TODO $\boxed{O}$: PÜ

$\boxed{A}$: Satz von Gauß, Flächen

$\boxed{NS}$: Optimierung, Line Search, Grad Desc., ...

Globalübung 12
Mathe 3 - WS21

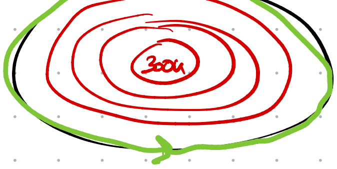
12.01.2022
Lambert Theisen

$\boxed{O}$: → Programmierübung 4 → Moodle → QR Algorithmus

$\boxed{A}$ **Oberflächenintegral** (erster Ordnung) $f: F \to \mathbb{R}$ skalares Feld

$$\int_F f \, dS := \int_B f(\Phi(p,q)) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial p} \times \frac{\partial \Phi}{\partial q} \right\|_2 dp\,dq$$

↳ Parameterbereich $B = [0,\pi] \times [0, 2\pi]$



Beispiel: Integriere $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ auf der Kugel-Oberfläche mit Radius R und MP in $(0,0,0)$.

→ Kugelkoords:
$$\phi(\theta,\varphi) =: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \sin\theta \cos\varphi \\ R \sin\theta \sin\varphi \\ R\cos\theta \end{pmatrix}$$

sieht kompliziert aus aber $\sin^2 + \cos^2$ rettet uns

$0 \le \varphi \le 2\pi$
$0 \le \theta \le \pi$

$$\Rightarrow f(\Phi(\theta,\varphi)) = R^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + R^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi = R^2 \sin^2\theta$$

→ Weiterhin:
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\cos\theta \sin\varphi \\ -R\sin\theta \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} -R\sin\theta\sin\varphi \\ R\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} R^2 \sin^2\theta \cos\varphi \\ R^2 \sin^2\theta \sin\varphi \\ R^2 \sin\theta\cos\theta \cos^2\varphi + R^2 \sin\theta \cos\theta \sin^2\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^2 \sin^2\theta \cos\varphi \\ R^2 \sin^2\theta \sin\varphi \\ R^2 \sin\theta \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial p} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right\|_2 = \left(R^4 \sin^4\theta \cos^2\varphi + R^4 \sin^4\theta \sin^2\varphi + R^4 \sin^2\theta \cos^2\theta \right)^{1/2}$$

$$= \left(R^4 \sin^4\theta + R^4 \sin^2\theta \cos^2\theta \right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{R^4 \sin^2\theta} \overset{\sin\theta > 0}{=} R^2 \sin\theta$$

→ Daher:
$$\int_{\partial B_2(0,0,0)} f(\Phi(\theta,\varphi))\, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (R^2 \sin^2\theta) \cdot (R^2 \sin\theta)\, d\theta\, d\varphi$$

$$= R^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta\, d\varphi = 2\pi \cdot R^4 \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta$$

$$= 2\pi R^4 \int_0^{\pi} \overbrace{\tfrac{1}{4}(3\sin\theta - \sin(3\theta))}^{\text{Formelzettel}} d\theta = \frac{\pi R^4}{2} \left[-3\cos\theta + \tfrac{1}{3}\cos(3\theta) \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi R^4}{2} \left[3 - \tfrac{1}{3} - \left(-3 + \tfrac{1}{3}\right) \right] = \frac{8\pi R^4}{3}$$

de.wikipedia.org/wiki/Formelsammlung_Trigonometrie

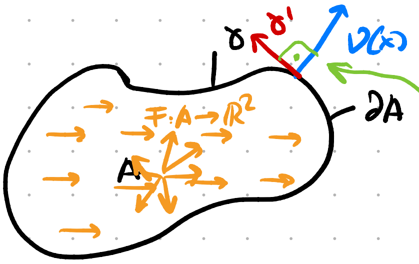
$\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$ [7]
$= \sin x\,(4\cos^2 x - 1)$

Oberflächenintegral zweiter Ordnung

Sei: $\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\int_F \vec{f}\, d\vec{A} := \int_B \langle \vec{f}(\Phi(p,q)), \Phi_p \times \Phi_q \rangle \, d(p,q)$

$\Rightarrow$ Wie bei den Kurvenintegralen...

A: Satz von Gauß in $\mathbb{R}^2$



- **Framework**:
  - Vektorfeld $F: A \to \mathbb{R}^2$ („Strömung")
  - A stückweise glatt berandet
  - $\bar{A} = A \cup \partial A$ ($\overline{(0,1)} = [0,1]$)

- **Äußere Normale** in $x \in \partial A$ falls:
  - I): $\|\nu(x)\| = 1$
  - II): $\nu(x) \cdot \gamma'(t_0) \boxed{=0}$ $\forall$ Randkurven mit $\gamma(t_0) = x$
  - III): $\exists\, c \in (0,\infty)$ sodass $x + \varepsilon \nu(x) \notin A$ $\forall \varepsilon \in (0,c)$
    "Zeigt nach außen"

- **Satz von Gauß 2D**: Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ stückweise glatt berandet und $F: \bar{A} \to \mathbb{R}^2$ stetig diff'bares Vektorfeld mit ÄN $\nu(x)$ auf ∂A. Dann:

$$\int_{\partial A} F \cdot \nu \, ds = \int_A \underbrace{\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \right)}_{\operatorname{div}(F)} dx$$

(„Fluss durch $\partial A \;\hat{=}\;$ divergenz in A")

$\operatorname{div}(F) \;\hat{=}\;$ Maß für Quellen/Senken

Beispiel:

Aufgabe 114. (Gauss's theorem)
Verify Gauss's theorem for the region bounded by

$$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 = x^2 + y^2\}$$

for the vector field

$$F(x,y) = (x,y)^T .$$

zz: $\int_{\partial P} F \cdot \nu \, ds \overset{!}{=} \int_A \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \right) dx$

I) LHS: Parametrisiere $\partial P = \gamma([0, 2\pi])$

mit $\gamma(t) = \begin{bmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{bmatrix}$ $\Rightarrow T(t) = \gamma'(t) = 2 \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$

$\Rightarrow N(t) = T'(t) = 2 \begin{bmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix}$

N(t) zeigt nach innen. Bdg III) der äußeren Normalen bringt daher:

$\nu(t) = 2 \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} = -N(t)$

Daher $\int_{\partial P} F \cdot \nu \, ds = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt = 4 \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 8\pi$

II) RHS:

$F=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\int_P \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right) dx = \int_P (1+1)\, dx = \int_0^2 \int_0^{2\pi} 2\, d\varphi\, dr = \int_0^2 4\pi = 8\pi$$

$\Rightarrow$ LHS = RHS , wie nach Gauß. ✓

Satz von Gauß in $\mathbb{R}^n$: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offene Menge mit stückweise glattem Rand ∂M. Für $F: \overline{M} \to \mathbb{R}^n$ stetig diff'bar gilt:

abgeschlossen + beschränkt → + kompakt

$\nabla \cdot F = \operatorname{div}(F)$

$$\boxed{\int_M \nabla\cdot(F)\, dx = \int_{\partial M} F \cdot \nu \, dS}$$

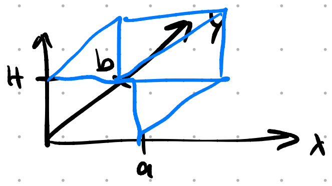
mit $\|\nu\| = 1$ äußere Normale.

Beispiel: Berechne den Fluss von $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\cdot z \\ y \cdot z \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$

©TUGraz

durch die Oberfläche des Quaders Q, der durch folgende Flächen begrenzt ist:

$x=0$	$y=0$	$z=0$
$x=a$	$y=b$	$z=h$

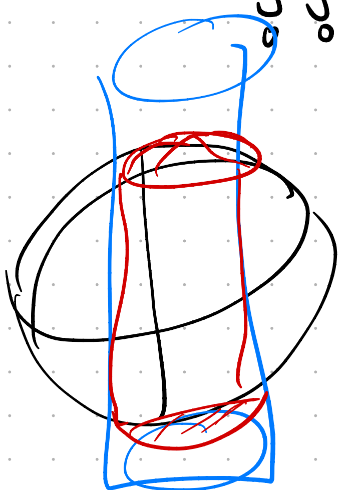


→ **Problem:** $\int_{\partial Q} F \cdot \nu \, dS$ wären 6 Integrale...

→ **Lösung:** Nutze Gauß mit $\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = z + z + 0 = 2z$

Mit Gauß: $$\int_{\partial Q} F \cdot \nu \, dS = \int_Q \operatorname{div}(F)\, dx = \int_0^a \int_0^b \int_0^H 2z \, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^a \int_0^b H^2 \, dy\, dx = a \cdot b \cdot H^2$$ easy ✓



HA:

K = Volumen

$\partial(K \cap Z)$

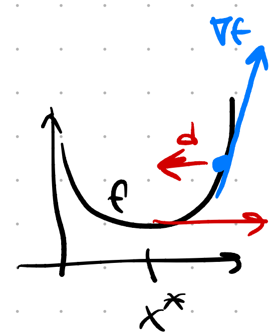
N

Liniensuche (Line Search):

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$$

5

- **Allgemeines Framework:**
  - Given $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$
  - For $k = 0, 1, \dots$ do
    - Compute Descent Direction: $d^{(k)} \in \mathbb{R}^n$
    - Choose step size $\alpha_k > 0$
    - Update: $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}$
  - end



- **Gut wäre:** $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ und $\lim_{k \to \infty} x^k = x^*$
- **Sinnvoll wäre:** $\nabla f(x^k) d^k \leq 0$ ("Gehe in Richtung Abstieg")
- **Optimal wäre:** $\alpha_k = \arg\min_{\alpha} f(x^k + \alpha d^{(k)})$

Spezifische Varianten (bestimmt durch $d^{(k)}$ und α_k):

I) **Gradient Descent**: $d^{(k)} := -I \cdot \nabla f(x^{(k)})$ "Gehe in Richtg. des Abstiegs"

II) **Newton auf ∇f**: $d^{(k)} := -\left[\nabla^2 f(x^{(k)})\right]^{-1} \nabla f(x^{(k)})$ [hat 2nd-order Information durch die Hessematrix (Krümmung)]

$\rightsquigarrow$ Findet NS von ∇f (genau das wollen wir)

III) Many more.... $\alpha = ?$ $d^{(k)} = -B^{(k)} \nabla f(x^{(k)})$

Demo: Line Search, Gradient Descent