[D]: Fragen? SK?

[E]: Eigenwerte, Orthogonalität

Vortragsübung 5
HM1 – WS22

16.01.23
Lambert Theisen

E10

Aufgabe V 10. *Eigenwerte*
Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die folgende Matrix $A_\alpha \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gegeben:

$$A_\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \alpha^2-2 & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha^2 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche α ist A_α orthogonal?

(b) Sei α so gewählt, dass A_α orthogonal ist. Bestimmen Sie alle reellen Eigenwerte von A_α sowie die dazugehörigen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

a) Für welche α ist A_α ortho.?

Orthogonale Matrizen

→ erhalten Längen & Winkel

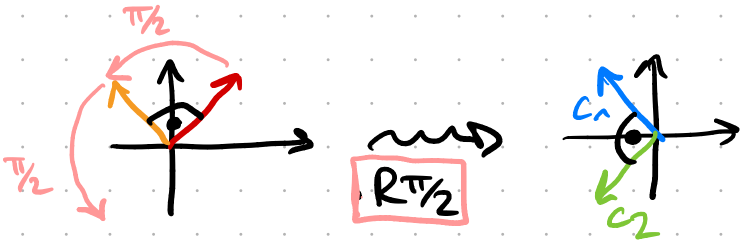
→ Bilden ONB wieder auf ONB ab

→ z.B. Drehung

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_{\pi/2} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$b_1 \quad b_2 \qquad\qquad c_1 \quad c_2$



4.5.2. Definitionen.

① Eine $(n\times n)$-Matrix A heißt orthogonal, wenn $A^{\mathsf{T}}A = \mathrm{E}_n$.

② Eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt orthogonale Abbildung, wenn die Matrix $A := {}_E\varphi_E$, die φ bezüglich der Standardbasis E beschreibt, orthogonal ist.

4.5.3. Bemerkung.

Eine $(n\times n)$-Matrix ist genau dann orthogonal, wenn ihre Spalten eine ONB in $\mathbb{R}^n$ bilden.

4.5.4. Satz (Kennzeichnung orthogonaler Abbildungen).

Es sei $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung.

① *Bildet φ irgendeine ONB wieder auf eine ONB ab, so ist φ orthogonal.*

② *Ist φ orthogonal, so bildet φ jede ONB auf eine ONB ab.*

Zur Erinnerung (vgl. 2.8.8):
Eine Orthonormalbasis (ONB) ist eine Basis $b_1,\dots,b_n$ derart, dass $\langle b_j \,|\, b_k\rangle = \delta_{jk}$:
die Basisvektoren sind normiert ($\langle b_j \,|\, b_j\rangle = 1$),
und stehen paarweise aufeinander senkrecht ($\langle b_j \,|\, b_k\rangle = 0$, falls $j \neq k$).

Also bei uns: Sei $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \alpha^2-2 & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha^2 & -\alpha \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ | & | & | & | \end{bmatrix}$

$\rightsquigarrow$ Spalten müssen ONB bilden, also insbesondere $\langle b_1, b_1\rangle = \|b_1\|_2^2 \overset{!}{=} 1$

$$\Rightarrow \|b_1\|_2^2 = \left(\frac{\sqrt{1^2+\alpha^2+(-1)^2+1^2}}{2}\right)^2 = (3+\alpha^2)\cdot\frac{1}{4} \overset{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha \in \{-1,+1\}}$$

Weiterhin: $\langle b_1, b_2\rangle \overset{!}{=} 0$

$$\Leftrightarrow \left\langle \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \alpha^2-2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{4}(\alpha^2-2+\alpha+1+1) = \frac{1}{4}(\alpha^2+\alpha) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha \in \{0,-1\}}$$

Daher: folgt $\boxed{\alpha = -1}$

Prüfung Orthonormalität: $\langle b_i | b_j\rangle \overset{!}{=} \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$

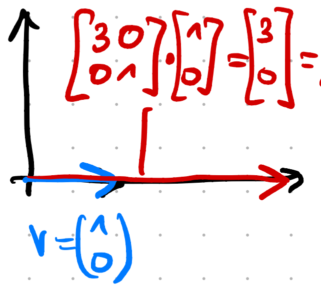
$\rightarrow$ Bsp $i=3$, $j=4$: $\langle b_3, b_4\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$ ✓

$\rightarrow$ Rest analog.

b) Eigenwerte (reelle), algebraische Vielfachheit (AV), geometrische Vielfachheit (GV) von A_{-1}

"Verdreifachung"

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \cdot v$$



5.1.1. Definitionen.

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

1. Ein Skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert (kurz EW) von A, wenn es einen Vektor $v \in \mathbb{C}^n$ derart gibt, dass $v \neq 0$ und $A\,v = \lambda\,v$.
2. Ist λ ein EW von A, so heißt $v \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor (EV) von A zum EW λ, wenn $v \neq 0$ und $A\,v = \lambda\,v$.
3. Die Menge $V(\lambda) := \{v \in \mathbb{C}^n \mid A\,v = \lambda\,v\}$ heißt Eigenraum zum EW λ.

5.1.11. Definition.

Ist μ ein EW von A, so heißt die Vielfachheit von μ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda)$ die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts μ, bezeichnet mit e_μ.

5.1.14. Definition.

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, und es sei μ ein EW von A.
Die Dimension des Eigenraums $V(\mu) = \{v \in \mathbb{C}^n \mid Av = \mu v\}$ nennt man die geometrische Vielfachheit von μ, bezeichnet mit d_μ.

5.1.4. Satz.

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, und $\lambda \in \mathbb{C}$.

1. *λ ist genau dann ein EW von A, wenn $\det(A - \lambda E_n) = 0$ gilt.*
2. *Jede Matrix in $\mathbb{C}^{n\times n}$ besitzt mindestens einen EW.*

Strategie: a) $\chi_{A_{-1}}(\lambda)$ berechnen & NS bestimmen.
b) Ausnutzen dass A_{-1} orthogonal ist.

D.h. für $v \in \mathbb{R}^4$ gilt:

$\|Av\|_2 = \|v\|_2$ (wegen 4.5.7)

4.5.7. Satz.

Jede orthogonale Abbildung erhält das Skalarprodukt, und damit Längen und Winkel (insbesondere Orthogonalität).

Sei nun v ein EV zum EW λ, dann folgt:

$$\|v\|_2 = \|Av\|_2 = \|\lambda v\|_2 = |\lambda| \cdot \|v\|_2 \Rightarrow |\lambda| = 1$$

Somit kann A_{-1} nur ± 1 als reelle EW besitzen.

Fall 1 ($\lambda = +1$):

(5.1.14) $$A_{-1} - 1E_4 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \ominus \\ \\ \oplus \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \operatorname{Rang}(A_{-1} - 1E_4) = 2$

$\Rightarrow \dim \ker(A_{-1} - E_4) = 4 - 2 = \dim V(1) = d_1$

Fall 2 ($\lambda = -1$):

$$A_{-1} - (-1)E_4 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \; III + \tfrac{1}{2} II$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Es gilt $\det(A_{-1} - (-1)E_4) = \det\left(\frac{1}{2}\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right]\right)$

$$\overset{\Delta\text{-Mat.}}{=} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \cdot 8 \cdot 16 = 8 \neq 0$$

$\Rightarrow$ $\lambda = 1$ kann kein EW sein (nach 5.1.4)

Fehlt noch: AV von $\lambda = 1$ ($d_1 = 2$ schon bekannt)

5.3.4. Lemma.
Es sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, und es sei μ ein Eigenwert von A. Dann gilt $1 \leqq d_\mu \leqq e_\mu \leqq n$.

$\Rightarrow$ Wir wissen also: $2 \leq e_1 \leq 4$ aber gleichzeitig ist $\chi_{A_{-1}}(\lambda)$ ein Polynom vom Grad 4 und ist reell.

Es folgt: 1) $\chi_{A_{-1}}(\lambda)$ hat ein Paar kompl. konj. NS

2) Alle NS von A_{-1} sind $\lambda = 1 \Leftrightarrow A_{-1}$ ähnlich zu E_4 $\lightning$

$\Rightarrow$ Somit liegt 1) vor & es gilt $e_1 = 2$.

E11

Aufgabe V 11. *Diagonalisierbarkeit*

Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei die folgende Matrix $A_{a,b}$ in $\mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben:

$$A_{a,b} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

.

(a) Entscheiden Sie, für welche a, b die Matrix $A_{a,b}$ diagonalisierbar ist.

(b) Bestimmen Sie eine reguläre Matrix T in $\mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass $T^{-1}A_{0,2}T$ in Diagonalform ist. Können wir eine solche Matrix T finden, die orthogonal ist?

4.8.4. Definition.

Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

1. A heißt diagonalisierbar, falls eine invertierbare Matrix T derart existiert, dass

$$T^{-1} A\, T = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix} \text{ Diagonal.}$$

2. A heißt orthogonal diagonalisierbar, falls dies mit einer orthogonalen Matrix T (also $T \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$, d.h. $T^{\mathsf{T}} T = \mathrm{E}_n$) möglich ist.

5.3.1. Satz.

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

1. *Ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis aus Eigenvektoren von A, so ist die Matrix $T = (v_1, \ldots, v_n)$ regulär, und es gilt*

$$T^{-1} A\, T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

wobei λ_j der zu v_j gehörende EW ist.

2. *Die Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn $\mathbb{C}^n$ eine Basis besitzt, die aus Eigenvektoren von A besteht.*

5.3.3. Folgerung.

Besitzt eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ lauter verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (hat also jeder EW die algebraische Vielfachheit 1), so ist A diagonalisierbar.

5.3.5. Folgerung.

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, und es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ alle Eigenwerte von A. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

1. *A ist diagonalisierbar.*
2. $\forall j\colon d_{\lambda_j} = e_{\lambda_j}$.
3. $\sum_{j=1}^k d_{\lambda_j} = \sum_{j=1}^k e_{\lambda_j}$.
4. $n = \sum_{j=1}^k \dim V(\lambda_j)$.

Erstmal: EW bestimmen mit $\chi_{A_{a,b}}(\lambda) = \det(A_{a,b} - \lambda E_3)$

$$= \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 \\ 2a & b-\lambda & a \\ 10 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (-3-\lambda)\cdot(b-\lambda)\cdot(2-\lambda)$$

$\Rightarrow$ EW von $A_{a,b}$ sind $\lambda = 2,\ \lambda = -3,\ \lambda = b$

Fall 1: $(b \neq 2,\ b \neq -3) \Rightarrow$ Alle EW verschieden $\Rightarrow A_{a,b}$ diagbar.

Fall 2 $(b = -3)$: In diesem Fall gilt (AV) $e_{-2} = 2$ und
es reicht zz. dass $d_{-2} = 2$.

Also $V(-3) = \operatorname{kern}(A_{a,b} - (-3)E_3) =$

$$= \operatorname{kern}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & a \\ 10 & 0 & 5 \end{bmatrix} = L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$$

x_2 bel. $\quad 10x_1 + 2x_3 = 0$

Somit ist $\dim(V(-3)) = d_{-3} = 2$ & $A_{a,-3}$ diagbar $\forall a \in \mathbb{R}$.

Fall 3: $b = 2 \quad \Rightarrow$ Dann ist $e_2 = 2$. Was ist d_2?

Betrachte $V(2) = \operatorname{kern}(A_{a,2} - 2E_3) = \operatorname{kern}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & a \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Für $a = 0$: $\dim(V(2)) = 2 = d_2 \Rightarrow A_{0,2}$ diagbar

Für $a \neq 0$: $\dim(V(2)) = 1 = d_2 \neq e_2 \Rightarrow A_{a\neq 0,2}$ nicht diagbar.

Insgesamt: $A_{a,b}$ diagbar $\Leftrightarrow b \neq 2$ oder $a = 0$.

b) Bestimme $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass $T^{-1} A_{0,2} T$ diagonal ist.

$$A_{0,2} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 10 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \chi_A(\lambda) = (-3-\lambda)(2-\lambda)^2$$

$$V(-3) = \operatorname{kern}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 10 & 0 & 5 \end{bmatrix} = L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$V(2) = \operatorname{kern}\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{bmatrix} = L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

D.h. für $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ gilt: $T^{-1} A_{0,2} T = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

<u>Frage</u>: kann T orthogonal gewählt werden?

$\rightsquigarrow$ Nein, denn $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind nicht orthogonal zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

D.h. $V(-3)$ ist nicht ortho. auf $V(2)$ & somit existiert keine ONB aus Eigenvektoren.

V12

Aufgabe V 12. *Charakteristisches Polynom*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Seien $A, B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mit charakteristischen Polynomen $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda$ und $\chi_B(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 9\lambda + 3$. Dann hat die Matrix AB den Eigenwert 0 mit geometrischer Vielfachheit gleich 1.

(b) Seien $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit $\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda)$. Dann ist A konjugiert zu B.

(c) Es gibt eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A = A^\intercal$ und $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$.

a) $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = -\lambda(\lambda-1)^2$

$\Rightarrow$ $\lambda = 0$ ein EW von A & $\dim \ker(A) = 1$

$\det(B) = \chi_B(0) = 3 \neq 0$

$\Rightarrow$ B invertierbar & $\dim(\ker(AB)) = 1 = d_0$

$\Rightarrow$ Aussage ist wahr.

b)

5.2.1. Definition.

Es seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Wir nennen B zu A konjugiert, wenn es eine reguläre Matrix T derart gibt, dass $B = T^{-1} A\, T$.

5.2.2. Satz.

Ist B zu A konjugiert, so gilt:

1. *Es ist auch A zu B konjugiert.*
2. *Die charakteristischen Polynome χ_A und χ_B stimmen überein:* *Es ist* $\det(A - \lambda\, \mathrm{E}_n) = \det(B - \lambda\, \mathrm{E}_n)$.
3. *Die Matrizen A und B haben dieselben Eigenwerte.*
4. $\det A = \det B$, $\quad \mathrm{Sp}\, A = \mathrm{Sp}\, B$.
5. *Ist v ein Eigenvektor von A zum EW μ, so ist $T^{-1} v$ ein Eigenvektor von B zum selben EW.*
6. *Es gibt genau dann eine Basis aus Eigenvektoren von A, wenn es eine Basis aus Eigenvektoren von B gibt.*

Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ und $B = E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\forall\, T \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ invertierbar gilt:

$T^{-1} B T = T^{-1} T = E_2 = B \neq A$

$\Rightarrow$ A & B nicht konjugiert $\Rightarrow$ Aussage falsch.

c) ZZ: $\exists A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A = A^T$ & $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$.

Da A symm., gilt: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ mit $a, b, d \in \mathbb{R}$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = (a-\lambda)(d-\lambda) - b^2$$
$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2$$
$$\overset{!}{=} \lambda^2 + 1$$

Koeffvergl.: I) $a + d = 0 \Rightarrow a = -d$

II) $ad - b^2 = 1$

I in II einsetzen: $\underbrace{-d^2}_{\leq 0} - \underbrace{b^2}_{\leq 0} = 1$ ↯

$\Rightarrow$ Aussage falsch