O
E: Interpolation, Gauß

Vortragsübung 3
HM1 – WS 22

Lambert Theisen 1
30.11.2022

O: → Fragen?

→ Videos gut so?

E6 Interpolation:

$5x^2+7x+8$

$5\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+7\cdot\frac{\pi}{2}+8 \overset{?}{=} f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Aufgabe V 6. *Interpolation*

Sei $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R} := \left\{ \sum_{j=0}^{2} \lambda_j X^j \,\middle|\, \lambda_j \in \mathbb{R} \right\}$ die Menge aller reellen Polynome vom Grad höchstens 2 und $f(X) = \sin(X) + \cos(X)$.

(a) Finden Sie $p(X) \in \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ so, dass $p(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2})$, $p(\pi) = f(\pi)$ und $p(\frac{3\pi}{2}) = f(\frac{3\pi}{2})$. Ist das Polynom eindeutig bestimmt?

(b) Bestimmen Sie für $k = 0, 1, 2$ und $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $x_1 = \pi$ und $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ die Lagrangepolynome

$$L_k(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{2} \frac{X - x_j}{x_k - x_j}$$

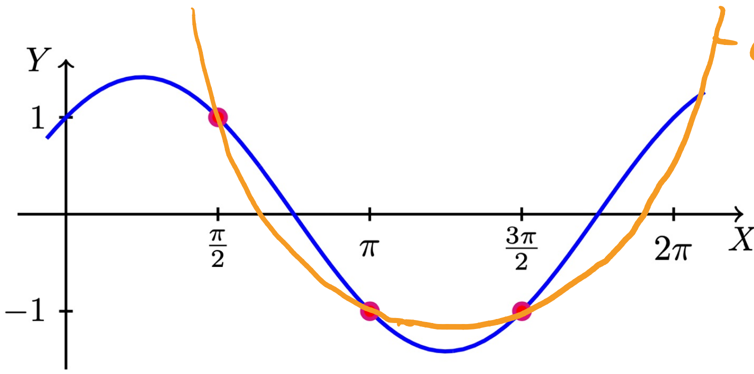
$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j \cdot L_j(X)$

und schreiben Sie das Polynom $p(X)$ aus Teil **(a)** als Linearkombination der $L_k(X)$.

$2\cdot L_1(X) + 5\cdot L_2(X)$

a) Interpolationsbedingung: $p(X_i) = f(X_i)$, $\{X_i\}_{i=0}^{2}$ Stützstellen

Bedingung: Übereinstimmung von $f(X) = \sin(X) + \cos(X)$ mit $p(X) \in \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ an den Stützpunkten $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$, $(\pi, f(\pi))$, $(\frac{3\pi}{2}, f(\frac{3\pi}{2}))$.



Gesucht: $\in \mathrm{Pol}_2\mathbb{R}$

Also: Suche $p(x) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x + \lambda_3 \in \mathrm{Pol}_2\mathbb{R}$ mit

$\sin(X)+\cos(X)$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{I)}\ p(\pi/2) = f(\pi/2) & = 1 \\ \text{II)}\ p(\pi) = f(\pi) & = -1 \\ \text{III)}\ p(3\pi/2) = f(3\pi/2) & = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\text{LGS}}: \begin{array}{l} \lambda_1 \frac{\pi^2}{4} + \lambda_2 \frac{\pi}{2} + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 \pi^2 + \lambda_2 \pi + \lambda_3 = -1 \\ \lambda_1 \frac{9\pi^2}{4} + \lambda_2 \frac{3\pi}{2} + \lambda_3 = -1 \end{array}$$

(3.5)

$$\overbrace{\begin{pmatrix} \pi^2/4 & \pi/2 & 1 \\ \pi^2 & \pi & 1 \\ 9\pi^2/4 & 3\pi/2 & 1 \end{pmatrix}}^{A:=} \overbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}}^{x:=} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}^{b:=}$$

3.5.1 Beispiel.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 7x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & & & + & 2x_3 & = & 1 \end{array}$$

wird zu $\begin{bmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Gaußalgorithmus (3.7) auf erweiterte Systemmatrix $[A||b]$

Folgende Umformungen ändern die Lösungsmenge eines LGS nicht:

3.7.1. Elementare Umformungen.

(VZ) Vertauschen von Gleichungen
(also Vertauschen von Zeilen der erweiterten Koeffizientenmatrix $[A||b]$).

(mZ) Multiplizieren einer Gleichung mit einem Skalar $s \neq 0$
(also Multiplizieren einer Zeile von $[A||b]$ mit $s \neq 0$).

(aZ) Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen
(also Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen).

(VS) Vertauschen von Unbestimmten
(also Vertauschen von Spalten in A — nicht in $[A||b]$!).

Mindestens die Schritte vom Typ (VS) muss man genau protokollieren, da sich die Reihenfolge der Variablen ändert.
Auch bei den anderen Schritten ist eine Dokumentation sinnvoll (insbesondere zur Fehlersuche!).

$5 \cdot x = 5€$

$2 \cdot 5 \cdot x = 2 \cdot 5€$

$5 \cdot x - 5€ = 0$

$2 \cdot \lambda_1 = 2$

$5 \cdot \lambda_2 = 5$

$\lambda_3 = 7$

3.7.2. Satz.

Mit Hilfe elementarer Umformungen kann man jedes LGS der Form $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{K}^{z \times s}$ transformieren auf ein LGS der Gestalt $\widetilde{A}\,\widetilde{x} = \widetilde{b}$, wobei

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} \multicolumn{4}{c|}{\overbrace{\hphantom{1\ 0\ \cdots\ 0}}^{r \text{ Spalten}}} & \overbrace{\hphantom{C}}^{s-r \text{ Spalten}} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & C \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \\ \hline \multicolumn{4}{c|}{0} & 0 \end{array}\right) \qquad \widetilde{b} = \begin{pmatrix} \widetilde{b}_1 \\ \widetilde{b}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{b}_r \\ \hline \widetilde{b}_{r+1} \\ \vdots \\ \widetilde{b}_z \end{pmatrix}$$

mit $C \in \mathbb{K}^{r \times (s-r)}$.
Der Vektor $\widetilde{x}$ entsteht aus x durch Vertauschung von Variablen.
Das LGS $\widetilde{A}\,\widetilde{x} = \widetilde{b}$ ist genau dann lösbar, wenn für alle $j > r$ gilt: $\widetilde{b}_j = 0$.

10000

$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \overset{!}{=} 0$

$$[A||b] = \left[\begin{array}{ccc||c} \pi^2/4 & \pi/2 & 1 & 1 \\ \pi^2 & \pi & 1 & -1 \\ 9\pi^2/4 & 3\pi/2 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \rightsquigarrow z_2 - 4z_1 \\ z_3 - 9z_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} \pi^2/4 & \pi/2 & 1 & 1 \\ 0 & -\pi & -3 & -5 \\ 0 & -3\pi & -8 & -10 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} \\ \\ z_3 - 3z_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} \pi^2/4 & \pi/2 & 1 & 1 \\ 0 & -\pi & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{c} z_1 - z_3 \\ \rightsquigarrow z_2 + 3z_3 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} \pi^2/4 & \pi/2 & 0 & -4 \\ 0 & -\pi & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

$0 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + 1 \cdot \lambda_3 = 5$

$$\leadsto \begin{array}{l} z_1 + \frac{1}{2} z_2 \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} \pi^2/4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\pi & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \leadsto \begin{array}{l} \frac{4}{\pi^2} z_1 \\ -\frac{1}{\pi} z_2 \\ \\ \end{array} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right.}_{\tilde{A}} \underbrace{\left|\begin{array}{c} 4/\pi^2 \\ -\frac{10}{\pi} \\ 5 \end{array}\right]}_{\tilde{b}}$$

$-\pi \lambda_2 = 10$

$\lambda_2 = \frac{10}{-\pi}$

Was heißt das jetzt?: $\tilde{A} x = \tilde{b}$ hat selbe Lösungsmenge wie $Ax = b$

$$\begin{array}{cccc} 1 \cdot \lambda_1 & 0 \cdot \lambda_2 & 0 \cdot \lambda_3 & = 4/\pi^2 \\ 0 \cdot \lambda_1 & 1 \cdot \lambda_2 & 0 \cdot \lambda_3 & = -10/\pi \\ 0 \cdot \lambda_1 & 0 \cdot \lambda_2 & 1 \cdot \lambda_3 & = 5 \end{array}$$

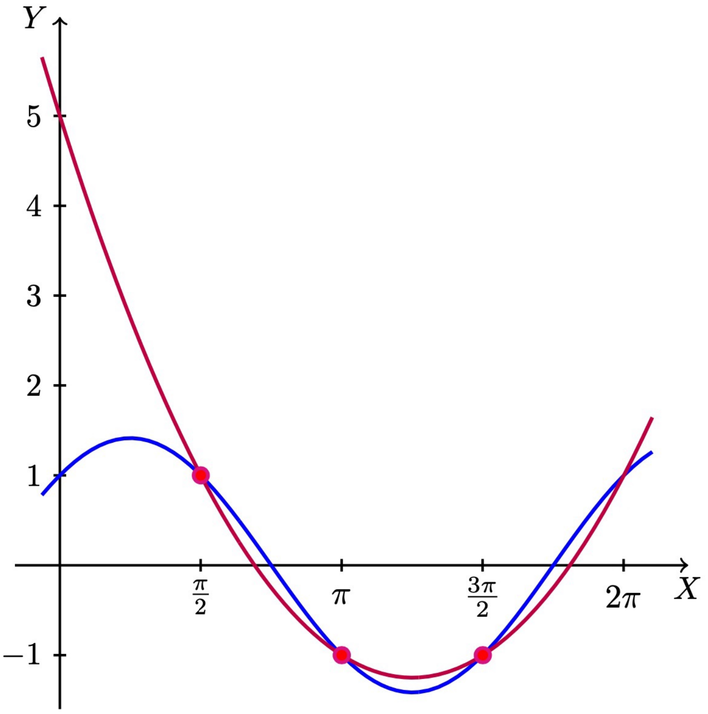
$\Rightarrow$ Die einzige Lösung ist

$$x = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/\pi^2 \\ -10/\pi \\ 5 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow p(x) = \frac{4}{\pi^2} \cdot x^2 - \frac{10}{\pi} \cdot x + 5$ ist eindeutig bestimmt.

Plotten

Graphen von $f(X) = \sin(X) + \cos(X)$ und $p(X) = \frac{4}{\pi^2} X^2 - \frac{10}{\pi} X + 5 \in \mathrm{Pol}_2 \mathbb{R}$



$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 0 \\ x + y &= 0 \end{aligned} \leadsto \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 1 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

b) Lagrange-Polynome

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{2} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$ bestimmen für $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $x_1 = \pi$, $x_2 = \frac{3\pi}{2}$

$$(x-\pi)\left(x-\frac{3\pi}{2}\right) = x^2 \underbrace{-\pi x - \frac{3\pi}{2}x}_{-\frac{5}{2}\pi x} + \frac{3\pi^2}{2}$$

$k=0$

$$L_0(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 0}}^{2} \frac{x-x_j}{x_0-x_j} = \left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\cdot\left(\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\right) = \left(\frac{x-\pi}{\boxed{\frac{\pi}{2}-\pi}_{-\pi/2}}\right)\left(\frac{x-\frac{3\pi}{2}}{\boxed{\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2}}_{-\pi}}\right) = \frac{2x^2}{\pi^2} - \frac{5x}{\pi} + 3$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\cdot x^2 - \frac{5}{\pi}x + 3$$

$k=1$

$$L_1(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{2} \text{"} = \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right) = \left(\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\pi-\frac{\pi}{2}}\right)\cdot\left(\frac{x-\frac{3\pi}{2}}{\pi-\frac{3\pi}{2}}\right) = -\frac{4}{\pi^2}x^2 + \frac{8}{\pi}x - 3$$

$k=2$

$$L_2(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 2}}^{2} \text{"} = \left(\frac{x-x_0}{x_2-x_0}\right)\cdot\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right) = \left(\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}\right)\left(\frac{x-\pi}{\frac{3\pi}{2}-\pi}\right) = \frac{2}{\pi^2}x^2 - \frac{3}{\pi}x + 1$$

$\rightarrow$ **Für Lagrange Polynome** gilt mit $k,\ell \in \{0,1,2\}$:

$$L_k(x_\ell) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{2} \frac{x_\ell - x_j}{x_k - x_j} = \begin{cases} 1, & k=\ell \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$ (coole Eigenschaft, denn ...)

Teil a)

$$\Rightarrow p(x_k)\,L_k(x_\ell) = \begin{cases} p(x_\ell), & k=\ell \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \overset{\text{Teil a)}}{\underset{(*)}{=}} \begin{cases} f(x_\ell), & k=\ell \\ 0, & k\neq \ell \end{cases}$$

$\delta_{k,\ell} = 1$ $k=\ell$, 0 sonst

$$\Rightarrow q(x) := \sum_{k=0}^{2} p(x_k)L_k(x) \in \mathrm{Pol}_2\mathbb{R} \text{ erfüllt } q(x_\ell) = \sum_{k=0}^{2} p(x_k)L_k(x_\ell) \overset{(*)}{=} f(x_\ell)$$

(IP-Bed.)

Eindeutigkeit von $p(x)$ in Teil a) $\Rightarrow$

$$p(x) = q(x) = \sum_{k=0}^{2} p(x_k)L_k(x) = \underbrace{+1}_{f(x_0)} L_0(x) \underbrace{-1}_{f(x_1)} L_1(x) \underbrace{-1}_{f(x_2)} L_2(x)$$

Beachte: Lagrange Polynome $L_k(x)$ sind unabh. von den gesuchten Funktionswerten.

$\Rightarrow$ Nützlich wenn man mehrere Interpolationen mit selben $\{x_i\}$, untersch. $\{f(x_i)\}$

E7

Aufgabe V 7. *Lösungsraum eines LGS*

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ seien die Matrix A_α und der Vektor b_β gegeben durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & \alpha & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \alpha+2 & -1 \end{pmatrix}, \quad b_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ \beta - 4 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Werte von α, β ist das LGS $A_\alpha x = b_\beta$ lösbar?

(b) Bestimmen Sie für $\alpha = -1$ und $\beta = 2$ den Lösungsraum von $A_{-1}x = b_2$.

Sei nun die Matrix B und die Vektoren $\{c_i\}_{i=1}^3$ gegeben durch

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

(c) Bestimmen Sie jeweils die Lösungsräume von

$$Bx = c_1, \quad Bx = c_2, \quad Bx = c_3.$$

a) **Erweiterte Koeffizientenmatrix $[A_\alpha \| b_\beta]$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.**

hier schon Null → Zeilentausch!

$$[A_\alpha \| b_\beta] = \left[\begin{array}{ccccc||c} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & \alpha & -1 & 1 & \beta-4 \\ 1 & -2 & 1 & \alpha+2 & -1 & \beta \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{array}{c} \\ Z_1 \leftrightarrow Z_2 \\ \\ Z_3 + Z_2 \\ Z_4 - Z_2 \end{array} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \multicolumn{6}{c}{\left[\begin{array}{c|cccc||c} 1 & -2 & -2 & 1 & 2 & 5 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-2 & 0 & 3 & \beta+1 \\ 0 & 0 & 3 & \alpha+1 & -3 & \beta-5 \end{array}\right]} \end{array}$$

Spaltentausch

$\rightsquigarrow S_2 \leftrightarrow S_5$

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_5 & x_2 & x_3 & x_2 & \\ \multicolumn{6}{c}{\left[\begin{array}{c|cccc||c} 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & \alpha-2 & 0 & 0 & \beta+1 \\ 0 & -3 & 3 & \alpha+1 & 0 & \beta-5 \end{array}\right]} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ Z_3 - 3Z_2 \\ Z_4 + 3Z_2 \end{array} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_5 & x_3 & x_4 & x_2 & \\ \multicolumn{6}{c}{\left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & 2^{(+1)} & -2 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & 0 & 0 & \beta-2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+1 & 0 & \beta-2 \end{array}\right]} \end{array}$$

kann zu 0 gebracht

Lösbarkeit:

3.7.2. Satz.

Mit Hilfe elementarer Umformungen kann man jedes LGS der Form $A\,x = b$ *mit* $A \in \mathbb{K}^{z \times s}$ *transformieren auf ein LGS der Gestalt* $\tilde{A}\,\tilde{x} = \tilde{b}$, *wobei*

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{matrix}}^{r \text{ Spalten}} & \overbrace{\quad C \quad}^{s-r \text{ Spalten}} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \tilde{b} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_r \\ \hline \tilde{b}_{r+1} \\ \vdots \\ \tilde{b}_z \end{pmatrix}$$

mit $C \in \mathbb{K}^{r \times (s-r)}$.

Der Vektor $\tilde{x}$ *entsteht aus* x *durch Vertauschung von Variablen.*

Das LGS $\tilde{A}\,\tilde{x} = \tilde{b}$ *ist genau dann lösbar, wenn für alle* $\boxed{j > r \text{ gilt: } \tilde{b}_j = 0}$.

Fall 1: $\alpha \neq -1, \beta \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow [\tilde{A} \| \tilde{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c||c} 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{\alpha+1} & 0 & 0 & \beta-2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\alpha+1} & 0 & \beta-2 \end{array}\right]$

$\tilde{A} = \left[\begin{array}{c|c} A & \not\subset \\ \hline \emptyset & \emptyset \end{array}\right]$

(*) können mittels Umformung zu Null gebracht werden

(♡) ist ungleich Null, kann zu Eins gebracht werden durch Normierung.

$\Rightarrow$ Lösbar weil keine Nullzeilen!

Fall 2: $\alpha = 1, \beta = 2$

$$\left[\begin{array}{cc|ccc||c} 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \tilde{b}_j = 0$$

$\Rightarrow$ Lösbar weil $\tilde{b}_j = 0$ mit $\underline{j \geq 3}$ (rechte Seite kompatibel mit NZ)

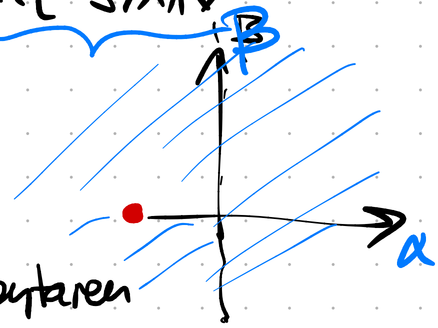
$\{a,b\} \times \{c,d\} = \{(a,c),(a,d),(b,c),(b,d)\}$

Fall 3: $\alpha = -1, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\left[\begin{array}{cc|ccc||c} 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta-2 \end{array}\right] \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \tilde{b}_j \neq 0$$

$\Rightarrow$ nicht lösbar weil RHS nicht kompatibel

Letztlich: LGS lösbar für $(\alpha,\beta) \in \{(-1,2)\} \cup \underbrace{(\mathbb{R}\setminus\{-1\}) \times \mathbb{R}}$



b) Lösungsmenge bestimmen (von $A_{-1} x = b_2$)

Aus Teil a) folgt für $[A_{-1} \| b_2]$ mit den elementaren Umformungen (3.7.1):

$$\left[\begin{array}{cc|ccc||c} 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow z_1 - 2\cdot z_2 \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_5 & x_3 & x_4 & x_2 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|ccc||c} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Nach (3.76) gilt mit $\tilde{x} := (x_1, x_5, x_3, x_4, x_2)$

3.7.6. Satz.

Führt der Gauß-Algorithmus für das LGS $A\,x = b$ auf $\widetilde{A}\,\widetilde{x} = \widetilde{b}$ mit

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{E}_r & C \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \qquad C = (c_{jk})_{1 \leqq j \leqq r,\, r+1 \leqq k \leqq s},$$

so hat der Lösungsraum des zugehörigen homogenen Systems die Dimension $s - r$. Wenn keine Spalten vertauscht wurden, erhält man eine Basis für den Lösungsraum dieses homogenen Systems aus

$$h_1 := \begin{pmatrix} -c_{1\,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r\,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad h_j := \begin{pmatrix} -c_{1\,r+j} \\ \vdots \\ -c_{r\,r+j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \longleftarrow (r+j)\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array}, \quad \cdots \quad h_{s-r} := \begin{pmatrix} -c_{1\,s} \\ \vdots \\ -c_{r\,s} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung aller Lösungen des inhomogenen Systems genügt es, irgendeine spezielle Lösung v_{sp} zu bestimmen:
Dann hat der Lösungsraum die Parameterdarstellung

$$v_{\text{sp}} + \lambda_1\, h_1 + \cdots + \lambda_j\, h_j + \cdots + \lambda_{s-r}\, h_{s-r} \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_{s-r} \in \mathbb{K}).$$

Irgendeine Lösung? $\rightsquigarrow$ easy: $\left[\begin{array}{cc|c||c} 1 & 0 & \cdots & 3 \\ 0 & 1 & & 1 \\ \hline 0 & & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$-$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_5 & x_3 & x_4 & x_2 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|ccc||c} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}, \quad h_1 = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right], \quad h_2 = \left[\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right], \quad h_3 = \left[\begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right]$$

Also:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Tausch

$$\Rightarrow \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$\Rightarrow$ Lösungsraum $$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, \dots, \lambda_3 \in \mathbb{K} \right\}$$

b) Gauß mit mehreren rechten Seiten

→ Simultane Anwendung

$$[A \| c_1 c_2 c_3] = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 3 & 5 & 8 \\ 6 & 8 & 9 & 6 & 8 & 14 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccccc} & & & c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{r} \\ z_2 - 3z_1 \\ z_3 - 6z_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -15 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{r} \\ z_3 - 4z_2 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{array}{r} 5z_1 - 4z_3 \\ z_2 + z_3 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 10 & 0 & 5 & 10 & 15 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{r} z_1 + 10z_2 \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{array}{r} \frac{1}{5}z_1 \\ -z_2 \\ \frac{1}{5}z_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \quad Bx_1 = c_1 \quad$ mit $\quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$Bx_2 = c_2 \quad$ mit $\quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$Bx_3 = c_3 \quad$ mit $\quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Trick: c_1 ist erste Spalte von $B \Rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c_2 ist zweite Spalte von $B \Rightarrow x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$c_3 = c_1 + c_2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Bx_3 &= c_3 = c_1 + c_2 \\ &= Bx_1 + Bx_2 \\ &= B(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

$$x_3 = x_1 + x_2$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}.$$