TODO A
- Stetigkeit (ε-δ)
  ↳ Glm. / Lipschitz Kontraktion

LA TODO
- LGS
- Gauß

Mathe 1 – GÜE 09/15
05.12.19

- Evaluierung... (15min)
- Beamer OKAY ✓
- Tausch Lambert / Steffi
  Lambert voll. immer Gü bis Ende

1

LA Lineare Gleichungssysteme (LGS):

$\mathbb{R}^{m\times n}\ \mathbb{R}^{n} = \mathbb{R}^{m}$

Finde $x\in\mathbb{R}^n$ sodass $Ax=b$ mit $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $b\in\mathbb{R}^m$.

Siehe VL

→ **Lösbarkeit**: $\exists x\in\mathbb{R}^n$ mit $Ax=b \Leftrightarrow b\in \operatorname{Im}(A) \Leftrightarrow \operatorname{rang}([A \mid b]) = \operatorname{rang}(A)$

→ **Lösungsmenge**: $b\in\operatorname{Im}(A)$ (Lösbarkeit) & $Ax_s=b$ gilt, dann

$\boxed{\$ \backslash\text{mathcal}(L)\$}$ $\mathcal{L} = x_s + \ker(A)$ $\left[\text{denn } A(x_s+x_{\ker}) = Ax_s + \underbrace{Ax_k}_{=0} = b\right]$

Daran sieht man: Falls $\ker(A)=\{0\}$, dann ist Lösung $\mathcal{L}$ unique!

Lösen von LGS:

$A=(a_{ij})$ $\quad \hat{A} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

1) **Diagonalmatrix**: $x_i = b_i/a_{ii}$ easy

2) **Dreiecksmatrix**: Rückwärts-Einsetzen: $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$, $x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1,n-1}}\left(-a_{n-1,n}x_n + b_{n-1}\right)$, ...

↳ Generation mit Gauß

Gauß-Algorithmus:

"Addition, Skalierung, Vertauschung von Zeilen bis Δ-Mat."

→ **Beispiel 1 (SS2019)**:

Aufgabe 13.

a) Für welche $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ hat das Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&\frac{1}{a}&0\\a&2&\frac{1}{a}\\0&a&1\end{pmatrix}}_{:=A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{a}\\0\\1\end{pmatrix}}_{:=b}.$$

keine, genau eine, mehr als eine Lösung? Charakterisieren Sie den Lösungsraum für alle Möglichkeiten.

$\mathcal{L}$ $\mathcal{L}$ L

a) Idee:
Bringe $[A|b]$ auf rechte obere Δ-Form mit Gauß.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1/a&0&1/a\\a&2&1/a&0\\0&a&1&1\end{array}\right] \xrightarrow[\text{I} \leftrightarrow \text{III}]{z_2\mapsto z_2-a\cdot z_1} \left[\begin{array}{ccc|c}1&1/a&0&1/a\\0&1&1/a&-1\\0&a&1&1\end{array}\right] \xrightarrow{z_3\mapsto z_3-az_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1&1/a&0&1/a\\0&1&1/a&-1\\0&0&0&1+a\end{array}\right]$$

könnte Nullzeile werden!

Fallunterscheidung für $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$:

1) $\boxed{a=-1}$:

LGS: $\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&-1\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\end{array}\right]$ mit einer Nullzeile.

$\Leftrightarrow$
$$\begin{cases}1x_1 - 1x_2 + 0x_3 = -1\\0x_1 + 1x_2 - 1x_3 = -1\\0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0\end{cases}$$

Wähle $x_3=\alpha$ $\Rightarrow$ $x_2 = -1 + x_3 = -1+\alpha$
$x_1 = -1 + x_2 = -2+\alpha$

$\Rightarrow \mathcal{L} = \left\{\begin{pmatrix}\alpha-2\\\alpha-1\\\alpha\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \alpha\in\mathbb{R}\right\}$ mit Dimension 1.

II) $\boxed{a \neq -1}$ Letze Zeile: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 \overset{!}{=} 1+a \neq 0$ ②

$\Rightarrow$ keine Lösung denn $\nexists\, x \in \mathbb{R}^3$ mit

$$(0 \;\; 0 \;\; 0) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1+a \neq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$\Rightarrow$ Für $a \neq -1$ existieren keine Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$ ✓

→ **Beispiel 2**: Finde normierte untere Δ-Matrix L und obere Δ-Matrix R

$\hat{=}\, L \cdot U$ (englisch)

$$\text{sodass} \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} =: A = L \cdot R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \ell_{21} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix}$$

Gauß: $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{① \, Z_2 \mapsto Z_2 - \frac{1}{2} Z_1} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = R$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} (A)^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - c b} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Operation ① entspricht $L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ mit $(L_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

Daher $L_1 A = R \Leftrightarrow A = \underbrace{(L_1)^{-1}}_{=:L} R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = A$ ✓

Generell gilt: Für A regulär (rang $= n$) & quadratisch gibt es:

$$\boxed{P \cdot A = L \cdot R}$$

in Permutationsmatrix würden Zeilenvertauschungen stehen

$L = (L_n \cdot L_{n-1} \cdot \ldots \cdot L_1)^{-1}$ Normierung $\ell_{ii} = 1$

Gauß-Operationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

zB. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

→ **Zerlegung $A = LR$ nützlich**: für LGS mit mehreren rechten Seiten:

$$A x = b_i \qquad b = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$$

$y := Rx$

$\Leftrightarrow LR x = b_i$

$\Leftrightarrow L y = b_i$ ← einfach zu lösen weil Δ-Form

Lösung x letztlich über $Rx = y$ (auch "einfach")

⤳ LR-Zerlegung "nur" einmal zu berechnen!

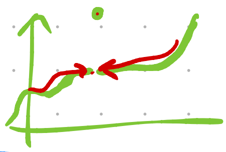
Wärmeleitungs-Simulations mit $f_{heat} = f(t)$

t_1	t_2	t_3
0sec	1sec	2sec
$f_{heat} = 1$	$f_h = 1.5$	$f_h = 2.5$

$$\begin{pmatrix} 1 & r_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \overset{?!}{\exists}\; A = \overset{L_1}{\begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} r_{12} \\ 1 \end{pmatrix} \;?!$$

A Reminder Letzte Woche: Grenzwerte reeller Funktionen... ③

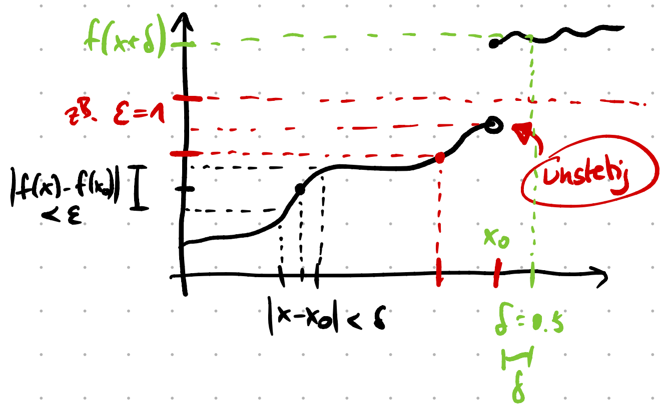
Stetigkeit: Intuition: "Wenn $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert und mit $f(x_0)$ übereinstimmt, dann $f(x)$ stetig in x_0."



→ **ε-δ Definition:** $f: D \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ (" $\mathbb{R}$ ") stetig in $x_0 \in D$ falls: (ε-δ ähnlich zu ε bei Folgen-GW's)

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

"Für alle $\varepsilon > 0$ müssen wir ein $\delta > 0$ angeben können sodass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$"



→ **Beispiel:**

b) Zeigen Sie die Stetigkeit in $x_0 = 0$ der Funktion

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

if(x==0) → $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$

$g(0) = 0$

mittels der $\epsilon - \delta$-Definition der Stetigkeit.

b) für $x \neq 0$ gilt: ① $|g(x) - g(\underset{x_0}{0})| = |x \sin(\tfrac{1}{x}) - 0|$

$|\sin(\tfrac{1}{x})| \leq 1$ $\leq \underbrace{|x - 0|}_{< \delta \text{ (per Def.)}}$

Daher sei ② $\boxed{\delta := \varepsilon}$ $\overset{!}{<} \varepsilon$

Somit gilt: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta := \varepsilon > 0$ sodass: $|g(x) - g(0)| < \varepsilon \;\; \forall |x - x_0| < \delta$

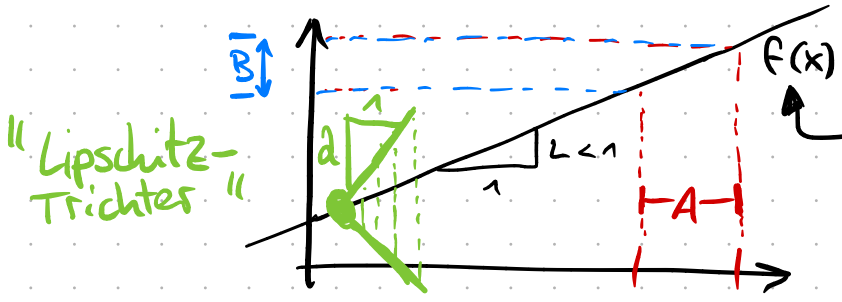
Bemerkung: $\delta = f(\varepsilon) \neq f(\varepsilon, x_0)$ ist gute Eigenschaft, daher:

Gleichmäßige Stetigkeit:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(\varepsilon, \cancel{x_0}) > 0 : |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in D \text{ mit } |x - y| < \delta$$!

Lipschitz-Stetigkeit: $\exists L > 0 : |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \quad \forall x, y \in D$

Kontraktion: Lipschitz mit $L < 1$



A wird kontrahiert zu B mit B<A

Beispiel (SS2016):

Aufgabe 5.
Sei $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ mit $f(x)=x^{-2}$.

(a) Zeigen Sie mittels der ε-δ-Definition, dass f stetig in $x_0\in(0,\infty)$ ist.

(b) Geben Sie einen Definitionsbereich $D\subseteq(0,\infty)$ an, auf dem f gleichmäßig stetig ist.

(c) Prüfen Sie, ob die Funktion Lipschitz-stetig auf $(1,2)$ ist und geben Sie gegebenenfalls eine sinnvolle Lipschitzkonstante an.

a) $x, x_0 > 0$ gilt:

① $|f(x)-f(x_0)| = \left|\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x_0^2}\right| = \left|\frac{x_0^2-x^2}{x^2x_0^2}\right|$

$|x-x_0|<\delta$

$$= \left|\frac{(x_0-x)(x_0+x)}{x^2x_0^2}\right|$$

$$\le \underbrace{|-(x-x_0)|}_{②}\left|\frac{x_0+x}{x^2x_0^2}\right|$$

$$< \delta\left(\frac{x_0}{x^2x_0^2}+\frac{x}{x^2x_0^2}\right)$$

Strategie: Wir wollen x eliminieren hier

Wähle $|x-x_0|<\frac{x_0}{2}$ $\Leftrightarrow$ $|x| < \frac{|x_0|}{2}$

$$\le \delta\cdot\left(\frac{1}{\left(\frac{x_0}{2}\right)^2x_0}+\frac{1}{\left(\frac{x_0}{2}\right)x_0^2}\right)$$

$$= \delta\left(\frac{4}{x_0^3}+\frac{2}{x_0^3}\right) = \delta\left(\frac{6}{x_0^3}\right)$$

$\overset{!}{<} \varepsilon$ $\quad \delta \overset{!}{<} \frac{\varepsilon\cdot x_0^3}{6}$ $\quad \frac{6\delta}{x_0^3} \overset{!}{<} \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon x_0^3/6$

③ Wie muss δ also gewählt werden? $\quad \delta = \min\left(\frac{x_0}{2}, \frac{\varepsilon x_0^3}{6}\right)$

Wurde in Rechnung angenommen

nicht überall glm. stetig, da $\delta = f(\varepsilon, x_0)$

Beispiel Lipschitz:

$f(x): (-1/5, 1/5) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2+\frac{1}{2}x+1$

$$\underbrace{|f(x)-f(y)|}_{<\varepsilon} \overset{①}{=} |x^2+1/2\,x-y^2-1/2\,y|$$

$$= |(x-y)(x+y)+\tfrac{1}{2}(x-y)|$$

$$= |(x+y+1/2)(x-y)|$$

$|x+y| \le |x|+|y|$

$$\le (|x|+|y|+1/2)\cdot|x-y|$$

$|x|,|y|\le 1/5$

$$\le (1/5+1/5+1/2)\cdot|x-y| = \underbrace{9/10}_{=:L<1}|x-y|$$

$\Rightarrow$ Lipschitz und sogar Kontraktion!