0 : Vorstellung, HW, SRü, Termine
G : Aussagenlogik, Mengen, Relationen

MATHE 1 [CES]
Globalübung 1
WS25

17.10.25 ①
Lambert Theisen.

0

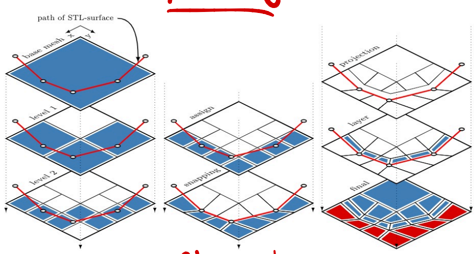
Lambert:

CES :
- B.Sc 2014 - 2018 (Thesis @ Torrilhon)
- M.Sc. 2018 - 2019 (Thesis @ Torrilhon)

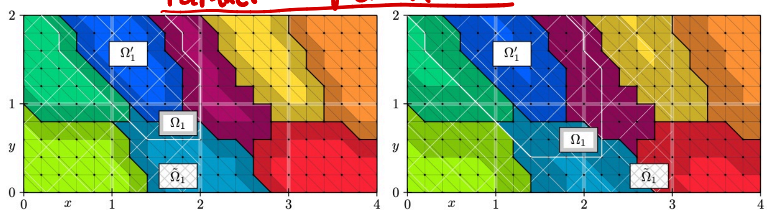
Applied Math:
- Dr. 2019 - 2024 (Thesis @ Stamm in Aachen/Stuttgart)
- Post-doc 2024 - now @ ACoM

Fragen : Per Moodle oder Mail (⇝ www.thsn.dev)

Meshing:

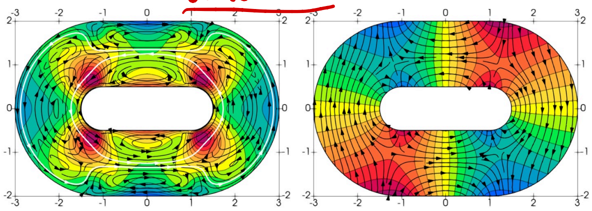


Parallel Implementation:



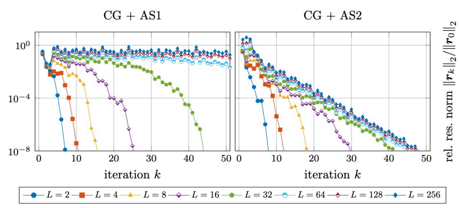
(a) $\delta = 1$. (b) $\delta = 2$.

Simulation:



(a) Shear stress σ_{xy}, velocity streamlines u_i. (b) Temperature θ, heat flux streamlines s_i.

Mathematische Analyse:



Ablauf :

→ GÜ : Lambert (erste Hälfte) & Georgi (zweite)

→ Probeklausur vor Weihnachten (Ankündigung folgt) mit BP

→ 4er Gruppe (Forum oder nach der Übung)

→ Relation HW zu Note

→ ACoM Website

⇒ Fragen ?

Organisation

Vorlesungen

Dienstag, 08:30 - 10:00 Uhr, klPhys im Rogowski.
Mittwoch, 08:30 - 10:00 Uhr, klPhys im Rogowski.
Freitag, 14:30 - 16:00 Uhr, Hörsaal I im Hauptgebäude.

Vorlesungsfreie Tage: 17.10 (Freitag), 31.10 (Freitag), 5.11 (Mittwoch), 21.11 (Freitag), 28.11 (Freitag), 12.12 (Freitag), 9.1 (Freitag), 23.1 (Freitag), 6.2 (Freitag)

Globalübung

Freitag (Lambert & Gerogii), 12:30 - 14:00 Uhr, E1 (Raum 301) im Rogowski **(ab 17.10.25)**.

Kleingruppenübung

Selbstrechenübung Gruppe 1 (Konrad Ansorg): Mittwoch, 10:30 - 12:00 Uhr, Z4 im Audimax.
Selbstrechenübung Gruppe 2 (Jan Habscheid): Donnerstag, 16:30 - 18:00 Uhr, Z3 (1420|302) im Audimax.
Diese Übungen sind in der selben Woche inhaltlich äquivalent.

Hausaufgaben

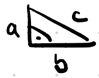
Es gibt wöchentliche Hausaufgaben, über die Bonuspunkte für die Klausur verdient werden können. Die Hausaufgaben werden in *moodle* freitags hochgeladen (ab 17.10.2024) und sollen innerhalb einer Woche von Vierergruppen bearbeitet und online abgegeben werden.
Die Hausaufgaben sind freiwillig. Das bedeutet, dass Sie die volle Punktzahl in der Prüfung erreichen können, ohne die Hausaufgaben zu erledigen.

- Für das Erreichen des maximalen Klausurbonus von 10% sind 60% der Hausaufgabenpunkte notwendig. Dazwischen wird anteilig vergeben (linear).

G] Aussagenlogik : Aussagen : zur Beschreibung & Darstellung von Sachverhalten.

Mathematische Aussage : 1) ist wahr oder falsch.
2) kann nicht gleichzeitig wahr und falsch sein.

Bsp : a) Alle Katzen sind grau
b) $2 < 3$
c) Wenn $a \perp b$, dann gilt $a^2 + b^2 = c^2$



Logische Negierung $\neg P$ einer Aussage P : Gegeben durch

P	$\neg P$
w	f
f	w

(Wahrheitstabelle)

($\neg$ heißt "nicht")

Verknüpfungen : Sei p, q zwei Aussagen. Wir definieren die Verknüpfungen

a) Konjunktion $p \wedge q$ (logisches „und")
b) Alternative $p \vee q$ (log. „oder")
c) Implikation $p \Rightarrow q$ ("impliziert")
d) Äquivalenz $p \Leftrightarrow q$ ("ist äquivalent zu")

wie folgt:

| $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$q \Leftarrow p$	$p \Leftrightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

=

$\Leftrightarrow$

→ $p \Rightarrow q$ genau dann falsch wenn q falsch und p wahr.

→ Materielle Implikation ($\Rightarrow$) : Aus falschem folgt beliebiges ?!
⇒ Macht Sinn denn : I) Deja vu : andere Definitionen liefern bereits bekanntes

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \Leftarrow q$	q	$p \wedge q$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

[Uwe Nestmann: über die Wahrheit der mat. Implikation]

Sei $x > 3$, ~~dann ist~~ $\Rightarrow x > 2$.

Beweis : Sei $x > 3 \Leftrightarrow x > 2 + 1$
$\Rightarrow x > 2$

Satz

→ **Warum das ganze?**

Sei $x \in \mathbb{R}$ & $y > 0$, dann $x > x - y$

II) Modus Ponens : $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ nur dann möglich

i) Direkter Beweis (Voraussetzung) $p \Rightarrow p_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow$ (Behauptung) q
ii) Indirekter Beweis $(\neg q \Rightarrow \neg p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
iii) Induktion (bald)
⋮

Beispiel : Seien p, q bel. Aussagen, dann gilt $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

Beweis:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
0	0	1	1	1	1	1 (wahr)
0	1	1	0	1	1	1 (wahr)
1	0	0	1	0	0	1 (wahr)
1	1	1	0	0	1	1 (wahr)

per Def. oben

Negation (s.o.)

⇝ Letzte Spalte immer wahr für alle Input-Kombinationen (Tautologie)
⇒ Aussage wahr.

Mengen: "Zsm.fassung unterscheidbarer Elemente", zB $M = \{\text{Butter}, \text{Brot}\}$, $N = \{1,2,3\}$

→ **Leere Menge**: $\emptyset := \{\}$ → Notation: $1 \in N$, $4 \notin N$

→ **Teilmengen** Def: $\{a,b\} \subset \{a,b,c\}$

→ manchmal auch anders definiert:
per Def. äquival.

i) $A \subseteq B \;:\Leftrightarrow\; \forall a \in A : a \in B$ Teilmenge

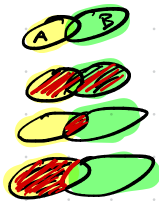
ii) $A \subset B \;:\Leftrightarrow\; A \subseteq B \wedge A \neq B$ echte Teilmenge

→ **Operationen**:

$A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}$ Vereinigung

$A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ Durchschnitt

$A \setminus B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$ Differenz



→ **Rechenregeln**:

a) $A \setminus \emptyset = A$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \subseteq (A \cup B)$, $(A \cap B) \subseteq A$

b) Kommutativ: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$

c) Assoziativ: $(A \cup B) \cup M = A \cup (B \cup M)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

d) Distributiv: $M \cup (A \cap B) = (M \cup A) \cap (M \cup B)$, $M \cap (B \cup C) = (M \cap B) \cup (M \cap C)$

e) Demorgan: $M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$, $M \setminus (A \cap B) = (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$

→ **Disjunkt** $A \cap B = \emptyset$ (A B), **Komplement** von $A \subset B$ in B

Beispiel:

Aufgabe 1. (Mengen)
Seien A und B Mengen. Zeigen Sie, dass die folgende Identität gilt:

$$(B \setminus A) \cup A = A \cup B.$$

$P \Leftrightarrow Q$

Sei x bel. Element aus $(B \setminus A) \cup A$. Dann gilt:

$x \in (B \setminus A) \cup A \;\Leftrightarrow\; (x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A)$

Distributiv.

$\Leftrightarrow\; (x \in B \vee x \in A) \wedge ((x \notin A) \vee (x \in A))$

$\Leftrightarrow\; x \in B \vee x \in A$

Da x beliebiges Element, folgt die Aussage.

Relationen: → Wir wollen Sachverhalte beschreiben zwischen Mengen.

Kartesisches Produkt: $A \times B := \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$

→ Bsp: $P = \{L, M\}$, $T = \{H, K\}$

$P \times T$	H(und)	K(atze)
L(ambert)	(L,H)	(L,K)
M(anuel)	(M,H)	(M,K)

$A \times B$ ist die Menge der 4 möglichen 2-Tupel (Paare)

Relation: Teilmenge von $A \times B$ heißt Relation zw. A und B. Für $R \subseteq A \times B$ schreiben wir $aRb := (a,b) \in R$. Wenn $A = B$, dann ist R Relation auf A.

→ Bsp:

🏠	H	K
L		o
M	o	o

🏠 $= \{(L,K), (M,H), (M,K)\}$

"hat Haustier"

L 🏠 K = L steht in Relation zu K

Ordnungsrelation : R auf A ist (Total-) Ordnungsrelation wenn:

a) Reflexivität ("Reflektion, Spiegel") : $\forall x \in A \quad xRx \quad$ (d.h. $(x,x) \in R$)
b) Transitivität ("Transition, Übergang") : $\forall x,y,z \in A \quad xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
c) Antisymmetrie : $xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y$
d) Totalität ("alles") : $\forall x,y \in A : xRy \vee yRx$

$1,2 \qquad 1 \geq 2 \vee 2=1$ ↯

Bsp: "$\leq$" Totalrelation auf $\mathbb{N} := \{1,2,3,\ldots\}$ weil a) $\forall i \in \mathbb{N} : a \leq a$, b) $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$
c) $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ d) $\forall a,b : a \leq b \vee b \leq a$

Äquivalenzrelation R : Falls a) R ist reflexiv
b) R ist transitiv (s.o.)
c) R ist symmetrisch $\forall x,y \in A : xRy \Rightarrow yRx$

→ keine Totalität, R beschreibt "ähnliche" Elemente in A, $x \sim y :\Rightarrow xRy$

Äquivalenzklasse für $\sim$: $[x]_\sim := \{y \in A : y \sim x\}$ zum Repräsentanten x $\qquad K_1 \cup K_2 \cup K_3 \ldots$

Faktormenge : Menge aller Äquivalenzklassen $A/\sim := \{[a]_\sim : a \in A\}$, $A = \bigcup_{K \in A/\sim} K$

Partition

Bsp: $A = \{1,2,3,4\}$

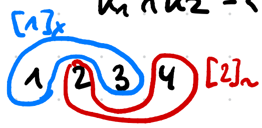
$\sim$: haben gleichen Rest bei Division durch 2

$\sim$	1	2	3	4
1	o		o	
2		o		o
3	o		o	
4		o		o

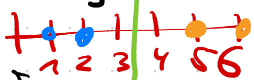
$[1]_\sim := \{1,3\}$
$[2]_\sim := \{2,4\}$

$A = [1]_\sim \cup [2]_\sim$

$\forall K_1, K_2 \in A/\sim$ mit $K_1 \neq K_2$: $K_1 \cap K_2 = \{\}$



Bsp: $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ $\qquad x \sim y \Leftrightarrow [(x \leq 3.5) \wedge (y \leq 3.5)] \vee [(x > 3.5) \wedge (y > 3.5)]$



Äquivalenzrelation denn

Reflexivität:
a) $\forall x \in A : x \sim x \Leftrightarrow [(x \leq 3.5) \wedge (x \leq 3.5)] \vee [x > 3.5 \wedge x > 3.5]$

$\Leftrightarrow \quad x \leq 3.5 \quad \vee \quad x > 3.5$

$\Leftrightarrow \quad \underset{p}{x \leq 3.5} \quad \vee \quad \underset{\neg p}{\neg(x \leq 3.5)}$ gilt immer ✓

$x \leq 3.5$	$\neg(x \leq 3.5)$	$(x \leq 3.5) \vee \neg(x \leq 3.5)$
1	0	1
0	1	1

Definition oder

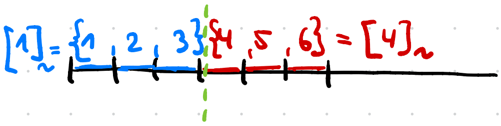
b) Transitivität
zz: $(x \sim y) \wedge (y \sim z) \Rightarrow (x \sim z)$

Fallunterscheidung $\boxed{y \leq 3.5}$
$x \sim y \Rightarrow (x \leq 3.5 \wedge y \leq 3.5) \Rightarrow x \leq 3.5$
$y \sim z \Rightarrow (y \leq 3.5 \wedge z \leq 3.5) \Rightarrow z \leq 3.5$
$\Rightarrow (x \leq 3.5) \wedge (z \leq 3.5) \Rightarrow x \sim z$ ✓

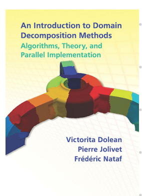
Fall 2 $\quad y > 3.5$
$x \sim y \Rightarrow \ldots \Rightarrow x > 3.5$
$y \sim z \Rightarrow \ldots \Rightarrow z > 3.5$
$\} \Rightarrow \ldots \Rightarrow x \sim z$ ✓

c) Symmetrie: Sei $x \sim y$, entweder
① $(x \leq 3.5) \wedge (y \leq 3.5) \Leftrightarrow (y \leq 3.5) \wedge (x \leq 3.5) \Leftrightarrow y \sim x$
oder ② $(x > 3.5) \wedge (y > 3.5) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow y \sim x$ ✓

Äquivalenzklassen $A = [1]_\sim \cup [4]_\sim$

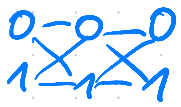


Praxisbeispiel: Partition eines Bauteils für Simulation auf mehreren Prozessorkernen (Domain Decomposition)



$\forall x, y, z \in A : (xRy) \wedge (yRz) \Rightarrow xRz$

$=$ auf $\{1, 2\}$ $\quad (1=1) \wedge (1=1) \Rightarrow 1=1$



$2^3 = 8$

x	y	z	$x=y \wedge y=z$	$x=z$
0	0	0	1	✓
0	1	0	0	
0	0	1	0	
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	1	0	0	
1	0	1	0	
1	1	1	1	✓