LA

- Gauß Reloaded
- Bilinearform

TODO: A7

- NS-Satz, ZW-Satz
- Extrem-Satz
- Diffbarkeit
- Konvexität

Mathe 1 – GÜ 10
12.12.19

- HW-Fragen an Steffi

① !

LA Gauß-Algorithmus (again)

Pivotisierung: → oft entscheidend bei Computer Berechnungen für stabilen Algorithmus (z.B. "Teilen durch betragsm. größtes El.")

Lösbarkeit mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: und Treppenstruktur $(A|b) \xrightarrow{\text{Gauß}} (\tilde{A}|\tilde{b})$

$\tilde{A} = [\,^{\,\,}_{0}\diagdown]$

1) ohne Delle / NZ: eindeutige Lösung
2) NZ trifft auf homogene Rechte Seite ($b_i = 0$) (Konsistenz): #NZ freie Params
3) NZ trifft auf inhomogene RHS: keine Lsg.

$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \overset{!}{=} 1$

$x = \binom{x_1}{x_2}$

Beispiel (schwerer als letzte Woche, WS2018):

Aufgabe 13.
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1-2\alpha & 2+2\alpha \end{pmatrix} x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b}.$$

(a) Bringen Sie das lineare Gleichungssystem auf Treppenform.

(b) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem eindeutig, mehrdeutig oder gar nicht lösbar?

(c) Geben Sie die Lösung für $\alpha = -2$, $\beta = 1$ an.

Klausur: Transformationen angeben!

a)

$$\left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1-2\alpha & 2+2\alpha \end{matrix}}_{A} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ \beta \\ 1 \\ 2 \end{matrix}}_{b}\right] \xrightarrow{\text{II}-\text{I} \,(\ldots)} \left[\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2\alpha & 3+2\alpha \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 \\ \beta-1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}\right] \xrightarrow{(\ldots)} \left[\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2\alpha & 3+2\alpha \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 \\ \beta-1 \\ -\beta \\ 1 \end{matrix}\right] \ldots$$

$Z_3 \mapsto Z_3 - Z_2$

$$\ldots \xrightarrow{(\ldots)} \left[\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3+\alpha \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 \\ \beta-1 \\ -\beta \\ 1+\alpha\beta \end{matrix}\right]$$ ist Treppenform ✓

erlaubt 0 – denn: $\Leftrightarrow x_4 \cdot 1 = 0 \Rightarrow x_4 = 0$

b) Lösbarkeit: ⇝ Untersuche Nullzeilen in Abh. von α, β

I) Für $3 + \alpha \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha \neq -3}$: keine NZ ⇒ eindeutige Lösung (denn $\text{rang}(A) = n$ durch Treppenform ersichtlich)

II) $\boxed{\alpha = -3} \wedge (1 + \alpha\beta = 1 - 3\beta = 0 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 1/3})$: (homogene RHS)

⇒ 1 NZ: ∞-viele Lsg.

III) $\boxed{\alpha = -3} \wedge \boxed{\beta \neq -1/3}$: keine Lösung denn NZ + inhomogene RHS!

c) Lösung für $\alpha = -2$, $\beta = -1$ $\Rightarrow$ eindeutige Lösung mit b) ②

$$\Rightarrow [\tilde{A}|\tilde{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$\rightsquigarrow$ Rückwärtseinsetzen.

(oder mit Gauß weiter auf Diag.-Form...)

4 IV) $x_4 = -1$

3 III) $-2x_3 + x_4 = -1 \Leftrightarrow x_3 = -\frac{1}{2}(-1 - x_4) \Leftrightarrow x_3 = \frac{1}{2}(1 + (-1)) = 0$

$\Leftrightarrow x_3 = 0$

2 II) $2x_2 + \cancel{x_3} - 2x_4 = 0 \Leftrightarrow x_2 = x_4 = -1$

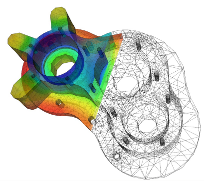
1 I) $x_1 + (-1) + 0 - (-1) = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1$

$\Rightarrow$ Lösungsmenge $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \right\}$. $\dim(\mathcal{L}) = 0$ eindeutig ✓

Vorbereitung zu Determinanten:

Bilinearform ($n=2$): $\psi : \underbrace{\overset{n}{\mathbb{R}} \times \overset{n}{\mathbb{R}}}_{n\text{-mal}} \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mapsto \psi\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ (wichtig: Sem. 5 FEM, ...)

n-fachen Linearform



Studygoals :P

Beispiel:

Aufgabe 6. (Bilinearform) Adjoint?

a) Zu einer Abbildung $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist die adjungierte Abbildung ϕ^* definiert als die Abbildung die

$$\langle \phi^*(x), y \rangle = \langle x, \phi(y) \rangle$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ erfüllt. Zeigen Sie, dass für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $A^* = A^T$.

b) Zeigen Sie, dass jede Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Bilinearform $\phi : \overset{1}{\mathbb{R}^n} \times \overset{2}{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $\phi(x, y) := x^T B y$. Das heißt $\phi(x, y)$ ist linear in beiden Komponenten. D.h.:

$$\phi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) = \lambda_1\mu_1\phi(x_1, y_1) + \lambda_1\mu_2\phi(x_1, y_2) + \lambda_2\mu_1\phi(x_2, y_1) + \lambda_2\mu_2\phi(x_2, y_2)$$

$\mathbb{R}$!?

Trick 17: $(AB)^T = B^T A^T$

Adjungierte

a) z.z.: $A^* = A^T$. Teste $\langle A^T x, y \rangle \overset{\text{Def SKP}}{=} (A^T x)^T y$

$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle = (1 \quad 2) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad = x^T (A^T)^T y$

$1^T = 1$

$= x^T A y = \langle x, Ay \rangle$ ✓

b) Betrachte $\phi_B(x,y) := x^T B y$. Linear in beiden Komponenten? ?

$\phi_B(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^T B(\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2)$

$= (\lambda_1^T x_1^T + \lambda_2^T x_2^T) B(\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) = \lambda_1 x_1^T B(\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) + \lambda_2 x_2^T B(\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2)$

$= \lambda_1 x_1^T B \mu_1 y_1 + \lambda_1 x_1^T B \mu_2 y_2 + \lambda_2 x_2^T B \mu_1 y_1 + \lambda_2 x_2^T B \mu_2 y_2$ $\quad \mu \in \mathbb{R}$

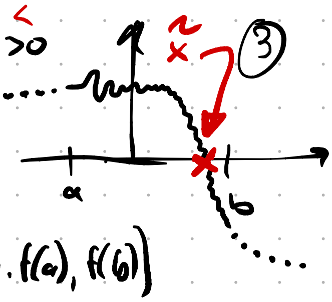
z.B. $x_2^T B y_1 = \phi_B(x_2, y_1)$

$= \lambda_1\mu_1 \phi_B(x_1, y_1) + \lambda_1\mu_2 \phi_B(x_1, y_2) + \lambda_2\mu_1 \phi_B(x_2, y_1) + \lambda_2\mu_2 \phi_B(x_2, y_2)$ ✓

$\Rightarrow$ BILINEAR

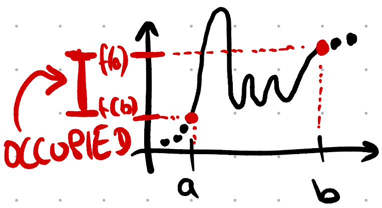
1 NS-Satz von Bolzano:

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig mit $f(a)\overset{>}{<}0$, $f(b)\overset{<}{>}0$.
Dann $\exists\, \tilde{x}\in[a,b]$ mit $f(\tilde{x})=0$.



Zwischenwertsatz:

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. $\forall\, y\in\big[f(a),f(b)\big]\ \exists\, x\in[a,b]$ mit $f(x)=y$. (f nimmt alle Werte an zw. $f(a)$, $f(b)$)

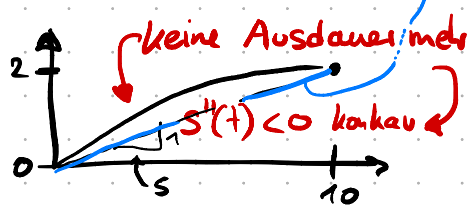


Beispiel:

(WS13/14)

Aufgabe 6.
Ein Läufer läuft insgesamt 2km in 10 Minuten. Zum Zeitpunkt t (in Minuten) hat er die Strecke $s(t)$ (gemessen in km) zurückgelegt. Die Funktion $s:[0,10]\to\mathbb{R}$ sei stetig.
Zeigen Sie, dass es immer einen Zeitabschnitt in $[0,10]$ von 5 Minuten gibt, in dem der Läufer genau 1 km durchläuft.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f(t)=s(t+5)-s(t)-1$ auf $[0,5]$.

Wenn $f(t)=0$



- $S_{Ende}(0\text{ min})=0\text{ km}$: $\begin{cases} S(0)=0 \\ S(10)=2 \end{cases}$

- $\tilde{f}(t) := s(t+5)-s(t)$ ≙ "Strecke der letzten 5 Minuten"

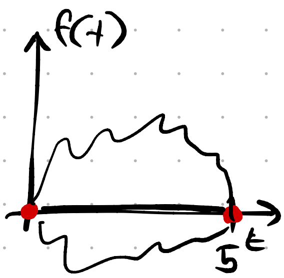
  $f(t)=\tilde{f}(t)-1$ ≙ "Differenz zu gesuchtem 1km" (offenbar stetig ;-))

- ZZ: $f(t)$ hat NS in $t\in(0,5)$:

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= s(5)-\underbrace{s(0)}_{=0}-1 = s(5)-1 \\ f(5) &= \underbrace{s(10)}_{=2}-s(5)-1 = -\big[s(5)-1\big] \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{f(0)=-f(5)}$$

- Fälle: I) $\boxed{f(0)=0=f(5)}$

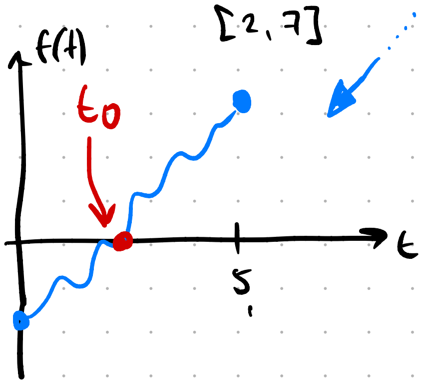
  ⇒ Erster & Zweiter km in genau 5 Min. gelaufen.

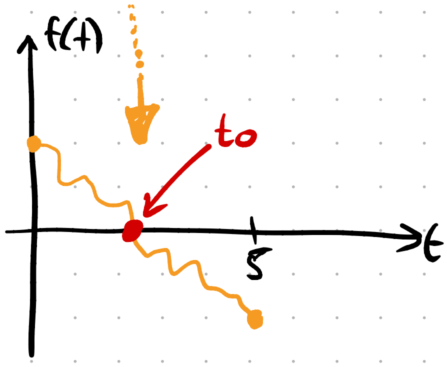


II) $\boxed{f(0)\neq 0}$

Entweder $f(0)<0<f(5)$ (*) ?
oder $f(0)>0>f(5)$ (*)

⇒ Nach Zwischenwertsatz / NS-Satz $\exists\, t_0\in(0,5)$ sodass der Läufer in $[t_0,t_0+5]$ genau 1km läuft.
$[2,7]$

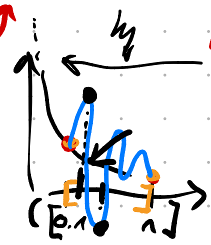




Extremwertsatz: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, dann $\exists\, y,z\in[a,b]$ sodass $\forall x\in[a,b]$ gilt: $f(y)\le f(x)\le f(z)$

MIN MAX

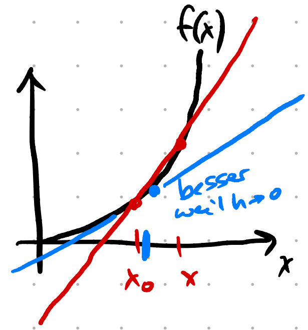
Abgeschlossenheit wichtig, $\frac{1}{x}$ auf $(0,1]$



df

Differentialrechnung:

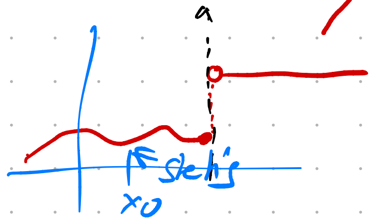
Diff'barkeit:



$f: D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diff'bar in $x_0\in D$ falls GW

$$\underset{\text{Ableitung}}{a} := \lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\text{Diff'quotient}\ \frac{\Delta f}{\Delta x}} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

existiert.



→ Rechts/linksseitige Ableitung

→ f diff'bar in x_0 ⇒ f stetig in x_0

→ Ableitungsregeln easy, Fragen?

Beispiel:

Aufgabe 10.
Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = |x\sin(x)|$ auf Differenzierbarkeit in $x_0 = 0$.

Idee: Betrachte links/rechtsseitige Ableitung. Falls beide gleich, ist $f(x)$ diff'bar in $x_0=0$.

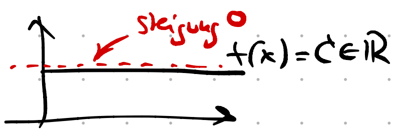
I) $$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \overset{f(0)=0}{=} \lim_{h\to 0^+}\frac{|(\overset{x_0=0}{\cancel{x_0}}+h)\sin(\overset{x_0=0}{\cancel{x_0}}+h)|}{h} \overset{h>0}{=} \lim_{h\to 0^+}\sin(h) = 0$$

II) $$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{|h\sin(h)|}{h} = -\lim_{h\to 0^-}\sin(h) = 0$$

⇒ $f(x)$ diff'bar in $x_0=0$.

Höhere Ableitungen: rekursiv definiert $\frac{d^2f}{d^2x} = f''(x) = g(f'(x), f'(x))$

Monotonie (streng): 1) Steigend: $f'(x)\overset{>}{\ge}0$ 2) Fallend $f'(x)\overset{<}{\le}0$



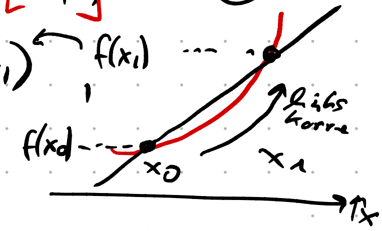
Konstante Funktionen: $f'(x) = 0$

Konvexität: $f: D \to \mathbb{R}$. Falls $\forall\, x_0, x_1 \in I \subset D$ und $\lambda \in [0,1]$:

(Bsp. Spiegel, konkav analog)

$$f((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) \leq (1-\lambda) f(x_0) + \lambda \cdot f(x_1),$$

dann f konvex auf $I \subset D$.



Beispiel:

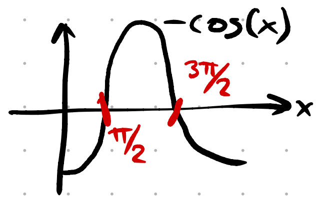
Aufgabe 6.

a) Auf welchem Teilinterval von $[0, 2\pi]$ ist die Funktion $f(x) = \cos(x)$ konvex? Begründen Sie Ihre Antwort.

streng.

Weil $f \in C^2$, f ist konvex wenn $f''(x) > 0$.

$f'(x) = -\sin(x) \leadsto f''(x) = -\cos(x)$



Also $f''(x) = -\cos(x) > 0 \iff \boxed{x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)} \subset [0, 2\pi]$