Globalübung 4: Mathematische Grundl. I

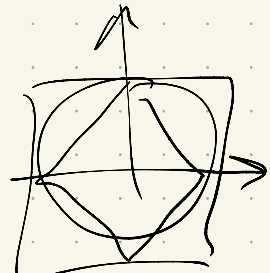
- Vertretung, daher heute Aufgaben als Übung
- Fr (01.11) ist Feiertag. Trotzdem SRü-Blatt (mit ML) mit weiteren Übungsaufgaben!
- Batterien für Beamerfernbedienung für nächste Gü
- Heute mal: Digital

TODO:

1) Normen (old,
2) Unterräume (old,
3) Quad. Gl. (2)
4) Δ-Ungl (3)
5) Nullstellen (4c) (Poi
6) Lin. Abh. (HWS.1.o

Beispiel zu Normen:

Vgl. letzte Gü



Aufgabe 3. (Normen)

a) Berechnen sie die euklidische Norm $\|\cdot\|_2$, die Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ und die Betragssummennorm (1-Norm) $\|\cdot\|_1$ der folgenden Vektoren:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} := \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Was fällt Ihnen auf?

$a, \dots, d \in \mathbb{R}^3$ $\leftarrow$ $n = 3$

$$\|a\|_2 = \left(2^2 + (-1)^2 + (5)^2\right)^{0.5} = \sqrt{4+1+25} = \sqrt{30}$$

$$\|a\|_\infty = \max_{1 \le i \le 3} |a_i| = \max\left(\{|a_i| : 1 \le i \le 3\}\right)$$
$$= \max\left(\{|2|, |-1|, |5|\}\right)$$
$$= \max\left(\{1, 2, 5\}\right) = 5$$

Frage: Was ist das

$$\|a\|_1 = \sum_{i=1}^{3=n} |a_i| = 2 + |-1| + 5 = 8$$

$b = e_1 \;\hat{=}\;$ erster Euklidische Einheitsvektor in $\mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow \|b\|_1 = \|b\|_2 = \|b\|_\infty = 1$$

$c, d, \dots$ analog

Es fällt auf: $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1$

Unterräume $U \subset V$ (oder $U \le V$) mit V als K-Vektorraum

$K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$ (Körper)

Aufgabe 4. **(Unterräume)**
Entscheiden und begründen Sie, ob U ein Unterraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums V ist:

a) $V = \mathbb{R}^3, U = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \rangle = 0\}$

b) $V = \mathbb{R}^2, U = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x \le y\}$

c) $V = \mathbb{R}^2, U = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2, a,b \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+3b\\2b-a\end{pmatrix}\}$

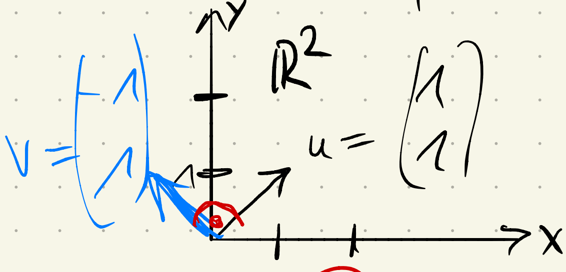
Teilmenge von einem Vektorraum ist ein Unterraum, wenn Addition und die Multiplikation mit Skalaren nicht aus der Teilmenge herausführt:

z.B. $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$

Sei V ein K-Vektorraum. $U \subset V$ ist Unterraum wenn:

$$\boxed{v, w \in U \Rightarrow \lambda \cdot v + \mu \cdot w \in U \quad \forall \lambda, \mu \in K}$$

a) Bemerkung:
Falls $\langle u, v \rangle = 0$, dann u und v orthogonal.



u, v orthogonal, denn
$\langle u, v \rangle = (u, v) = u \cdot v = 0$

1 Sei $v, w \in U$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Strategie
1 → 2 → 3 → 4

$$<\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \alpha v+\beta w> = \alpha<\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, v> + \beta\underbrace{<\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, w>}_{=0}$$ (2)

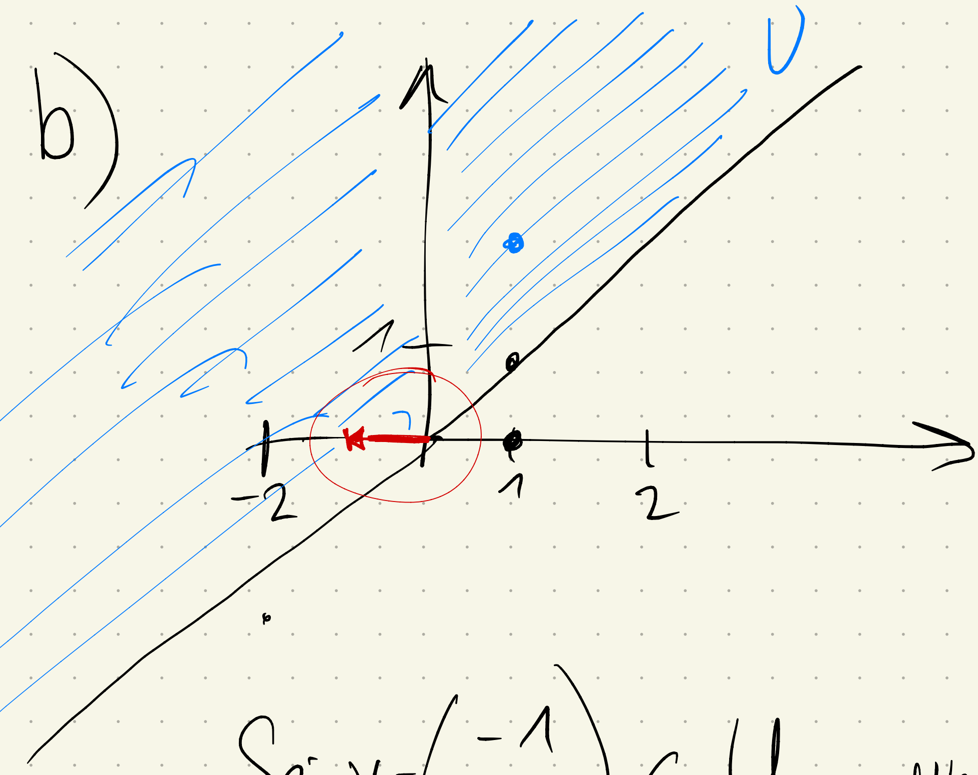
$v, w \in U$

$$= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$ (3)

$$\Rightarrow \alpha v + \beta w \in U$$ (4) ✓

U ist Unterraum von $V = \mathbb{R}^3$

b)



Sei $v := \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \in U$ und $\overset{\alpha}{\overset{\|}{-1}} \in K = \mathbb{R}$

$$(-1)\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \notin U$$

skipped weil Gegenbsp.

$$\alpha v + \beta w \notin U$$

$\Rightarrow$ U kein Unterraum. (da nicht $\forall \alpha, \beta$ (...))

c) Sei $v, w \in U$ sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{\alpha v + \beta w}_{=:z} \overset{\checkmark}{=} \alpha \begin{pmatrix} v_1 + 3v_2 \\ 2v_1 - v_2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} w_1 + 3w_1 \\ 2w_1 - w_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha v_1 + 3\alpha v_2 + \beta w_1 + 3\beta w_1 \\ 2\alpha v_1 - \alpha v_2 + 2\beta w_1 - \beta w_2 \end{pmatrix} \overset{?!}{\in} U$$

$$= \begin{pmatrix} \overbrace{(\alpha v_1 + \beta w_1)}^{z_1} + 3\overbrace{(\alpha v_2 + \beta w_2)}^{z_2} \\ 2\overbrace{(\alpha v_1 + \beta w_1)}^{z_1} - \overbrace{(\alpha v_2 + \beta w_2)}^{z_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z_1 + 3z_2 \\ 2z_1 - z_2 \end{pmatrix} \in U \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \checkmark$$

Unterraum

$\Rightarrow U$ ist U.R. von $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 2. **(Quadratische Gleichungen)**

a) Wir betrachten das allgemeine Nullstellenproblem für ein reelles Polynom 2. Ordnung

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + px + q = 0$$

mit $x \in \mathbb{R}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$. Leiten Sie eine allgemein gültige Lösungformel her und geben Sie Bedingungen an, wann das Polynom 2, 1 oder keine reelle Nullstelle hat.

b) Benutzen Sie Teil (a) um eine Lösungsformel für die biquadratische Gleichung

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

mit $x \in \mathbb{R}$, a, b, c wie oben, zu bestimmen.

c) Was passiert wenn Sie $a, b, c \in \mathbb{C}$ zulassen und komplexe Nullstellen suchen?

a) Sei $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$ ("Normalisierung")

$$\Leftrightarrow x^2 + px + q = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + px = -q \quad \Big| + \left(\tfrac{p}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + px + \left(\tfrac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q \quad \Big| \sqrt{\cdot}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = -\tfrac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

das hier entscheidet!

- $\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q = 0 \Rightarrow 1$ reelle Lsg.
- $\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q > 0 \Rightarrow 2$ reelle Lsg.
- $\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q < 0 \Rightarrow 0$ reelle Lsg.

b) $z := x^2$ (Substitution)

$$z^2 + pz + q = 0$$

$\rightsquigarrow$ 4 mögliche reelle NS.

ANALOG:
lösen mit $\frac{p}{q}$-Formel,
Rücksubstituierung.

c) Auch mit $a, b, c \in \mathbb{C}$ ist die pq-Formel anwendbar, da alle Operationen auch auf kompl. Zahlen möglich sind.

Aufgabe 3. **(Dreiecksungleichung)**
Beweisen Sie für $x, y \in \mathbb{R}$

a) $|x+y| \leq |x| + |y|$ *Dreiecksungleichung*

b) $||x| - |y|| \leq |x-y|$ *inverse Dreiecksungleichung*

a) Es gilt $x \leq |x|$ ① $y \leq |y|$ ②

$\Rightarrow x + y \overset{①+②}{\leq} |x| + |y|$

Und $\underbrace{-x \leq |x|}_{③}$, $\underbrace{-y \leq |y|}_{④}$

$\Rightarrow -x + (-y) = \underbrace{-(x+y)}_{(\hat{=}a)} \leq \overbrace{|x| + |y|}^{(\hat{=}b)}$

Wegen $(a \leq b$ und $-a \leq b \Rightarrow |a| \leq b)$

$|x+y| \leq |x| + |y|$ (Δ-Ungl.)

b) $|x| = |\underbrace{(x-y)+y}_{=0\ \text{(Trick)}}| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |x-y| + |y|$ move to LHS, Left Hand Side

$\Leftrightarrow |x| - |y| \leq |x-y|$ Ⓘ

$$|y| = |(y-x)+x| \overset{\Delta\text{-U.}}{\leq} |y-x| + |x|$$

$$\Leftrightarrow |y| - |x| \overset{(\cdot)}{=} -(|x|-|y|) \leq |y-x|$$

$$= |x-y|$$

Daraus folgt (analog zu a)):

$$||x|-|y|| \leq |x-y|$$

Polynomnullstellen:

1

c) Das Polynom $p(x) := 2x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 16x - 64$ hat die Nullstellen $x = -2$ und $x = 4$. Ermitteln Sie alle weiteren Nullstellen von p in $\mathbb{C}$.

Wir suchen ein Polynom q mit 2 $q(x)(x-(-2))(x-4) = p(x) \; \forall x \in \mathbb{R}$

Bemerkung:

über $\mathbb{C}$ zerfällt jedes Polynom in seine Linearfaktoren. Weiterhin q vom Grad 2.

Polynomdivision: ("Um NStellen-Tipps zu verwenden")

$$(2x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 16x - 64) : (x+2) = 2x^3 - 8x^2 + 8x - 32$$

$$\underline{-(2x^4 + 4x^3)}$$

$$0 \quad -8x^3 - 8x^2$$

$$\underline{-(-8x^3 - 16x^2)}$$

$$0 \quad 8x^2 \quad -16x$$

move down

$2x^3 \cdot x = 2x^4$

$2 \cdot 2x^3 = 4x^3$

$$-(8x^2+16x)$$
$$-32x-64$$
$$-(-32x-64)$$
$$0$$

"geht auf" ✓
Falls nicht, dann Rest.

Es folgt:

$$p(x)=(x+2)(2x^3-8x^2+8x-32)$$

Wir machen weiter:

$$2x^3-8x^2+8x-32 : (x-4) = 2x^2+8$$
$$-(2x^3-8x^2)$$
$$0 \quad +8x-32$$
$$-(8x-32)$$
$$0$$

Letztlich:

$$q(x)=2x^2+8$$

$$q(x) \overset{!}{=} 0 \iff 2x^2+8=0$$
$$\iff 2x^2=-8$$
$$\iff x^2=-4$$
$$\iff x_3=\sqrt{-4}=\sqrt{4}\sqrt{-1}=2i$$
$$\lor \; x_4=-2i$$

Vergleiche: Motivation komplexe Zahlen

$$x_3 \in \mathbb{C}, \; x_4=\bar{x}_3 \in \mathbb{C}$$