$.
[Es ist ja Bild $(\alpha)$ gleich dem Aufspann der Spalten von $A$, vgl. 3.8.19.]

**2.7.16. Satz.**

1. *Hat $V$ ein endliches Erzeugendensystem $E$, so kann man aus $E$ eine Basis gewinnen, indem man geeignete Vektoren aus $E$ weglässt.*
2. *Umgekehrt kann man jede linear unabhängige Menge in $V$ zu einer Basis ergänzen.*
3. *Ist $\dim V = n$, so bildet*
   - *jede linear unabhängige Menge mit $n$ Vektoren eine Basis, und*
   - *jedes Erzeugendensystem mit $n$ Vektoren eine Basis.*

**3.9.7. Lemma (Bestimmung des Rangs).**

*Bei elementaren Zeilenumformungen* (VZ), (mZ) *und* (aZ), *vgl. 3.7.1, ändert sich der (Zeilen-) Rang einer Matrix nicht.*
*Analog ändert sich der (Spalten-) Rang nicht bei den folgenden elementaren Spaltenumformungen:*

(VS) *Vertauschen von Spalten*

(mS) *Multiplizieren einer Spalte mit einem Skalar $s \neq 0$,*

(aS) *Addition eines Vielfachen einer Spalte zu einer anderen.*

*Mit Hilfe von elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen kann man jede Matrix auf die Gestalt* $\left(\begin{array}{c|c} E_r & B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ *bringen und daran den Rang $r$ ablesen.*

(I) Berechne ${}_E\delta_E$ mit Hilfe von ${}_B\delta_B$ mit 3.10.11

$${}_E\delta_E = ({}_E\mathrm{id}_B)\cdot({}_B\delta_B)\cdot({}_B\mathrm{id}_E)$$

Like: $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2\times 8}$ $A \cdot B \in \mathbb{R}^{3\times 8}$

**3.10.11. Satz.**

*Es seien $B$ und $C$ Basen für $V$.*

1. ${}_B\mathrm{id}_B = E_{\dim V}$.
2. ${}_C\mathrm{id}_B$ *ist invertierbar, es gilt* ${}_B\mathrm{id}_C = ({}_C\mathrm{id}_B)^{-1}$.
3. *Man kann mit Hilfe von Matrizen für die identische Abbildung Koordinaten auf andere Basen umrechnen:*
   *Für $v \in V$ gilt* ${}_C\mathrm{id}_B\,{}_Bv = {}_Cv$.
4. *Man kann sogar die Matrixbeschreibung einer beliebigen linearen Abbildung $\varphi\colon V \to W$ bequem auf andere Basen umrechnen:*

$${}_E\mathrm{id}_D\;{}_D\varphi_C\;{}_C\mathrm{id}_B = {}_E\varphi_B$$

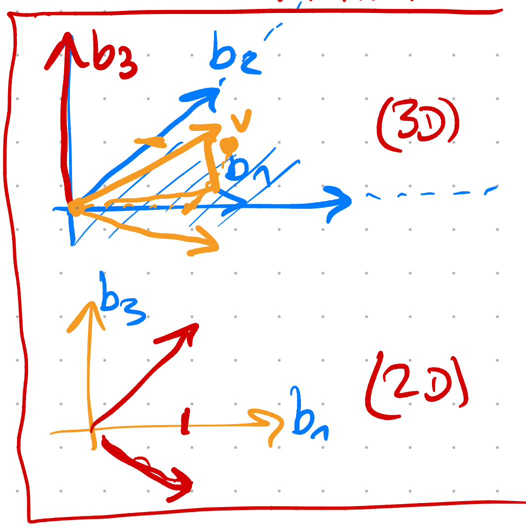
*(hier sind $D$ und $E$ Basen für $W$).*

- Nach Definition der Spiegelung gilt:

$$\begin{aligned} \gamma(b_1) &= 1\,b_1 + 0\,b_2 + 0\,b_3 \\ \gamma(b_2) &= 0\,b_1 + 1\,b_2 + 0\,b_3 \\ \gamma(b_3) &= 0\,b_1 + 0\,b_2 + (-1)\,b_3 \end{aligned} \Bigg\} \Rightarrow {}_B\gamma_B = \left( {}_B(\gamma(b_1)), {}_B(\gamma(b_2)), {}_B(\gamma(b_3)) \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- $${}_E\mathrm{id}_B = \left( {}_E(\mathrm{id}(b_1)), {}_E(\mathrm{id}(b_2)), {}_E(\mathrm{id}(b_3)) \right)$$
$$= \left( {}_Eb_1, {}_Eb_2, {}_Eb_3 \right)$$
$$= \left( b_1, b_2, b_3 \right)$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Intuition




- Nach 3.10.11 ist ${}_E\mathrm{id}_B$ invertierbar mit ${}_B\mathrm{id}_E = ({}_E\mathrm{id}_B)^{-1}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{z_2 - 3z_1 \\ z_3 - 2z_1}}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -12 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{z_3 - z_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -12 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\frac{1}{3}z_2 \\ \frac{1}{9}z_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/9 & -1/9 & 1/9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{z_1 - 3z_3 \\ z_2 + 4z_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -5/9 & -1/9 & 4/9 \\ 0 & 0 & 1 & 1/9 & -1/9 & 1/9 \end{array}\right] \xrightarrow{z_1 + z_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/9 & 2/9 & 1/9 \\ 0 & 1 & 0 & -5/9 & -1/9 & 4/9 \\ 0 & 0 & 1 & 1/9 & -1/9 & 1/9 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow {}_B\mathrm{id}_E = ({}_E\mathrm{id}_B)^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -5 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow {}_E\gamma_E = ({}_E\mathrm{id}_B)\cdot({}_B\gamma_B)\cdot({}_B\mathrm{id}_E) = \ldots = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ES

**Aufgabe V 9.** *Determinanten*

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ seien die Matrizen $A$ und $B_\alpha$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \mathrm{e} & 0 & \pi \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \alpha+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**(a)** Bestimmen Sie $\det(A)$.

**(b)** Bestimmen Sie $\det(B_\alpha)$ in Abhängigkeit von $\alpha$.
Für welche Parameterwerte von $\alpha$ ist $B_\alpha$ invertierbar?

## a) Entwicklung nach der 3-ten Spalte gemäß 3.13.4

Viele Nullen in Spalte $k=3$

$$\det A = \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{4} a_{\ell 3}\, \underbrace{\tilde{a}_{\ell 3}}_{} =$$

$(\ell,3)$-Cofaktor aus 3.13.1

**3.13.4. Entwicklungssatz.**

*Es sei $A = (a_{jk}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann gilt für alle $j,k$:*

① $\det A = \sum_{\ell=1}^{n} a_{j\ell}\, \tilde{a}_{j\ell}$ (*Entwicklung nach der $j$-ten Zeile*)

② $\det A = \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell k}\, \tilde{a}_{\ell k}$ (*Entwicklung nach der $k$-ten Spalte*)

*Außerdem gilt:*

③ $A\,\widetilde{A}^{\mathsf{T}} = (\det A)\,\mathrm{E}_n = \widetilde{A}^{\mathsf{T}}\,A$.

**3.13.1. Definition.**

Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix.
Mit $\widetilde{A}_{jk}$ bezeichnen wir die $((n-1)\times(n-1))$-Matrix,
die aus $A$ entsteht, indem man die $j$-te Zeile und die $k$-te Spalte streicht.
Der $(j,k)$-Cofaktor von $A$
ist die vorzeichenbehaftete Unterdeterminante

$$\tilde{a}_{jk} := (-1)^{j+k} \det \widetilde{A}_{jk}\,.$$

Die Cofaktor-Matrix von $A$ ist $\widetilde{A} := (\tilde{a}_{jk})_{1\le j,k\le n}$.

Eintrag "2"

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots & \pm \\ - & + & \boxed{-} & \cdots & \mp \\ + & - & + & \cdots & \pm \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm & \mp & \pm & \cdots & + \end{pmatrix}$$

$a_{13}$

$$= 0\cdot\tilde{a}_{13} + 2\cdot\tilde{a}_{23} + 0\cdot\tilde{a}_{33} + 0\cdot\tilde{a}_{43}$$

$$= 2\cdot\tilde{a}_{23} = \underbrace{2\cdot\boxed{(-1)^{2+3}}}_{-2}\cdot \underbrace{\det\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{verschiedene Möglichkeiten}}$$

Schachbrett: Optische Merkhilfe ...

## Möglichkeit 1: Entwicklung nach erster Zeile

$$\det\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \sum_{\ell=1}^{3} a_{1\ell}\,\tilde{a}_{1\ell} = (-1)\det\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_{\det}$$

3.11.3

$$= -1(3\cdot 1 - 1\cdot 0) + 1(2\cdot 1 - (-2)\cdot 3)$$

$$= -3 + 8 = 5$$

**3.11.3. Definitionen.**

① Die Determinante einer $2\times 2$-Matrix wird definiert als die orientierte Fläche des Parallelogramms, das von ihren Zeilenvektoren aufgespannt wird:

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} := x_1\,y_2 - x_2\,y_1 .$$

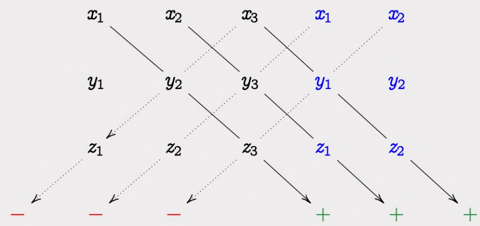
## Möglichkeit 2: Regel von Sarrus 3.13.4

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{matrix}$$

$\ominus_3$ $\ominus_2$ $\ominus_1$ $\oplus_1$ $\oplus_2$ $\oplus_3$

**3.11.5. Regel von Sarrus.**

Um die Determinante einer $3\times 3$-Matrix mit Spalten $S_1 = (x_1, y_1, z_1)^\top$, $S_2 = (x_2, y_2, z_2)^\top$, $S_3 = (x_3, y_3, z_3)^\top$ zu berechnen, fügen wir die Spalten $S_1$ und $S_2$ rechts noch einmal an und ordnen den entstehenden Diagonalen Vorzeichen zu:




Die Determinante $\det(S_1, S_2, S_3)$ erhält man, indem man die mit $+$ markierten Diagonalen aufmultipliziert, die Produkte addiert
und davon die Produkte der mit $-$ markierten Diagonalen abzieht. [nachrechnen]

$$\det\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \overbrace{(-1)\cdot 3\cdot 1}^{\oplus_1} + \overbrace{0\cdot 0\cdot (-2)}^{\oplus_2} + \overbrace{1\cdot 2\cdot 1}^{\oplus_3}$$

$$\underbrace{-(1)\cdot(3)\cdot(-2)}_{\ominus_1} - \underbrace{(-1)\cdot 0\cdot 1}_{\ominus_2} - \underbrace{0\cdot 2\cdot 1}_{\ominus_3}$$

$$= -3 + 0 + 2 + 6 + 0 - 0 = 5$$

Frage Mi 8:30: Sarrus gilt "in diesem Stil" nicht für 4x4, 5x5.

## 3. Möglichkeit: Mittels elementarer Zeilenumformung 3.12.1

→ Matrix auf $\Delta$-Struktur bringen weil Determinante dann easy

**3.12.1. Lemma.**

*Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, mit Zeilen $Z_1, \ldots, Z_n$.*

(mZ) *Multipliziert man eine Zeile von $A$ mit $\mu$, so multipliziert sich auch die Determinante mit diesem Faktor:*

$$\det\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ \mu Z_j \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \mu \det\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_j \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}$$

(VZ) *Vertauscht man in $A$ zwei Zeilen, so ändert $\det A$ das Vorzeichen.*

(aZ) *Addiert man in $A$ ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen, so ändert sich die Determinante nicht.*

$$\to \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{z_2+2z_1 \\ z_3-2z_1}}{=} \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{z_2 \leftrightarrow z_3}{=} -\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{z_3-3z_2}{=} -\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = -(-1)\cdot(1)\cdot(5) = 5$$

3.12.4

**3.12.4. Lemma (Dreiecksmatrizen).**

*Es sei $T$ eine quadratische obere Dreiecksmatrix, also eine Matrix der Form*

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \clubsuit & \cdots & \clubsuit \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \clubsuit \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

*Dann ergibt sich die Determinante von $T$ als Produkt der Hauptdiagonalelemente: D. h. es gilt $\det T = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.*
*Analoges gilt für untere Dreiecksmatrizen.*
[Dies sind ja Transponierte von oberen Dreiecksmatrizen.]

**3.12.5. Strategie zur Berechnung von Determinanten.**

Bringe $A$ durch Zeilen- und Spaltenumformungen auf Dreiecksgestalt $T$, berechne $\det T$ (nach 3.12.4) und führe die notwendigen Korrekturen durch (Vorzeichen wg. (VZ), Skalare wg. (mZ), siehe 3.12.1).

$\Rightarrow$ Letztlich $\det(A) = 2\cdot(-1)\cdot 5 = -10$

## b) Blockmatrix

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\det\left[\begin{array}{cccc|ccc} -1 & 1 & 2 & -2 & 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & e & 0 & \pi \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & -5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \alpha+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

**3.13.8. Determinanten von Block-Dreiecksmatrizen.**

Mit Hilfe des Entwicklungssatzes beweist man:
*Ist $A$ eine Block-Dreiecksmatrix mit $d^2$ Blöcken, also*

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & \cdots & A_{1d} \\ \hline 0 & A_{22} & \cdots & \cdots & A_{2d} \\ \hline 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{dd} \end{array}\right),$$

*so gilt* $\det A = (\det A_{11}) \cdots (\det A_{dd})$.

Zum Beispiel ist die in 3.11.6.3 betrachtete Matrix $\left(\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline 0 & 0 & z_3 \end{array}\right)$ eine Block-Dreiecksmatrix; die Blöcke sind $A_{11} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$, $A_{12} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{22} = \begin{pmatrix} z_3 \end{pmatrix}$, die Determinante ist $(\det A_{11})(\det A_{22}) = (x_1 y_2 - x_2 y_1) z_3$.

$$\overset{3.13.8}{=} 1 \det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \det \left[\begin{array}{cc|c} \alpha-1 & 2 & 0 \\ 2 & \alpha+1 & 0 \\ \hline 3 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\overset{3.12-1}{\underset{3.13.8}{=}} \frac{3}{2} \underbrace{\det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\left( =: \det(A^T) \overset{3.13.7}{=} \det(A) \quad \text{Teil a)} \quad = -10 \right)} \cdot \det \begin{pmatrix} \alpha-1 & 2 \\ 2 & \alpha+1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\det(2)}_{2}$$

[$A^T$: "i-te Zeile wird i-te Spalte"] $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

**3.12.1. Lemma.**

*Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, mit Zeilen $Z_1, \ldots, Z_n$.*

(mZ) *Multipliziert man eine Zeile von $A$ mit $\mu$, so multipliziert sich auch die Determinante mit diesem Faktor:*

$$\det \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ \mu Z_j \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \mu \det \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_j \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}$$

(VZ) *Vertauscht man in $A$ zwei Zeilen, so ändert $\det A$ das Vorzeichen.*

(aZ) *Addiert man in $A$ ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen, so ändert sich die Determinante nicht.*

**3.13.7. Lemma.**

*Für jede quadratische Matrix $A$ gilt $\det A = \det A^T$.*

2x2 Formel instant

$$= \frac{3}{2}(-10) \cdot ((\alpha-1)(\alpha+1) - 2\cdot 2) \cdot 2$$

$$= -30 \cdot [\alpha^2 \underbrace{-1 - 4}_{-5}]$$

$$= -30 \cdot (\alpha^2 - 5)$$

→ $B_\alpha$ ist genau dann invertierbar nach 3.12.3, wenn $\det(B_\alpha) \neq 0$.

Dies ist genau der Fall wenn $\alpha^2 - 5 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{5}\}$.

## 3.12.3. Multiplikativität der Determinante.

❶ *Für* $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *gilt* $\det(A\,B) = \det A \cdot \det B$.

[Den Beweis überlassen wir den Mathematikern.]

❷ *Es gilt* $\det \mathrm{E}_n = 1$.

❸ *Die Matrix* $A$ *ist genau dann invertierbar, wenn* $\det A \neq 0$.
*In diesem Fall gilt* $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

[Aus $A^{-1} \cdot A = \mathrm{E}_n$ folgt $\det(A^{-1}) \cdot \det A = \det \mathrm{E}_n = 1$.]

Die Determinante ist nicht additiv:
Im Allgemeinen gilt $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

[Zum Beispiel ist ja $1 = \det\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) \neq \det\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right) + \det\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$.]