



Interpolation,
Gauß

Vorlesungsübung 3 HM1 - WS 22

Lambert Theisen ①
30.11.2022

- ② : → Fragen?
- Videos gut so?

E6

Interpolation:

$$\text{Bsp: } 5x^2 + 7x + 8 \quad ?$$

$$5\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 7 \cdot \frac{\pi}{2} + 8 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Aufgabe V 6. Interpolation

Sei $\text{Pol}_2 \mathbb{R} := \left\{ \sum_{j=0}^2 \lambda_j X^j \mid \lambda_j \in \mathbb{R} \right\}$ die Menge aller reellen Polynome vom Grad höchstens 2 und $f(X) = \sin(X) + \cos(X)$.

- (a) Finden Sie $p(X) \in \text{Pol}_2 \mathbb{R}$ so, dass $p\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $p(\pi) = f(\pi)$ und $p\left(\frac{3\pi}{2}\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$. Ist das Polynom eindeutig bestimmt?

- (b) Bestimmen Sie für $k = 0, 1, 2$ und $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $x_1 = \pi$ und $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ die Lagrange-Polynome

$$L_k(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^2 \frac{X - x_j}{x_k - x_j}$$

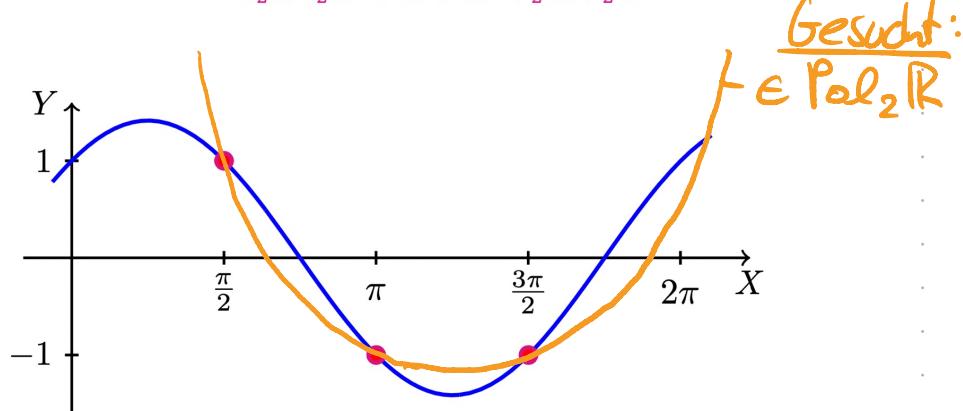
$$\sum_{j=0}^2 \alpha_j \cdot L_j(x)$$

und schreiben Sie das Polynom $p(X)$ aus Teil (a) als Linearkombination der $L_k(X)$.

$$2 \cdot L_1(x) + 5 \cdot L_2(x)$$

a) Interpolationsbedingung: $p(x_i) = f(x_i)$, $\{x_i\}_{i=0}^2$ Stützstellen

Bedingung: Übereinstimmung von $f(X) = \sin(X) + \cos(X)$ mit $p(X) \in \text{Pol}_2 \mathbb{R}$ an den Stützpunkten $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2})), (\pi, f(\pi)), (\frac{3\pi}{2}, f(\frac{3\pi}{2}))$.



Also: Suche $p(x) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x + \lambda_3 \in \text{Pol}_2 \mathbb{R}$ mit
 $\sin(x) + \cos(x)$

$$\begin{cases} \text{I)} \quad p\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ \text{II)} \quad p(\pi) = f(\pi) = -1 \\ \text{III)} \quad p\left(\frac{3\pi}{2}\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 \frac{\pi^2}{4} + \lambda_2 \frac{\pi}{2} + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 \pi^2 + \lambda_2 \pi + \lambda_3 = -1 \\ \lambda_1 \frac{9\pi^2}{4} + \lambda_2 \frac{3\pi}{2} + \lambda_3 = -1 \end{cases}$$

(3.5)
mb

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{4} & \frac{\pi}{2} & 1 \\ \pi^2 & \pi & 1 \\ \frac{9\pi^2}{4} & \frac{3\pi}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{A:=} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}}_{x:=} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{b:=}$$

3.5.1 Beispiel.

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 7x_2 - 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \\ 3x_1 + 2x_3 & = & 1 \end{array}$$

wird zu $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{R2} \leftarrow R2 - 2R1, \text{R3} \leftarrow R3 - 3R1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & -15 & 7 & 1 \\ 0 & -21 & 11 & 1 \end{array} \right]$

Gaußalgorithmus (3.7) auf erweiterte Systemmatrix $[A \parallel b]$

3.7. Gauß-Algorithmus

Folgende Umformungen ändern die Lösungsmenge eines LGS nicht:

3.7.1. Elementare Umformungen.

(VZ) Vertauschen von Gleichungen

(also Vertauschen von Zeilen der erweiterten Koeffizientenmatrix $[A \parallel b]$).

(mZ) Multiplizieren einer Gleichung mit einem Skalar $s \neq 0$

(also Multiplizieren einer Zeile von $[A \parallel b]$ mit $s \neq 0$).

(aZ) Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen

(also Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen).

(VS) Vertauschen von Unbestimmten

(also Vertauschen von Spalten in A — nicht in $[A \parallel b]$!).

Mindestens die Schritte vom Typ (VS) muss man genau protokollieren, da sich die Reihenfolge der Variablen ändert.

Auch bei den anderen Schritten ist eine Dokumentation sinnvoll

(insbesondere zur Fehlersuche!)

$$5 \cdot x = 5 \in$$

$$2 \cdot 5 \cdot x = 2 \cdot 5 \in$$

$$5 \cdot x - 5 \in = 0$$

$$2 \cdot x_1 = 2$$

$$5 \cdot x_2 = 5$$

$$x_3 = 7$$

3.7.2. Satz.

Mit Hilfe elementarer Umformungen kann man jedes LGS der Form $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{K}^{z \times s}$ transformieren auf ein LGS der Gestalt $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$, wobei

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}}^r \text{ Spalten} & \overbrace{\begin{array}{c} C \\ \vdots \\ 0 \end{array}}^{s-r \text{ Spalten}} \\ \hline & 0 \end{array} \right) \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_r \\ \hline \tilde{b}_{r+1} \\ \vdots \\ \tilde{b}_z \end{pmatrix}$$

mit $C \in \mathbb{K}^{r \times (s-r)}$.

Der Vektor \tilde{x} entsteht aus x durch Vertauschung von Variablen.

Das LGS $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ ist genau dann lösbar, wenn für alle $j > r$ gilt: $\tilde{b}_j = 0$.

$$10000 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0$$

$$[A \parallel b] = \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{\pi^2}{4} & \frac{\pi}{2} & 1 & 1 \\ \pi^2 & \pi & 1 & -1 \\ \frac{9\pi^2}{4} & \frac{3\pi}{2} & 1 & -1 \end{array} \right] \rightsquigarrow z_2 - 4z_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{\pi^2}{4} & \frac{\pi}{2} & 1 & 1 \\ 0 & -\pi & -3 & -5 \\ 0 & -3\pi & -8 & -10 \end{array} \right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{\pi^2}{4} & \frac{\pi}{2} & 1 & 1 \\ 0 & -\pi & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right] \quad z_1 - z_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{\pi^2}{4} & \frac{\pi}{2} & 0 & -4 \\ 0 & -\pi & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

$z_3 - 3z_2$ $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 5$

(4)

$$\tilde{A} \sim \begin{bmatrix} \frac{\pi^3}{4} & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & -\pi & 0 & | & 10 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{4}{\pi^2} z_1 & 1 & 0 & 0 & | & \frac{4/\pi^2}{5} \\ -\frac{1}{\pi} z_2 & 0 & 1 & 0 & | & -\frac{10}{\pi} \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 \end{bmatrix}$$

Was heißt das jetzt?: $\tilde{A}x = \tilde{b}$ hat selbe Lösungsmenge wie $Ax = b$

$$1 \cdot \lambda_1 \quad 0 \cdot \lambda_2 \quad 0 \cdot \lambda_3 = \frac{4/\pi^2}{5}$$

$$0 \cdot \lambda_1 \quad 1 \cdot \lambda_2 \quad 0 \cdot \lambda_3 = -\frac{10}{\pi}$$

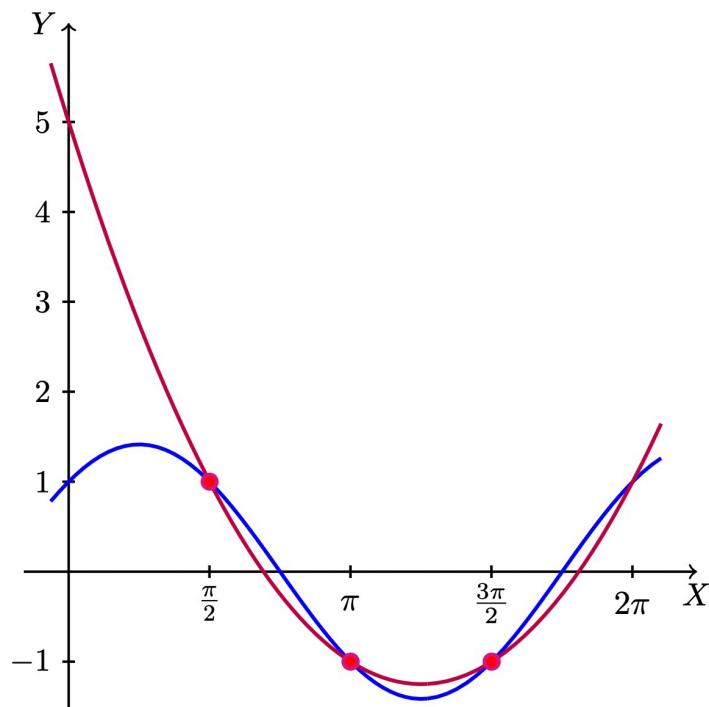
$$0 \cdot \lambda_1 \quad 0 \cdot \lambda_2 \quad 1 \cdot \lambda_3 = 5$$

Die einzige Lösung ist
 $x = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4/\pi^2}{5} \\ -\frac{10}{\pi} \\ s \end{bmatrix}$

$\Rightarrow p(x) = \frac{4}{\pi^2} \cdot x^2 - \frac{10}{\pi} \cdot x + 5$ ist eindeutig bestimmt.

Plotten

Graphen von $f(X) = \sin(X) + \cos(X)$ und $p(X) = \frac{4}{\pi^2} X^2 - \frac{10}{\pi} X + 5 \in \text{Pol}_2 \mathbb{R}$



b) Lagrange-Polynome

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^2 \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad \text{bestimmen für } x_0 = \frac{\pi}{2}, x_1 = \pi, x_2 = \frac{3\pi}{2}$$

$\frac{-\frac{5}{2}\pi x}{2}$

NR: $(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2}) = x^2 - \pi x - \frac{3\pi^2}{2} + 3$

k=0

$$L_0(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^2 \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) \cdot \left(\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \right) = \left(\frac{x - \pi}{\frac{\pi}{2} - \pi} \right) \cdot \left(\frac{x - \frac{3\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}} \right) = \frac{2x^2}{\pi^2} - \frac{5x}{\pi} + 3$$

k=1

$$L_1(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^2 \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} \stackrel{(1)}{=} \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \right) = \left(\frac{x - \frac{\pi}{2}}{\pi - \frac{\pi}{2}} \right) \left(\frac{x - \frac{3\pi}{2}}{\pi - \frac{3\pi}{2}} \right) = -\frac{4}{\pi^2} x^2 + \frac{8}{\pi} x - 3$$

k=2

$$L_2(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 2}}^2 \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} \stackrel{(1)}{=} \left(\frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \right) \cdot \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) = \left(\frac{x - \frac{\pi}{2}}{\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}} \right) \left(\frac{x - \pi}{\frac{3\pi}{2} - \pi} \right) = \frac{2}{\pi^2} x^2 - \frac{3}{\pi} x + 1$$

→ Für Lagrange Polynome gilt mit $k, l \in \{0, 1, 2\}$:

$$L_k(x_e) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^2 \frac{x_e - x_j}{x_k - x_j} = \begin{cases} 1, & k=l \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{coole Eigenschaft, denn...})$$

Teila)

$$\Rightarrow p(x_k) L_k(x_e) = \begin{cases} p(x_e), & k=e \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \stackrel{\text{Teila)}}{=} \begin{cases} f(x_e), & k=e \\ 0, & k \neq e \end{cases}$$

Sk, e = 1 k=e
0 sonst

$$\Rightarrow q(x) := \sum_{k=0}^2 p(x_k) L_k(x) \in \text{Pol}_2 \mathbb{R} \text{ erfüllt } q(x_e) = \sum_{k=0}^2 p(x_k) L_k(x_e) \stackrel{(*)}{=} f(x_e)$$

Eindringlichkeit
von $p(x)$ in Teila)

(IP 3d)

$$p(x) = q(x) = \sum_{k=0}^2 p(x_k) L_k(x) = \underbrace{+1}_{f(x_0)} L_0(x) - \underbrace{1}_{f(x_1)} L_1(x) - \underbrace{1}_{f(x_2)} L_2(x)$$

Beachte: Lagrange Polynome $L_k(x)$ sind unabh. von den gesuchten Funktionswerten.

⇒ Nutzlich wenn man mehrere Interpolationen mit selben $\{x_i\}$, untersch. $\{f(x_i)\}$

E7

6

Aufgabe V 7. Lösungsraum eines LGSFür $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ seien die Matrix A_α und der Vektor b_β gegeben durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & \alpha & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \alpha+2 & -1 \end{pmatrix}, \quad b_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ \beta-4 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

- (a) Für welche Werte von α, β ist das LGS $A_\alpha x = b_\beta$ lösbar?
(b) Bestimmen Sie für $\alpha = -1$ und $\beta = 2$ den Lösungsraum von $A_{-1}x = b_2$.

Sei nun die Matrix B und die Vektoren $\{c_i\}_{i=1}^3$ gegeben durch

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

- (c) Bestimmen Sie jeweils die Lösungsräume von

$$Bx = c_1, \quad Bx = c_2, \quad Bx = c_3.$$

a) Erweiterte Koeffizientenmatrix $[A_\alpha \parallel b_\beta]$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

hier schon Null-zeilen tauschen!

$$[A_\alpha \parallel b_\beta] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & \alpha & -1 & 1 & \beta-4 \\ 1 & -2 & 1 & \alpha+2 & -1 & \beta \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Z}_1 \leftrightarrow \text{Z}_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-2 & 0 & 3 & \beta+1 \\ 0 & 0 & 3 & \alpha+1 & -3 & \beta-5 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Z}_3 + \text{Z}_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-2 & 0 & 3 & \beta+1 \\ 0 & 0 & 3 & \alpha+1 & -3 & \beta-5 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Z}_4 - \text{Z}_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-2 & 0 & 3 & \beta+1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+1 & 0 & \beta-5 \end{array} \right]$$

Spalten tauschen

$$\xrightarrow{\text{MD } S_2 \leftrightarrow S_5} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & \alpha-2 & 0 & 0 & \beta+1 \\ 0 & -3 & 3 & \alpha+1 & 0 & \beta-5 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Z}_3 - 3\text{Z}_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & 0 & 0 & \beta-2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+1 & 0 & \beta-2 \end{array} \right]$$

3.7.2. Satz.

Mit Hilfe elementarer Umformungen kann man jedes LGS der Form $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{K}^{r \times s}$ transformieren auf ein LGS der Gestalt $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$, wobei

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}}^r \text{ Spalten} & \overbrace{\begin{array}{c} C \\ \vdots \\ 0 \end{array}}^{s-r \text{ Spalten}} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_r \\ \hline \tilde{b}_{r+1} \\ \vdots \\ \tilde{b}_z \end{pmatrix}$$

mit $C \in \mathbb{K}^{r \times (s-r)}$.

Der Vektor \tilde{x} entsteht aus x durch Vertauschung von Variablen.

Das LGS $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ ist genau dann lösbar, wenn für alle $j > r$ gilt: $\tilde{b}_j = 0$.

Lösbarkeit:

Fall 1: $\alpha \neq -1, \beta \in \mathbb{R}$

$$\xrightarrow{[A||b]} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & 0 & 0 & \beta-2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+1 & 0 & \beta-2 \end{array} \right]$$

(*) können mittels Umformung zu Null gebracht werden

(?) ist ungleich Null, kann zu Eins gebracht werden durch Normierung.

\Rightarrow Lösbar weil keine Nullzeilen!

Fall 2: $\alpha=1, \beta=2$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \left. \begin{array}{l} \{b_j = 0\} \\ \{b_j \neq 0\} \end{array} \right\} \sim b_j = 0$$

\Rightarrow Lösbar weil $b_j = 0$ mit $j \geq 3$ (rechte Seite kompatibel mit D2)

$$\{(a,b) \times \{c,d\}\} = \{(a,c), (a,d), (b,c), (b,d)\}$$

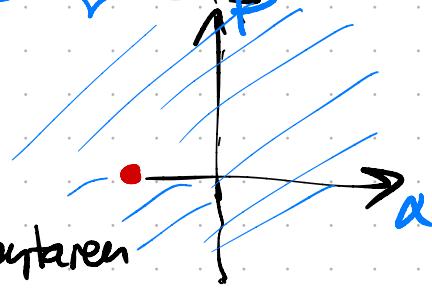
Fall 3: $\alpha=-1, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta-2 \end{array} \right] \quad \left. \begin{array}{l} \{b_j \neq 0\} \\ \{b_j = 0\} \end{array} \right\} \sim b_j \neq 0$$

Letztlich: LGS lösbar für $(\alpha, \beta) \in \{(-1, 2)\} \cup (\mathbb{R} \setminus \{-1\}) \times \mathbb{R}$

b) Lösungsmenge bestimmen (von $A_{-1} x = b_2$)

Aus Teil a) folgt für $[A_{-1} || b_2]$ mit den elementaren Umformungen (3.7.1):



(8)

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightsquigarrow$$

$$z_1 - 2 \cdot z_2 \left[\begin{array}{cc|ccccc} x_1 & x_5 & x_3 & x_4 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Nach (3.76) gilt mit $\tilde{x} := (x_1, x_5, x_3, x_4, x_2)$

3.7.6. Satz.

Führt der Gauß-Algorithmus für das LGS $Ax = b$ auf $\tilde{A} \tilde{x} = \tilde{b}$ mit

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} E_r & C \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \quad C = (c_{jk})_{1 \leq j \leq r, r+1 \leq k \leq s},$$

so hat der Lösungsraum des zugehörigen homogenen Systems die Dimension $s - r$. Wenn keine Spalten vertauscht wurden, erhält man eine Basis für den Lösungsraum dieses homogenen Systems aus

$$h_1 := \begin{pmatrix} -c_{1,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad h_j := \begin{pmatrix} -c_{1,r+j} \\ \vdots \\ -c_{r,r+j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad h_{s-r} := \begin{pmatrix} -c_{1,s} \\ \vdots \\ -c_{r,s} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(r + j)-te Zeile

Zur Bestimmung aller Lösungen des inhomogenen Systems genügt es, irgendeine spezielle Lösung v_{sp} zu bestimmen:

Dann hat der Lösungsraum die Parameterdarstellung

$$v_{sp} + \lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_j h_j + \dots + \lambda_{s-r} h_{s-r} \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_{s-r} \in \mathbb{K}).$$

Irgendeine Lösung? \rightsquigarrow easy: $\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & \dots & 3 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} x_1 & x_5 & x_3 & x_4 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], h_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, h_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, h_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(3)

Also: $\vec{x}^2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + L \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ Tausch

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + L \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \text{Lösungsraum } \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \dots, \lambda_3 \in \mathbb{K} \right\}$$

b) Gauß mit mehreren rechten Seiten

→ Simultane Anwendung

$$[A \parallel c_1 \ c_2 \ c_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 3 & 5 & 8 \\ 6 & 8 & 9 & 6 & 8 & 14 \end{array} \right] \rightsquigarrow z_2 - 3z_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & -1 & -1 \\ 6 & 8 & 9 & 0 & -4 & -15 \end{array} \right] \rightsquigarrow z_3 - 6z_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -15 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right]$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $c_1 \quad c_2 \quad c_3$

$$\rightsquigarrow z_3 - 4z_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightsquigarrow z_2 + z_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightsquigarrow 5z_1 - 4z_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 10 & 0 & 5 & 10 & 15 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\rightsquigarrow z_1 + 10z_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightsquigarrow \frac{1}{5}z_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow Bx_1 = c_1 \quad \text{mit} \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Bx_2 = c_2 \quad \text{mit} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Bx_3 = c_3 \quad \text{mit} \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Trick: c_1 ist erste Spalte von $B \Rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c_2 ist zweite Spalte von $B \Rightarrow x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$c_3 = c_1 + c_2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Bx_3 &= c_3 = c_1 + c_2 \\ &= Bx_1 + Bx_2 \\ &= B(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

$$x_3 = x_1 + x_2$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}.$$