O: Fragen, Mod., Eval
A: Reihen
N: Lineare Abbildungen

Globalübung 7
Mathe 1
CES – WS25

28.11.2025 (1)
Lambert Theisen

O Evaluierung

TODO
- Aufgaben GGi
- Email

A Reihen

$(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ ist Folge.

→ **n-te Partialsumme**: $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

→ **Reihe** $\hat{=}$ Folge der Partialsummen: $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_1+a_2, \dots)$

mit $\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (falls existent)

→ **Beispiele**:

$1+2+3+\dots$

1) Arithmetische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k$ divergiert, denn:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k \overset{\text{Gauß}}{=} \frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

2) Geometrische Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert für $|q|<1$, denn

$n=5$ $\qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für $q \neq 1$ (Euklid, ≈ 300 v. Chr.)

Grenzwert für $|q|<1$: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

Tipp: Gilt auch für $q \in \mathbb{C}$

3) Harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ obwohl $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ NF!

3) NF (a_k) $\not\Rightarrow$ Reihe konvergiert.

Teleskop-Trick:

→ Bsp: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

Partialbruchzerlegung (PBZ): live →

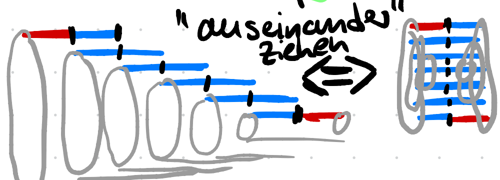
$\frac{1+0k}{k(k+1)} \overset{!}{=} \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{a(k+1)+b\cdot k}{k(k+1)}$

$a=1$

k^0 I) $1\cdot a = 1$

k^1 II) $k(a+b) = 0\cdot k$ $\Rightarrow b=-1$

Teleskop:



$k=1$ …… $= 1 - \frac{1}{2}$

$k=2$ ………… $+ \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

$k=3$ ………… $+ \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

$k=$ u.s.w. ………… $+ \ldots$

$k=n$ ………… $+ \ldots - \frac{1}{n+1}$

etwas formaler: $\left(1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{n+1}\right)$

$= \underbrace{\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}\right.}_{=0} \left. + \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

$\boxed{\text{Index-Shift: } \sum_{k=2}^{n} k = \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) \text{ legit.}}$

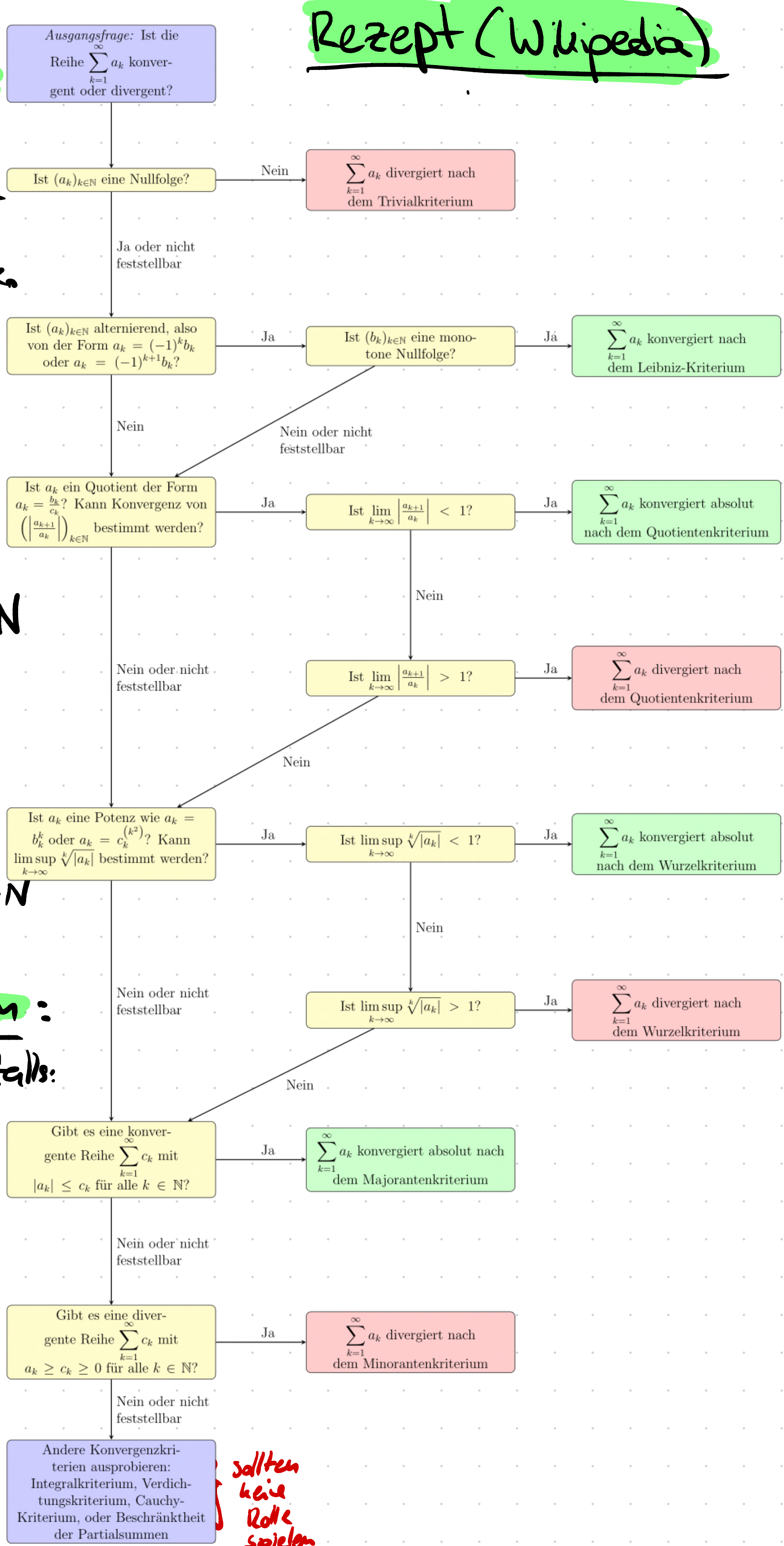
$S_n \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=3}^{N-2} \frac{1}{(k-2)^2}$

Konvergenzkriterien:

1) Trivialkriterium: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert $\Rightarrow (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge

$\Leftrightarrow$ a_k keine NF $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert.

Rezept (Wikipedia)



sollten keine Rolle spielen

2) Leibnitz-Kriterium:

Alternierende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$ konvergiert falls a_k monotone Nullfolge.

3) Quotienten-Kriterium:

Abs. konv. ($\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konv.) falls:

$$\exists\, q<1 : \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \le q \quad \forall k \ge N$$

4) Wurzel-Kriterium:

Abs. konv. falls:

$$\exists\, q<1 : \sqrt[k]{|a_k|} \le q \quad \forall k \ge N$$

5) Majoranten-Kriterium:

Absolute Konvergenz, falls:

$\exists$ konv. Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, $c_k \in \mathbb{R}_+$

mit $|a_k| \le c_k \ \forall k \ge N$

6) Minoranten-Kriterium

Divergenz falls:

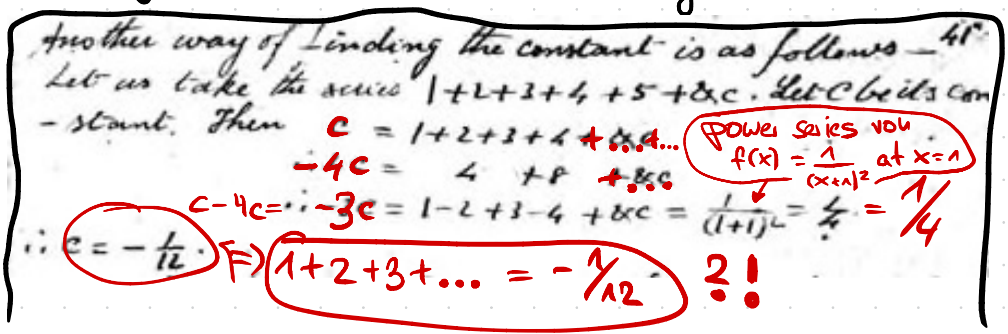
$\exists$ diverg. Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$

mit $a_k \ge d_k \ge 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$

Absolute Konvergenz: von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

→ Summationsreihenfolge egal. Warum ist das eigentlich wichtig?

Ramanujan: (1887–1920)



Another way of finding the constant is as follows — 41
Let us take the series $1+2+3+4+5+\&c$. Let C be its constant. Then

$C = 1+2+3+4+\&c\ldots$

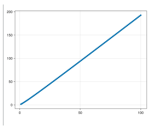
$-4C = \ \ 4 \ + 8 + \&c$

$C-4C = -3C = 1-2+3-4+\&c = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$

power series von $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ at $x=1$

$\therefore C = -\frac{1}{12}$ ⇒ $1+2+3+\ldots = -\frac{1}{12}$?!

Bsp: a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{2n^2+1}{n^2+n}$

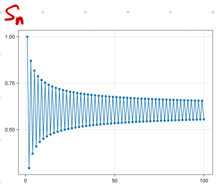


GW der Folge: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+1/n^2}{1+1/n} = \frac{2}{1} = 2$

=> NW Bed für Reihenkonvergenz $a_n \to 0$ gilt nicht
=> Reihe divergiert.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = (-1)^{n+1} b_n$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

S_n

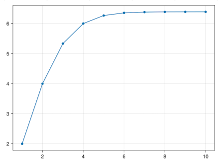


$b_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, b_n ist monoton fallend,
$\lim b_n = \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

=> Konvergenz nach Leibnitz-Kriterium

c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = 2^n/n!$. Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}/(n+1)!}{2^n/n!} = \frac{2}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 = q < 1$



=> Konvergenz nach Quot-Krit.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = 3^n/n^2$. $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{3^n/n^2} = \frac{3}{\sqrt[n]{n^2}}$

Weil $\sqrt[n]{n^2} \to 1$ für $n \to \infty$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 3 > 1$ $(\cancel{\exists} q < 1)$

=> Divergenz mit Wurzel-Kriterium.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ Weil $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert

=> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ konvergiert nach Majoranten-Krit.

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert & $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$

=> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ div. nach Minoranten-Krit.

g) 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}\right|$ soll konvergieren für absolute Konv.

=> aus b) wissen wir dass es divergiert keine

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ harmonisch => konvergiert => Abs. Konv.

ChatGPT 5.1 Thinking

Nachgedacht für 52s ›

Aufgabe (Reihenkonvergenz und absolute Konvergenz)

Untersuchen Sie die Konvergenz der folgenden Reihen. Geben Sie jeweils das verwendete Kriterium an.

(a) Trivialkriterium

Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{2n^2+1}{n^2+n}.$$

(b) Leibniz-Kriterium (alternierende Reihe)

Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

(c) Quotientenkriterium

Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

(d) Wurzelkriterium

Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}.$$

(e) Majorantenkriterium

Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

(f) Minorantenkriterium

Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

(g) Absolute Konvergenz

1. Untersuchen Sie, ob die in **(b)** betrachtete Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$
absolut konvergiert.
2. Untersuchen Sie die absolute Konvergenz der Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}.$$
3. Erklären Sie in 1–2 Sätzen, warum absolute Konvergenz eine „stabilere“ Form der Konvergenz ist als bloß bedingte Konvergenz (Hinweis: Verhalten von Reihen bei Umordnungen).

Stelle irgendeine Frage

Umfassendes Nachde...

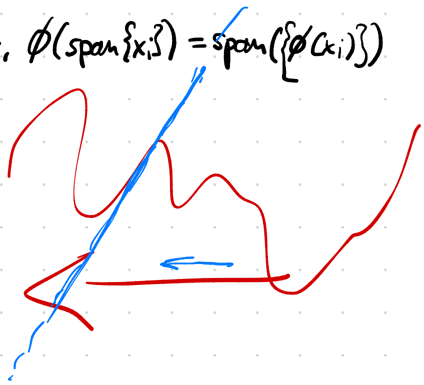
ChatGPT kann Fehler machen. Überprüfe wichtige Informationen. Siehe Cookie-Voreinstellungen.

LA Lineare Abbildungen

$\phi : V \to W$ linear falls $\phi(\alpha x + \beta y) = \alpha \phi(x) + \beta \phi(y) \quad \forall x, y \in V \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

Good to know: $\phi(0) = 0$ immer, Unterräume werden auf Unterräume abgebildet, $\phi(\text{span}\{x_i\}) = \text{span}(\{\phi(x_i)\})$

ϕ_1, ϕ_2 linear $\Rightarrow$ $\phi_1 \circ \phi_2$ linear



Kern: $\text{Ker}\,\phi := \{x \in V \mid \phi(x) = 0\}$ ist UR von V

Bild: $\text{Im}\,\phi := \{y \in W \mid \exists x \in V : \phi(x) = y\}$ UR von W

Dimensionsatz $\dim(\text{Ker}\,\phi) + \dim(\text{Im}\,\phi) = \dim V \qquad |V|, |W| < \infty$

$\rightsquigarrow$ Falls $|V| = |W|$: ϕ inj $\Leftrightarrow$ ϕ surj $\Leftrightarrow$ ϕ bijektiv

Bsp: Sei $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Aufgabe 1. (Lineare Abbildung)
Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

a) Worauf wird der Vektor $\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$ abgebildet?

b) Geben Sie eine Darstellung von Kern und Bild der Abbildung f an und bestimmen Sie jeweils die Dimension.

Hinweis: Nutzen Sie die Linearität der Abbildung aus.

a)

$x = \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} \overset{!}{=} \alpha v_1 + \beta v_2$

$\Leftrightarrow \quad \begin{matrix} 5 = \alpha + \beta \\ 7 = \alpha + 2\beta \end{matrix} \quad \overset{\text{Gauß}}{\Leftrightarrow} \alpha = 3, \beta = 2$

Durch Linearität $f(x) = f(\alpha v_1 + \beta v_2)$

$= \alpha f(v_1) + \beta f(v_2)$

$\overset{\text{Aufgabenstellung}}{=} 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\-8\end{pmatrix}$

b) $\ker(f) = \left\{ x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : f(x) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$. Sei $x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = a v_1 + b v_2 \in \ker f \qquad \boxed{a, b \in \mathbb{R}}$

Dann $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \overset{!}{=} f(x) = a f(v_1) + b f(v_2) = a \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + b \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\-2a-b\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ I/II: $a = 0, b = 0$ $\Rightarrow$ $\text{Kern}\, f = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$, $\dim \text{kern}\, f = 0$

$\text{Im}\, f = \left\{ y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : y = f(x) \text{ für ein } x \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Sei $y \in \text{Im}\, f$. Dann $\exists x \in \mathbb{R}^2$ mit $y = f(x) = f(a v_1 + b v_2) \overset{\text{Lin.}}{=} a f(v_1) + b f(v_2)$

$= a \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + b \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\-2a-b\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \text{Im}\, f = \left\{ \begin{pmatrix}a\\b\\-2a-b\end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ mit $\dim \text{Im}\, f = 2$

$\begin{pmatrix}a+b\\a+b\\a+b\end{pmatrix} = \dim \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

p^2

$p(0)$

$2p(0)$