0: Intro, Fragen
E: Ungl.: Induktion, reelle Zahlen, binom. Lehrsatz, Abbildung

HM1 - Vü WS 22

Lambert Theisen 02.11.22

1

0:
- Sinn Vü: Bsp.aufgaben als Vorbereitung für HW
- Alle Infos auf Kursseite!

Alle Infos auf der Kurswebsite

- `https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM1-Stroppel/`

Termine

- In 2022: 02.11., 16.11., 30.11., 14.12.
- In 2023: 18.01., 01.02.

Ablauf

- ~~Vor Ort nach dem Kohortenmodell und zeitgleich als Videos in ILIAS~~.
- Termine (siehe Campus Einträge):
  - Mittwoch 08:00 -09:30 Uhr V53.01 für bewe, geod, lrt, mach, verk
  - Mittwoch 17:30 -19:00 Uhr V47.01 für bau, iui, mawi, tema, uwt, ernen, fmt, medtech, mawi, tema, uwt, verf
- In jeder Woche mit Vortragsbung gibt es montags das Blatt mit den Aufgaben.

Kontakt

- Lambert Theisen, Alessio Cipriani
- ILIAS-Forum zur Vortragsübung, Sprechstunden, Kontaktformular auf der Website

→ Fragen?

V1: **Aufgabe V 1.** *Ungleichungen, Induktion*

(a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion die folgende Aussage:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 3$ gilt

$$n\sqrt{n} \geqq n + \sqrt{n}\,.$$

(b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, für die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\frac{2}{\big||x|-1\big|} \geqq \frac{3}{x-1}\,.$$

1a) Induktion: → Problem: Aussage $A(n)$ soll $\forall n \in \mathbb{N}$ gezeigt werden

Aber es gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

→ Lösung: ① Zeige dass $A(1)$ wahr ist (oder $A(n_0)$)

② Zeige dass wenn $A(n)$ wahr ist, $A(n+1)$ auch wahr ist

Wahr ✓

$A(1) \xrightarrow{A(1) \Rightarrow A(2)} A(2) \xrightarrow{A(2) \Rightarrow A(3)} A(3) \dashrightarrow$

1.2.3. Induktionsprinzip.

Man beweist eine Aussage $A(n)$, die von einem natürlichen Parameter n abhängt,

IA erst für $n = 1$ (Induktionsanfang)

dann zeigt man:

IS Ist $A(n)$ wahr (Induktionshypothese IH),
so ist auch $A(n+1)$ wahr
(Induktionsschluss von n auf $n+1$).

Salopp formuliert: Mit dem Verfahren der vollständigen Induktion weist man nach, dass die betrachtete Aussage *„nie aufhört, richtig zu sein"* — nachdem man sich im Induktionsanfang vergewissert hat, dass sie *„anfängt, richtig zu sein"*.

Man kann den Induktionsanfang auch bei $n_0 \neq 1$ (insbesondere bei $n = 0$, oder später) setzen:
Dann hat man bewiesen, dass $A(n)$ für alle $n \geqq n_0$ wahr ist,
wenn man den Induktionsschluss durchgeführt hat.

Also ZZ: $A(n) := n \cdot \sqrt{n} \boxed{\geq} n + \sqrt{n}$ gilt $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$.

Warum $n \geq 3$?

$\boxed{n=1}$: $1 \cdot \sqrt{1} = 1 \boxed{<} 1 + \sqrt{1} = 2$ ↯

$\boxed{n=2}$: $2 \cdot \sqrt{2} = \underbrace{\sqrt{2} + \sqrt{2}}_{<2} \boxed{<} 2 + \sqrt{2}$ ↯

Also: IA: $A(3)$ ist wahr denn

$3 \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \geq 3 + \sqrt{3}$

denn es gilt: $2\sqrt{3} > 3 \overset{1.5.7}{\Leftrightarrow} (2\sqrt{3})^2 > 3^2 \Leftrightarrow 4 \cdot 3 > 3 \cdot 3$ ✓

1.5.7. Monotonie des Quadrierens.

Ist $a > 0$ und $b > 0$, so gilt $(a < b \iff a^2 < b^2)$.

IV/IH: Sei $A(n)$ wahr für ein beliebigs $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

D.h: $n\sqrt{n} \geq n + \sqrt{n}$ gilt

IS: Unter Annahme der der IH, gilt:

$$(n+1)\sqrt{n+1} = n\sqrt{n+1} + 1\cdot\sqrt{n+1}$$
$$\overset{(*)}{>} n\cdot\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$$
$$\overset{(IH)}{\geq} n + \underbrace{\sqrt{n}}_{>1 \text{ weil } n\geq 3} + \sqrt{n+1}$$
$$> (n+1) + \sqrt{(n+1)} \quad ✓$$

1.5.4. Grundlegende Eigenschaften der Ordnungsrelation.

Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

1. Transitivität: $(a<b)\wedge(b<c) \implies (a<c)$
2. Monotonie der Addition: $(a<b) \implies (a+c<b+c)$
3. Monotonie der Multiplikation: $(a<b)\wedge(c>0) \implies (a\,c<b\,c)$
   $(a<b)\wedge(c<0) \implies (a\,c>b\,c)$
4. Archimedisches Prinzip: $\forall x\in\mathbb{R}\,\exists n\in\mathbb{N}: n>x$

$(*)$: $n\sqrt{n+1} > n\sqrt{n} \overset{(1.5.4.3)}{\iff} \sqrt{n+1} > \sqrt{n} \overset{(1.5.7)}{\iff} n+1>n$ ✓

⇝ Aussage $A(n)$ gezeigt für $n\geq 3$ mit vollst. Induktion.

1h) Ungleichungen:

$$\frac{2}{||x|-1|} \geq \frac{3}{x-1}, \quad x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$$

Für welche x gilt das?

$\{-1,1\}$ wäre problematisch => Division durch Null!

$$|x| \overset{1.5.8}{:=} \begin{cases} x & \text{falls } x\geq 0 \\ -x & \text{if } x<0 \end{cases}$$

"Strategie / Rezept": ⇝ Fallunterscheidung um die Betragsfunktion zu eliminieren

Fall 1: $((x\geq 0)\wedge(x\neq 1)) \Rightarrow |x|=x \Rightarrow \frac{2}{|x-1|} \geq \frac{3}{x-1}$?

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{wenn } x-1\geq 0 \iff x\geq 1 \\ -(x-1) & \text{wenn } x<1 \end{cases}$$

1.1: $(x>1)$

$\Rightarrow |x-1| = (x-1)$: $\frac{2}{(x-1)} \geq \frac{3}{x-1} \overset{\text{Multiplikation mit } (x-1)>0\ (1.5.4.3)}{\iff} 2\geq 3$ ↯ $\Rightarrow$ Ungl. gilt nicht für $x>1$

1.2: $(0\leq x<1)$

$\Rightarrow |x-1| = -(x-1)$: $\frac{2}{-(x-1)} \geq \frac{3}{x-1} \overset{\cdot(x-1)<0\ (1.5.4.3)}{\iff} \frac{2}{-1} = -2 \leq 3$ ✓

Fall 2: $(x<0)\wedge(x\neq -1)$

$\Rightarrow |x| = -x \Rightarrow \frac{2}{||x|-1|} = \frac{2}{|-x-1|} \overset{?!}{\geq} \frac{3}{x-1}$

$\iff \frac{2}{|x+1|} \overset{?!}{\geq} \frac{3}{x-1}$

$|-x-1| = |(-1)\cdot(x+1)| \overset{(1.5.9.3)}{=} |-1|\cdot|x+1| = |x+1|$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \\ -(x+1), & x < -1 \end{cases}$$

1.5.9. Rechenregeln für Beträge.

Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:

① $|a| \geqq a, \quad |a| \geqq -a, \quad |a| = \max\{a, -a\}$ ✓

② $|a| = 0 \iff a = 0$ ✓

③ $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ ✓ $\quad \left|\frac{a}{c}\right| = \frac{|a|}{|c|}$ ✓

④ $|a+b| \leqq |a| + |b|$ *(Dreiecksungleichung)*

Falls $a+b \geqq 0$ ist, gilt $|a+b| = a+b \leqq |a|+|b|$.
Falls $a+b < 0$ ist, gilt $|a+b| = -a-b \leqq |a|+|b|$.

⑤ $||a|-|b|| \leqq |a+b|$

Wegen der Dreiecksungleichung gilt

$$\begin{array}{lcccccc} |a| & = & |a+b-b| & \leqq & |a+b| & + & \overbrace{|-b|}^{=|b|} \\ \text{und genauso } |b| & = & |b+a-a| & \leqq & |b+a| & + & \underbrace{|-a|}_{=|a|} \end{array}$$

Daraus folgt $|a|-|b| \leqq |a+b|$
und $|b|-|a| \leqq |a+b|$
also mit ①: $\max\{|a|-|b|, |b|-|a|\} = ||a|-|b|| \leqq |a+b|$.

2.1: $(-1 < x < 0)$

$\Rightarrow |x+1| = x+1$:

$$\frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{x-1}$$

Multiplikation mit $\underbrace{(x+1)}_{>0} \cdot \underbrace{(x-1)}_{<0} < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2\,\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{(x+1)}} \leq \frac{3\,(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} \Leftrightarrow 2(x-1) \leq 3(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2 \leq 3x + 3 \Leftrightarrow 0 \leq x+5 \quad \checkmark \text{ weil } -1 < x < 0$$

2.2: $(x < -1) \Rightarrow |x+1| = -(x+1)$

$$\frac{2}{-(x+1)} \geq \frac{3}{x-1}$$

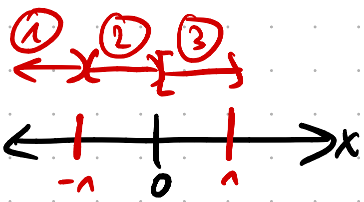
Multipl. mit $\underbrace{(x+1)}_{<0} \cdot \underbrace{(x-1)}_{<0} > 0$

$$\Leftrightarrow -2(x-1) \geq 3(x+1) \Leftrightarrow 2 - 2x \geq 3 + 3x$$
$$\Leftrightarrow 0 \geq 1 + 5x$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{5} \geq x \quad \checkmark \text{ weil } x < -1$$

Letztlich: Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0\}$$
$$\cup \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$$

①, ②, ③



$$= \{x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \mid x < 1\}$$
$$= (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup [0, 1) = (-\infty, 1) \setminus \{-1\}$$

V2

4

Aufgabe V 2. *Reelle Zahlen, Binomischer Lehrsatz*

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n \in \mathbb{N}.$$

(b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, welche die Ungleichung $|2-|x+1|| \leqq 1$ erfüllen.

2a) binom. Lehrsatz:

1.3.5. Binomischer Lehrsatz.

Für alle Zahlen a, b und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots$$
$$\cdots + \binom{n}{n-1} a^{n-(n-1)} b^{n-1} + b^n$$
$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j .$$

Dabei *setzt* man für jede Zahl r (insbesondere für $r \leqq 0$) fest: $r^0 = 1$.

$$(1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n \overset{1.3.5}{=} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \underbrace{1^{n-j}}_{=1} (\sqrt{3})^j + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-\sqrt{3})^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left[(\sqrt{3})^j + (-\sqrt{3})^j \right]$$

• Wir nutzen: $(\sqrt{3})^j + (-\sqrt{3})^j = \begin{cases} 2\sqrt{3}^j & , j \text{ ist gerade} \\ 0 & , j \text{ ist ungerade} \end{cases}$ $(*)$

Fall 1: n ist gerade, also $n = 2 \cdot \tilde{n}$ mit $\tilde{n} \in \mathbb{N}$

Dann $\sum_{j=0}^{2\tilde{n}} \binom{n}{j} \left[(\sqrt{3})^j + (-\sqrt{3})^j \right] = \sum_{j=0}^{\tilde{n}} \binom{n}{2j} \left[(\sqrt{3})^{2j} + (-\sqrt{3})^{2j} \right]$

(*): ungerade Fälle weg.

$$= \sum_{j=0}^{\tilde{n}} \binom{n}{2j} \left[3^j + 3^j \right] = 2 \cdot \sum_{j=0}^{\tilde{n}} \binom{n}{2j} 3^j \in \mathbb{N} \checkmark$$

Fall 2: $n = 2\tilde{n}+1$, $\tilde{n} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ($\Leftrightarrow$ n ist ungerade)

Dann $\sum_{j=0}^{2\tilde{n}+1} \binom{n}{j} \left[(\sqrt{3})^j + (-\sqrt{3})^j \right] = \underbrace{\sum_{j=0}^{2\tilde{n}} \binom{n}{j} \left[(\sqrt{3})^j + (-\sqrt{3})^j \right]}_{\in \mathbb{N} \text{ laut Fall 1}}$

$$+ \binom{n}{2\tilde{n}+1} \underbrace{\left[(\sqrt{3})^{2\tilde{n}+1} + (-\sqrt{3})^{2\tilde{n}+1} \right]}_{=0} \checkmark$$

2b) Ungleichung (Alternative Notation)

$$|2-|x+1|| \leq 1 \overset{\text{Def. Betrag}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} |2-(x+1)| \leq 1, & x+1 \geq 0 \quad 1 \\ |2+(x+1)| \leq 1, & x+1 < 0 \quad 2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2-(x+1) \leq 1, & (x+1 \geq 0) \wedge (2-(x+1)) \geq 0 \quad 1.1 \\ -2+(x+1) \leq 1, & (x+1 \geq 0) \wedge (2-(x+1)) < 0 \quad 1.2 \\ 2+(x+1) \leq 1, & (x+1 < 0) \wedge (2+(x+1)) \geq 0 \quad 2.1 \\ -2-(x+1) \leq 1, & (x+1 < 0) \wedge (2+(x+1)) < 0 \quad 2.2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x & , (x \geq -1) \wedge (1 \geq x) \\ x \leq 2 & , (x \geq -1) \wedge (1 < x) \\ x \leq -2 & , (x < -1) \wedge (x \geq -3) \\ x \geq -4 & , (x < -1) \wedge (x < -3) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \in [0,1] \\ x \in (1,2] \\ x \in [-3,-2] \\ x \in [-4,-3) \end{cases} \Longleftrightarrow x \in [-4,-2] \cup [0,2]$$

V3 Abbildungen:

Aufgabe V 3. *Abbildungen*

Gegeben sind die beiden endlichen Mengen $X = \{1, 2\}$ und $Y = \{2, 3, 4\}$.

(a) Bestimmen Sie die Anzahl aller Abbildungen $X \longrightarrow Y$ sowie die Anzahl aller Abbildungen $Y \longrightarrow X$.

(b) Bestimmen Sie die Anzahl aller injektiven Abbildungen $X \longrightarrow Y$.

(c) Bestimmen Sie die Anzahl aller surjektiven Abbildungen $Y \longrightarrow X$.

Stellen Sie zudem in Teil (a) und in Teil (b) Vermutungen für den allgemeinen Fall auf, das heißt, für den Fall, dass X und Y zwei beliebige nichtleere endliche Mengen sind. Der allgemeine Fall in Teil (c) ist etwas kniffliger. Überlegen Sie auch hier, wie man vorgehen könnte.

Bsp:

$x \in X$	$f(x) \in Y$
1	2
2	4

Die Abbildung $f: X \to Y$ ist:

→ injektiv: $f(a) \neq f(b)$ wenn $a \neq b$

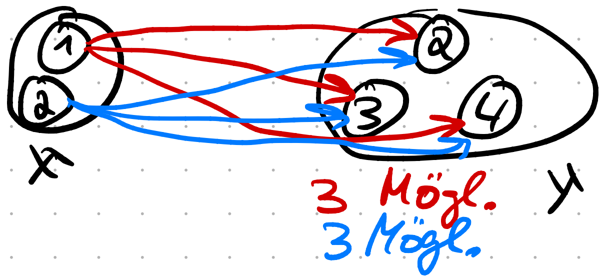
→ nicht surjektiv: denn für $3 \in Y$ existiert kein $x \in X$ sodass $f(x) = 3$.

1.6.5. Definitionen.

Eine Abbildung $f\colon A \to Z$ heißt

- injektiv, falls für $a \neq b$ stets $f(a) \neq f(b)$ gilt $\big(\forall\, a, b \in A\colon\ a \neq b \implies f(a) \neq f(b)\big)$
- surjektiv, falls zu jedem $z \in Z$ ein $a \in A$ mit $f(a) = z$ existiert $\big(\forall\, z \in Z\, \exists\, a \in A\colon\ f(a) = z\big)$
- bijektiv, falls f sowohl injektiv als auch surjektiv ist. (In diesem Fall gibt es eine Umkehrabbildung $f^{-1}\colon Z \to A$.)

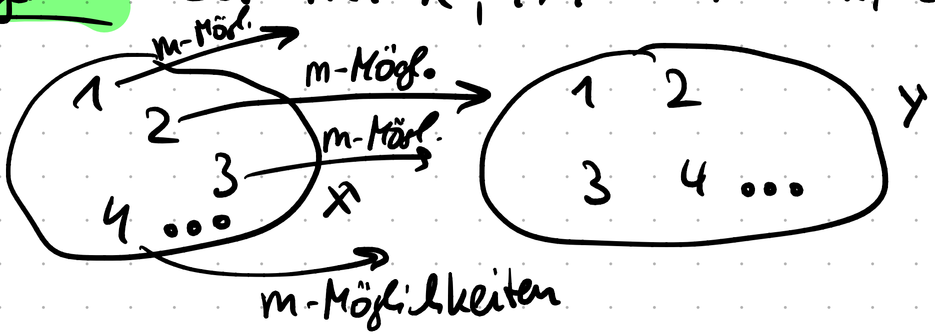
3a): **Gesucht**: $\# \mathrm{Abb}(X, Y)$



$\Rightarrow \# \mathrm{Abb}(X, Y) = 3 \cdot 3 = 3^2 = 9$

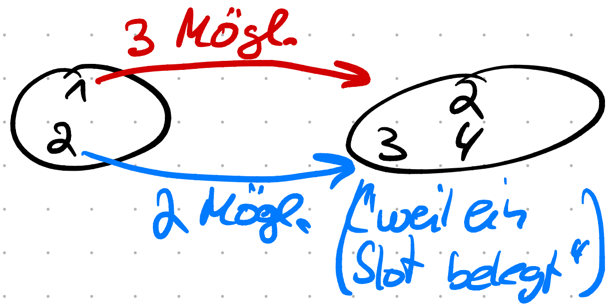
Umgekehrt $\# \mathrm{Abb}(Y, X) = 2^3 = 8$

Allgemein: Sei $|X| = k$, $|Y| = m$ mit $k, m \in \mathbb{N}$



$\Rightarrow \underline{\# \mathrm{Abb}(X, Y) = m^k}$

3b): **Gesucht**: $\#$ injektive $\mathrm{Abb}(X, Y)$



$\Rightarrow \# \mathrm{inj.Abb}(X, Y) = 2 \cdot 3 = 6$

Allgemein: (mit $k \leq m$)

$$\# \mathrm{inj.Abb}(X, Y) = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-k+1)$$
$$= \frac{m!}{(m-k)!}$$

3c): **Gesucht**: $\# \mathrm{surj.Abb}(Y, X) = \# \mathrm{Abb}(Y, X) - \underbrace{\# \mathrm{konst.Abb}(Y, X)}$

$= 8 - 2$

$= 6$

Was kann schiefgehen? Wenn alle $y \in Y$ auf nur ein einziges $x \in X$ mappen.

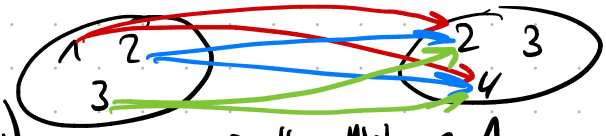
Allgemein: Wieder $|X|=k$, $|Y|=m$, $k \geq m$

<u>zB</u> $m=3$, $Y=\{2,3,4\}$.

Sei $A_y := \{ f: X \to Y \mid \nexists\, x \in X : f(x)=y \}$ für $y \in Y$

Wir haben dann $|A_y| = 2^k$

(weil ein y ja nicht "getroffen" werden kann)



$\to$ alle Abb. $\in A_3$

Weiterhin $|A_2 \cap A_3| = 1$ (weil alle auf 4 mappen müssen

$$\Rightarrow \#\text{SurjAbb}(X,Y) = \#\text{Abb}(X,Y) - \Big[\underbrace{(|A_2|+|A_3|+|A_4|)}_{\text{haben Duplikate}} \underbrace{- |A_2 \cap A_3| - |A_3 \cap A_4| - |A_2 \cap A_2|}_{\text{Duplikate subtrahieren}} \Big]$$

$$= 3^k - [3 \cdot 2^k - 3]$$

m beliebig: zB $Y = \{1, \dots, m\}$

Sei A_y definiert wie vorher

Für $0 \leq \ell \leq m$: $\left| \bigcap_{j=1}^{\ell} A_{y_j} \right| = (m-\ell)^k$ mit y_j paarweise verschieden

Vermutung: $\#\text{SurAbb}(X,Y) = m^k - m(m-1)^k + \binom{m}{2}(m-2)^k - \dots$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \binom{m}{j} (m-j)^k$$