TODO: Orga: Feedback in Moodle! PUE Anynom

[A]: Heat-Eq.

[N]: Convergence Theory Poisson Matrizen L, M

ÜBUNG 5 – Mathe IV –

07.05.2020

[A]: Instat. Wärmeleitungs-Gleichung: (Diff.-Gl., Heat-Eq.) ①

$\partial_t \neq 0$

→ $u(x,t) \hat{=}$ Temp. am Ort x zur Zeit t → Quelle $f(x,t)$

→ $a(x,t) \hat{=}$ Wärmeleitkoeff. "

Dimensionsbehaftet: $\partial_t u(x,t) - a\, \partial_{xx} u(x,t) = f(x,t)$ $\boxed{1D}$

Dim'los (Normalisiert): $a = 1$

Höhere Dimension: $\partial_t u(x,t) - \Delta_\Omega u(x,t) = f(x,t)$

Ω: $[0,1]$

$\Omega \neq \mathbb{R}$

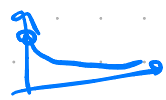
$a > 0$

$k^2 > 0$

$t > 0$

Expl. Lösung: z.B. durch Trennung der Variablen

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \overset{VL\ldots}{\Rightarrow} (A \cos(kx) + B \sin(kx)) \cdot e^{-ak^2 t}$$



→ A_k, B_k, k durch AB/RB (durch Fourier-Reihenentwicklung)

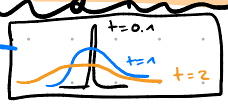
Fundamentallösung / Heat kernel:

$\int \phi = 1$?

$n =$ Raumdims#

→ Homogen, idealisiert: $\begin{cases} \partial_t u - a\Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x,0) = \delta_0, & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \Rightarrow \phi(x,t) = \dfrac{1}{(4\pi \cdot a \cdot t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4at}}$

→ Inhomogen, idealisiert: $\begin{cases} \partial_t u - a\Delta u = f(x,t) \\ u(x,0) = \delta_0 \;?!! \end{cases} \Rightarrow u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f(y,s)\, \phi(x-y, t-s)\, dy\, ds$ ①



→ Homogen "Praktisch": $\begin{cases} \partial_t u - a\Delta u = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases} \Rightarrow u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \cdot \phi(x-y,t)\, dy$ ②

(→ SRü)

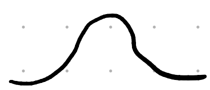
→ Inhomogen "Praktisch": $\begin{cases} \partial_t u - a\Delta u = f(x,t) & " \\ u(x,0) = g(x) & " \end{cases}$ (... $a = a(x,t)$ $\boxed{2D}$

(→ Evans, PDEs)

$$\Rightarrow u(x,t) = ① + ② = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f(y,s)\, \phi(x-y, t-s)\, dy\, ds + \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \cdot \phi(x-y,t)\, dy$$

Beispiel:

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \overset{a}{1} \cdot \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = 1 & \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = e^{-x^2} & \text{on } \mathbb{R} \times \{t=0\} \end{cases}$$



$$①: \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(y,s) \cdot \phi(x-y, t-s)\, dy\, ds = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4 \cdot (t-s)}}\, dy\, ds$$

Ganzraum! $f = \text{const}$ $\quad \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(\cancel{x}-y)^2}{2^2(t-s)}} \, dy\, ds$ $\quad \boxed{\exp \stackrel{!}{=} -z^2} \Rightarrow$ $\boxed{\text{Sub } z = \frac{y}{2\sqrt{t-s}} \Rightarrow \frac{dz}{dy} = \frac{1}{2(t-s)^{1/2}}}$ ②

Sub

$$= \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}} \cdot \frac{2\sqrt{t-s}}{1} \Bigg[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz}_{=\sqrt{\pi}} \Bigg] ds$$

integral e^(-x^2) from -inf to inf

Extended Keyboard Upload

Definite integral:

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \approx 1.77245$

$$= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} \, ds = t$$

(II): $\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \cdot e^{-y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{\overbrace{-\frac{(x-y)^2}{4t} - y^2}^{E}} dy$

$$E = -\frac{(x-y)^2}{4t} - y^2 = -\frac{1}{4t}\left(x^2 - 2xy + (1+4t)y^2\right)$$

$$= -\frac{x^2}{4t} - \frac{1+4t}{4t}\Big(-2\frac{x}{1+4t}y + y^2 + \underbrace{\frac{x^2}{(1+4t)^2} - \frac{x^2}{(1+4t)^2}}_{=0}\Big)$$

$$= -\frac{x^2}{4t} - \frac{1+4t}{4t}\left(y - \frac{x}{1+4t}\right)^2 + \frac{x^2}{(1+4t)4t}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1+4t}{2t}}\left[y - \frac{x}{1+4t}\right]\right)^2 + \frac{x^2 - (1+4t)x^2}{(1+4t)4t}$$

$$= -x^2 / 1+4t \quad + f(y)$$

$$\Rightarrow \text{(II)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\left(\frac{x^2}{1+4t}\right)} \int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\underbrace{\Big[\sqrt{\frac{1+4t}{2t}}\cdot\Big(y - \frac{x}{1+4t}\Big)\Big]}_{\text{Sub } z :=}{}^2\Big) dy$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dy} = \sqrt{\frac{1+4t}{2t}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \cdot e^{-\left(\frac{x^2}{1+4t}\right)} \cdot \sqrt{\frac{2t}{1+4t}} \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2/2} dz}_{=\sqrt{2\pi}}$$

$u \to \infty$ weil $f = 1$ und keine Kühlung...

$$= \left(\frac{\sqrt{4t\pi}}{\sqrt{(4\pi t)(1+4t)}}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{1+4t}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} \exp\left(-\frac{x^2}{1+4t}\right)$$

Letztlich: $u(x,t) = \text{(I)} + \text{(II)}$ (könnte mal nachgeprüft werden morgen :))

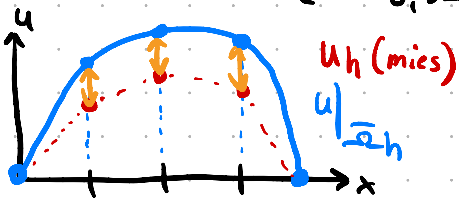
$\partial_t u$, $\partial_x u$, $\partial_{xx} u \to$ DE einsetzen?

$\partial_t u - \Delta u = f \to$ in 2W. $\partial_t u \overset{z.B.}{\approx} \frac{u_{t+1}-u_t}{\Delta t}$

N: Konvergenztheorie

Setup: $u_h \in \ell^2(\bar\Omega_h)$ $\hat=$ numerische Lösung auf Gitterpunkten
$u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$ $\hat=$ kontinuierliche Lösung des PDE $\begin{cases} -\Delta u = f, \Omega \\ u = g, \partial\Omega \end{cases}$

Diskretisierungsfehler: $e_h := \underbrace{u|_{\bar\Omega_h}}_{\in \ell^2(\bar\Omega_h)} - u_h$



→ **Note:** $u_h(\xi) = u(\xi) \;\forall \xi \in \bar\Omega_h \setminus \Omega_h$ (Rand) (s.o.)

$\Leftrightarrow e_h(\xi) = 0$ "dort" $\Rightarrow e_h \in \ell^2_0(\bar\Omega_h)$

→ **Intuition:** Wir hätten gerne $\|e_h\| \to 0$ für $h \to 0$

→ **Abschätzung:** $\|e_h\| = \|-\underbrace{\Delta_h^{-1}\Delta_h}_{=1} e_h\| = \|-\Delta_h^{-1}(\Delta_h u|_{\bar\Omega_h} - \underbrace{\Delta_h u_h}_{-f|_{\Omega_h}})\|$

$= \|\Delta_h^{-1}(-\Delta_h u|_{\bar\Omega_h} - f|_{\Omega_h})\|$

Andere Gl. (Helmholtz, HA/SRü)

⇝ Analog!

$\le \underbrace{\|\Delta_h^{-1}\|}_{\le C \;\forall h \to 0} \cdot \underbrace{\|-\Delta_h u|_{\bar\Omega_h} - f|_{\Omega_h}\|}_{\to 0}$

$\Rightarrow$ STABILITÄT $\quad \to 0 \Rightarrow$ KONSISTENZ $\in \mathcal{O}(h^2)$

Konsistenz (2D, Einheitsquadrat): → mit Taylor, siehe VL

→ Für $u \in C^4(\bar\Omega)$ und $C := \max\{\|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\|_{\infty,\bar\Omega}, \|\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\|_{\infty,\bar\Omega}\}$ haben wir:

$\boxed{\text{Glattheit}}$ $\boxed{\sim \text{ vs. } \wedge}$

$\boxed{1D: \frac{1}{6} \mapsto \frac{1}{12} \;\to \text{HW}}$

"∞": $\|-\Delta_h u|_{\bar\Omega_h} - f|_{\Omega_h}\|_\infty \le \frac{1}{6} C \cdot h^2$ ✓

"2": $\|-\Delta_h u|_{\bar\Omega_h} - f|_{\Omega_h}\|_2 \le \frac{1}{6} C \cdot h^1$ ✓ (da $\|v_h\|_2 \le \frac{1}{h}\|v_h\|_\infty$)

"2,h": $\|-\Delta_h u|_{\bar\Omega_h} - f|_{\Omega_h}\|_{2,h} \le \frac{1}{6} C \cdot h^2$ ✓ (da $\|v_h\|_{2,h} := h \cdot \|v_h\|_2$)

→ **Achtung:** $C = f(\partial_x^4 u, \partial_y^4 u)$ kann zu Problemen führen wenn u nicht glatt genug (→ SRü)

EW?!

Stabilität (→ siehe VL): → "2"/"2,h": $\|\Delta_h^{-1}\|_{2,h} = \|\Delta_h^{-1}\|_2 = \|A_1^{-1}\|_2 \le \frac{1}{8} =: C$ ($A_1 \hat=$ Poisson Matrix)

→ "∞" $\|\Delta_h^{-1}\|_\infty = \|A_1^{-1}\|_\infty \le \frac{1}{8}$ (A_1 = M-Matrix nutzen, Expl. Lsg. nutzen)

④

Konvergenz (Konsistenz + Stabi):

! $h \to 0$:

→ "2,h" : $\|e_h\|_{2,h} \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6} C h^{2} \to 0$ ✓

→ "2" : $\|e_h\|_2 \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6} C h^{1} \to 0$ ✓

→ "∞" : $\|e_h\|_\infty \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6} C h^{2} \to 0$ ✓

2!

(C von Konsistenz-Lemma)

Matrix-Eigenschaften (für $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$):

→ (Schwach) Diagonaldominanz: $\sum_{j \neq i}^{m} |a_{i,j}| \leq |a_{i,i}| \quad \forall i = 1 \ldots m$ $\quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ ✓

→ Irreduzibilität: $\nexists$ Perm.matrix P, s.t. $PAP^T = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$, $B_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $1 \leq k < m$

⟺ Ketteneigenschaft: "Im Graph kann von jedem i das j erreicht werden" $\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

→ Reduzibilität: Wenn nicht irreduzibel  $\hat{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ×

→ Irreduzible Diagdominanz: Irreduzibilität + schwach Diagdominant + mind. 1 Zeile stark diagdominant $\quad \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ ✓

→ L_0-Matrix: $a_{i,j} \leq 0 \quad \forall i \neq j$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ✓

→ L-Matrix: L_0-Matrix plus $a_{i,i} > 0 \;\forall i$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

→ M-Matrix: Inv'bare L_0-Matrix mit $(A^{-1})_{ij} \geq 0 \;\forall i,j$ $\quad$ 1D Laplace: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ✓

↳ Wichtig: A^{-1} schwer zu berechnen, daher:

Satz: (→ SPÜ) Wenn A L-Matrix & (strikt diag'dom. oder irreduzibel diag'dom.), dann A ist M-Matrix.

2D Poisson Matrix A_1:

Sei $A_1 =$

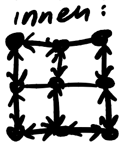
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

⊗ ?!

L_0: ✓ $\quad -1 \leq 0$

L: ✓ $\quad 4 > 0$

Diagdom: Am Rand ✓ innen: schwach ✓

Irreduzibel: ✓ denn  $\hat{=}$ △

⇒ A_1 ist M-Matrix

Helmholtz Matrix (→ HA!): $B = A_1 + I$ ⇒ auch M-Matrix

Julia Notebook (Poisson Convergence + Rectangle)

→ Rectangle

→ Convergence in different norms...

→ Spatial Error Distribution