[O] : Fragen?
[G] : Gruppen, Körper
[A] : Reelle Zahlen, Inf & Sup
[LA] : Vektorraum, Norm

Globalübung 3
Mathe 1 - CES
WS 25

31.10.2025 ①
Lambert Theisen

Gruppe Menge A mit $\circ : A \times A \to A$, $(a,b) \mapsto c := a \circ b \in A$

$(A,\circ)$ ist Gruppe falls:

a) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ (Assoziativ)

b) $\exists e \in A : \forall a \in A : a \circ e = e \circ a = a$, $e \mathrel{\hat{=}}$ neutrales Element

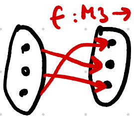
c) $\forall a \in A : \exists a^{-1} \in A : a^{-1} \circ a = e$

Aufgabe 4. (Gruppen)
Sei $M_3 = \{1,2,3\}$ und S_3 die Menge aller bijektiven Abbildungen auf M_3. Die Hintereinanderausführung zweier Abbildungen bezeichnen wir mit $\circ$. Zeigen Sie, dass $(S_3, \circ)$ eine Gruppe ist. Die Gruppe S_3 entspricht der Permutationsgruppe von 3 Objekten.

> **Hinweis:** Zeigen Sie zuerst, dass die Verknüpfung bijektiver Abbildungen wieder bijektiv ist.

Bsp $M_3 = \{1,2,3\}$

$f : M_3 \to M_3$

"  " $\in S_3$

Wir haben $|M_3|! = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Elemente.

$id_{M_3} = \pi_1 = (1 \to 1, 2 \to 2, 3 \to 3)$ $\qquad \pi_4 = (1 \mapsto 3, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 1)$

$\pi_2 = (1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 3)$ $\qquad \pi_5 = (1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 1)$

$\pi_3 = (1 \to 1, 2 \to 3, 3 \to 2)$ $\qquad \pi_6 = (1 \mapsto 3, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 2)$

Abgeschlossenheit $\pi_i \circ \pi_j \in S_3$? $\to$ Ja, weil Verknüpfung bijektiver Abbildungen wieder bijektiv.

bijektiv

Beweis: Sei $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ bijektiv. Dann gilt für bel. $x_1, x_2 \in X$

$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Leftrightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \overset{g \text{ inj.}}{\Rightarrow} f(x_1) = f(x_2) \overset{f \text{ inj.}}{\Rightarrow} x_1 = x_2 \Rightarrow g \circ f$ injektiv ✓

① g surjektiv, also $\forall z \in Z \ \exists y_0 \in Y$ mit $g(y_0) = z$

② f surjektiv, also $\exists x_0 \in X$ sodass $f(x_0) = y_0$

$\Rightarrow \forall z \in Z \ \exists x_0$ mit: $(g \circ f) x_0 \overset{②}{=} g(f(x_0)) \overset{①}{=} g(y_0) = z$ $\quad \Rightarrow g \circ f$ surjektiv ✓

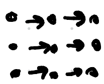
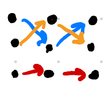
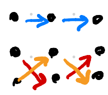
a) **Assoziativität**: $(\ \circ\ )\circ\ = \ \circ(\ \circ\ )$ $\forall f,g,h \in S_3$ gilt. ✓

Gilt nämlich sogar allgemeiner: $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$

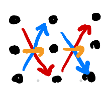
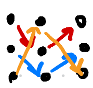
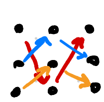
$[(h \circ g) \circ f](x) = [(h \circ g)(f(x))] = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = [h \circ (g \circ f)](x)$

b) **Neutrales Element**: π_1 denn $\forall i \in \{1, \dots, 6\}$: $\underbrace{\pi_1}_{id_{M_3}} \circ \pi_i = \pi_i \circ \pi_1 = \pi_i$

c) **Inverses Element**: $\pi_1 \circ \pi_1 = id_{M_3}$, $\pi_2 \circ \pi_2 = id_{M_3}$, $\pi_3 \circ \pi_3 = id_{M_3}$

$\pi_4 \circ \pi_4 = id_{M_3}$, $\pi_5 \circ \pi_6 = id$, $\pi_6 \circ \pi_5 = id_{M_3}$

$\Rightarrow (S_3, \circ)$ Gruppe ✓

Körper: Menge $\mathbb{K}$ mit $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ Körper falls:
(english field, $\mathbb{F}$)

a) $(\mathbb{K}, +)$ ist $\underbrace{\text{kommutative}}_{\forall a,b \in \mathbb{K}:\ a+b = b+a}$ Gruppe mit $0 \in \mathbb{K}$ als neutrales Element:

b) $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist kom. Gruppe mit $1 \in \mathbb{K}$ als neutrales Element.
c) $\forall x,y,z \in \mathbb{K}$: $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ (Distributivgesetz)

Bsp)

Algebraischer Körper (Abstract Algebra)

Aufgabe. Zeige, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ein Körper ist, und bestimme zu $x = a + b\sqrt{2} \neq 0$ das Inverse.

Addition und Multiplikation sind die üblichen von $\mathbb{R}$ induzierten Operationen:

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2},$$

$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}.$$

$(K, +)$ ist eine kommutative Gruppe (NE $= 0$)

- **Abgeschlossenheit:** $a + c \in \mathbb{Q}$, $b + d \in \mathbb{Q}$ ⇒ Summe liegt in K.
- **Assoziativität/Kommutativität:** von $(\mathbb{R}, +)$ geerbt, also auch in K.
- **Neutrales Element:** $0 = 0 + 0\sqrt{2}$. weil $0 + (a+b\sqrt{2}) = (a+b\sqrt{2})$
- **Inverses Element:** Zu $x = a + b\sqrt{2}$ ist $-x = (-a) + (-b)\sqrt{2} \in K$.

$(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe (NE $= 1$)

- **Abgeschlossenheit:** Für $x = a + b\sqrt{2}$, $y = c + d\sqrt{2}$ sind $ac + 2bd$, $ad + bc \in \mathbb{Q}$ ⇒ $xy \in K$.
- **Assoziativität/Kommutativität:** von $(\mathbb{R}, \cdot)$ geerbt.
- **Neutrales Element:** $1 = 1 + 0\sqrt{2}$.
- **Inverses Element:** Sei $x = a + b\sqrt{2} \neq 0$. Dann

$$x^{-1} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}. = \left(\frac{a}{a^2-2b^2}\right) + \left(\frac{-b}{a^2-2b^2}\right) \cdot \sqrt{2}$$

Begründung: $(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$. $\Rightarrow x \cdot x^{-1} = 1$
Ist $a^2 - 2b^2 = 0$ und $b \neq 0$, dann $(a/b)^2 = 2$ — unmöglich für $a/b \in \mathbb{Q}$.
Ist $b = 0$, dann $a \neq 0$ (weil $x \neq 0$) und der Nenner $a^2 \neq 0$. $x = a + b\sqrt{2}$
Also $a^2 - 2b^2 \neq 0$. Zudem

$$x^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 - 2b^2}\right) + \left(\frac{-b}{a^2 - 2b^2}\right)\sqrt{2} \in K,$$

da Quotienten rationaler Zahlen wieder rational sind.

} Nenner $a^2 - 2b^2$ wird nicht Null

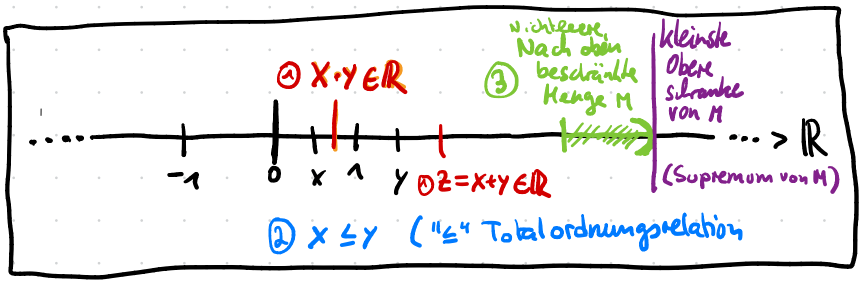
Distributivgesetz:

$x(y+z) \overset{!}{=} xy + xz$

einfach für allgemeine x, y, z überprüfen .... stimmt. ✓

A: **Reelle Zahlen $\mathbb{R}$** in a Nutshell

⇝ Axiome in der VL
⇝ $\mathbb{R}$ ist Körper & eindeutig



Notation

→ Intervalle: $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ $\quad [a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ $\quad (a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

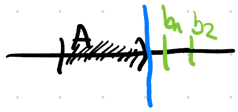
→ Betrag: $|x| := \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

→ Dreiecksungleichung: Sei $x, y \in \mathbb{R}$: $|x + y| \leq |x| + |y|$

Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$: Für zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ existiert immer eine rationale Zahl $r = \frac{m}{n}$ mit $a < r < b$.
⇒ Jede reelle Zahl kann bel. gut mit rationalen Zahlen approximiert werden.

Supremum / Infimum : $A \subset \mathbb{R}$ heißt nach oben beschränkt falls $\exists$ eine obere Schranke $b \in \mathbb{R}$ mit $a \le b$ $\forall a \in A$.

Supremum: kleinste obere Schranke $s \le b$ $\forall$ anderen oberen Schranken



Infimum: größte untere Schranke (analog)

Maximum: Falls $\sup(A) \in A \Rightarrow \max(A) = \sup(A)$

Minimum: Falls $\inf(A) \in A \Rightarrow \min(A) = \inf(A)$

Bsp: $A = [-5,3)$, $\inf(A) = -5 \in A \Rightarrow \min(A) = 5$

$\sup(A) = 3 \notin A \Rightarrow \max(A)$ existiert nicht.

Bsp:

Aufgabe 3. **(Supremum und Infimum)**

Bestimmen Sie, falls möglich, Supremum und Infimum der folgenden Mengen:

$$M_1 := \{1 + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$$
$$M_2 := \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 \geq 0\}$$
$$M_3 := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 9\}$$
$$M_4 := \{2^{-m} + n^{-1} : m, n \in \mathbb{N}\}$$

Handelt es sich dabei auch um Maximum bzw. Minimum der Mengen?

a) Sei $a \in M_1 \overset{\text{Def.}}{\Rightarrow} \exists n \in \mathbb{N}$ sodass $a = 1 + (-1)^n \begin{cases} \text{I) } n \text{ gerade} \Rightarrow a = 2 \\ \text{II) } n \text{ ungerade} \Rightarrow a = 0 \end{cases} \Rightarrow M_1 = \{0, 2\}$

$\Rightarrow \min M_1 = \inf M_1 = 0$, $\max M_2 = \sup M_2 = 2$

b) $x^2 + x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{(x + \tfrac{1}{2})^2}_{\geq 0} + \underbrace{\tfrac{3}{4}}_{> 0} \geq 0$ gilt $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow M_2 = \mathbb{R} \Rightarrow$ kein Sup/Inf und erst recht kein Min/Max

c) $x^2 < 9 \Leftrightarrow |x| < 3 \Rightarrow M_3 = (-3,3) \cap \mathbb{Q}$

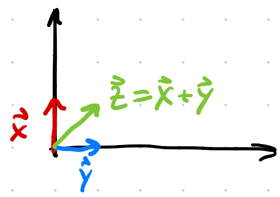
Also $\inf((-3,3)) = -3$, $\sup((-3,3)) = 3 \overset{\mathbb{Q} \text{ dicht in } \mathbb{R}}{\Rightarrow}$ $\inf(M_3) = \inf((-3,3)) = -3 \notin M_3$, $\sup(M_3) = 3 \notin M_3 \Rightarrow$ Es existiert kein Min/Max

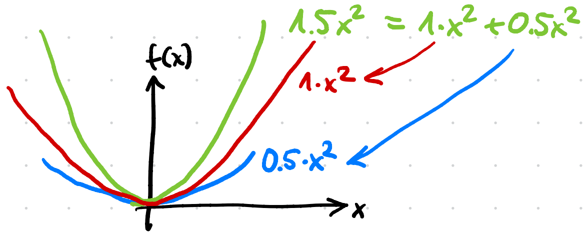
d) $\frac{1}{2^m} + \frac{1}{n} \geq 0 \;\; \forall n, m \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ $\frac{1}{2^1} > \frac{1}{2^2} > \dots$ & $\frac{1}{1} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots$ (monoton fallend)

$\Rightarrow a = \frac{1}{2^m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = 3/2$. Weil $\frac{3}{2} \in M_4 \Rightarrow \sup(M_4) = \max(M_4) = \frac{3}{2}$

Weil $\frac{1}{2^m} + \frac{1}{n} \to 0$ für $n, m \to \infty$ gilt $\inf(M_4) = 0$. $0 \notin M_4 \Rightarrow$ kein Minimum.

LA Lineare Algebra: ⇝ Was heißt "Vektor"?





Vektorraum: Menge V zsm. mit Körper $\mathbb{K}$ heißt Vektorraum falls:

a) $(V,+)$ ist kommutative Gruppe

b) Es gibt $\begin{cases} "\bullet": \mathbb{K} \times V \to V \\ (\alpha, v) \mapsto \alpha v \end{cases}$ mit

Skalar → α, Vektor → v

Mult. in $\mathbb{K}$

$(\alpha \cdot \beta) \bullet v = \alpha \bullet (\beta \bullet v)$ (Assoziativ)

$(\alpha + \beta) \bullet v = \alpha \bullet v + \beta \bullet v$

$\alpha \bullet (v + w) = \alpha \bullet v + \alpha \bullet w$

$1 \bullet v = v$

→ $\bullet : \mathbb{K} \times V$ ist skalare Multiplikation

→ $\vec{0} \in V$ (oder 0_V) ist neutrales Element in $(V,+)$

Bsp:

Aufgabe

Entscheiden Sie jeweils, ob die angegebene Struktur ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist. Begründen Sie kurz.

1. $U := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$ mit **üblichen** Verknüpfungen.
2. $V := \mathbb{R}^2$ mit **üblicher** Addition, aber modifizierter Skalarmultiplikation

$$\alpha \odot (x,y) := (\alpha x,\ \alpha y + (\alpha - 1)).$$

1) Nullvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$ weil $0 - 0 + 2 \cdot 0 = 0$ ✓

Abschluss Addition: $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ u' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in U$, $u + u' = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$ wieder $\in U$ weil:

$$\text{es gilt } (x+x') - (y+y') + 2(z+z') = \underbrace{(x - y + 2z)}_{=0,\ u \in U} + \underbrace{(x' - y' + 2z')}_{=0 \text{ weil } u' \in U} = 0 \ ✓$$

Abschluss Skalare Multipl.: Für $\alpha \in \mathbb{R}, u \in U$: $\alpha u = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}$ mit $\alpha x - \alpha y + 2\alpha z = \alpha(x - y + 2z) = 0$

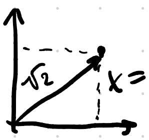
2) $0 \odot (x,y) = (0 \cdot x,\ 0y + (0-1)) = (0,-1) \neq (0,0)$ ⇒ kein Vektorraum weil $0_V \overset{!}{=} 0 \cdot x$

Norm: $\|\bullet\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist Norm falls:

a) $\forall x \in V$: $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_V$ (Nullvektor)

b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}: \forall x \in V: \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

c) $\forall x,y \in V: \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$



$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\|x\|_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Bsp.:

Aufgabe 75. **(Normen)**

a) Berechnen sie die euklidische Norm $\|\cdot\|_2$, die Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ und die Betragssummennorm (1-Norm) $\|\cdot\|_1$ der folgenden Vektoren:

$$\vec{a} := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} := \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Was fällt Ihnen auf?

$$\|\vec{a}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 5^2} = \ldots = \sqrt{30}$$

$$\|\vec{a}\|_\infty = \max_{i \in \{1,..,3\}} |a_i| = \max(\{|a_i| : 1 \leq i \leq 3\}) = 5$$

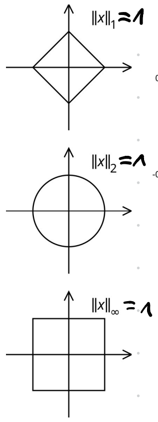
$$\|\vec{a}\|_1 = \sum_{i=1}^{3} |a_i| = |2| + |-1| + |5| = 8$$

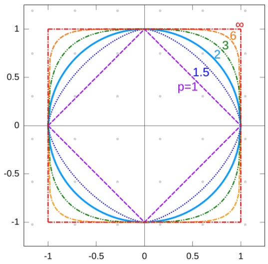
$\vec{b} \mathrel{\hat{=}}$ Einheitsvektor $\Rightarrow \|b\|_2 = \|b\|_\infty = \|b\|_1 = 1$

$\vec{c}, \vec{d}$ analog...

Es fällt auf $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$

$\leadsto$ Normäquivalenzen





(p-Normen)

$$\|x\|_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$$