O: Intro, Fragen
E: Ungl: Induktion, reelle Zahlen, binom. Lehrsatz, Abbildungen

# HM1 – Vü WS 22

Lambert Theisen 02.11.22 (1)

O: • Sinn Vü : Bsp.aufgaben als Vorbereitung für HW
• Alle Infos auf Kursseite!

**Alle Infos auf der Kurswebsite**

- `https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM1-Stroppel/`

**Termine**

- In 2022: 02.11., 16.11., 30.11., 14.12.
- In 2023: 18.01., 01.02.

**Ablauf**

- ~~Vor Ort nach dem Kohortenmodell und zeitgleich als Videos in ILIAS~~.
- Termine (siehe Campus Einträge):
  - Mittwoch 08:00 -09:30 Uhr V53.01 für bewe, geod, lrt, mach, verk
  - Mittwoch 17:30 -19:00 Uhr V47.01 für bau, iui, mawi, tema, uwt, ernen, fmt, medtech, mawi, tema, uwt, verf
- In jeder Woche mit Vortragsbung gibt es montags das Blatt mit den Aufgaben.

**Kontakt**

- Lambert Theisen, Alessio Cipriani
- ILIAS-Forum zur Vortragsübung, Sprechstunden, Kontaktformular auf der Website

→ Fragen ?

V1: **Aufgabe V 1.** *Ungleichungen, Induktion*

**(a)** Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion die folgende Aussage:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 3$ gilt

$$n\sqrt{n} \geqq n + \sqrt{n}\,.$$

**(b)** Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{-1, 1\}$, für die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\frac{2}{\big||x|-1\big|} \geqq \frac{3}{x-1}\,.$$

1a) Induktion: → Problem: Aussage $A(n)$ soll $\forall n \in \mathbb{N}$ gezeigt werden

Aber es gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

→ Lösung: ① Zeige dass $A(1)$ wahr ist (oder $A(n_0)$)

② Zeige dass wenn $A(n)$ wahr ist, $A(n+1)$ auch wahr ist wahr ✓

$$A(1) \xrightarrow{A(1) \Rightarrow A(2)} A(2) \xrightarrow{A(2) \Rightarrow A(3)} A(3) \dashrightarrow$$



### 1.2.3. Induktionsprinzip.

Man beweist eine Aussage $A(n)$, die von einem natürlichen Parameter $n$ abhängt,

IA erst für $n = 1$ (Induktionsanfang)

dann zeigt man:

IS Ist $A(n)$ wahr (Induktionshypothese IH),
so ist auch $A(n+1)$ wahr
(Induktionsschluss von $n$ auf $n+1$).

Salopp formuliert: Mit dem Verfahren der vollständigen Induktion weist man nach, dass die betrachtete Aussage *„nie aufhört, richtig zu sein"* — nachdem man sich im Induktionsanfang vergewissert hat, dass sie *„anfängt, richtig zu sein"*.

Man kann den Induktionsanfang auch bei $n_0 \neq 1$ (insbesondere bei $n = 0$, oder später) setzen:
Dann hat man bewiesen, dass $A(n)$ für alle $n \geqq n_0$ wahr ist,
wenn man den Induktionsschluss durchgeführt hat.

Also ZZ: $A(n) := n \cdot \sqrt{n} \boxed{\geq} n + \sqrt{n}$ gilt $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$.

Warum $n \geq 3$?

$\boxed{n=1}$: $1 \cdot \sqrt{1} = 1 \boxed{<} 1 + \sqrt{1} = 2$ ↯

$\boxed{n=2}$: $2 \cdot \sqrt{2} = \underbrace{\sqrt{2} + \sqrt{2}}_{<2} \boxed{<} 2 + \sqrt{2}$ ↯

Also: IA: $A(3)$ ist wahr denn

$3 \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \geq 3 + \sqrt{3}$

denn es gilt: $2\sqrt{3} > 3 \overset{1.5.7}{\Leftrightarrow} (2\sqrt{3})^2 > 3^2 \Leftrightarrow 4 \cdot 3 > 3 \cdot 3$ ✓

### 1.5.7. Monotonie des Quadrierens.

*Ist $a > 0$ und $b > 0$, so gilt* $(a < b \iff a^2 < b^2)$.

IV/IH: Sei $A(n)$ wahr für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

D.h: $n\sqrt{n} \geq n + \sqrt{n}$ gilt

IS: Unter Annahme der der IH, gilt:

$$(n+1)\sqrt{n+1} = n\sqrt{n+1} + 1\cdot\sqrt{n+1}$$
$$\overset{(*)}{>} n\cdot\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$$
$$\overset{(IH)}{\geq} n + \underbrace{\sqrt{n}}_{>1 \text{ weil } n\geq 3} + \sqrt{n+1}$$
$$> (n+1) + \sqrt{(n+1)} \quad ✓$$

**1.5.4. Grundlegende Eigenschaften der Ordnungsrelation.**

Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

1. Transitivität: $(a < b) \wedge (b < c) \implies (a < c)$
2. Monotonie der Addition: $(a < b) \implies (a + c < b + c)$
3. Monotonie der Multiplikation: $(a < b) \wedge (c > 0) \implies (a\,c < b\,c)$; $(a < b) \wedge (c < 0) \implies (a\,c > b\,c)$
4. Archimedisches Prinzip: $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists n \in \mathbb{N}: n > x$

$(*)$: $n\sqrt{n+1} > n\sqrt{n} \overset{(1.5.4.3)}{\iff} \sqrt{n+1} > \sqrt{n} \overset{(1.5.7)}{\iff} n+1 > n$ ✓

⇝ Aussage $A(n)$ gezeigt für $n \geq 3$ mit vollst. Induktion.

**1h) Ungleichungen:** $\dfrac{2}{||x|-1|} \geq \dfrac{3}{x-1}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

Für welche $x$ gilt das?

$\{-1,1\}$ wäre problematisch => Division durch Null!

$$\boxed{|x| \overset{1.5.8}{:=} \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}}$$

"Strategie / Rezept": ⇝ Fallunterscheidung um die Betragsfunktion zu eliminieren

**Fall 1:** $((x \geq 0) \wedge (x \neq 1)) \Rightarrow |x| = x \Rightarrow \dfrac{2}{|x-1|} \geq \dfrac{3}{x-1}$ ?

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{wenn } x-1 \geq 0 \iff x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{wenn } x < 1 \end{cases}$$

**1.1:** $(x > 1)$

$\Rightarrow |x-1| = (x-1)$: $\dfrac{2}{(x-1)} \geq \dfrac{3}{x-1} \overset{\text{Multiplikation mit } (x-1)>0\ (1.5.4.3)}{\iff} 2 \geq 3$ ↯ $\Rightarrow$ Ungl. gilt nicht für $x > 1$

**1.2:** $(0 \leq x < 1)$

$\Rightarrow |x-1| = -(x-1)$: $\dfrac{2}{-(x-1)} \geq \dfrac{3}{x-1} \overset{\cdot(x-1)<0\ (1.5.4.3)}{\iff} \dfrac{2}{-1} = -2 \leq 3$ ✓

**Fall 2:** $(x < 0) \wedge (x \neq -1)$

$\Rightarrow |x| = -x \Rightarrow \dfrac{2}{||x|-1|} = \dfrac{2}{|-x-1|} \overset{?!}{\geq} \dfrac{3}{x-1}$

$|-x-1| = |(-1)\cdot(x+1)| \overset{(1.5.9.3)}{=} |-1|\cdot|x+1| = |x+1|$

$\iff \dfrac{2}{|x+1|} \overset{?!}{\geq} \dfrac{3}{x-1}$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \\ -(x+1), & x < -1 \end{cases}$$

### 1.5.9. Rechenregeln für Beträge.

*Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:*

① $|a| \geqq a, \quad |a| \geqq -a, \quad |a| = \max\{a, -a\}$ ✓

② $|a| = 0 \iff a = 0$ ✓

③ $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ ✓ $\quad \left|\frac{a}{c}\right| = \frac{|a|}{|c|}$ ✓

④ $|a+b| \leqq |a| + |b|$ *(Dreiecksungleichung)*

Falls $a+b \geqq 0$ ist, gilt $|a+b| = a+b \leqq |a|+|b|$.
Falls $a+b < 0$ ist, gilt $|a+b| = -a-b \leqq |a|+|b|$.

⑤ $||a|-|b|| \leqq |a+b|$

Wegen der Dreiecksungleichung gilt
$|a| = |a+b-b| \leqq |a+b| + \underbrace{|-b|}_{=|b|}$
und genauso $|b| = |b+a-a| \leqq |b+a| + \underbrace{|-a|}_{=|a|}$

Daraus folgt $|a|-|b| \leqq |a+b|$
und $|b|-|a| \leqq |a+b|$
also mit ①: $\max\{|a|-|b|, |b|-|a|\} = ||a|-|b|| \leqq |a+b|$.

**2.1:** $(-1 < x < 0)$

$\Rightarrow |x+1| = x+1$:

$$\frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{x-1}$$

Multiplikation mit $\underbrace{(x+1)}_{>0} \cdot \underbrace{(x-1)}_{<0} < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2\,\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{(x+1)}} \leq \frac{3\,(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} \Leftrightarrow 2(x-1) \leq 3(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 2x-2 \leq 3x+3 \Leftrightarrow 0 \leq x+5 \quad ✓ \text{ weil } -1 < x < 0$$

**2.2:** $(x < -1) \Rightarrow |x+1| = -(x+1)$

$$\frac{2}{-(x+1)} \geq \frac{3}{x-1}$$

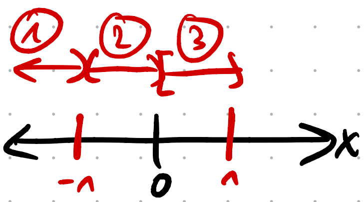
Multipl. mit $\underbrace{(x+1)}_{<0} \cdot \underbrace{(x-1)}_{<0} > 0$

$$\Leftrightarrow -2(x-1) \geq 3(x+1) \Leftrightarrow 2-2x \geq 3+3x$$
$$\Leftrightarrow 0 \geq 1+5x$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{5} \geq x \quad ✓ \text{ weil } x < -1$$

**Letztlich:** Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$$

① ② ③




$$= \{x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \mid x < 1\}$$
$$= (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup [0, 1) = (-\infty, 1) \setminus \{-1\}$$

V2



**Aufgabe V 2.** *Reelle Zahlen, Binomischer Lehrsatz*

**(a)** Zeigen Sie mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n \in \mathbb{N}.$$

**(b)** Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, welche die Ungleichung $|2 - |x+1|| \leqq 1$ erfüllen.

## 2a) binom. Lehrsatz:

**1.3.5. Binomischer Lehrsatz.**

Für alle Zahlen $a, b$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots \cdots + \binom{n}{n-1} a^{n-(n-1)}b^{n-1} + b^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j .$$

Dabei *setzt* man für jede Zahl $r$ (insbesondere für $r \leqq 0$) fest: $r^0 = 1$.

$$(1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n \overset{1.3.5}{=} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \underbrace{1^{n-j}}_{=1} (\sqrt{3})^j + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-\sqrt{3})^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left[ (\sqrt{3})^j + (-\sqrt{3})^j \right]$$

- Wir nutzen: $(\sqrt{3})^j + (-\sqrt{3})^j = \begin{cases} 2\sqrt{3} & , j \text{ ist gerade} \\ 0 & , j \text{ ist ungerade} \end{cases}$ (*)

**Fall 1**: $n$ ist gerade, also $n = 2 \cdot \tilde{n}$ mit $\tilde{n} \in \mathbb{N}$

Dann $\sum_{j=0}^{2\tilde{n}} \binom{n}{j} \left[ (\sqrt{3})^j + (-\sqrt{3})^j \right] = \sum_{j=0}^{\tilde{n}} \binom{n}{2j} \left[ (\sqrt{3})^{2j} + (-\sqrt{3})^{2j} \right]$

(*): ungerade Fälle weg.

$$= \sum_{j=0}^{\tilde{n}} \binom{n}{2j} \left[ 3^j + 3^j \right] = 2 \cdot \sum_{j=0}^{\tilde{n}} \binom{n}{2j} 3^j \in \mathbb{N} \checkmark$$

**Fall 2**: $n = 2\tilde{n}+1$, $\tilde{n} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ($\Leftrightarrow$ $n$ ist ungerade)

Dann $\sum_{j=0}^{2\tilde{n}+1} \binom{n}{j} \left[ (\sqrt{3})^j + (-\sqrt{3})^j \right] = \sum_{j=0}^{2\tilde{n}} \binom{n}{j} \left[ (\sqrt{3})^j + (-\sqrt{3})^j \right]$

$$+ \binom{n}{2\tilde{n}+1} \underbrace{\left[ (\sqrt{3})^{2\tilde{n}+1} (-\sqrt{3})^{2\tilde{n}+1} \right]}_{=0} \checkmark$$

$\in \mathbb{N}$ laut Fall 1

## 2b) Ungleichung (Alternative Notation)

$$|2-|x+1|| \leq 1 \overset{\text{Def. Betrag}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} |2-(x+1)| \leq 1, & x+1 \geq 0 \quad 1 \\ |2+(x+1)| \leq 1, & x+1 < 0 \quad 2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2-(x+1) \leq 1, & (x+1 \geq 0) \wedge (2-(x+1)) \geq 0 \quad 1.1 \\ -2+(x+1) \leq 1, & (x+1 \geq 0) \wedge (2-(x+1)) < 0 \quad 1.2 \\ 2+(x+1) \leq 1, & (x+1 < 0) \wedge (2+(x+1)) \geq 0 \quad 2.1 \\ -2-(x+1) \leq 1, & (x+1 < 0) \wedge (2+(x+1)) < 0 \quad 2.2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x, & (x \geq -1) \wedge (1 \geq x) \\ x \leq 2, & (x \geq -1) \wedge (1 < x) \\ x \leq -2, & (x < -1) \wedge (x \geq -3) \\ x \geq -4, & (x < -1) \wedge (x < -3) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \in [0,1] \\ x \in (1,2] \\ x \in [-3,-2] \\ x \in [-4,-3) \end{cases} \Longleftrightarrow x \in [-4,-2] \cup [0,2]$$

V3

**Aufgabe V 3.** *Mengen, Ungleichungen*



Skizzieren Sie die folgenden Mengen

(a) $M_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+2)^2 + (y-1)^2 \leqq 4 \land (y \leqq 0 \lor y > 1)\}$

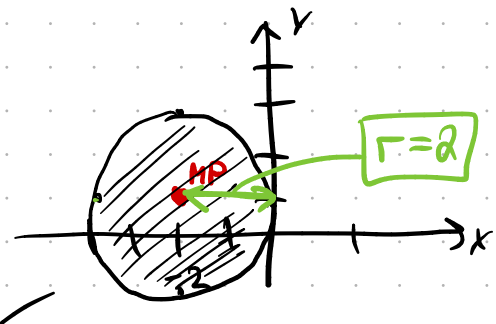
(b) $M_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > |y|\}$

(c) $M_3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2x + y^2 \leqq 0\}$

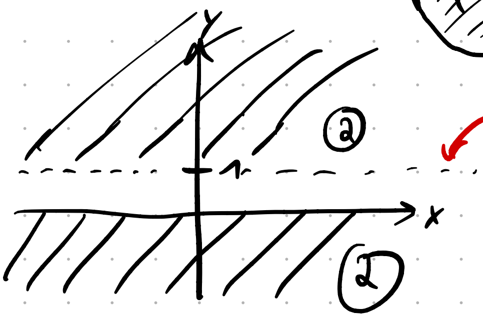
a) Zuerst: $(x+2)^2 + (y-1)^2 \leq 4 \qquad |\sqrt{\cdot}$

$\Rightarrow \sqrt{(x-x_m)^2 + (y-y_m)^2} \leq r \qquad$ (Kreisgleichung)

mit $\underbrace{\begin{bmatrix} x_m \\ y_m \end{bmatrix}}_{MP} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \; r = 2$

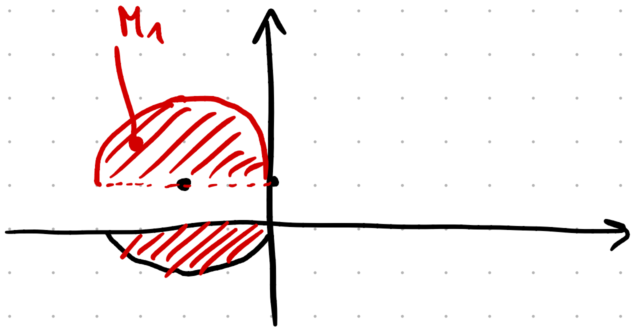



Dann: $(y \leq 0) \lor (y > 1)$
$\quad ① \qquad\qquad ②$



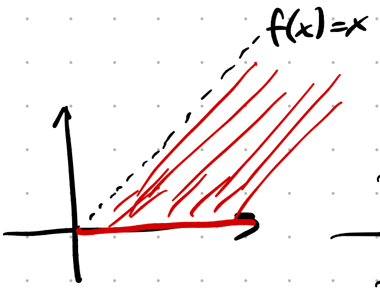

y=1 nicht drin

Gesamt:

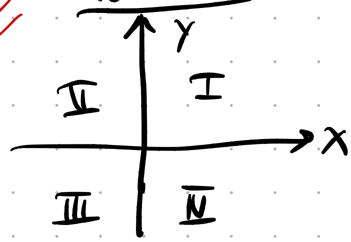



b) $|x| > |y|$

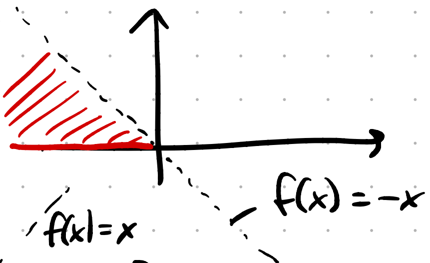
Ⅰ $x, y > 0 \Rightarrow |x| = x, \; |y| = y \qquad \Rightarrow x > y$




Quadranten:

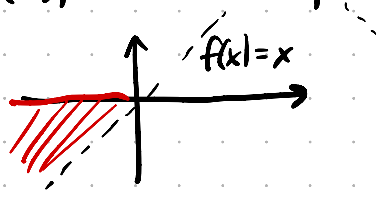



Ⅱ $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow -x > y$

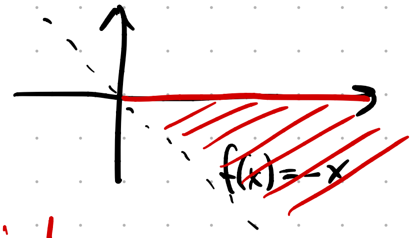



Ⅲ $x, y < 0 \Rightarrow -x > -y \qquad | \cdot (-1)$

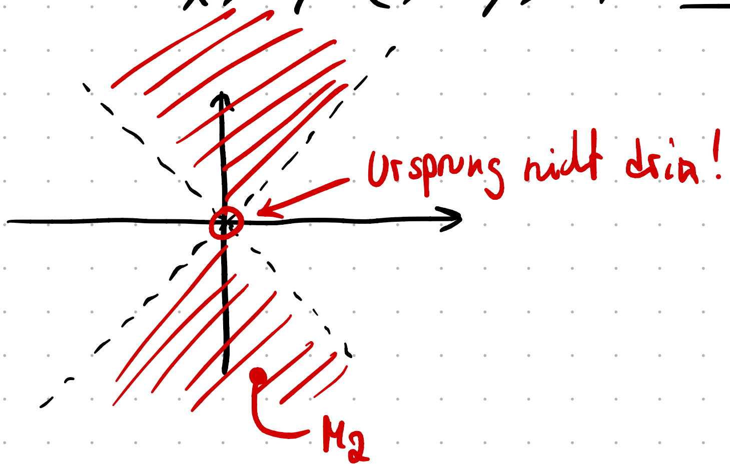
$x < y$



IV $y<0, x>0 \Rightarrow x > -y \Leftrightarrow y > -x$




**Gesamt:**




c) $x^2 + 2xy + y^2 \leq 0$

**Trick:** $\Leftrightarrow \underbrace{(x+y)^2}_{\geq 0} \leq 0 \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow y=-x$ Gerade

$\geq 0$. kann nur Null werden wenn Argument Null