O : SK2, alles ready?

t : Quadriken

Vortragsübung 6
HM1 - WS22

Lambert Theisen
01.02.1995

En

Aufgabe V 13. *Quadriken: Euklidische Normalform und Gestalt*

Bestimmen Sie für die folgenden Quadriken je eine euklidische Normalform und deren Gestalt (in Teil **(b)** in Abhängigkeit von dem Parameter t).

(a) Die Quadrik Q sei gegeben durch

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + x_1x_2 + \frac{3}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + 1 = 0 \right\}$$

(b) Für $t \in \mathbb{R}$ sei die Quadrik Q_t gegeben durch

$$Q_t = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + tx_2^2 + 2tx_1x_3 + 2x_2x_3 - t = 0 \right\}.$$

a) Q ist beschrieben durch $x^T A x + 2 a^T x + c = 0$

wobei

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \end{array} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad a = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2\cdot\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad c = 1$$

$\boxed{\text{A muss symmetrisch!}}$

⇝ MUSS MAN DIREKT SEHEN.

6.2.1. Definition.

Es sei $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine quadratische Form, es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Linearform, und es sei $c \in \mathbb{R}$ (also eine Konstante).
Dann nennt man die Menge

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; q(x) + 2f(x) + c = 0 \right\}$$

eine Quadrik in $\mathbb{R}^n$.
Man nennt q den quadratischen, die Linearform $2f$ den linearen und c den konstanten Teil der Gleichung der Quadrik.

6.2.2. Matrixbeschreibung von Quadriken.

Jede Quadrik in $\mathbb{R}^n$ lässt sich beschreiben als

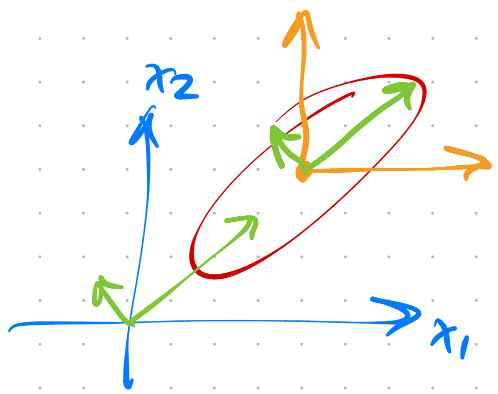
$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x^{\mathsf{T}}Ax + 2a^{\mathsf{T}}x + c = 0 \right\},$$

wobei

$q \;:\; x \mapsto x^{\mathsf{T}}Ax$ mit einer symmetrischen Matrix A

$f \;:\; x \mapsto a^{\mathsf{T}}x$ mit einem Spaltenvektor $a \in \mathbb{R}^n$.

Fasst man (nach Wahl eines affinen Koordinatensytems) die Elemente von $\mathbb{R}^n$ als Koordinaten von Punkten im Raum auf, so beschreibt die Quadrik eine Menge von Punkten.
Quadriken in $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ heißen auch Kurven bzw. Flächen zweiter Ordnung.
(Kurven bzw. Flächen erster Ordnung werden durch Linearformen und Konstanten beschrieben: Das sind affine Geraden bzw. Ebenen!)



a) Euklidische Normalform

Schritt 1 (: A diagonalisieren)

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (3/2 - \lambda)(3/2 - \lambda) - 1/4 = 9/4 - 3\lambda + \lambda^2 - 1/4 = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 2) \overset{!}{=} 0 \quad ⇝ \text{ also EW } \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$$

$V(1) = \ker(A - 1E_2) = \ker\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right) = L\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$

$V(2) = \ker(A - 2E_2) = \ker\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right) = L\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}$

$x + y = 0$

$x = \alpha$

$y = -\alpha \Rightarrow \alpha\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$

D.h. $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ und $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ bilden ONB aus EVs.

Transformation mit $F := \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ bzgl. des Koordsystems $\mathbb{F} = (0; v_1, v_2)$ ist Q gegeben durch:

$x^T \; A \; x + 2a^T x + c = 0$

$$\underbrace{y^T F^T}\underbrace{F^T A F}_{D} y + 2a^T F y + c = 0 \qquad [\text{wobei } x = Fy]$$

Remember: $(Fy)^T = y^T F^T$

$(F^T a)^T = a^T (F^T)^T = a^T F$

$$\Leftrightarrow \underbrace{1 \cdot y_1^2 + 2 \cdot y_2^2}_{\text{Keine Rechnung notwendig. Seht ihr warum?}} + \underbrace{2\begin{bmatrix}\frac{3}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}}\end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}}_{= \frac{1}{2}[3 \; 1] \cdot \left[\begin{smallmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{smallmatrix}\right] \cdot \left[\begin{smallmatrix}y_1\\ y_2\end{smallmatrix}\right] = \frac{1}{2}[2y_1 + 4y_2]} + 1 = 0$$

A

$x^T D x + 2a^T x + c$

$x_1 \cdot x_2$

$$\Leftrightarrow y_1^2 + 2y_2^2 + y_1 + 2y_2 + 1 = 0$$

Schritt 2 (quadratisches Ergänzen) [weil diese Terme nicht so nice sind]

$(y_1 + a)^2 = y_1^2 + 2ay_1 + a^2$

"y_1 & y_2" separieren und dann $(y_i - c_i)^2$ erzeugen"

$$\left(y_1^2 + y_1 + \frac{1}{4}\right) + 2\left(y_2^2 + y_2 + \frac{1}{4}\right) \underbrace{- \frac{1}{4}}_{=0} \underbrace{- 2 \cdot \frac{1}{4}}_{=0} + 1 + 0 = 0$$

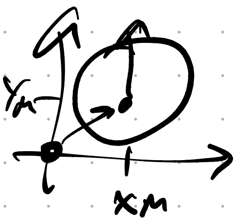
Wie kommt man hierauf? ;-)

$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = R^2$

$$\Leftrightarrow \left(y_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(y_2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = 0$$

$1 \cdot 4$

$$\Leftrightarrow 4\left(y_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + 8\left(y_2 + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 0$$



Neue Trafo um Origin zu shiften

$\begin{cases} u_1 = y_1 + \frac{1}{2} \\ u_2 = y_2 + \frac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{4u_1^2 + 8u_2^2 + 1 = 0}$ bzgl. des KS $\mathbb{G} = \left({}_{\mathbb{F}}\begin{pmatrix}-1/2\\ -1/2\end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right)$

Weiterhin:

$$\mathcal{G} = \left({}_{\mathbb{F}}\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} ; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left(F \circ {}_{\mathbb{F}}\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} ; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -0 \end{pmatrix} ; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

NR

$$F \circ {}_{\mathbb{F}}\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gestalt?

$\Rightarrow$ Beide VZ positiv

$\Rightarrow$ kein Punkt.

2D:

Dann hat die affine Normalform eine der folgenden Gestalten:

(I)	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	ein Punkt / eine Gerade *
	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	schneidendes Geraden- / Ebenenpaar
	$x_1^2 = 0$	Doppelgerade / Doppelebene
(II)	$\boxed{x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0}$	kein Punkt / kein Punkt *
	$x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$	Hyperbel / hyperbolischer Zylinder
	$-x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$	Ellipse / elliptischer Zylinder
	$x_1^2 + 1 = 0$	kein Punkt / kein Punkt *
	$-x_1^2 + 1 = 0$	paralleles Geraden- / Ebenenpaar
(III)	$x_1^2 + 2x_2 = 0$	Parabel / parabolischer Zylinder

(Macht auch Sinn denn es gibt keine $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ sodass $\underbrace{4u_1^2}_{\geq 0} + \underbrace{8u_2^2}_{\geq 0} + 1 = 0$)

b) ⇝ Jetzt mit Parameter t

Q_t ist geg. durch: $1x_1^2 + t \cdot x_2^2 + 2t \cdot x_1 x_3 + 2x_2 x_3 - t \overset{!}{=} 0$

$$\Leftrightarrow \quad x^T \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & t & 1 \\ t & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=: A_t} x + 2 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T}_{=: a_t} \cdot x + \underbrace{(-t)}_{=: c_t} = 0$$

$$Ax = \lambda \cdot x$$

Schritt 1: (Diag)

Feststellung: Zeilensummen von A_t sind alle $1+t$ $\Rightarrow A_t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1+t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ D.h. $\lambda_1 = (1+t)$ ist EW & $v_1 = 1/\sqrt{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist EV.

Trick 1: $Sp(A_t) = 1 + t + 0 \overset{!}{=} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \overset{\lambda_1 = \ldots}{=} (1+t) + \lambda_2 + \lambda_3$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_2 = -\lambda_3}$$

Trick 2: $\det(A_t) = -t^3 - 1 \overset{!}{=} \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \overset{\lambda_1, \lambda_3 \text{ elim.}}{=} (1+t) \cdot (-\lambda_2^2)$

$$\Rightarrow \lambda_2^2 = \frac{t^3+1}{1+t} \qquad (\text{falls } t \neq -1)$$

$$= t^2 - t + 1 \qquad (\text{PDiv})$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \sqrt{t^2-t+1}, \quad \lambda_3 = -\sqrt{t^2-t+1}$$

Für $t=-1$ erhalten wir $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \sqrt{3}$, $\lambda_3 = -\sqrt{3}$

Sei v_2, v_3 norm. EV zu λ_2, λ_3, dann hat Q_t bzgl. $\mathbb{F} = (0; v_1, v_2, v_3)$ die Form:

$$(1+t)\, y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 - t = 0$$

Fall 1 $(t=0)$: $\Rightarrow y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0$ [Doppelkegel]

6.3.7. Affine Klassifikation der Quadriken im Raum.

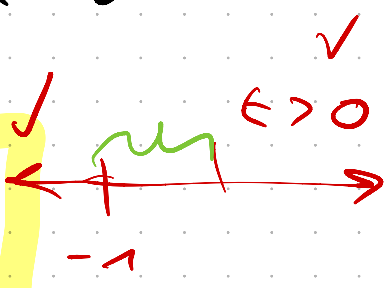
Wir nehmen hier an, dass jede der drei Variablen in der Gleichung vorkommt.
Dann hat die affine Normalform eine der folgenden Gestalten:

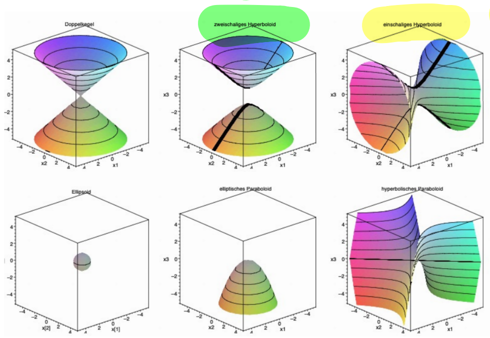
(I)	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$	$= 0$	ein Punkt *
	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$	$= 0$	Doppelkegel
(II)	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1$	$= 0$	kein Punkt *
	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 1$	$= 0$	zweischaliges Hyperboloid
	$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1$	$= 0$	einschaliges Hyperboloid
	$-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1$	$= 0$	Ellipsoid
(III)	$x_1^2 + x_2^2 + 2x_3$	$= 0$	elliptisches Paraboloid
	$x_1^2 - x_2^2 + 2x_3$	$= 0$	hyperbolisches Paraboloid

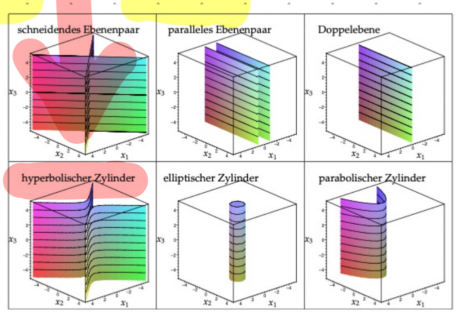
Die mit * gekennzeichneten Quadriken sehen recht mager aus.
Es gibt hier aber noch sehr viele Punkte „im Komplexen“:
also Lösungen der Gleichung in $\mathbb{C}^3$.

Fall 2: $(t \neq 0)$: $\Rightarrow -\frac{(1+t)}{t} y_1^2 - \frac{\lambda_2}{t} y_2^2 - \frac{\lambda_3}{t} y_3^2 + 1 = 0$

- $t > 0$ $\xrightarrow{- - +}$ einschaliges Hyperboloid. ✓
- $t < -1$ $\xrightarrow{- + -}$ einsch. Hyperboloid.
- $-1 < t < 0$ $\xrightarrow{+ + -}$ zweischaliges Hyperboloid.
- $t = -1$ $\xrightarrow{0 + -}$ hyperbolischer Zylinder. (see 2D classification)







E4

Aufgabe V 14. *Quadriken: Grobeinteilung und Ebenenschnitte*

Die Quadrik Q sei gegeben durch

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + x_2 + 4x_3 + 2 = 0\}.$$

(a) Entscheiden Sie mit Hilfe der erweiterten Matrix, ob es sich um eine kegelige Quadrik, eine Mittelpunktsquadrik oder eine parabolische Quadrik handelt.

(b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $d \in \mathbb{R}$ die Gestalt der Quadrik Q_d, die als Schnitt von Q mit der Ebene $x_2 = d$ entsteht.

(c) Nutzen Sie die Ergebnisse aus Teilaufgabe **(a)** und **(b)**, um die Gestalt von Q zu bestimmen.

a) Q ist:

$$x^T \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A} x + 2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 2 \end{bmatrix}^T}_{a^T} x + \underbrace{2}_{c} = 0$$

$$\Rightarrow \text{Rang}(A) = 2 =: r$$

$$\Rightarrow \text{Rang}(A_{erw}) = \text{Rang}\left[\begin{array}{c|ccc} 2 & 0 & 1/2 & 2 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \underset{\text{IV}-\text{I}}{\overset{\text{III}+\text{II}}{=}} \text{Rang}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} = 4 =: r_{erw}$$

$\Rightarrow$ Also $r_{erw} = r + 2$ & somit ist Q parabolische Quadrik.

6.2.6. Grobeinteilung.

Für jede Quadrik $Q = \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x^\top A\, x + 2\, a^\top x + c = 0\right\}$ definieren wir die erweiterte Matrix

$$A_{\text{erw}} := \left(\begin{array}{c|c} c & a^\top \\ \hline a & A \end{array}\right) := \left(\begin{array}{c|ccc} c & a_1 & \cdots & a_n \\ \hline a_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right)$$

sowie den erweiterten Rang $r_{\text{erw}} := \operatorname{Rg}(A_{\text{erw}})$ und schreiben $r := \operatorname{Rg} A$.
Man nennt Q eine

kegelige Quadrik	falls $r_{\text{erw}} = r$,
Mittelpunktsquadrik	falls $r_{\text{erw}} = r + 1$,
parabolische Quadrik	falls $r_{\text{erw}} = r + 2$.

b) Gestalt von Q geschnitten mit $\boxed{x_2 = d}$, $d \in \mathbb{R}$

$$Q: \quad x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + x_2 + 4x_3 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1^2 + d^2 + 2x_3^2 - 2x_1 d + d + 4x_3 + 2 = 0$$

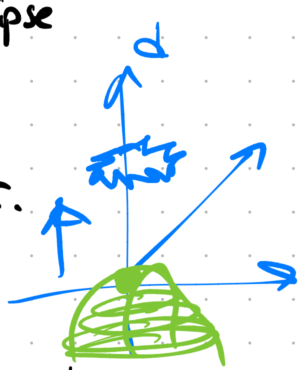
$$\Leftrightarrow \quad (x_1^2 - 2x_1 d + d^2) + 2(x_3^2 + 2x_3 + 1) + d = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_1 - d)^2 + 2(x_3 + 1)^2 + d = 0$$

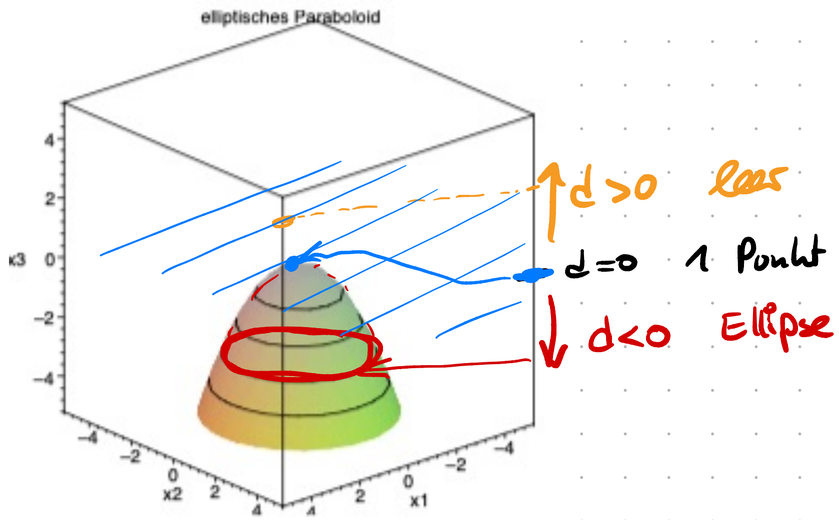
Fall 1 (d=0): $x_1^2 + 2(x_3+1)^2 = 0 \Rightarrow Q_d$ ist ein Punkt $P = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$

Fall 2 (d<0): $\underbrace{\frac{(x_1-d)^2}{d}}_{<0} + 2\underbrace{\frac{(x_3+1)^2}{d}}_{<0} + 1 = 0 \Rightarrow Q_d$ ist Ellipse

Fall 3 (d>0): $\underbrace{\frac{(x_1-d)^2}{d}}_{\geq 0} + 2\underbrace{\frac{(x_3+1)^2}{d}}_{\geq 0} + 1 = 0 \Rightarrow Q_d$ leer.



c) **Gestalt Q?** Nachdenken... $\Rightarrow$ Q ist elliptischer Paraboloid.



E3

Aufgabe V 15. *Quadriken: Ellipsen als Schnittmengen*

Die Oberfläche der Einheitskugel Q sei gegeben durch

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

$x^T x = 1$

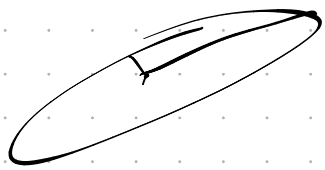
$\langle x, x \rangle = 1$

$\|x\|_2^2 = 1$

(a) Zeigen Sie, dass Q geschnitten mit der Ebene $x_1 + x_3 = 1$ eine Ellipse ist.

(b) Bestimmen Sie die Halbachsenlängen der Ellipse aus Aufgabenteil **(a)**.

a) Q beschrieben durch $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$



Ebene ist $x_1 + x_3 = 1 \Rightarrow x_3 = 1 - x_1$

Einsetzen: $x_1^2 + x_2^2 + (1-x_1)^2 = 1$

$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + (1 - 2x_1 + x_1^2) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\left(x_1^2 - x_1 + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} + 1 + x_2^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + x_2^2 - \frac{1}{2} = 0 \qquad | \cdot (-2)$

$\Leftrightarrow -4\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 - 2x_2 + 1 = 0$

$\Rightarrow$ Somit ist Schnitt eine Ellipse

b) Halbachsenlänge der Ellipse aus a)

Mit $y_1 = x_1 - \frac{1}{2}$, $y_2 = x_2$

folgt:

$-4y_1^2 - 2y_2^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{y_1^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{y_2^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + 1 = 0$

6.3.5. Bemerkung.

Oft schreibt man $\mu_j = \frac{1}{h_j^2}$ bzw. $\mu_j = -\frac{1}{h_j^2}$ (je nach dem Vorzeichen des Eigenwerts), mit $h_j > 0$. In diesem Fall nennt man die h_j Hauptachsenlängen der Quadrik: Bei einer Ellipse mit Gleichung

$$-\frac{x_1^2}{h_1^2} - \frac{x_2^2}{h_2^2} + 1 = 0$$

haben die Halbachsen tatsächlich die Längen h_1 bzw. h_2.

feet

also Halbachsenlänge $\frac{1}{2}$ cm & $\frac{1}{\sqrt{2}}$ cm ?!

miles

Stimmt nicht! Hier lief was schief...

Wie sieht Koordsystem aus?

Mit $\begin{cases} y_1 = x_1 - \frac{1}{2} \\ y_2 = x_2 \end{cases}$ folgt $\begin{cases} x_1 = y_1 + \frac{1}{2} \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = 1 - x_1 = \frac{1}{2} - y_1 \end{cases}$

Somit $x = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} + y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. D.h. Koordsys ist gegeben durch:

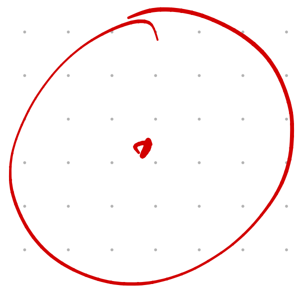
$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Aber Achtung: $\mathbb{F}$ ist kein kartesisches Koord'system (keine ONB, weil $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| \neq 1$)

Wir brauchen daher $\mathbb{G} = \left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Dann erhalten wir $-2u_1^2 - 2u_2^2 + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{u_1^2}{(1/\sqrt{2})^2} - \frac{u_2^2}{(1/\sqrt{2})^2} + 1 = 0$$



$\Rightarrow$ Halbachsenlängen sind $\frac{1}{\sqrt{2}}$ & $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$ D.h. der Schnitt ist Kreis mit $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.