$\boxed{O}$: ILIAS

$\boxed{E}$: Kompl. Zahlen, Polar-
Koords, Vektorraum

HM1 - Vü 2
WS 22

16.11.2022
Lambert Theisen

1

$\boxed{O}$: → ILIAS Räume sollten sichtbar sein

↳ Videos
↳ PDF-Mitschriften

⇒ Sonst noch Fragen?

E4

Aufgabe V 4. *Polarkoordinaten*

(a) Gegeben seien die komplexen Zahlen $w = \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)$ und $z = \sqrt{3} - \mathrm{i}$. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke und geben Sie die Ergebnisse in Polarkoordinaten, aber auch in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an:

$$\frac{w^5}{z^4}, \quad w^5 - z^4.$$

(b) Gegeben sei das Polynom $p(X) = X^5 - 3X^4 + 4X - 12$.

(i) Faktorisieren Sie das Polynom in komplexe Linearfaktoren.

(ii) Zerlegen Sie $p(X)$ in *reelle* Faktoren von minimalem Grad.

a) $w = \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)$, $z = \sqrt{3} - i$ gegeben

$\hat{=}\, a + ib$

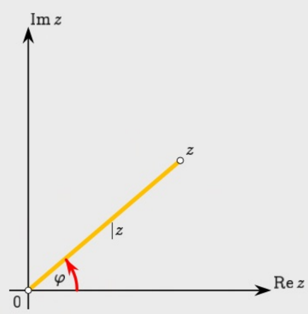
$a = \sqrt{3},\ b = -1$

1.8.1. Definition.

Für jede komplexe Zahl $z \neq 0$ gibt es ein $\varphi \in \mathbb{R}$ so, dass gilt:

$$\begin{aligned} z &= |z|\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \\ &= |z|\,\cos\varphi + \mathrm{i}\,|z|\,\sin\varphi \end{aligned}$$

Wegen der Periodizität der Winkelfunktionen ist φ nur bis auf Addition eines ganzzahligen Vielfachen von 2π festgelegt (wir verwenden das Bogenmaß zur Angabe des Winkels).



Um Eindeutigkeit zu erreichen, verlangt man $0 \leqq \varphi < 2\pi$.
Ist dies erfüllt, nennt man $\arg z := \varphi$ das Argument von z.

1.7.1. Konstruktion.

Auf der Menge aller geordneten Paare reeller Zahlen setzen wir die folgenden Operationen fest:

$$\begin{aligned} (a,b) + (x,y) &:= (a+x, b+y) \\ (a,b)\cdot(x,y) &:= (ax - by, ay + bx)\,. \end{aligned}$$

Wir setzen außerdem $\mathrm{i} := (0,1)$ und identifizieren 1 mit $(1,0)$.
Dies führt zur Schreibweise $a + b\mathrm{i}$ für (a,b).
Den so gewonnenen Rechenbereich nennt man den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.
Für $w := a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$) nennt man $\operatorname{Re} w := a$ den Realteil und $\operatorname{Im} w := b$ den Imaginärteil von w.

→ Konvertierung "$a+ib$" → $|z|\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

• Betrag: $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

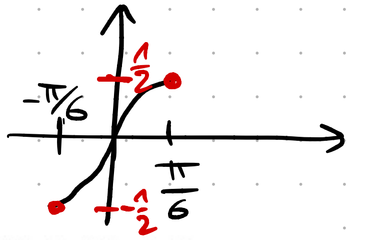
$\left[\overset{1.7.8}{=} \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} \right]$

• Argument (Phase): $z = \sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)$

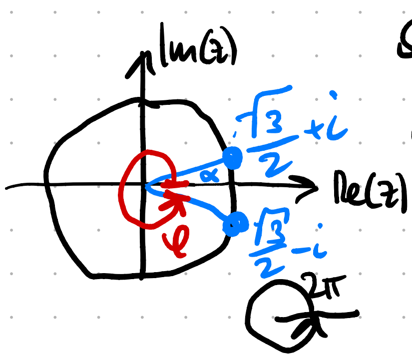
$= |z|\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$\overset{!}{=} 2\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Sinus ist ungerade:



→ Skizze



• Bei $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ist:

$\sin(\alpha) = \frac{1}{2} \mathrel{\hat{=}} \mathrm{Re}$

$\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \mathrel{\hat{=}} \mathrm{Im}$

$\Rightarrow \varphi = 2\pi - \alpha$

$= \frac{2\pi}{1} - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$

Werte der Winkelfunktionen

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Also: $z = 2\left(\cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{11}{6}\pi\right)\right)$

Berechne z^4, w^5:

Beträge multip. Argumente addieren

$$z_1\cdot z_2 = (|z_1|\cdot|z_2|)\cdot\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$$

$$z^4 \overset{1.8.2.3}{=} \overbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2}^{2^4}\cdot\left(\cos\left(4\cdot\frac{11}{6}\pi\right)+i\sin\left(4\cdot\frac{11}{6}\pi\right)\right)$$

$$\boxed{\frac{4}{1}\cdot\frac{11}{6}\pi = \frac{22}{3}\pi = 6\pi+\frac{4}{3}\pi}$$

$$= 16\cdot\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

$$w^5 = 1^5\left[\cos\left(5\cdot\frac{5}{3}\pi\right)+i\sin\left(5\cdot\frac{5}{3}\pi\right)\right]$$

$$\boxed{5\cdot\frac{5}{3}\pi = \frac{25}{3}\pi = 8\pi+\frac{1}{3}\pi}$$

$$= \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)$$

Berechne w^5/z^4:

2. $$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{|z|}(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi)$$
$$= \frac{1}{|z|}(\cos(-\varphi) + \mathrm{i}\sin(-\varphi))$$

$$\Rightarrow \frac{w^5}{z^4} = w^5\cdot(z^4)^{-1} \overset{1.8.2.2.}{=} w^5\cdot\left[\frac{1}{16}\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right)\right]$$

$$\overset{1.8.2.3}{=} \frac{1}{16}\left[\cos\left(\pi/3-4\pi/3\right)+i\sin\left(\pi/3-4\pi/3\right)\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[\underbrace{\cos(-\pi)}_{-1}+i\underbrace{\sin(-\pi)}_{0}\right] \quad \text{(Polarkoords.)}$$

$$= -\frac{1}{16} + 0\cdot i$$

Berechne $w^5 - z^4$: ⇝ Hier ist $a+bi$ praktischer

- $z^4 = 16\left[\cos(4\pi/3)+i\sin(4\pi/3)\right] \overset{\text{Tabelle}}{=} 16\left[\left(-\frac{1}{2}\right)+i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$
  $= -16\left[\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$
- $w^5 = \cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3) \overset{\text{Tab.}}{=} \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\Rightarrow w^5 - z^4 = \left(\frac{1}{2}-\left(-\frac{16}{2}\right)\right)+i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{-16\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \frac{17}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{17}{2}i = 17\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\overset{\text{Tab.}}{=} 17\left(\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3)\right)$$

b): $p(x) = x^5 - 3x^4 + 4x \underbrace{-12}_{=:a_0} \overset{!}{=} (x-z_1)\cdot(x-z_2)\cdot(x-z_3)\cdot\ldots\cdot(x-z_5)$

Linearfaktoren

$\boxed{\text{vgl. } x^2 - 2 = (x-\sqrt{2})\cdot(x+\sqrt{2})}$

(i) Komplexe Linearfaktoren:

⤳ Problem: Grad 5 hat keine "pq"-Formel o.ä.

⇒ Erraten einer ganzzahligen Nullstelle (Trick 1.8.10)

1.8.10. Erraten ganzzahliger Nullstellen.

Ist $p(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathrm{Pol}\,\mathbb{Z}$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten (also $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{Z}$), so ist jede ganzzahlige Nullstelle ein Teiler von a_0.

Für jede Nullstelle x_0 von $p(X)$ gilt

$$0 = p(x_0) = \overbrace{a_n\, x_0^n + a_{n-1}\, x_0^{n-1} + \cdots + a_1\, x_0}^{=:\, z} + a_0$$

Ist x_0 ganz, so ist auch z ganz, und durch x_0 teilbar.
Also ist auch $a_0 = -z$ durch x_0 teilbar.

Im Fall $a_0 \neq 0$ besitzt a_0 nur endlich viele Teiler, man kann also algorithmisch alle ganzzahligen Nullstellen von $p(X)$ bestimmen.

Erraten von NS: $a_0 = 12$ bei uns

⤳ Teste daher die Teiler von -12: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6$

(I) $p(1) = 1^5 - 3\cdot 1^4 + 4\cdot 1 - 12 = 1 - 3 + 4 - 12 = -10 \neq 0$

(II) $p(2) = 2^5 - 3\cdot 2^4 + 4\cdot 2 - 12 = 32 - 48 + 8 - 12 = -20 \neq 0$

(III) $p(3) = \underbrace{3^5 - 3\cdot 3^4}_{=0} + \underbrace{4\cdot 3 - 12}_{=0} = 0$ ✓

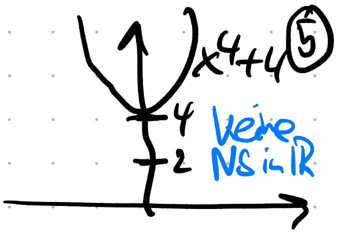
⇒ $z = 3$ ist NS ⇒ $(x-3)$ ist Linearfaktor

Polynomdivision: ⇒ $x^5 - 3\cdot x^4 + 4\cdot x - 12 : (x-3) = x^4 + 0\cdot x^3 + 4$

$$\begin{array}{l}
x^5 - 3\cdot x^4 \quad \leftarrow x^4\cdot(x-3) \\
\hline
0 + 0 \\
0 \quad \leftarrow 0\cdot x^3(x-3) \\
\hline
0 + 4x - 12 \\
0 + 4x - 12 \\
\hline
0
\end{array}$$

⇒ $p(x) = (x-3)(x^4+4)$

NS von (x^4+4): $\leadsto$ Wir erwarten komplexe NS



$\Rightarrow$ Löse Gleichung: $w^n = z$ mit $z=-4, n=4$

$\Rightarrow$ Verwende komplexes Wurzelziehen nach 1.8.4

1.8.4. Wurzelziehen bei komplexen Zahlen.

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $z = r(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Gesucht ist eine n-te Wurzel aus z, also $w = s(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \in \mathbb{C}$ mit $w^n = z$.
Ansatz: $w^n = z \iff s^n\left(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)\right) = r(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta)$.
Durch Vergleich der Beträge ergibt sich zuerst $s = \sqrt[n]{r}$,
dann $n\varphi = \beta + 2\pi\ell$ mit $\ell \in \mathbb{Z}$ [wg. der Periodizität von cos und sin],
also

$$\varphi \in \left\{ \frac{\beta}{n} + \ell\frac{2\pi}{n} \;\middle|\; \ell \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Wegen der Periodizität der Winkelfunktionen kann man sich auf Werte von ℓ im Intervall $[0, n-1]$ beschränken.
[für $\ell = 0, \pm n, \pm 2n, \ldots$ erhält man stets dieselbe Wurzel,
weil sich φ nur um Vielfache von 2π ändert.]
Man erhält also n verschiedene n-te Wurzeln von z, nämlich

$$w_\ell := \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\tfrac{\beta}{n} + \ell\tfrac{2\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{\beta}{n} + \ell\tfrac{2\pi}{n}\right)\right) \quad \text{für } \ell \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

$\rightarrow$ Schreibe z in PK: $z = -4 = 4\left(\cos(+\pi) + i\sin(+\pi)\right)$

$n=4$

Damit erhalten wir: $w_\ell = \sqrt[4]{4}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \ell\cdot\frac{2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \ell\cdot\frac{2\pi}{4}\right)\right)$, $\ell \in \{0,1,2,3\}$

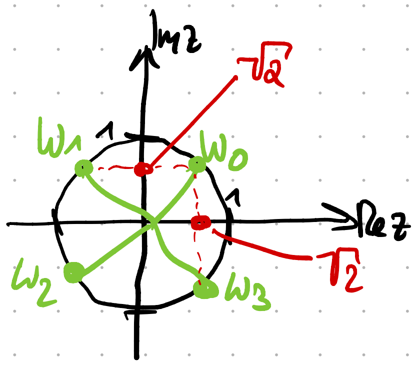
Tabelle

$\Rightarrow w_0 = \sqrt{2}\cdot\left(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\right) = 1+i$

$w_1 = \sqrt{2}\cdot\left(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\right) = -1+i$

$w_2 = \sqrt{2}\cdot\left(\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)\right) = -1-i$

$w_3 = \sqrt{2}\cdot\left(\cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4)\right) = 1-i$



Zerlegung von $p(x)$ in $\mathbb{C}$:

$$\Rightarrow p(x) = (x-3)\cdot(x-\overbrace{(1+i)}^{w_0})\cdot(x-\overbrace{(-1+i)}^{w_1})\cdot(x-\overbrace{(-1-i)}^{w_2})\cdot(x-\overbrace{(1-i)}^{w_3})$$

Paare kompl. konjugierter NS

(ii) Zerlegung von $p(x)$ in reelle Faktoren minimalen Grades

$\overline{\alpha + i\beta} = \alpha - i\beta$

→ Komplexe NS treten als Paare kompl. konj. Zahlen auf

Daher: $(x-a)\cdot(x-\bar{a}) = [(x-\mathrm{Re}(a)) - i\,\mathrm{Im}(a)]\cdot[(x-\mathrm{Re}(\bar{a}))\underbrace{-i\,\mathrm{Im}(\bar{a})}_{=+i\,\mathrm{Im}(a)}]$

$$\overset{\text{3rd bin. Formel}}{=} [x-\mathrm{Re}(a)]^2 - i^2[\mathrm{Im}(a)]^2$$

$$= [x-\mathrm{Re}(a)]^2 + [\mathrm{Im}(a)]^2 \in \mathbb{R}\,!$$

Bei uns daher:

$$p(x) = (x-3)\cdot\overbrace{((x-1)^2+1^2)}^{(x-w_0)\cdot(x-w_3)}\cdot((x+1)^2+1^2)$$

$$= \underbrace{(x-3)}_{\text{Grad } 1}\cdot\underbrace{(x^2-2x+2)}_{\text{Grad } 2}\cdot\underbrace{(x^2+2x+2)}_{\text{Grad } 2}$$

ist die gesuchte Zerlegung in $\mathbb{R}$ mit Faktoren minimalen Grades.

$\boxed{\text{Es}}$ (8)

Aufgabe V 5. *Untervektorraum*

Skizzieren Sie die Menge

$$\mathcal{M} := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - \mathrm{i}| = \left| z + \frac{\sqrt{3} + \mathrm{i}}{2} \right| \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ einen $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{C}$ bildet.

Menge vereinfachen: Sodass $z \in \mathcal{M} \subseteq \mathbb{C}$ als $z = x + iy$ darstellbar $(x, y \in \mathbb{R})$

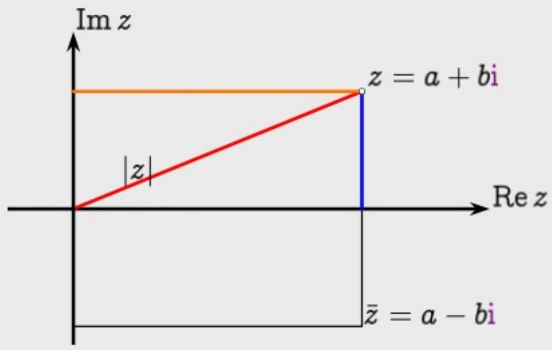
$$|z-i| = \left|z + \frac{\sqrt{3}+i}{2}\right| \iff |x+iy-i| = \left|x+iy+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right|$$

$$\overset{1.1\,\geq 0}{\iff} |x+(y-1)i|^2 = \left|\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(y+\frac{1}{2}\right)i\right|^2$$

1.7.8. Komplexe Konjugation, Betrag.

Für $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

1. $\bar{z} := \overline{(a + b\mathrm{i})} := a - b\mathrm{i}$
2. $|z| := \sqrt{z\,\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$



$$\overset{1.7.8}{\iff} x^2 + (y-1)^2 = \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\iff x^2 + y^2 - 2y + 1 = \underbrace{x^2}_{0} + \sqrt{3}x + \frac{3}{4} + \underbrace{y^2}_{0} + \underbrace{y}_{3y} + \underbrace{\frac{1}{4}}_{0}$$

$$\iff 0 = \sqrt{3}x + 3y$$

$$\iff \underbrace{y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x = -\frac{1}{\sqrt{3}}x}_{\text{Geradengleichung } (*)}$$

Geometrische Interpretation: Jedes $z = x + yi \in \mathcal{M}$ hat wegen

$|z-i| = \left|z + \frac{\sqrt{3}+i}{2}\right| = \left|z - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right|$ von i und $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

und liegt nach $(*)$ auf der Geraden $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$.

Einzeichnen mit PK / Wertetabelle:

Tab

Werte der Winkelfunktionen

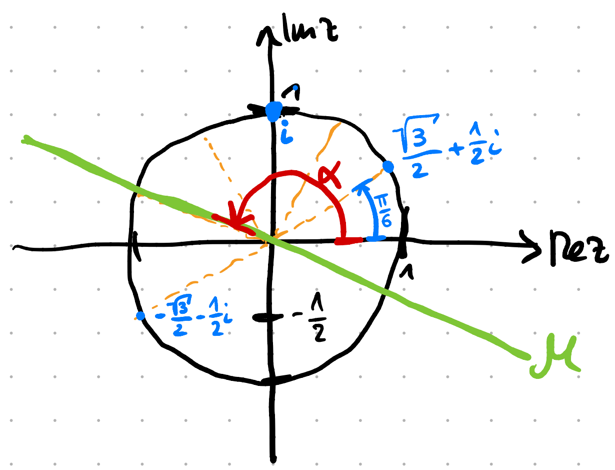
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

- $i = 0 + i \overset{\text{Tab}}{=} 1(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2))$
- $\left|-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right| \overset{1.7.8}{=} \left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{0.5} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$
- $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \overset{\text{Tab}}{=} \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos(\pi + \pi/6) + i\sin(\pi + \pi/6)$$
$$= \cos(7\pi/6) + i\sin(7\pi/6)$$

⇝ Hilfswinkel zum Skizzieren:

$$\alpha = \frac{\overbrace{\pi/2}^{\varphi(i)} + \overbrace{7\pi/6}^{\varphi(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)}}{\underbrace{2}_{\text{MW beider Winkel}}} = \frac{5\pi}{6}$$



Ist M ein ℝ Untervektorraum von ℂ?

⇝ Wir verifizieren die Definition 2.3.4

Im eben geführten Beweis haben wir nicht die Vektorraumaxiome verifiziert [weil die im umgebenden Vektorraum $\mathbb{R}^2$ schon gelten], sondern uns nur vergewissert, dass die Operationen (Addition, Multiplikation mit Skalaren) nicht aus $\mathcal{L}$ herausführen. Dies ist ein allgemeines Prinzip:

2.3.4. Definition.

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt Untervektorraum (kurz UVR), wenn gilt:
- Mit $u, v \in U$ liegt auch $u + v$ in U.
- Mit $u \in U$ liegt für alle $s \in \mathbb{K}$ auch $s \cdot u$ in U.
- $0 \in U$.

2.3.5. Beispiel.

Der Lösungsraum des in 2.3.3 betrachteten homogenen linearen Gleichungssystems ist ein UVR von $\mathbb{R}^2$.

Teilmenge: $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{C}$ nach Definition ✓

Addition: Sei $u := x_1 + y_1 \cdot i$, $v = x_2 + y_2 i \in \mathcal{M}$

Geradengl. (*) von oben

$$\overset{}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} y_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} x_1 \\ y_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow (y_1 + y_2) = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + x_2) \Rightarrow \text{Geradengl. gilt}$$

$\Rightarrow u + v \in \mathcal{M}$ ✓

Skalare Multiplikation: Sei $w := x + yi \in \mathcal{M}$ und $s \in \mathbb{R}$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} y = -\frac{1}{\sqrt{3}} x \Rightarrow sy = -\frac{1}{\sqrt{3}}(sx)$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} sw = (sx) + (sy)i \in \mathcal{M} \quad ✓$$

Nullelement muss drin: $0 = 0 + 0 \cdot i$ erfüllt $0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0 \Rightarrow 0 \in \mathcal{M}$

$\Rightarrow \mathcal{M}$ ist $\mathbb{R}$-UVR von $\mathbb{C}$.