TODO: A : PBZ
• Integration PBZ
• Uneigentliche Integrale
• Spektralsatz
• Symm. Mat. • Quad F.

LA • Normale Mat.
• Unitäre Abb.

Mathe 1 Globalübung 15 30.01.2020

• Prof. K.: Person mit Analysis Frage bitte per Mail melden
• BP Richtigkeit überprüfen in Moodle

A Partialbruchzerlegung (ab ≈1700, Leibniz, Joh. I Bernoulli)

→ hilfreiches Werkzeug, insbesondere für Integration von rationalen Funktionen $f(x) = p(x)/q(x)$ mit p, q Polynome.

→ Idee: Darstellung einer rationalen Funktion f als Summe von:

1) Polynomfunktionen (PDiv mit evtl. Restglied) 2) Brüche der Form $\frac{a}{(x-x_i)^j}$ (PBZ)

wobei x_i die PS von f.

→ PBZ: Sei $R(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ mit $\operatorname{grad}(Z) < \operatorname{grad}(N)$ wobei die n versch. NS von $N(x)$ x_i mit Häufigkeit r_i sind.

• $N(x) = (x-x_1)^{r_1} \cdot (\ldots) \cdot (x-x_n)^{r_n}$ möglich. ($x_i \in \mathbb{C}$ möglich)

x^2+1 $\cancel{\downarrow}$

• Ansatz: $$R(x) \overset{!}{=} \underbrace{\frac{a_{11}}{x-x_1}}_{x_1 \text{ ist } 1\text{-fache reelle NS}} + \underbrace{\frac{a_{21}}{(x-x_2)} + \ldots + \frac{a_{2n}}{(x-x_2)^n}}_{x_2 \text{ ist } n\text{-fache reelle NS von } N(x)} + \underbrace{\frac{b_{31}x + c_{31}}{x^2+p_3x+q_3} + \ldots + \frac{b_{3m}x+c_{3m}}{(x^2+p_3x+q_3)^m}}_{x_3 \text{ ist } m\text{-fache komplexe Polstelle von } R(x)\ [\Leftrightarrow \text{NS von } N(x)]} + \ldots$$

mit $x^2 + p_i x + q_i \overset{!}{=} (x-z_i) \cdot (x-\bar{z}_i)$ für $z_i \in \mathbb{C}$.

• Dann $R(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} \overset{!}{=} \text{Ansatz}(x) \quad | \cdot N(x)$

$\Leftrightarrow Z(x) \overset{!}{=} \text{Ansatz}(x) \cdot N(x)$ ⇝ Lsg. mit Koeff.vergleich.

Beispiel: Als Restglied einer PDiv erhält man $f(x) = \frac{1}{\underbrace{x^3-x^2+x-1}_{N(x)}}$.

→ Rate NS: $x_1 = 1$.

→ PDiv um Lin.Fak. $(x-x_1)$ auszuklammern: $N(x) = (x-x_1)\underbrace{(x^2+1)}_{N_2(x)}$

→ NS von $N_2(x)$ lauten: $\{x_2 = i,\ x_3 = -i\} \subset \mathbb{C}$

→ Daher Ansatz: $f(x) \overset{!}{=} \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{\underbrace{x^2+1}_{N_2(x)}} \quad | \cdot N(x) = (x-1)(x^2+1)$

$$\Leftrightarrow Z(x) = \quad 1 \overset{!}{=} \frac{A\cdot(x-1)(x^2+1)}{(x-1)} + \frac{(Bx+C)(x-1)(x^2+1)}{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow 0x^2 + 0x + 1 = Ax^2 + 0x + A + Bx^2 + (-B+C)x + (-C)$$

→ Koeffizientenvergleich:

$$\left.\begin{aligned} \text{I)}\ & 0 = A + B \\ \text{II)}\ & 0 = -B + C \\ \text{III)}\ & 1 = A - C \end{aligned}\right\} \overset{\text{Gauß}}{\leadsto} \quad A = \tfrac{1}{2},\ B = -\tfrac{1}{2},\ C = -\tfrac{1}{2}$$

→ $\{A, B, C\}$ einsetzen:

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{x+1}{2(x^2+1)} \leadsto \text{einfacher für Integration}$$

Beispiel Integration: (Klassiker mit arctan(x))

Aufgabe 50. **(Partialbruchzerlegung)**
Berechnen Sie folgendes Integral

$$\int_0^1 \frac{Z(x)}{N(x)}\,dx := \int_0^1 \frac{1}{x^3+1}\,dx$$

mittels Partialbruchzerlegung.

- NS $x_1 = -1$ von $N(x)$ sieht man!
- Polynomdivision von $N(x)$:

$$\begin{aligned} & x^3 + 1 : (x+1) = x^2 - x + 1 \\ & -(x^3 + x^2) \\ & \quad 0 - x^2 \\ & \quad -(-x^2 - x) \\ & \qquad x \\ & \qquad -(x+1) \\ & \qquad 0 \end{aligned}$$

- Daher $N(x) = (x+1)\overbrace{(x^2 - x + 1)}^{\text{keine reellen NS}}$
- Ansatz (...): $1 \overset{!}{=} A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x+1)$ (*)

$$\leadsto \begin{cases} A + B = 0 \\ -A + B + C = 0 \\ A + C = 1 \end{cases} \quad \text{lösen oder mit Gauß oder Trick...}$$

- Trick: Setze eine NS in (*) ein, z.B. $x_1 = -1$:

$$1 \overset{!}{=} A\underbrace{\left((-1)^2 - (-1) + 1\right)}_{3} + (Bx + C)\underbrace{(-1+1)}_{=0\,!}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \tfrac{1}{3}}$$

Mit $\begin{cases} A + B = 0 \\ A + C = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = -\tfrac{1}{3}},\ \boxed{C = \tfrac{2}{3}}$

- Daher:

$$f(x) = \tfrac{1}{3}\left[\underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\text{Integral trivial}} + \frac{2-x}{x^2 - x + 1}\right]$$

Integral schwer weil Zähler ungleich Ableitung vom Nenner (Produktregel, wait for it)

③

$$f(x) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\,\frac{2x-4}{x^2-x+1}\right]$$

4 stört, wir wollen 1

weil $\frac{d}{dx}(x^2-x+1) = 2x-1$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x+1} - \underbrace{\frac{1}{2}\,\frac{2x-1}{x^2-x+1}}_{\text{easy weil } N'=Z} + \frac{1}{2}\,\underbrace{\frac{3}{x^2-x+1}}_{\text{schwer}}\right]$$

$\hookrightarrow$ aber wir wissen auswendig:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\ln(x^2-x+1)' = \frac{1}{x^2-x+1} \cdot \underbrace{(x^2-x+1)'}_{2x-1}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\,\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\,\frac{3}{\underbrace{x^2-x+\frac{1}{4}}_{(x-1/2)^2} + 3/4}\right]$$

Integration

Letztes Problem: Hier muss 1

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} - 1/6\,\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{6}\cdot\frac{4}{3}\,\frac{1}{\underbrace{\frac{4}{3}(x-1/2)^2}_{\left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}x - \frac{\cancel{\sqrt{4}}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\right)^2} + 1}$$

Schlussendlich: $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx - 1/6 \int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx$

Sub $z = \frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{dz}{dx} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,dz$

$$= \frac{1}{3}\Big[\ln(x+1)\Big]_0^1 - \frac{1}{6}\Big[\ln(x^2-x+1)\Big]_0^1 + \frac{2}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{z^2+1}\,dz$$

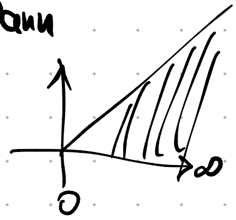
$$= \frac{1}{3}\Big[\ln(2) - \underbrace{\ln(1)}_{=0}\Big] - \frac{1}{6}\Big[\underbrace{\ln(1)}_{=0} - \underbrace{\ln(1)}_{=0}\Big] + \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[\underbrace{\underbrace{\operatorname{atan}\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}_{\pi/6} - \underbrace{\operatorname{atan}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}_{-\pi/6}}_{\text{Tabelle oder auswendig!}}\Big]$$

$$= \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2\pi}{6}$$

Sonstiges: Integration von Potenzreihen gliederweise
→ Entstehung der Fehlerfunktion $\mathrm{Erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$
→ Siehe VL

Uneigentliche Integrale: Sei $f : [a,\infty] \to \mathbb{R}$ int'bar $\forall\, [a,b]$. Dann

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{(ganz intuitiv)}$$



→ **Beispiel**:

Aufgabe 10. Begründen Sie die Existenz oder Nichtexistenz des folgenden uneigentlichen Integrals

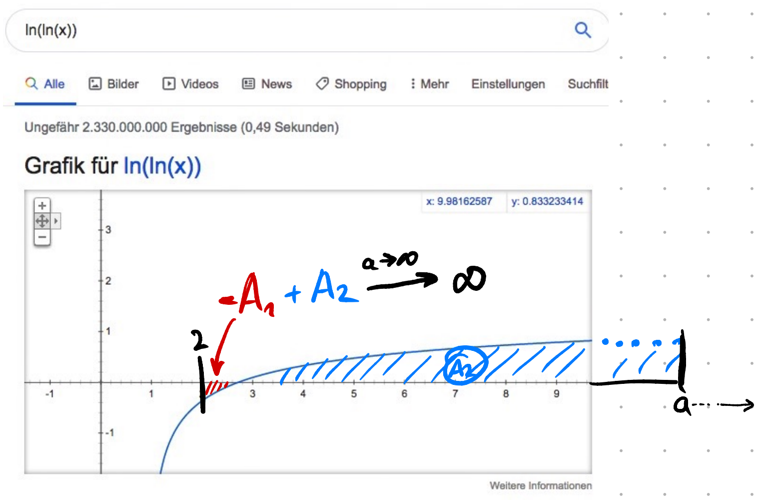
$$\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln x}.$$

Wir sehen $\displaystyle \frac{1}{x\ln(x)} = \frac{1/x}{\ln(x)} = \frac{(\ln(x))'}{\ln(x)} = \left(\ln(\ln(x))\right)'$

Also $\displaystyle \int_2^\infty \frac{dx}{x\ln(x)} = \int_2^\infty \left(\ln(\ln(x))\right)' dx = \lim_{a\to\infty} \left[\ln(\ln(x))\right]_2^a$

Weil $\displaystyle \lim_{a\to\infty} \ln(a) = \infty \Rightarrow \lim_{a\to\infty} \ln(\ln(a)) = \infty$

$\Rightarrow$ Uneigentliches Integral existiert nicht



Beispiel 2: PI mit $f = \ln(x)$, $g' = x^{-2}$, $f' = 1/x$, $g = -\frac{1}{x}$

Aufgabe 13. (Uneigentliches Integral)
Bestimmen Sie das folgende uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{\log(x)}{x^2}\,dx.$$

$$\Rightarrow \int_1^\infty \underbrace{\frac{\ln(x)}{x^2}}_{f\cdot g'}\,dx = \Big[\underbrace{-\frac{\ln(x)}{x}}_{f\cdot g}\Big]_1^\infty - \int_1^\infty \underbrace{-\frac{1}{x^2}}_{f'\cdot g}\,dx$$

$$= \underbrace{\lim_{a\to\infty} -\frac{\ln(a)}{a}}_{=0 \text{ (Exp. vs. Lin.)}} - \underbrace{\frac{\ln(1)}{1}}_{=0} + \lim_{a\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^a = -\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a} + 1 = 1$$

Normale Matrizen: falls $A^H A = A^H A$ $\quad \begin{pmatrix}1 & i\\ +i & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{pmatrix}$

mit $A^H := (\bar{A})^T = \overline{(A^T)}$ (Ex. 14)

$A = A^H$

→ Alle herm. Matrizen wie z.B. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 3 \end{bmatrix}$ sind normal denn $H^T = H$ ($H \in \mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow H^T H = H H^T$

→ Reelle Matrix B normal falls: $B^T B = B\, B^T$
(Kommutation mit Adjungierter)

$\phi(x) = x$

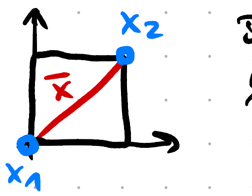
Unitäre Abbildungen: $\phi: V \to V$ unitär falls: $\langle \phi(x), \phi(y) \rangle = \langle x, y \rangle \; \forall x, y \in V$ ✓

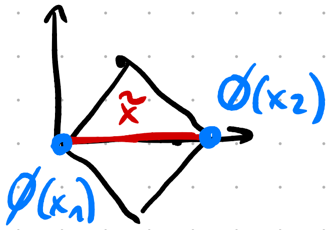
→ Falls V ein $\mathbb{R}$-VR, dann sagen wir orthogonal.

→ Erhaltung der euklidischen Länge:

$\| \phi(x) \|^2 = \langle \phi(x), \phi(x) \rangle \overset{\text{Def.}}{=} \langle x, x \rangle = \|x\|^2 \quad \forall x \in V$

→ Matrix Betrachtung: $A A^H \overset{!}{=} I$





$\| \tilde{x} \|^2 = \langle \phi(x_2) - \phi(x_1), \phi(x_2) - \phi(x_1) \rangle$
$= \langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \rangle$
$= \| \bar{x} \|^2$

→ **Drehungsmatrix**: $A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$\Rightarrow A_\alpha^T = \begin{bmatrix} \cos & \sin \\ -\sin & \cos \end{bmatrix}$ $\qquad$ Ortho: $A^T = A^{-1} \mid \cdot A$
$A^T A = I$

Also $A_\alpha^T A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos & \sin \\ -\sin & \cos \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos & -\sin \\ \sin & \cos \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 + \sin^2 & -\cos\cdot\sin + \sin\cdot\cos \\ -\sin\cdot\cos + \cos\cdot\sin & \sin^2 + \cos^2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \Rightarrow A_\alpha$ orthogonal. $\quad 1 = \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)$

Spektralsatz: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist genau dann unitär diag'bar falls:

$A^H A = A A^H \Leftrightarrow A$ normal gilt.

→ **Spezialfall Orthogonale Matrizen**:

B orthogonal $\Rightarrow B$ normal $\Rightarrow B$ diag'bar.

$A = S^{-1} D S$
S unitär
$S \in \mathbb{R}$ ist ONB

Symmetrische Matrizen: $A^T = A$ sind diag'bar.

→ Abbildungsframework: $\phi : V \to V$ heißt selbstadjungiert falls: $\phi^* = \phi$.

Quadratische Form: (für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sym.) $x^T A x$

→ **Anwendung:** Zu gegebener Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist ein Eigenvektor v_1 bekannt. Finde den zugeh. Eigenwert.

$$A v_1 = \lambda_1 v_1 \qquad | \cdot v_1^T \text{ von links}$$

$$v_1^T A v_1 = \lambda_1 \; v_1^T v_1$$

=> **Rayleigh-Coefficient:** $\rho_A(x) = \dfrac{x^T A x}{x^T x}$

$$\rho_A(v_1) = \lambda_1 \qquad \text{(s.o.)}$$

- $\lambda_{min}(A) \leq \rho_A(x) \leq \lambda_{max}(A)$