TODO: Orga → Slides, Moodle
I) Numerik: Fourier, Trig. Interp.
II) Theorie: Klassifikation

Übung 1 – Mathe IV

Aufgaben 09.04.20

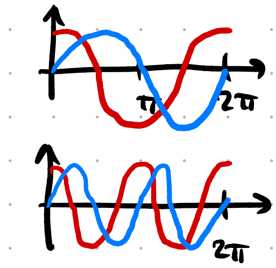
1

N — Trigonometrische Interpolation:

→ **Grundschwingungen**: $e_j : [0,2\pi] \to \mathbb{C}, \; x \mapsto e^{ijx} \quad (j \in \mathbb{Z})$

Remember: $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$

→ **Intuition**: $e_1 = e^{ix} = \underbrace{\cos(x)}_{Re} + i\,\underbrace{\sin(x)}_{Im}$

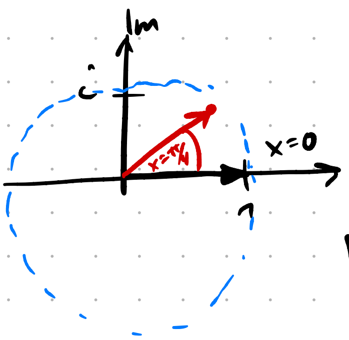


$\downarrow$

$e_2 = e^{2ix} = \cos(2x) + i\sin(2x)$

$\downarrow$

$(\ldots)$



$$\left[\begin{array}{l} e_0 = 1 \\ e_{-1} = e^{i\cdot(-x)} = \cos(-x) + i\sin(-x) \underset{\text{cos gerade, sin ungerade}}{=} \cos(x) - i\sin(x) \end{array}\right]$$

$\int_0^{2\pi} e_j e_k \, dx = \begin{cases} 1, & j=k \\ 0 \end{cases}$

→ **Orthonormalität**: $\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk}$ (Beweis in SRü)

→ **Fourier-Reihe** (Sei $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$): $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \underbrace{\langle f, e_k \rangle}_{\in \mathbb{C}} e_k$ Skp!

Truncation/Approximation

→ **Fourier-Teilsumme**: $S_n(f;x) = \sum_{|k|\le n} \langle f, e_k \rangle e_k$

→ S_n projeziert orthogonal auf $\dim \left| \mathrm{span}\{e_k : |k| \le n\} \right| = 2n+1$

→ **Analogie euklidische Vektorbasis**:

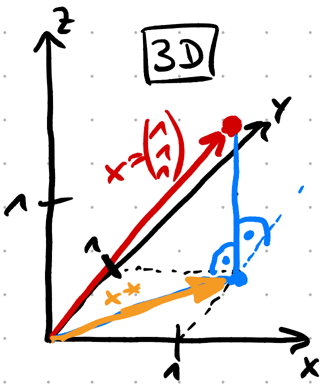
Sei $x = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $U = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ ein Unterraum $\mathbb{R}^3$

$= \mathrm{span}\{u_1, u_2\}$

Dann ist $x^* = \sum_{k=1}^{2} \langle x, u_k \rangle u_k$

$= \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

die Best-Approx. von $x \in \mathbb{R}^3$ in $U \subset \mathbb{R}^3$.



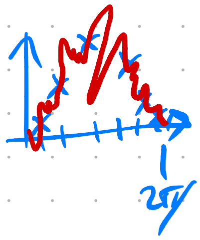
Trig. Interpolation:

$n=4$: $x_0 = \frac{2\pi \cdot 0}{4} = 0$, $x_1 = 2\pi \cdot 1/4 = \pi/2$ ....

Sei $\{(x_k, y_k)\}_{k=0..n-1}$ gegeben mit $x_k = \frac{2\pi k}{n} \in \mathbb{R}$, $y_k \in \mathbb{C}$,

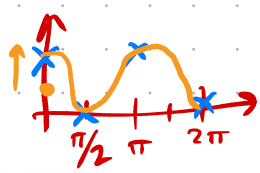
Finde $T_n(x) \in \mathcal{T}_m$ sodass $T_n(x_k) = y_k \;\forall k = 0 \ldots N-1$

wobei $\mathcal{T}_m := \{ [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\; x \mapsto \sum_{j=0}^{m-1} c_j \cdot e^{ijx},\; c_j \in \mathbb{C} \}$.



Satz aus VL: $T_n(y; x) = \sum_{j=0}^{n-1} d_j e^{ijx}$ mit $d_j(y) = \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} y_\ell \cdot e^{-ijx_\ell}$

erfüllt Interpolationsbedingung.



Beispiel:

Aufgabe 75. (Interpolation)
Bestimmen Sie zu den Daten

x_k	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$f(x_k)$	2	0	2	0

ein komplexes trigonometrisches Polynom der Form

$$T_4(f;x) = \sum_{j=0}^{3} d_j(f) e^{ijx},$$

das die Daten interpoliert, also $T_4(f; x_k) = f(x_k)$, für $k = 0, \ldots, 3$.

- $d_j(f) = \frac{1}{4} \sum_{\ell=0}^{3} f(x_\ell) \underbrace{e^{-ijx_\ell}}$

vgl. Einheitswurzeln

Shift

- $d_0 = \frac{1}{4}\left(2 \cdot e^{-i \cdot 0 \cdot 0} + 0 \cdot e^{-i \cdot 0 \cdot \pi/2} + 2 \cdot e^{-i \cdot 0 \cdot \pi} + 0 \cdot e^{-i \cdot 0 \cdot \frac{3\pi}{2}}\right)$

  $= \frac{1}{4}(2 + 2) = 1$

  $\overbrace{\cos(-\pi)}^{=-1} + i \cdot \overbrace{\sin(-\pi)}^{=0}$

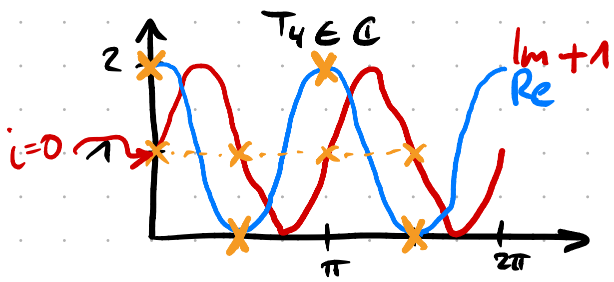
- $d_1 = \frac{1}{4}\left(2 \cdot e^{-i \cdot 1 \cdot 0} + 0 \cdot e^{-i \cdot 1 \cdot \pi/2} + 2 \cdot e^{-i \cdot 1 \cdot \pi} + 0 \cdot e^{-i \cdot 1 \cdot \frac{3\pi}{2}}\right)$

  $= \frac{1}{4}(2e^0 + 2e^{-i\pi}) = \frac{1}{4}(2 + 2(-1 - i \cdot 0)) = 0$

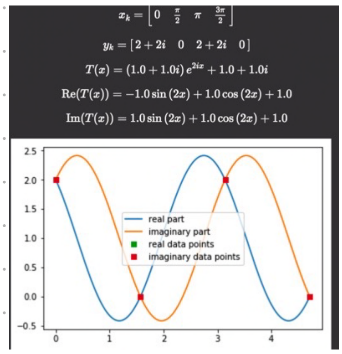
- $d_2 = \frac{1}{4}(2e^0 + 2e^{-i2\pi}) = \frac{1}{4}(2 + 2(1 + i \cdot 0)) = 1$
- $d_3 = \frac{1}{4}(2e^0 + 2e^{-i3\pi}) = d_1 = 0$

$\Rightarrow T_4(f; x) = \sum_{j=0}^{3} d_j \cdot e^{ijx} = 1 e^{i \cdot 0 \cdot x} + 1 e^{i2x}$

$= 1 + e^{i2x} = 1 + (\cos(2x) + i \sin(2x))$



HA Checker



{VS Code, Python3, Packages} Distr.

Interactive Python Script: → Show mit $y_k \in \mathbb{C}$

T **Klassifikation PDEs:**

→ **Allgemeine Form**: $F(x, u, Du, \dots, D^p u) = 0$ Multiindex

$u: G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

→ **Bsp**: $-\Delta u = 0$ auf $G = \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow F(x, u, D^{1,0}u, D^{0,1}u, D^{1,1}u, \quad , D^{2,0}u, D^{0,2}u)$

$= -D^{2,0}u - D^{0,2}u = -\partial_{xx}u - \partial_{yy}u = -\Delta u = 0$

→ **Ordnung**: $|p|$

→ **Linearität** (in u): Falls F linear in allen $D^p u$ ist (muss nicht in x)

↳ zB: $5\Delta u + x^2 = 0$

→ **Quasilinear**: Höchste Ordnung D^p ist linear.

↳ zB: $u \cdot (\partial_x u) + u^2 = 0 \iff F(x, u, \partial_x u) = 0$

denn $F(x, u, \alpha \cdot \partial_x \tilde{u} + \beta \cdot \partial_x \hat{u}) = \alpha \cdot F(x, u, \partial_x \tilde{u}) + \beta \cdot F(x, u, \partial_x \hat{u})$

aber $F(x, (\alpha\tilde{u} + \beta\hat{u})^2, \partial_x u) \neq \alpha F(x, \tilde{u}, \partial_x u) + \beta \cdot F(x, \hat{u}, \partial_x u)$ $+2\alpha\beta$

→ **Semilinear**: Vorfaktor vor höchsten $D^p u$ ist $O(1)$

↳ zB: $\pi \cdot \partial_x u + u^2 = 0$

Nichtlinear: Sonst

Bsp:

Aufgabe 79. (Klassifizierung partieller Differentialgleichungen)
Man entscheide, ob die folgenden partiellen Differentialgleichungen *linear*, *semi-linear*, *quasi-linear* oder *nichtlinear* sind, und bestimme die Ordnung der Differentialgleichung.

a) (Transportgleichung) $u_t + v \cdot \operatorname{grad} u = 0$,
b) (Wellengleichung) $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$, $c \in \mathbb{R}$
c) (Burgers-Gleichung) $u_t - u u_x = 0$,
d) (Korteweg-de-Vries-Gleichung) $u_t + 6 u u_x + u_{xxx} = 0$.

a) (Transport) $u = u(x,t)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$, $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (Dichte, Temp.)

$$u_t + v \cdot \nabla u = \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_{x_1} u \\ \vdots \\ \partial_{x_n} u \end{pmatrix} = \underbrace{\partial_t u}_{\substack{p=1 \\ \text{linear}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n v_i \cdot \partial_{x_i} u}_{\substack{p=1 \\ \text{linear in } \partial_{x_i} u}}$$

$\Rightarrow$ Linear mit $p = 1$

b) (Wellen)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) - c^2 \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} u(x,t) = 0 \quad \Rightarrow \text{Linear mit } p = 2$$

c) (Burgers) $\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} u(x,t)}_{p=1 \text{ LIN}} - \underbrace{u \cdot \frac{\partial}{\partial x} u(x,t)}_{p=1 \text{ NLIN}} = 0$

Da Koeffizient vor $\partial_x u$ nur von u abhängt $\Rightarrow$ Quasi linear, $p=1$

d) (Kortweg-De-Vries)

$u_t + 6 u \cdot u_x + \underbrace{1}_{\mathcal{O}(1)} \cdot u_{xxx} = 0 \Rightarrow$ Semi linear $p=3$

Grundtypen (quasi-linearer PDEs zweiter Ordnung):

Gegeben: $\underbrace{\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}}_{\text{Hauptteil mit höchster Ordnung}} + f(x_i, u, \partial_{x_i} u) = 0$ $|p|=2$

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit Einträgen a_{ij} und $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ EW von A.

→ **Elliptisch**: $(\lambda_i > 0) \vee (\lambda_i < 0) \quad \forall i = 1..n$

→ **Parabolisch**: $(\lambda_j = 0) \wedge (\lambda_{i, i\neq j} > 0 \vee \lambda_{i,i\neq j} < 0)$ j fest

→ **Hyperbolisch**: $(\lambda_j < 0 \wedge \lambda_{i,i\neq j} > 0) \vee (\lambda_j > 0 \wedge \lambda_{i,i\neq j} < 0)$

Bsp:

Aufgabe 7. (Klassifikation von PDGLen)
Entscheiden Sie, ob folgende Operatoren für $x \in \mathbb{R}^n$ elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch sind. Begründen Sie ihre Antwort.

a) $-\Delta, n \geq 3$.

b) $\partial_{tt} - \Delta, n \geq 3$.

c) $\partial_t - \Delta, n \geq 3$.

d) $\partial_{tt} + d\partial_t - \partial_{xx}, d \in \mathbb{R}$.

...

Instant-Berechnung für $a u_{xx} + 2b \underbrace{u_{xy}}_{= u_{yx} \text{ (Satz von Schwartz)}} + c u_{yy} = d$ $\mathbb{R}^2$

Trick

$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -b & \lambda - c \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - c) - b^2$

$= \lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - b^2)$

5

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+c}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + (-ac+b^2)}}$$

$$\begin{cases} > \frac{a+c}{2} & \text{falls } b^2-ac>0 \quad (\text{Ellipt.}) \\ = \frac{a+c}{2} & \text{falls } b^2-ac=0 \quad (\text{Para.}) \\ < \frac{a+c}{2} & \text{falls } b^2-ac<0 \quad (\text{Hyperb.}) \end{cases}$$

a) $-\Delta u = -1 \cdot \partial_{xx} u + 0\, \partial_{xy} u - 1\, \partial_{yy} u$

$\Rightarrow a=-1,\ b=0,\ c=-1 \Rightarrow 0^2-(-1)(-1)<0 \Rightarrow$ ELLIPTISCH

b) $+1 \cdot \partial_{tt} u - \Delta u$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_i = 1\ \forall i = 2 \dots n \Rightarrow$ HYPERBOLISCH

c) $\partial_t u - \Delta u$, $\lambda_i = -1\ \forall i = 1..n \Rightarrow$ ~~ELLIPTISCH wie a)~~ PARABOLISCH wenn $\Delta \mathrel{\hat{=}} \Delta_x$ da $a_{tt}=0$ dann

d) $(\partial_{tt} + d \cdot \partial_t - \partial_{xx})u$, $d \in \mathbb{R} \Rightarrow$ HYPERBOLISCH wie b) da $d \cdot \partial_t$ keinen Einfluss