PDE $\hat{=}$ SYSTEM, DYNAMIK , IC. BC. $\hat{=}$ Anregung, Eingang

$u_x(\partial\Omega)$, $u_0 \rightarrow \boxed{\text{PDE}} \rightarrow u$ "Blackbox"

1

- Advektionsgl.: $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ | Chainrule

$\Leftrightarrow \partial_t u + \underbrace{f'(u)}_{a:=} \partial_x u = 0$ | General: $\partial_{x_1} + a\,\partial_{x_2} = 0$

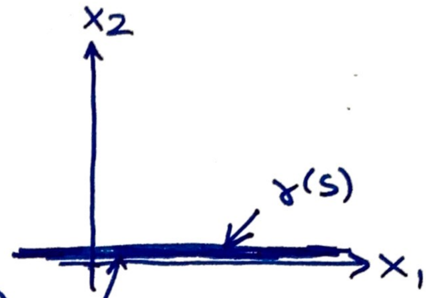
mit $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

- IC.: $u(x,0) = u_0(x)$ is given

$=: u_0(\gamma(s))$

- hinreichend Glatte Kurve: $\gamma(s): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $s \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(s) \\ \gamma_2(s) \end{pmatrix}$

Parameter "Schieberegler"



→ Auf dieser sind die IC/BC bekannt.

→ ZB. bei uns: $\gamma(s) = \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ wenn $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$

- Bestimmung von über Taylor: $u(x_0+h, y_0+k) = \overset{\text{bekannt ✓ aus IC.}}{u(x_0,y_0)} + h \overset{?}{u_x}(x_0,y_0) + \overset{✓}{k}\, \overset{?}{u_y}(x_0,y_0)$

$+ \frac{1}{2}h^2 \overset{?}{u_{xx}}(x_0,y_0) + \frac{1}{2}k^2 \overset{?}{u_{yy}}(x_0,y_0)$

$+ h \cdot k \cdot \overset{?}{u_{xy}}(x_0,y_0) + \frac{1}{6}h^3 \overset{?}{u_{xxx}}(x_0+y_0)$

$+ (\ldots)$

→ Exakte Bestimmung von u möglich sofern alle Ableitungen ermittelbar! → NICE

- Ermittelung von u_x, u_y: I) PDE liefert 1 Gleichung für u_x, u_y

→ Aber: Wir brauchen zusätzliche Gl. !

→ Betrachte Ableitung entlang der Kurve $\gamma(s)$ wo wir Werte vorgeben. Denn wenn wir Werte vorgeben, können wir von diesen auch die Ableitungen berechnen.

→ II) $\underbrace{\frac{d}{ds} \underbrace{u_0(s)}_{\text{bekannt, vorgegeben}}}_{\text{Ableitung daher auch bekannt!}} = \frac{d}{ds} u(\gamma(s)) \overset{CR.}{=} \underbrace{\frac{\partial \gamma_1}{\partial s}}_{\gamma_1'} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{u_x} + \underbrace{\frac{\partial \gamma_2}{\partial s}}_{\gamma_2'} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{u_y}$ (das ist die Zweite Gl. !)

$\boxed{\text{Suchen wir}}$

• LGS für u_x, u_y: • informell

Koeffs. von:

$$\begin{array}{l} \text{I)} \\ \text{II)} \end{array} \begin{pmatrix} \text{— PDE —} \\ \text{— Abl. von IC —} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{PDE}_{RHS} \\ \text{Ableitung von } u_0 \end{pmatrix}$$

Formell $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} \gamma_1'(s) & \gamma_2'(s) \\ f'(u) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0'(s) \\ 0 \end{pmatrix}$$

bekannt, u_0 bekannt $\Rightarrow u_0'(s)$ bekannt.

u_y: u_t

Skalierung des PDE bringt die 1

vgl. $\begin{cases} 4\partial_t u + 8\partial_x u = 0 \\ \Leftrightarrow \partial_t u + 4\partial_x u = 0 \end{cases}$

FRAGE: $\Rightarrow$ Nun können wir u_x, u_y ermitteln und in den Taylor einsetzen

• Können die Verbleibenden Ableitung $u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \ldots$ auch bestimmt werden? $\rightarrow$ JA

• Ermittlung höherer Ableitungen:

$\rightarrow$ Wir haben $u_x = f_1(x, y, u)$ siehe oben.

$u_y = f_2(x, y, u)$

• Betrachte $u_{yy} = \left.\frac{\partial u_y}{\partial y}\right|_{x=const} = \frac{d f_2(x,y,u)}{\partial y}$

$$\overset{C.R.}{=} \underbrace{\frac{\partial f_2}{\partial y}}_{\text{bekannt von vorher}} + \underbrace{\frac{\partial f_2}{\partial u}}_{\text{bekannt ✓}} \underbrace{\frac{du}{dy}}_{u_y ✓} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \cancel{\frac{dx}{dy}} +$$

$x = const!$

$\rightarrow$ D.h: u_{yy} & u_{xx} können berechnet werden

• $u_{xy} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial y}\right|_{x=const} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial y}\right|_{y=const} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{y=const}$

$$= \underbrace{\frac{\partial f_2}{\partial x}}_{\text{bekannt}} + \underbrace{\frac{\partial f_2}{\partial u}}_{\text{weil } f_2 \text{ bekannt}} \underbrace{\frac{du}{dx}}_{= u_x = f_1 \text{ bekannt ✓}} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \cancel{\frac{dy}{dx}}$$

$y = const!$

- Wir haben nun also u_x & u_y.....
- Ermittlung der restlichen Ableitungen: u_{xxx}, u_{yyy}, u_{xxy}, u_{yyx},... analog aus niedrigeeren Ableitungen.
- Bestimmung der Lösung u: → Wir können also mit dem Taylor an beliebigen Stellen (x_0+h, y_0+k) die Funktion u bestimmen ausgehend von den IC./BC. auf $\gamma(s) \hat{=} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ weil wir alle Ableitungen kennen (exakt keine Approx.!!)
- ABER: → $\boxed{\text{Es gibt ein Problem bei der } u_x, u_y \text{ Bestimmung}}$

→ Reminder: Gleichungssystem: $\begin{pmatrix} \gamma_1'(s) & \gamma_2'(s) \\ f'(u) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0'(s) \\ 0 \end{pmatrix}$

→ Wann hat das Gl.system überhaupt eine Lösung?

→ Gibt es womöglich Einschränkungen an die Kurve $\gamma(s)$, an der wir IC./BC. vorgeben?

- Gl.system keine Lösung falls: $\det \begin{pmatrix} \gamma_1'(s) & \gamma_2'(s) \\ f'(u) & 1 \end{pmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow \gamma_1'(s) - f'(u)\,\gamma_2'(s) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma'(s) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(s) \\ \gamma_2'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(u) \\ 1 \end{pmatrix}}$$

- Die Kurve $\gamma_{char}(s)$ an der die Determ. Null wird (wir also dort keine IC/BC vorgeben können um u exakt überall zu bestimmen), nennen wir Charakteristik, weil sie unser System ($\hat{=}$ PDE) charakterisiert!