O : Fragen, Mod., Eval
A : Reihen
N : Lineare Abbildungen

Globalübung 7
Mathe 1
CES – WS25

28.11.2025 1
Lambert Theisen

O Evaluierung

https://evasys.rwth-aachen.de/evasys/online.php?pswd=Y9XT7

A Reihen

$(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ ist Folge.

→ **n-te Partialsumme**: $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

→ **Reihe** $\hat{=}$ Folge der Partialsummen: $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_1+a_2, \dots)$

mit $\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (falls existent)

→ **Beispiele**:

$1+2+3+\dots$

1) Arithmetische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k$ divergiert, denn:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k \overset{\text{Gauß}}{=} \frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

2) <u>Geometrische Reihe</u>: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert für $|q|<1$, denn

n=5 $\qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für $q \neq 1$ (Euklid, ≈ 300 v.Chr.)

Grenzwert für $|q|<1$: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

Tipp: Gilt auch für $q \in \mathbb{C}$

3) <u>Harmonische Reihe</u> $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ obwohl $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ NF !

3) NF (a_k) $\not\Rightarrow$ Reihe konvergiert.

Teleskop-Trick:

→ Bsp: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

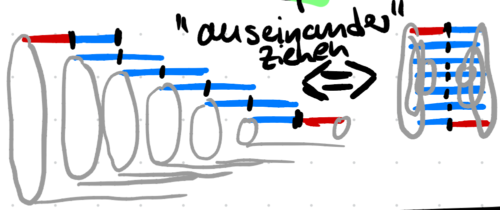
Partialbruchzerlegung (PBZ): live →

$$\frac{1+0k}{k(k+1)} \overset{!}{=} \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{a(k+1)+b\cdot k}{k(k+1)}$$

k^0 I) $1\cdot a = 1$ $\quad \boxed{a=1}$

k^1 II) $k\underbrace{(a+b)}_{\Rightarrow b=1} = 0\cdot k$

Teleskop:



$k=1$ ...... $= 1 + \frac{1}{2}$

$k=2$ .... $+ \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

$k=3$ .... $+ \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

$k=$ u.s.w. .... $+ \dots$

$k=n$ .... $+ \dots - \frac{1}{n+1}$

etwas formaler $=$

$$\left(1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(1+\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}}_{=0} + \frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

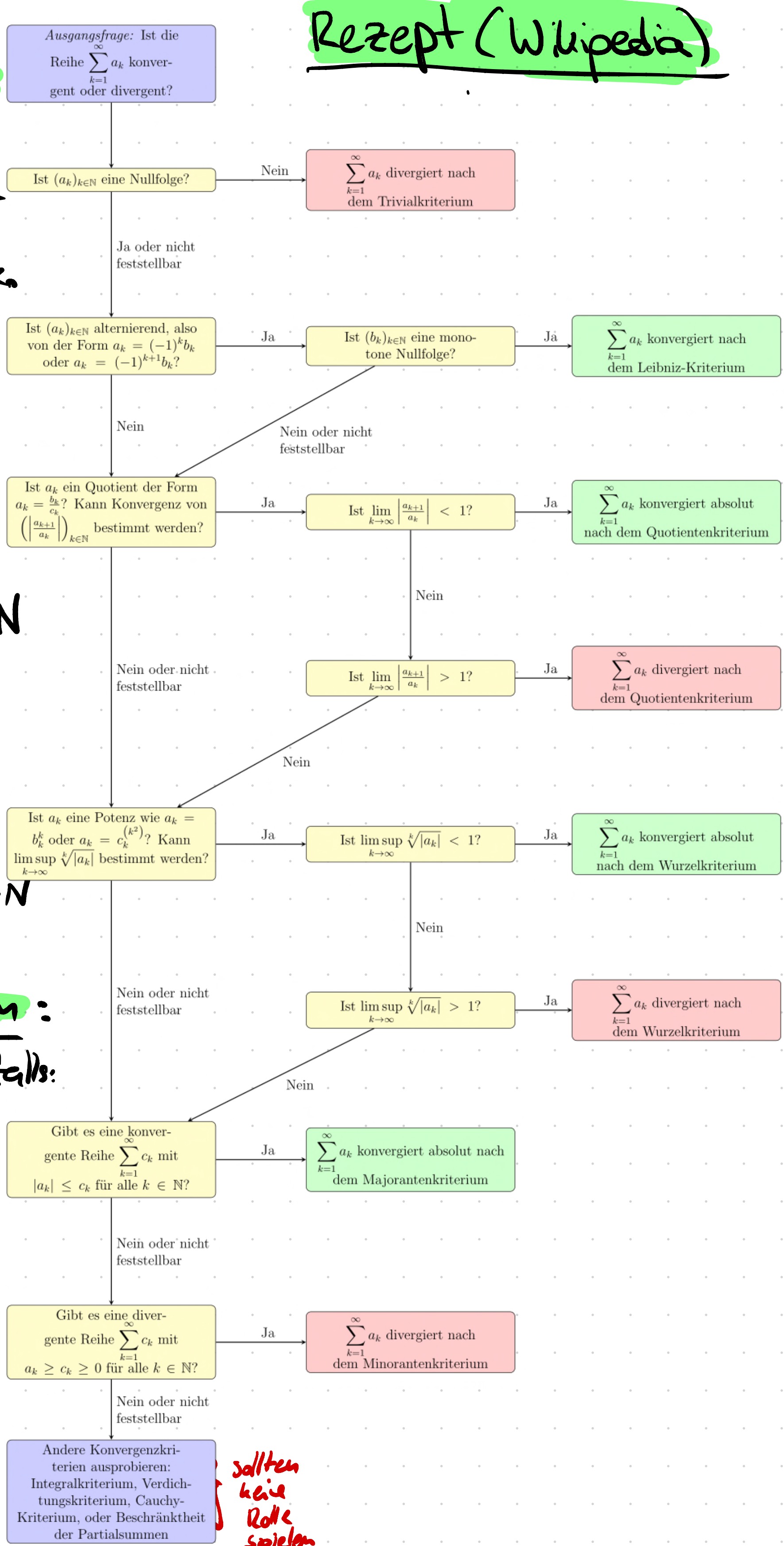
$\boxed{\text{Index-Shift: } \sum_{k=2}^{n} k = \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) \text{ legit.}}$

Konvergenzkriterien:

1) Trivialkriterium: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert $\Rightarrow (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge

$\Leftrightarrow$ a_k keine NF $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert.

Rezept (Wikipedia)



2) Leibnitz-Kriterium:

Alternierende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$ konvergiert falls a_k monotone Nullfolge.

3) Quotienten-Kriterium:

Abs. konv. $\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ konv.}\right)$

falls:

$$\exists\, q<1 : \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \le q \;\forall k \ge N$$

4) Wurzel-Kriterium:

Abs. konv. falls:

$$\exists\, q<1 : \sqrt[k]{|a_k|} \le q \;\forall k \ge N$$

5) Majoranten-Kriterium:

Absolute Konvergenz, falls:

$\exists$ konv. Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \subset \mathbb{R}_+$

mit $|a_k| \le c_k \;\forall k \ge N$

6) Minoranten-Kriterium

Divergenz falls:

$\exists$ diverg. Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$

mit $a_k \ge d_k \ge 0 \;\forall k \in \mathbb{N}$

Absolute Konvergenz: von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

→ Summationsreihenfolge egal. Warum ist das eigentlich wichtig?

Ramanujan: (1887-1920)

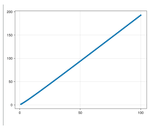
Another way of finding the constant is as follows — 41
Let us take the series $1+2+3+4+5+\&c$. Let C be its constant. Then

$$c = 1+2+3+4+\&c\ldots$$
$$-4c = \quad 4 \quad +8 \quad +\&c$$
$$c-4c = -3c = 1-2+3-4+\&c = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$$

power series von $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ at $x=1$

$$\therefore c = -\frac{1}{12} \Rightarrow 1+2+3+\ldots = -\frac{1}{12} \;?!$$

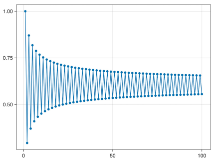
Bsp: a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{2n^2+1}{n^2+n}$



GW der Folge: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + 1/n^2}{1 + 1/n} = \frac{2}{1} = 2$

$\Rightarrow$ NW Bed für Reihenkonvergenz $a_n \to 0$ gilt nicht
$\Rightarrow$ Reihe divergiert.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = (-1)^{n+1} b_n$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

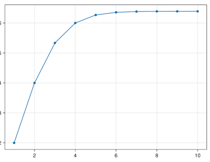


$b_n > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$, b_n ist monoton fallend,
$\lim b_n = \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

$\Rightarrow$ Konvergenz nach Leibnitz-Kriterium

c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = 2^n/n!$. Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}/(n+1)!}{2^n/n!} = \frac{2}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$



$\Rightarrow$ Konvergenz nach Quot-Krit.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = 3^n/n^2$. $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{3^n/n^2} = \frac{3}{\sqrt[n]{n^2}}$

Weil $\sqrt[n]{n^2} \to 1$ für $n\to\infty$ folgt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 3 > 1$ ($\cancel{\exists} q < 1$)

$\Rightarrow$ Divergenz mit Wurzel-Kriterium.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{1}{n^2+1} \le \frac{1}{n^2}$ Weil $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ konvergiert nach Majoranten-Krit.

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert & $\frac{1}{\sqrt{n}} \ge \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ div. nach Minoranten-Krit.

g) 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}\right|$ soll konvergieren für absolute Konv.

$\Rightarrow$ aus b) wissen wir dass es divergiert $\to$ keine

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ harmonisch $\Rightarrow$ konvergiert $\Rightarrow$ Abs. konv.

ChatGPT 5.1 Thinking

Nachgedacht für 52s

Aufgabe (Reihenkonvergenz und absolute Konvergenz)

Untersuchen Sie die Konvergenz der folgenden Reihen. Geben Sie jeweils das verwendete Kriterium an.

(a) Trivialkriterium

Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{2n^2+1}{n^2+n}.$$

(b) Leibniz-Kriterium (alternierende Reihe)

Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

(c) Quotientenkriterium

Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

(d) Wurzelkriterium

Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}.$$

(e) Majorantenkriterium

Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

(f) Minorantenkriterium

Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

(g) Absolute Konvergenz

1. Untersuchen Sie, ob die in **(b)** betrachtete Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$
absolut konvergiert.
2. Untersuchen Sie die absolute Konvergenz der Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}.$$
3. Erklären Sie in 1–2 Sätzen, warum absolute Konvergenz eine „stabilere" Form der Konvergenz ist als bloß bedingte Konvergenz (Hinweis: Verhalten von Reihen bei Umordnungen).

Stelle irgendeine Frage

Umfassendes Nachde...

LA Lineare Abbildungen

$\phi: V \to W$ linear falls $\phi(\alpha x + \beta y) = \alpha \phi(x) + \beta \phi(y)$ $\quad \forall x, y \in V \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

Good to know: $\phi(0) = 0$ immer, Unterräume werden auf Unterräume abgebildet, $\phi(\operatorname{span}\{x_i\}) = \operatorname{span}(\{\phi(x_i)\})$

ϕ_1, ϕ_2 linear $\Rightarrow$ $\phi_1 \circ \phi_2$ linear

Kern: $\operatorname{Ker} \phi := \{x \in V \mid \phi(x) = 0\}$ ist UR von V

Bild: $\operatorname{Im} \phi := \{y \in W \mid \exists x \in V: \phi(x) = y\}$ UR von W

Dimensionsatz $\dim(\operatorname{Ker} \phi) + \dim(\operatorname{Im} \phi) = \dim V$ $\qquad |V|, |W| < \infty$

$\rightsquigarrow$ Falls $|V| = |W|$: ϕ inj $\Leftrightarrow$ ϕ surj $\Leftrightarrow$ ϕ bijektiv

Bsp: Sei $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 1. (Lineare Abbildung)
Eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Worauf wird der Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ abgebildet?

b) Geben Sie eine Darstellung von Kern und Bild der Abbildung f an und bestimmen Sie jeweils die Dimension.

Hinweis: Nutzen Sie die Linearität der Abbildung aus.

a)

$x = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \alpha v_1 + \beta v_2$

$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} 5 = \alpha + \beta \\ 7 = \alpha + 2\beta \end{array} \quad \overset{\text{Gauß}}{\Leftrightarrow} \quad \alpha = 3, \beta = 2$

Durch Linearität $f(x) = f(\alpha v_1 + \beta v_2)$

$$= \alpha f(v_1) + \beta f(v_2)$$

$$\overset{\text{Aufgabenstellung}}{=} 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

b) $\ker(f) = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a v_1 + b v_2 \in \ker f$ $\quad \boxed{a, b \in \mathbb{R}}$

Dann $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} f(x) = a v_1 + b v_2 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -2a - b \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ I/II: $a = 0, b = 0$ $\Rightarrow$ Kern $f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim \operatorname{kern} f = 0$

$\operatorname{Im} f = \left\{ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : y = f(x) \text{ für ein } x \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Sei $y \in \operatorname{Im} f$. Dann $\exists x \in \mathbb{R}^2$ mit $y = f(x) = f(a v_1 + b v_2) \overset{\text{Lin.}}{=} a f(v_1) + b f(v_2)$

$$= a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -2a - b \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ -2a - b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ mit $\dim \operatorname{Im} f = 2$