

- 01 • Donat auf Dienstreise  $\Rightarrow$  daher Lambert diese Woche (sonst wieder in 2ter Hälfte)

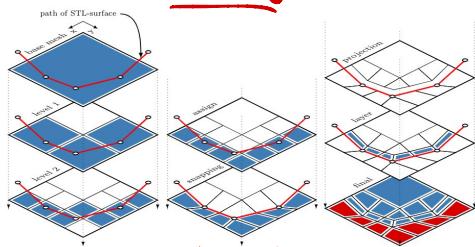
Lambert:

- CES : • B.Sc. 2014-2018 (Thesis @ Torrigho)  
 • M.Sc. 2018-2019 (Thesis @ Torrigho)

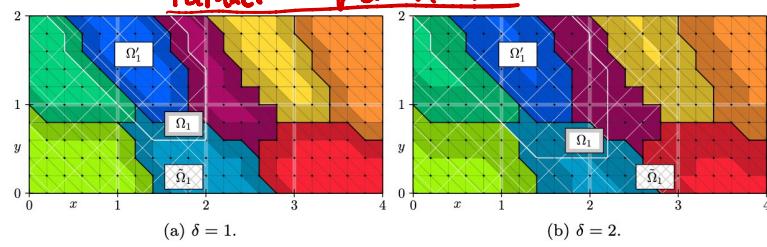
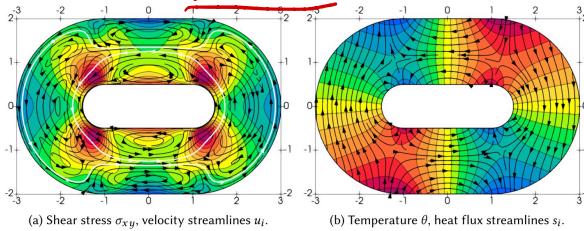
- Applied Math: • Dr. 2019-2024 (Thesis @ Stamm in Aachen/Stuttgart)  
 • Post-doc 2024-now @ ACoM

Fragen: Per Moodle oder Mail ( $\Rightarrow$  www.thsn.de)

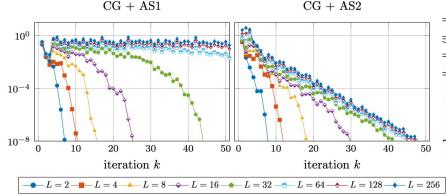
Meshting:



Simulation:



Mathematische Analyse:



$$v = x(x-1) \in C^1 \cup \{u(0) = v(0) = 0\}$$

A Reminder...

Variationsrechnung: Funktional ( $D \subset V$ ):  $F: D \rightarrow \mathbb{R}$

Vektorraum

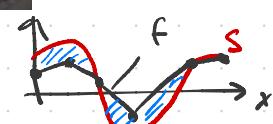
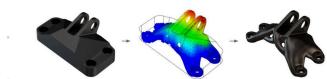
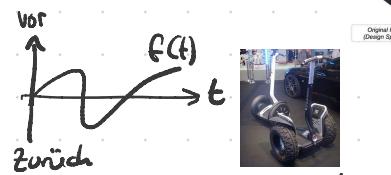
$C^1 \approx$

$$\begin{cases} \mathbb{R}^n \ni x \mapsto \|x\|_2 \in \mathbb{R} \\ C^0([0,1]) \ni f \mapsto \max_{x \in [0,1]} f(x) \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Oft wollen wir Funktionale minimieren:

- Structure Optimierung  $\Rightarrow f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \{0,1\}$
- Optimale Steuerung (Segway)
- Machine Learning: Loss  $\equiv$  Funktional
- Funktionen-Approximation:

$\rightarrow$  Welches Stückweise Polynom minimiert Abstand  $\|f-s\|$ ?



1ste Variation / Gateaux Ableitung: Sei  $V$  ein VR,  $D \subset V$ ,  $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ . Sei  $u \in D$ ,  $v \in V$  mit  $u+t v \in D$   $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  mit  $\varepsilon > 0$ . Dann ist

$$\delta F(u; v) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u+t v) - F(u)}{t} = \frac{d}{dt} F(u+t v) \Big|_{t=0}$$

(vgl. Differenzenquotient Mathe 1)

die 1ste Var. von  $F$  bei  $u \in D$  in Richtung  $v \in V$ .



$\rightarrow$  Wenn  $u_0 \in D$  eine Extremstelle, dann ist  $\delta F(u_0; v) = 0 \forall v$  (vgl. Mathe 2 oder Schule)

Bsp.: Finde  $u \in \{u \in C^2 \mid u(0) = u(1) = 0\}$  sodass  $\mathcal{F}(u) := \int_0^1 \frac{1}{2}(u')^2 + \frac{1}{2}u^2 \rightarrow \min.$

Sei  $v \in D$ :

$$\delta \mathcal{F}(u; v) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\int_0^1 [\frac{1}{2}(u+\gamma v)']^2 + \frac{1}{2}(u+\gamma v)^2 - \int_0^1 \frac{1}{2}(u')^2 + \frac{1}{2}u^2}{\gamma}$$

$$= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left[ \int_0^1 \frac{(u')^2 + 1 \cdot \gamma u' v' + \gamma^2 (v')^2 + u^2 + \gamma u v + \gamma^2 v^2}{2} \right] - \left[ \int_0^1 \frac{1}{2}(u')^2 + \frac{1}{2}u^2 \right]$$

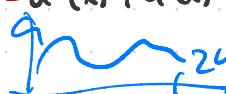
$$= \int_0^1 (u' v' + u v) dx \stackrel{!}{=} 0, \text{ aber wie lautet } u(x)?$$

$x, y \in \mathbb{R}^4$

$$y^T x = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^4$$

$\mathcal{S}(\cdot)$   $\Leftrightarrow \int_0^1 (u'' + u) v dx \stackrel{!}{=} 0$  Fundamentalsatz: Falls für  $f \in C([a,b])$  gilt

$$\Leftrightarrow -u''(x) + u(x) \stackrel{!}{=} 0$$

 Emin dann ist  $f(x) = 0$

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = 0 \quad \forall g \in C^2([a,b]) \text{ mit } g(a) = g(b) = 0,$$

→ Geht das nicht einfacher?

→ Euler-Lagrange DGL: Sei diff'bares  $f: [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$

$$\& \mathcal{F}: C^2([a,b]) \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \int_a^b f(x, y, y') dx \text{ sowie}$$

$$D = \left\{ u \in C^2([a,b]) \mid \begin{array}{l} u(a) = \alpha \text{ oder } \frac{\partial F}{\partial y'}(a, u(a), u'(a)) = 0 \\ u(b) = \beta \text{ oder } \frac{\partial F}{\partial y'}(b, u(b), u'(b)) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\int f(x, y, y') = \frac{1}{2} y'^2 + \frac{1}{2} y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 2 \cdot \frac{1}{2} y' = y'$$

Hat  $\mathcal{F}$  auf  $D$  ein Min., so erfüllt dieses die Euler-Lag.-DGL:

$$\frac{\partial f}{\partial y} (x, u(x), u'(x)) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} (x, u(x), u'(x)) \right) = 0 \quad \text{für } x \in [a,b]$$

Bsp.:

Gegeben sei das Funktional  $F: D \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$F(u) = \int_0^1 \left( \frac{1}{2}(u'(x))^2 + \frac{1}{2}(u(x))^2 + \frac{\alpha}{4}(u(x)-1)^4 \right) dx$$

und

$$D := \{u \in C^2([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}.$$

- (a) Sei  $v \in D$ . Berechnen Sie die erste Variation von  $F$  im Punkt  $u$  in Richtung  $v$ .
- (b) Geben Sie eine Differentialgleichung an, der die Extremalen von  $F$  genügen.
- (c) Geben Sie für  $\alpha = 0$  eine Lösung der Differentialgleichung mit den durch  $D$  vorgegebenen Randbedingungen an.

a) Sei  $v \in D$ , dann gilt  $u+\gamma v \in D \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}$  weil  $C^2$  bleibt & Null-RB auf bleibt.

$$v = 2u$$

$$\text{Also } \delta \mathcal{F}(u; v) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{\gamma} (\mathcal{F}(u+\gamma v) - \mathcal{F}(u)) = \int_0^1 u'(x)v'(x) + u(x)v(x) + \alpha(u(x)-1)^3 v(x) dx$$

b)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} z^2 + \frac{\alpha}{4} (y-1)^4$  ist in allen Vars. stetig diff'bar.

$$\cdot \frac{\partial F}{\partial y} = f_y = y + \alpha(y-1)^3$$

$$\cdot \frac{\partial F}{\partial z} = f_z = z$$

$$\underbrace{u''(x)}$$

$$\text{Euler-Lag: } f_y(x, u(x), u'(x)) - \frac{d}{dx} f_z(x, u(x), u'(x)) = 0 \Leftrightarrow u(x) + \alpha(u(x)-1)^3 - \frac{d}{dx} u'(x) = 0$$

$$\text{c) } x=0 \Rightarrow u(x) - u''(x) = 0 \rightsquigarrow \text{Char. Poly: } -x^2 + 1 = (1+x)(1-x) = 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$$

$$\text{General solution: } u(x) = \sum C_i \exp(\lambda_i x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

$$\text{RB } u(0) = C_1 + C_2 = 0$$

$$u(1) = C_1 e + C_2 \cdot \frac{1}{e} = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1 e^2 \stackrel{!}{=} C_1 - C_1 e^2 = 0 \Leftrightarrow C_1(1 - e^2) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\Rightarrow u(x) = 0$$

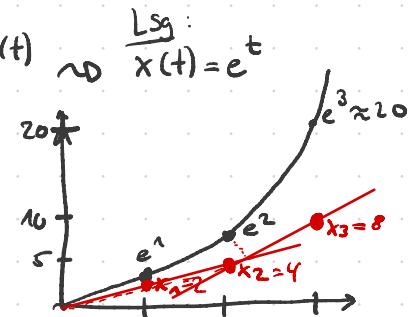
→ Fragen?

**N** Recap: ODE AWP:  $\begin{cases} x'(t) = f(x(t), t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$   $f$  &  $x_0$  gegeben

2B Expl. Euler:  $x_{t+h} = x_t + h \cdot f(x_t)$  für  $x'(t) = x(t)$   $x(0) = 1$  Lsg:  $x(t) = e^t$

$$h = 1$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + 1 \cdot x_0 = 1 + 1 = 2 \neq e^1 \\ x_2 &= 2 \cdot x_1 = 4 \neq e^2 \\ x_3 &= 2 \cdot x_2 = 8 \ll e^3 \end{aligned}$$



Das klappt nicht sooo gut... can we do better?

Runge-Kutta Verfahren: Betrachte expl. Einschrittverfahren ( $x_{j+1} = x_j + h \Psi(t_j, x_j, h)$ ) mit  $\Psi(t, x, h) = f(t, x) + \frac{1}{2}h(\partial_t f(t, x) + f(t, x) \partial_x f(t, x))$

$\Psi$  ist reverse engineered...

→ Warum? Weil lokales Truncation error

Kettenregel:  

$$\begin{aligned} x''(t) &= \frac{d}{dt} f(t, x(t)) \\ &= \partial_t f(t, x(t)) + \partial_x f(t, x(t)) \cdot f(t, x(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta(t, h) &= x_{j+1} - x(t_j, h) \\ &\stackrel{\text{Taylor}}{=} x_{j+1} - \left( x(t_j) + h \cdot x'(t_j) + \frac{1}{2} h^2 x''(t_j) + O(h^3) \right) \\ &\stackrel{\text{kettenregel}}{=} x_{j+1} - \left( x_j + h \cdot f(t_j, x_j) + \frac{1}{2} h^2 [\partial_t f(t_j, x_j) + f(t_j, x_j) \cdot \partial_x f(t_j, x_j)] + O(h^3) \right) \\ &\stackrel{x_{j+1}}{=} O(h^{2+1}) \Rightarrow \text{Konsistenzordnung 2} \end{aligned}$$

→ Sowas müsste man doch allgemeines machen können...

Def.: Für  $s \geq 1$  seien Zahlen  $b_i, c_i, a_{ij} \in \mathbb{R}$  ( $i, j = 1, \dots, s$ ) gegeben. Das  $s$ -stufige RK-Verfahren ist

$$x_{n+1} = x_n + h \sum_{j=1}^s b_j k_j = x_n + h \cdot \Psi(t_n, x_n, h) \quad \text{mit} \quad k_j = f\left(t_n + h \cdot c_j, x_n + h \sum_{k=1}^s a_{jk} k_k\right) \quad j = 1, \dots, s$$

Butcher Tableau:  $\begin{array}{c|ccccc} \subseteq & \mathbb{A} \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_s \end{array} = \begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{array} \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_s$

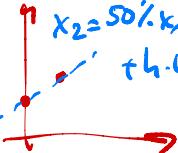
Explizitis Verfahren: Wenn  $A$  strikte Untere  $\Delta$ -Matrix, z.B.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  (nicht  $\Delta$ )

Bsp

Vorgelegt sei das folgende Butcher-Tableau:

0	0	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
0	1	

0.50.5



(a) Führen Sie für das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} f &= \dot{x}(t) = t \cdot \sin(x(t)) \\ x(0) &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

und die Schrittweite  $\Delta t = \frac{1}{2}$  einen Schritt des durch das Butcher-Tableau gegebenen Runge-Kutta-Verfahrens aus.

(b) Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Runge-Kutta-Verfahrens aus (a) direkt durch Taylorentwicklung.

(c) Konvergiert das Verfahren aus (a) für  $\Delta t \rightarrow 0$  gegen die exakte Lösung des AWPs?

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad k_1 &= f\left(t_0 + \frac{1}{2} \cdot 0, x_0 + \frac{1}{2} (0 \cdot k_1 + 0 \cdot k_2)\right) \\ &= f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(t_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}, x_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} k_1 + 0 \cdot k_2\right)\right) \\ &= f\left(\frac{1}{4}, \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} k_1\right) = \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad x_1 &= x_0 + h \cdot \underline{\Psi(t_0, x_0, h)} = x_0 + h \cdot \sum_{j=1}^2 b_j k_j \\ &= x_0 + h \cdot \left(0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{4\pi+1}{8} \end{aligned}$$

All k<sub>j</sub> eliminieren

k<sub>n</sub>

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \text{Gegebenes Verfahren: } x_{n+1} &= x_n + h \cdot k_2 = x_n + h \cdot f\left(t_n + h \cdot \frac{1}{2}, x_n + h \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot f(t_n, x_n)\right)\right) \\ &= x_n + h \cdot f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2} f(t_n, x_n)\right) \quad f(t_n, x_n) \text{ produziert} \\ &\stackrel{\text{Taylor (1st)}}{=} x_n + h \cdot \left[ f(t_n, x_n + \frac{h}{2} f(t_n, x_n)) + \frac{h}{2} f'_t(t_n, x_n + \frac{h}{2} f(t_n, x_n)) + O(h^2) \right] \\ &\stackrel{\text{Taylor (2nd)}}{=} x_n + h \cdot \left[ f(t_n, x_n) + \frac{h}{2} f(t_n, x_n) \cdot f_x(t_n, x_n) + O(h^2) \right] \\ &\quad + \frac{h}{2} \left\{ f_t(t_n, x_n) + \frac{h}{2} f(t_n, x_n) \cdot f_{tx}(t_n, x_n) + O(h^3) \right\} \\ &= x_n + h \cdot f(t_n, x_n) + \frac{h^2}{2} \left[ f(t_n, x_n) \cdot f_x(t_n, x_n) + f_{tx}(t_n, x_n) \right] + O(h^3) \end{aligned}$$

Taylor von

$$x(t+h) \stackrel{\text{S. der vorherigen}}{=} x(t) + h f(t, x) + \frac{h^2}{2} \left[ f_t(t, x) + f(t, x) f_x(t, x) \right] + O(h^3)$$

$$\Rightarrow x_{n+1} - x(t+h) \in O(h^{1+2}) \Leftrightarrow \text{Konsistenzordnung 2}$$

KK

c) Konvergenz: Ist Inkrementfkt.  $\Psi(t, x, h) = f\left(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2} f(t, x)\right)$  global x-Lipschitz? (für  $t \in [a, b]$ )

$$\Psi(t, x, h) = \left(t + \frac{h}{2}\right) \cdot \sin\left(x(t) + \frac{h}{2} \cdot (t \cdot \sin(x(t)))\right)$$

$$\frac{\partial \Psi(t, x, h)}{\partial x} = \left(t + \frac{h}{2}\right) \cdot \cos\left[x(t) + \frac{h}{2} \cdot (t \cdot \sin(x(t)))\right] \cdot \left(1 + \frac{h}{2} \cdot t \cdot \cos(x(t))\right)$$

$$\underset{t \in [a, b]}{\partial x} \leq \left(b + \frac{h}{2}\right) \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{h}{2} \cdot b\right) = \left(b + \frac{h}{2}\right) \left(1 + \frac{h}{2} \cdot b\right) = : L$$

=>  $\Psi(t, x, h)$  ist Lipschitz, i.e.  $\|\Psi(t, x, h) - \Psi(t, y, h)\| \leq L \cdot \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, t \in [a, b], h > 0$

Satz aus Vn  
⇒ Konsistenzordnung  $p \geq 1$  &  $\Psi$  global Lipschitz => Konvergenz mit Ordnung  $p$ , d.h.

$$\max_{t \in \Delta} \|x_e - x(t_e)\| \leq C \cdot h_{\max}^p$$

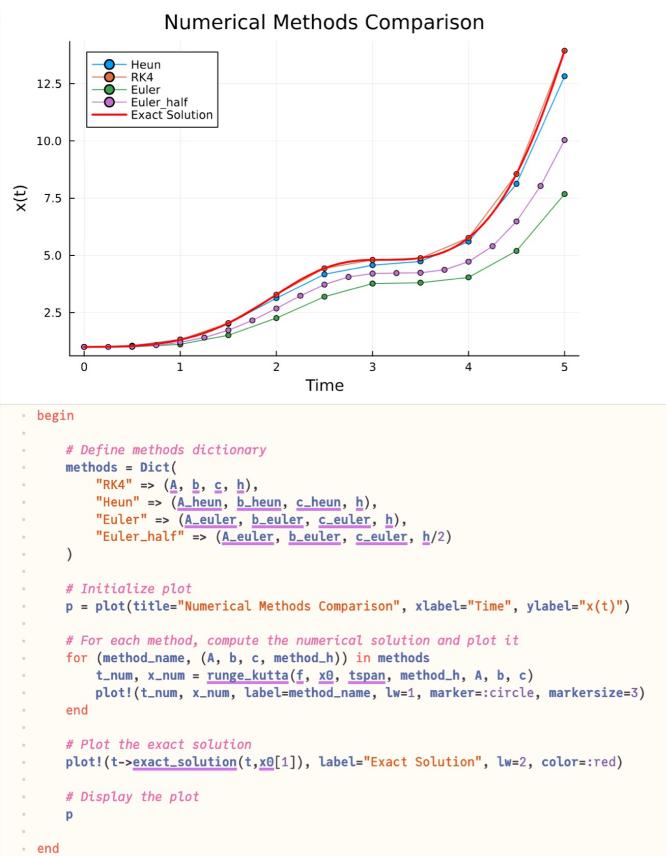
- Eigenschaften von RK können auch direkt aus  $\frac{A}{B}$  abgelesen werden
- Konsistenz  $p \geq s$  ( $\sum_{i=1}^s b_i = 1$ ), ( $p \leq s$ ) (5)
- $\rightarrow$  siehe VL

- Fragen?

Julia - Code : RK in Action.

### Comparing RK4 with Heun's and explicite Euler Method

We'll run the solver using Heun's method, explicit Euler and compare the numerical solution with the exact solution and the RK4 solution.



Bsp (aus Meiner Forschung): Sei  $u \in C^2([0,1])$  mit  $u(0) = u(1) = 0$ .  
Sei  $\mathcal{F}(u) := \int_0^1 [u']^2 / \int_0^1 u^2$  [vgl. Rayleigh-Quotient]

Dann  $\delta \mathcal{F}(u; v) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\int_0^1 [(u + \gamma v)']^2 / \int_0^1 (u + \gamma v)^2 - \int_0^1 [u']^2 / \int_0^1 u^2}{\gamma}$

$\downarrow$  Quotient regd

$$= \left( \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\int_0^1 [(u + \gamma v)']^2 - \int_0^1 [u']^2}{\gamma} \right) \cdot \int_0^1 u^2 - \int_0^1 u'^2 \cdot \left( \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\int_0^1 (u + \gamma v)^2 - \int_0^1 u^2}{\gamma} \right)$$

*Int. zu kompliziert*