

- O: Pü4 + Fragestunde  
A: PI, Stokes  
N: Penalty, Barrier

Globalübung 14  
 WS 24/25 - Mathe 3

29.01.2025 ①  
 Lambert Theisen

**A Partielle Integration:** (Folgerung von Green)  $\int_M \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\partial M} v \nabla u \cdot \nu \, dS - \int_M v \Delta u \, dx$  (Menge mit st. weise glatten Rändern)

$$\int_M \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\partial M} v \nabla u \cdot \nu \, dS - \int_M v \Delta u \, dx \quad \Delta: f \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dots$$

mit Laplace-Operator  $\Delta u := \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{(\partial x_k)^2}$  ("Summe der 2ten Ableitungen")

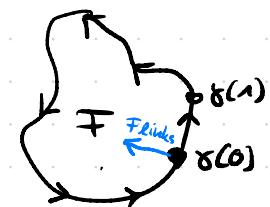
→ Später sehr wichtig (Mathe 5)

$$\begin{aligned} \int_M \nabla u \cdot \nabla v \, dx &= \int_{\partial M} v \nabla u \cdot \nu \, dS - \int_M v \Delta u \, dx \\ &\stackrel{\text{Läng}}{=} \int_{\partial M} v \nabla u \cdot \nu \, dS - \int_M v \Delta u \, dx \end{aligned}$$

**A Satz von Stokes**

Für stetig diffbares Vektorfeld  $f$  auf regulärerem Fläche  $F$  gilt

$$\int_F \operatorname{rot} f \cdot \nu \, d\sigma = \int_{\partial F} f \cdot \nu \, ds$$



$\operatorname{rot} f$  nur in 3D definiert.  
 $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$

wobei  $\nu$  parametrisiert Randkurve  $\partial F$  mit positiver Orientierung

("Fläche liegt links beim Durchlaufen von  $\gamma$ ")

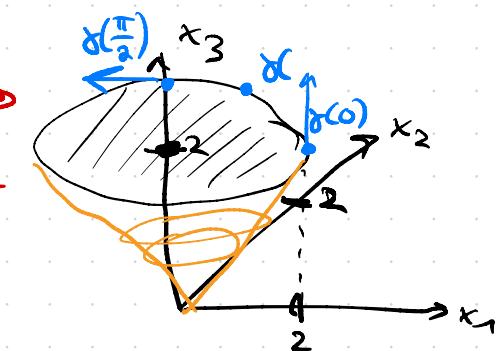
**Beispiel:** Sei  $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_2 \\ -x_1 x_3 \\ x_2 x_3^2 \end{pmatrix}$  sowie die Fläche

$$F = \left\{ x_3 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \wedge x_3 = 2 \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}. \text{ Verifizierte Stokes.}$$

I) Berechne RHS:  $\int_{\partial F} f \cdot \nu \, ds$

$$\text{Randkurve } \gamma(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos(t) \\ 2 \sin(t) \\ 2 \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi]$$

ist "positiv orientiert"



$$\text{Daher } \int_{\partial F} f \cdot \nu \, ds = \int_0^{2\pi} \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

GÜND: Arbeitsintegral

$$\text{mit } \gamma'(t) = \begin{bmatrix} -2 \sin(t) \\ 2 \cos(t) \\ 0 \end{bmatrix}, f(\gamma(t)) = \begin{bmatrix} 6 \cdot \sin(t) \\ -4 \cos(t) \\ 4 \sin(t) \cos^2(t) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} f \cdot ds = \int_0^{2\pi} \left[ \begin{array}{c} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} 6\sin(t) \\ -4\cos(t) \\ 4\sin(t)\cos^2(t) \end{bmatrix} dt$$

RHS Stokes

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} [-12\sin^2(t) - 8\cos^2(t)] dt \\
 &= \int_0^{2\pi} [-12(1-\cos^2(t)) - 8\cos^2(t)] dt \\
 &= -12 \int_0^{2\pi} 1 dt + 4 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2(t)}_{\pi} = -24\pi + 4\pi = -20\pi
 \end{aligned}$$

II) LHS:  $\int_F \operatorname{rot} f \cdot \nu \, ds$

$$\nabla \times f = \begin{bmatrix} \partial x_2 f_3 - \partial x_3 f_2 \\ \partial x_3 f_1 - \partial x_1 f_3 \\ \partial x_1 f_2 - \partial x_2 f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3^2 - (-x_1) \\ 0 - 0 \\ -x_3 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_3^2 \\ 0 \\ -x_3 - 3 \end{bmatrix}$$

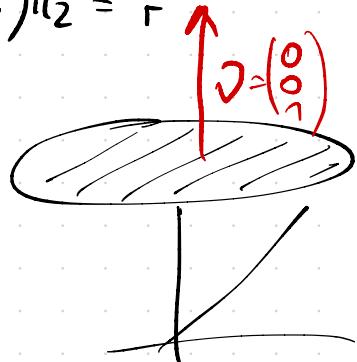
Fläche  $F$ :  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 2 \end{pmatrix}$

$0 \leq r \leq 2$   
 $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$\Rightarrow \|\nu\|_2 = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right\|_2$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = r$$

$$\Rightarrow \nu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left( = \frac{\partial \Phi / \partial r \times \partial \Phi / \partial \varphi}{\|\partial \Phi / \partial r \times \partial \Phi / \partial \varphi\|_2} \right)$$



$$\Rightarrow \int_F \operatorname{rot} f \cdot \nu \, ds = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (\operatorname{rot} f)(\Phi(r, \varphi)) \cdot \nu \, d\varphi \, dr$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} r \cos \varphi + r^2 \sin^2 \varphi \\ 0 \\ -3 - 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\varphi dr \\
 &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} -5 \, d\varphi dr = \int_0^2 -10\pi \, dr = -20\pi
 \end{aligned}$$

Stokes verifiziert weil LHS = RHS.

### Framework:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} h(x) = 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in X$$

Problem: Constrained Min. ist "schwieriger" als Unconstrained Min.

$$\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}$$

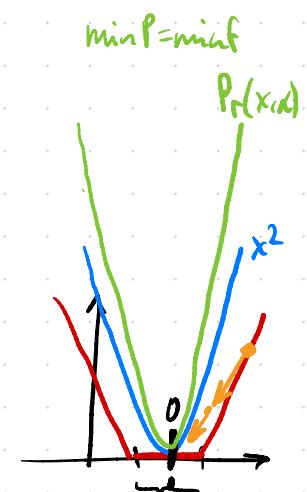
Penalty Methods: Benutze  $P_r(x, \alpha) = f(x) + \alpha r(x)$  sodass

$$\min_{x \in X} f(x) \approx \min_{x \in \mathbb{R}^n} P_r(x, \alpha)$$

→ Penalty Function:  $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig,  $\geq 0$ ,  $= 0$  in  $X$

→ Exaktheit:  $P_r$  ist exakt falls: bei  $x^* = \arg \min_{x \in X} f$   $\exists \hat{\alpha} > 0$  sodass  $x^*$

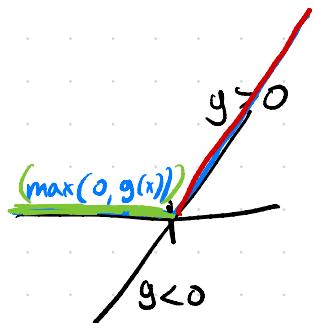
$$x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} P_r(x, \alpha) \quad \text{für ein } \alpha \geq \hat{\alpha}$$



Beispiele:

### 1-Power Exterior Penalty (exakt)

$$r_1(x) := \sum_{i=1}^q (|h_i(x)|)^1 + \sum_{j=1}^m (\max(0, g_j(x)))^1$$

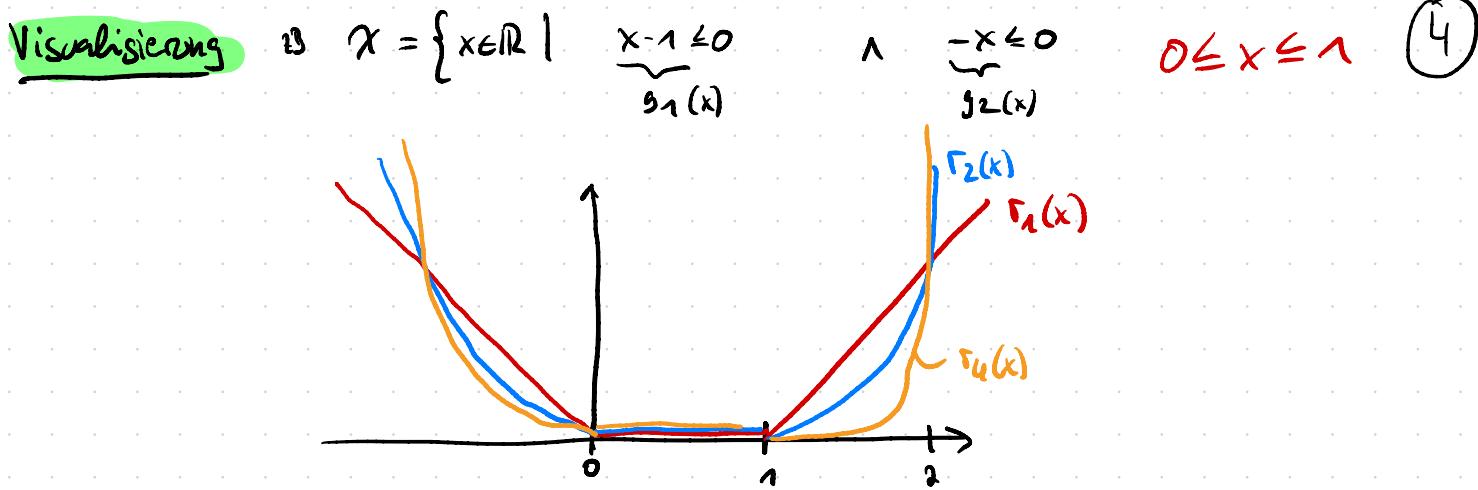


### p-Power Exterior Penalty

$$f(x) + \alpha \cdot r_p(x) := \sum_{i=1}^q |h_i(p)|^p + \sum_{j=1}^m (\max(0, g_j(x)))^p \quad p \geq 1$$

### p-Norm Exterior Penalty

$$r_{1:n,p}(x) := (r_p(x))^{1/p}$$



Problem: Differenzierbarkeit ist nicht immer gegeben, Siehe oben los  $r_i(x)$ .

↳ Braucht man aber oft für z.B. Gradient ( $\nabla f$ ) oder Newton ( $\nabla^2 f$ ) Methoden.

ND Julia Demo

Barrier Methods: Benutze Barrier Function:  $B(x, \beta) := f(x) + \beta I(x)$ ,  $\beta > 0$

mit Interior Function  $I(x)$ : I)  $I(x) < \infty \quad \forall x \in \text{int}(X)$   
 II)  $I(x) = \infty \quad \forall x \in \partial X \cup (\mathbb{R}^n \setminus X)$

Beispiele: Inverser "Innenfunktion":

(für  $g \geq 0$   
 jetzt!)

$\Leftrightarrow g \leq 0$

$$I_{inv}(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^m \frac{1}{g_i(x)}, & x \in \text{int}(X) \\ \infty, & \text{else} \end{cases}$$

Logarithmische Innenfunktion  $I_{log}(x) := \begin{cases} \sum_{i=1}^m -\log(g_i(x)), & x \in \text{int}(X) \\ \infty, & \text{else} \end{cases}$

Anwendung Barrier Methods:

→ Löse  $x^{(k+1)} = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} B(x, \beta_k)$  mit  $(\beta_k > \beta_{k+1} > \dots) \cap (\beta_k \rightarrow 0)$

sodass  $\lim_{k \rightarrow \infty} B(x, \beta_k) \stackrel{\text{(Linear. Abb)}}{=} f(x) + \underbrace{\left( \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k \right) I(x)}_{\rightarrow 0} = f(x) \quad x \in \text{Int}(X)$

Linear Programming (LP):

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{Standard Form})$$

$x \in \mathbb{Z}^n$  (integer)  
 LP

oder Kanonisch:  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \quad \text{s.t.} \quad \{Ax \geq b\}$

$$\hookrightarrow h(x) = Ax - b, g(x) = x, f(x) = c^T x$$

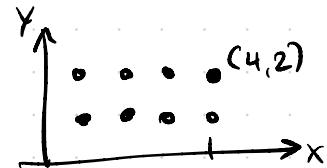
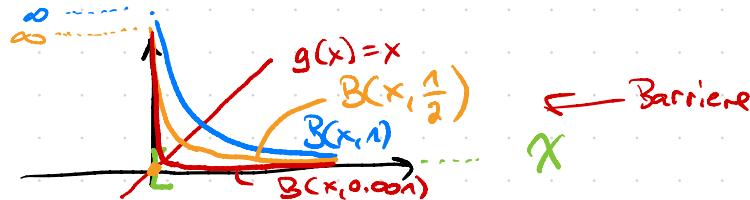
(5)

## Eigenschaften von LPs:



→ Feasibility Region ist Polytop (Punkt, Strecke, Polygon, Polyeder, ...), der auch unbeschränkt sein kann

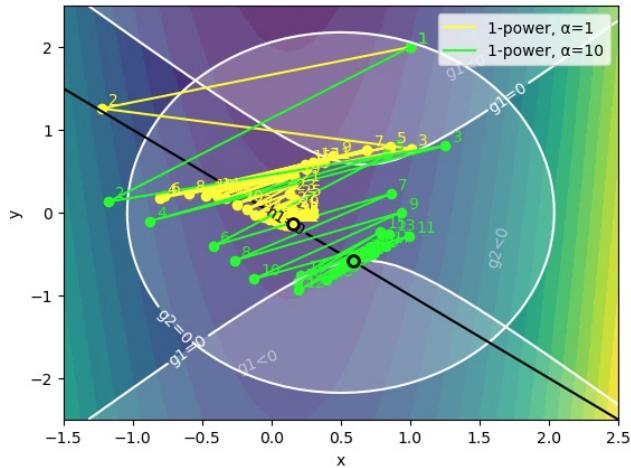
→ Falls  $X$  bounded  $\Rightarrow x^*$  liegt auf Eckenpunkt ("Eckenpunkt-Check") (Algorithmus)



## Demo: Penalty Method

### Solve and Visualize Convergence History

steps =  50, penalty =  1, ap =  1



```
visualize([
    gradient_descent_wolfe(x->P(x, p, 1, 1), [1,2], steps)[2],
    gradient_descent_wolfe(x->P(x, p, 10, 1), [1,2], steps)[2],
], p, legend = ["1-power, alpha=1", "1-power, alpha=10"],
showotherfunction = if penalty x->P(x, p, ap, 1) else nothing end
)
```