MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN I
– GLOBALÜBUNG 5 –
07.11.19

0.5mm

TODO — GÜ Upload
- HA vorb.
- Feedback
- LA
- A

LA **Linearkombination**: $y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \in V$ $\quad \alpha \in \mathbb{K}$

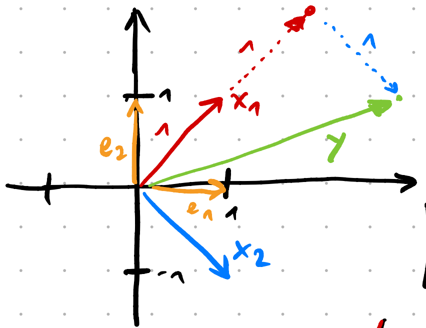
mit $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ Basis von V. $\quad$ zB $V = \mathbb{R}^2$

→ **Beispiel**: $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. $\mathcal{B}_1 := \{x_1, x_2\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^2$

denn $\alpha \cdot x_1 + \beta x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha, \beta = 0$ ("Nullvektor nur trivial darstellbar", "Auslöschung nicht möglich") gilt (linear unabh.).

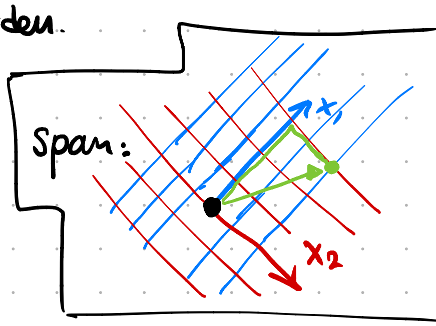
$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ keine Basis des $\mathbb{R}^2$ → weil $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathbb{R}^2 = \text{span}\{x_1, x_2\} \Leftrightarrow$ Jeder Vektor $y \in \mathbb{R}^2$ kann als Lin. komb. von x_1 & x_2 dargestellt werden.



$$\boxed{y = 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2}$$

$$\boxed{\text{vs. } y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = 3e_1 + 1e_2}$$



Dimension:

1) $\dim\left(\text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}\right) = 2 \neq 3$ denn $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (l.a.).

2) $\dim\left(\text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}\right) = 2 \neq 3$ denn $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

obwohl $\nexists \alpha : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sowie

$\nexists \beta : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Def: $\text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} := \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : y = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$

3) $\dim\left(S\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\right) = 0$ denn $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist lin. abh. weil $\alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

4) $\dim\left(S\{\underbrace{x_1, \dots, x_{n-1}}_{x_i \in \mathbb{R}^n}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\}\right) < n$ denn x_i ist lin. abh. zu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; \forall i$

Exkurs: Basiswechsel: Sei $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und offensichtlich $\mathbb{R}^2 = \text{span}\{a_1, a_2\}$.

Stellen Sie $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in der Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ dar als:

$$y = \gamma \cdot b_1 + \delta \cdot b_2$$

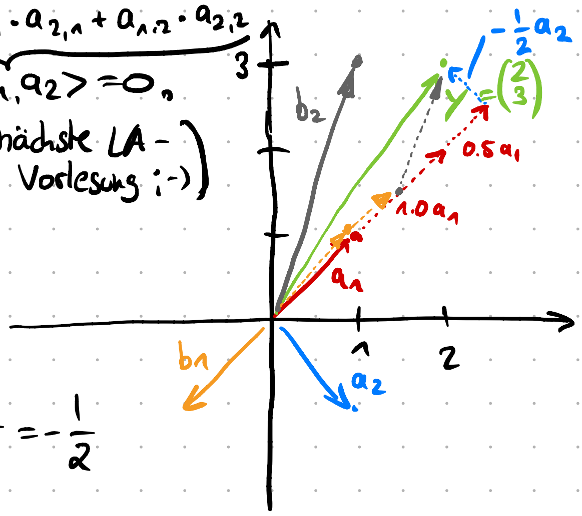
wobei $b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

→ $y = \alpha \cdot a_1 + \beta \cdot a_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \cdot \alpha + 1 \cdot \beta = 2 \\ 1 \cdot \alpha - 1 \cdot \beta = 3 \end{cases}$ LGS $\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \boxed{\alpha = 5/2}, \boxed{\beta = -1/2}$

Was heißt α, β?

Vektoren a_1, a_2 offenbar orthogonal: $\langle a_1, a_2\rangle = \underbrace{0}_{a_{1,1}\cdot a_{2,1} + a_{1,2}\cdot a_{2,2}}$.

Für Orthogonalbasis gilt ebenfalls: (nächste LA-Vorlesung ;-))



- $\alpha = \dfrac{\langle y, a_1\rangle}{\langle a_1, a_1\rangle} = \dfrac{\binom{2}{3}\cdot\binom{1}{1}}{\binom{1}{1}\cdot\binom{1}{1}} = 5/2$

- $\beta = \dfrac{\langle y, a_2\rangle}{\langle a_2, a_2\rangle} = \dfrac{\binom{2}{3}\cdot\binom{1}{-1}}{\binom{1}{-1}\cdot\binom{1}{-1}} = \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$

Nun $y \overset{!}{=} \gamma\cdot b_1 + \delta\cdot b_2$ mit $\langle b_1, b_2\rangle \neq 0$ nicht orthogonal.

$= \gamma\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + \delta\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

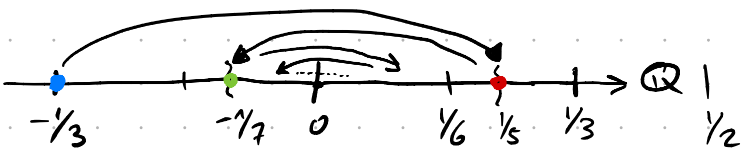
$\Leftrightarrow \begin{cases} -1\cdot\gamma + 1\cdot\delta = 2 \\ -1\cdot\gamma + 3\cdot\delta = 3\end{cases} \overset{LGS}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 3\end{array}\right) \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{1}{2}}$ $\boxed{\gamma = -3/2}$

A Folgen

Folgen: Sei $A \neq \emptyset$ Menge. Abbildung $a: \mathbb{N} \to A,\ n \mapsto a(n)$ heißt Folge

→ **Bsp:** $a: \mathbb{N} \to \mathbb{Q},\ n \mapsto a(n) =: a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$

n	a(n)
1	$-1/3 = a_1$
2	$+1/5 = a_2$
3	$-1/7 = a_3$

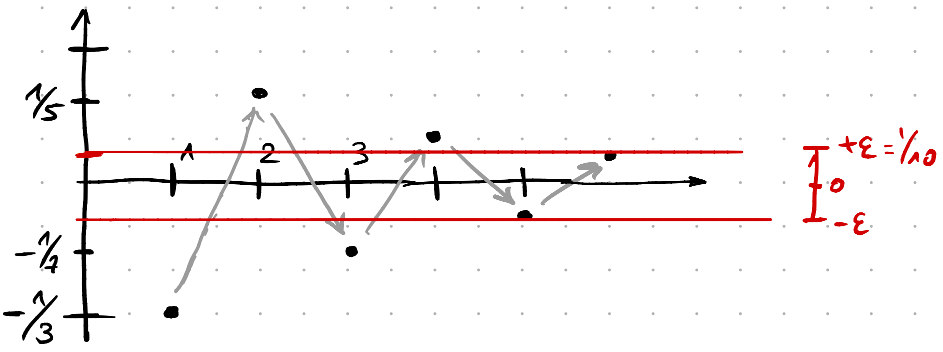


→ konvergiert gegen Null ?

Grenzwert: Folge $(a_n) \subset \mathbb{K}$ hat GW $a \in \mathbb{K}$, falls:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

"Für alle $\varepsilon > 0$ (also auch für $\varepsilon = 0.0000\ldots1$) müssen wir eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass für alle $n \geq n_0$ ab diesem Zeitpunkt die Abweichung der Folge zum Grenzwert kleiner als ε ist."



Intuition:

ε	n_0
1	1
$0{,}1 = 1/10$	5
$0.01 = 1/100$	50
⋮	⋮

Formaler Beweis: Nehme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ an.

Noch großzügiger möglich... $\leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt: $\left| \frac{(-1)^n}{2n+1} - 0 \right| = \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n} \leq \varepsilon$

Sofern $\frac{1}{2n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} \leq 2n \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{2\varepsilon}$. Benutze für n_0

Da $n_0 \overset{!}{\in} \mathbb{N}$, wähle $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{2\varepsilon} \right\rfloor + 1$ oder $n_0 = \left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} \right\rceil$

Untere Gauß-Klammer ("abrunden", $\lfloor 0.999 \rfloor = 0$)

Denn dann gilt: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = \lceil \frac{1}{2\varepsilon} \rceil : |a_n - 0| \leq \varepsilon \ \forall n \geq n_0$

Test: $\varepsilon = \frac{1}{314} \Rightarrow n_0 = \left\lceil \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{314}} \right\rceil = \lceil 157 \rceil = 157$

Und $|a_{157} - 0| = \left| \frac{(-1)^{157}}{2 \cdot 157 + 1} \right| = \left| -\frac{1}{315} \right| = \frac{1}{315} < \frac{1}{314}$ ✓

$|a_m - 0| < \frac{1}{314} \ \forall m > n_0 = 157$ ✓

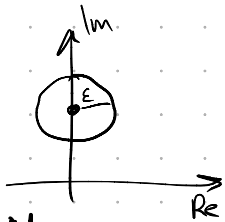
Fun Fact zur Folge a_n:

$$\lim_{n\to\infty} (1 + a_n) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^k}{2k+1}\right) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

(Vergleiche: Leibnitz-Reihe, nächste A.-VL.)

Nullfolge: Folge mit GW Null, z.B. a_n von oben.

Im komplexen $\mathbb{C}$: ε-Umgebung $B_\varepsilon(a) := \{ z \in \mathbb{C} : |z - a| < \varepsilon \}$



Beschränktheit: $(a_n) \subset \mathbb{K}$ beschränkt $\Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R}, s > 0$ mit $|a_n| \leq s \ \forall n \in \mathbb{N}$

→ **Bsp**: a_n von oben ist beschränkt denn $|a_n| \leq s := 2 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

→ Konvergenz $\Rightarrow$ Beschränktheit $\Leftrightarrow$ $\neg$(Beschränktheit) $\Rightarrow$ $\neg$(Konvergenz)

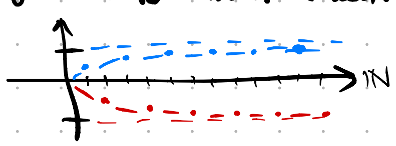
→ Obacht: Beschränktheit $\not\Rightarrow$ Konvergenz ($b_n = (-1)^n$)

↳ Rettung: Beschränktheit + Monotonie $\Rightarrow$ Konvergenz

Aber: " + " $\not\Leftarrow$ Konvergenz $\left[(-1)^n \cdot \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \right]$

Bolzano/Weierstraß: Jede beschränkte Folge besitzt min. 1 konvergente Teilfolge.

→ **Bsp**: $a_n = (-1)^{n-1} + \frac{(-1)^n}{n+1}$



$a_1 = \frac{1}{2}$ $a_4 = -\frac{4}{5}$
$a_2 = -\frac{2}{3}$ $a_5 = \frac{5}{6}$
$a_3 = \frac{3}{4}$

Cauchy-Folge: $(a_n) \subset \mathbb{K}$ ist Cauchy-Folge falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| \leq \varepsilon \quad \forall n,m \geq n_0$$

("Ab n_0 wird Abstand zweier Folgenglieder beliebig klein")

→ **Bsp**: Ist $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ Cauchy?

Sei $\varepsilon > 0$, dann
$$|a_n - a_m| = \left| \frac{(-1)^n}{2n+1} - \frac{(-1)^m}{2m+1} \right|$$
$$\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \left| \frac{(-1)^n}{2n+1} \right| + \left| - \frac{(-1)^m}{2m+1} \right|$$
$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2m+1}$$
$$< \frac{1}{2n} + \frac{1}{2m}$$

Nebenrechnung:
$$\frac{1}{2n} < \varepsilon/2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cancel{2}\varepsilon} < n/\cancel{2} \quad \forall n, \varepsilon > 0$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$$

mit $n,m > n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \forall n,m > n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$$

→ **Nice to know**: $(a_n) \subset \mathbb{K}$ konvergiert $\Leftrightarrow$ (a_n) ist Cauchy

Manchmal einfacher zu zeigen, da kein expliziter Grenzwert bekannt sein muss

Sandwich-Lemma: Sei (a_n), (b_n), (c_n) reelle Folgen mit
$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq n_0$$
und konvergieren (a_n), (c_n) zum selben Grenzwert d. Dann gilt:
$$\lim_{n\to\infty} b_n = d$$

Bsp: $b_n := \sqrt{n^2+2} - n$. Sei $a_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt: $a_n = 0 \overset{n \in \mathbb{N}}{=} \sqrt{n^2} - n \leq \sqrt{n^2+2} - n = b_n$
$$\leq \sqrt{n^2 + 2 + \frac{1}{n^2}} - n = \sqrt{\left(n + \frac{1}{n}\right)^2} - n$$
$$= n + \frac{1}{n} - n = \frac{1}{n} = c_n$$

Mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ sowie $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ folgt direkt:

b_n konvergiert ebenfalls mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.