

②: Intro, Fragen

E: Ugl: Induktion,  
reelle Zahlen,  
binom. Lehrsatz, Abbildungen

# HM1 - VÜ WS 22

Lambert Theisen  
02.11.22

①

- ②:
- Sinn VÜ: Bsp. Aufgaben als Vorbereitung für HW
  - Alle Infos auf Kursseite!

### Alle Infos auf der Kurswebsite

- <https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM1-Stroppel/>

### Termine

- In 2022: 02.11., 16.11., 30.11., 14.12.
- In 2023: 18.01., 01.02.

### Ablauf

- Vor Ort nach dem Kohortenmodell und zeitgleich als Videos in ILIAS.
- Termine (siehe Campus Einträge):
  - Mittwoch 08:00 -09:30 Uhr V53.01 für bewe, geod, lrt, mach, verk
  - Mittwoch 17:30 -19:00 Uhr V47.01 für bau, iui, mawi, tem, uwt, ernen, fmt, medtech, mawi, tem, uwt, verf
- In jeder Woche mit Vortragsbung gibt es montags das Blatt mit den Aufgaben.

### Kontakt

- Lambert Theisen, Alessio Cipriani
- ILIAS-Forum zur Vortragsübung, Sprechstunden, Kontaktformular auf der Website

→ Fragen?

### Aufgabe V 1. Ungleichungen, Induktion

- (a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion die folgende Aussage:  
Für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 3$  gilt

$$n\sqrt{n} \geq n + \sqrt{n}.$$

- (b) Bestimmen Sie alle  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ , für die folgende Ungleichung erfüllt ist:

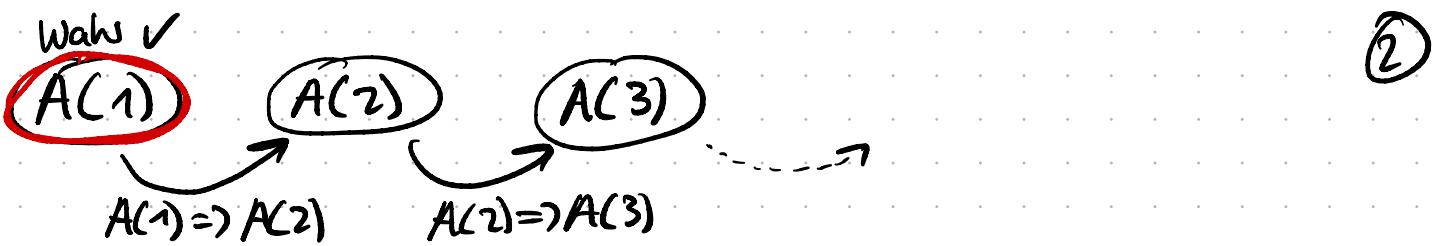
$$\frac{2}{|x| - 1} \geq \frac{3}{x - 1}.$$

1a) Induktion: → Problem: Aussage  $A(n)$  soll  $\forall n \in \mathbb{N}$  gezeigt werden

Aber es gibt unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$ .

→ Lösung: ① Zeige dass  $A(1)$  wahr ist (oder  $A(n_0)$ )

② Zeige dass wenn  $A(n)$  wahr ist,  $A(n+1)$  auch wahr ist



### 1.2.3. Induktionsprinzip.

Man beweist eine Aussage  $A(n)$ , die von einem natürlichen Parameter  $n$  abhängt,

(IA) erst für  $n = 1$  (Induktionsanfang)

dann zeigt man:

(IS) Ist  $A(n)$  wahr (Induktionshypothese (IH)),  
so ist auch  $A(n + 1)$  wahr  
(Induktionsschluss von  $n$  auf  $n + 1$ ).

Salopp formuliert: Mit dem Verfahren der vollständigen Induktion weist man nach, dass die betrachtete Aussage „nie aufhört, richtig zu sein“ — nachdem man sich im Induktionsanfang vergewissert hat, dass sie „anfängt, richtig zu sein“.

Man kann den Induktionsanfang auch bei  $n_0 \neq 1$  (insbesondere bei  $n = 0$ , oder später) setzen:

Dann hat man bewiesen, dass  $A(n)$  für alle  $n \geq n_0$  wahr ist,  
wenn man den Induktionsschluss durchgeführt hat.

Also zz:  $A(n) := n \cdot \sqrt{n} \geq n + \sqrt{n}$  gilt  $\forall n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 3$ .

Warum  $n \geq 3$ ?  $n=1: 1 \cdot \sqrt{1} = 1 < 1 + \sqrt{1} = 2$        $n=2: 2 \cdot \sqrt{2} = \underbrace{\sqrt{2} + \sqrt{2}}_{< 2} < 2 + \sqrt{2}$

just for fun

Also: (IA):  $A(3)$  ist wahr deun

$$3 \cdot \sqrt{3} = \underline{\underline{2 \cdot \sqrt{3}}} + \sqrt{3} \geq \underline{\underline{3 + \sqrt{3}}} \quad \begin{matrix} 1.5.7 \\ 2^2 + 3^2 = 4 \cdot 3 \end{matrix}$$

deun es gilt:  $2\sqrt{3} > 3 \Leftrightarrow (2\sqrt{3})^2 > 3^2 \Leftrightarrow 4 \cdot 3 > 3 \cdot 3$  ✓

### 1.5.7. Monotonie des Quadrierens.

Ist  $a > 0$  und  $b > 0$ , so gilt ( $a < b \iff a^2 < b^2$ ).

(IV/IH): Sei  $A(n)$  wahr für ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ .

D.h.:  $n\sqrt{n} \geq n + \sqrt{n}$  gilt

(IS): Unter Annahme der (IH), gilt:  
 $n \mapsto n+1$

zz:  $A(n) \Rightarrow A(n+1)$   
 $(n+1)\sqrt{n+1} \geq (n+1) + \sqrt{n+1}$

(3)

$$(n+1)\sqrt[n+1]{n} = n\sqrt[n]{n} + 1 \cdot \sqrt[n]{n}$$

$$\stackrel{*}{>} n \cdot \sqrt[n]{n} + \sqrt[n+1]{1}$$

$$\stackrel{IH}{=} n + \sqrt[n]{n} + \sqrt[n+1]{1}$$

≥ 1 weil  $n \geq 3$ 

$$> (n+1) + \sqrt[n+1]{(n+1)} \quad \checkmark$$

$$\textcircled{*}: n\sqrt[n+1]{n} > n\sqrt[n]{n} \stackrel{(1.5.4.3)}{<} n\sqrt[n+1]{n} > n\sqrt[n]{n} \stackrel{(1.5.7)}{\Leftrightarrow} n+1 > n \quad \checkmark$$

→ Aussage A(n) gezeigt für  $n \geq 3$  mit vollst. Induktion.

Betragsschl.:

1b) Ungleichungen:Für welche  $x$  gilt das?

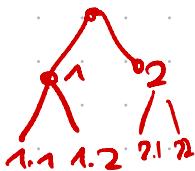
$$\frac{2}{|x-1|} \geq \frac{3}{x-1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

$\{-1, 1\}$  wäre problematisch  $\Rightarrow$  Division durch Null!

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

"Strategie / Rezept": → Fallunterscheidung um die Betragsfunktion zu eliminieren

$$\text{Fall 1: } ((x \geq 0) \wedge (x \neq 1)) \Rightarrow |x| = x \text{ und } \frac{2}{|x-1|} \geq \frac{3}{x-1} ?$$



$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{wenn } x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{wenn } x < 1 \end{cases}$$

$$\underline{1.1: } (x > 1)$$

$$\Rightarrow |x-1| = (x-1) : \frac{2}{(x-1)} \geq \frac{3}{x-1} \Leftrightarrow 2 \geq 3 \text{ } \cancel{\text{Vgl. gilt nicht für }} x > 1$$

Multiplication mit  $(x-1) > 0$  (1.5.4.3)

$$\underline{1.2: } (0 \leq x < 1)$$

$$\Rightarrow |x-1| = -(x-1) : \frac{2}{-(x-1)} \geq \frac{3}{x-1} \Leftrightarrow \frac{2}{-1} = -2 < 3 \quad \checkmark$$

$$\underline{\text{Fall 2: } (x < 0) \wedge (x \neq -1)}$$

$$\Rightarrow |x| = -x \Rightarrow \frac{2}{|x-1|} = \frac{2}{|-x-1|} \stackrel{?}{\geq} \frac{3}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{|x+1|} \stackrel{?}{\geq} \frac{3}{x-1}$$

$$\begin{aligned} |-x-1| &= |(-1) \cdot (x+1)| \\ &\stackrel{(1.5.3.3)}{=} |-1| \cdot |x+1| \\ &= |x+1| \end{aligned}$$

## 1.5.4. Grundlegende Eigenschaften der Ordnungsrelation.

Für alle  $a, b, c \in \mathbb{R}$  gilt:

- ① Transitivität:  $(a < b) \wedge (b < c) \Rightarrow (a < c)$
- ② Monotonie der Addition:  $(a < b) \Rightarrow (a+c < b+c)$
- ③ Monotonie der Multiplikation:  $(a < b) \wedge (c > 0) \Rightarrow (ac < bc)$   
 $(a < b) \wedge (c < 0) \Rightarrow (ac > bc)$
- ④ Archimedisches Prinzip:  $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}: n > x$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & , x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \\ -(x+1) & , x < -1 \end{cases}$$

Q.1:  $(-1 < x < 0)$

$$\Rightarrow |x+1| = x+1 :$$

$$\frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{x-1}$$

### 1.5.9. Rechenregeln für Beträge.

Für  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gilt:

$$\textcircled{1} \quad |a| \geq a, \quad |a| \geq -a, \quad |a| = \max\{a, -a\}$$

$$\textcircled{2} \quad |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$\textcircled{3} \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \quad \checkmark \quad \left| \frac{a}{c} \right| = \frac{|a|}{|c|} \quad \checkmark$$

$$\textcircled{4} \quad |a+b| \leq |a| + |b| \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

Falls  $a+b \geq 0$  ist, gilt  $|a+b| = a+b \leq |a| + |b|$ .  
Falls  $a+b < 0$  ist, gilt  $|a+b| = -a-b \leq |a| + |b|$ .

$$\textcircled{5} \quad ||a|-|b|| \leq |a+b|$$

Wegen der Dreiecksungleichung gilt  
 $|a| = |a+b-b| \leq |a+b| + |-b|$   
 und genauso  $|b| = |b+a-a| \leq |b+a| + |-a|$   
 Daraus folgt  $|a|-|b| \leq |a+b|$   
 und  $|b|-|a| \leq |a+b|$   
 also mit  $\textcircled{1}$ :  $\max\{|a|-|b|, |b|-|a|\} = ||a|-|b|| \leq |a+b|$

Multiplication mit  $\underbrace{(x+1)}_{>0} \cdot \underbrace{(x-1)}_{<0} < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{(x+1)} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} \leq \frac{3}{(x-1)} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)} \Leftrightarrow 2(x-1) \leq 3(x+1) \quad \text{mit } \cancel{x-1}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2 \leq 3x + 3 \Leftrightarrow 0 \leq x + 5 \quad \checkmark \text{ weil } -1 < x < 0$$

Q.2:  $(x < -1) \Rightarrow |x+1| = -(x+1)$

$$\frac{2}{-(x+1)} \geq \frac{3}{x-1}$$

Multiplication mit  $\underbrace{(x+1)}_{<0} \cdot \underbrace{(x-1)}_{>0} > 0$

$$\Leftrightarrow -2(x-1) \geq 3(x+1) \Leftrightarrow 2 - 2x \geq 3 + 3x$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq 1 + 5x$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{5} \geq x \quad \checkmark \text{ weil } x < -1$$

- 0.2 > x

Letztlich: Lösungsmenge

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \right\} \cup \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \right\} \cup \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1 \right\}$$

$\textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3}$



$$= \{x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \mid x < 1\}$$

$$= (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup [0, 1) = (-\infty, 1) \setminus \{-1\}$$

## N2 Aufgabe V 2. Reelle Zahlen, Binomischer Lehrsatz

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$(1 + \sqrt{3})^n + (1 - \sqrt{3})^n \in \mathbb{N}.$$

$\frac{a^n}{b!(a-b)!}$

(b) Bestimmen Sie alle  $x \in \mathbb{R}$ , welche die Ungleichung  $|2 - |x + 1|| \leq 1$  erfüllen.

### 2a) binom. Lehrsatz:

#### 1.3.5. Binomischer Lehrsatz.

Für alle Zahlen  $a, b$  und alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt:

Vgl.  $(a+b)^2$

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots \\ &\quad \dots + \binom{n}{n-1} a^{n-(n-1)} b^{n-1} + b^n \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j.\end{aligned}$$

Dabei setzt man für jede Zahl  $r$  (insbesondere für  $r \leq 0$ ) fest:  $r^0 = 1$ .

$$\begin{aligned}(1 + \sqrt{3})^n + (1 - \sqrt{3})^n &\stackrel{1.3.5}{=} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \underbrace{1^{n-j}}_{=1} (\sqrt{3})^j + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-\sqrt{3})^j \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} [(\sqrt{3})^j + (-\sqrt{3})^j]\end{aligned}$$

• Wir nutzen:  $(\sqrt{3})^j + (-\sqrt{3})^j = \begin{cases} (2\sqrt{3})^j, & j \text{ ist gerade} \\ 0, & j \text{ ist ungerade} \end{cases} \quad (*)$



Fall 1:  $n$  ist gerade, also  $n = 2 \cdot \tilde{n}$  mit  $\tilde{n} \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\text{Dann } \sum_{j=0}^{\tilde{n}} \binom{n}{j} [(\sqrt{3})^j + (-\sqrt{3})^j] &= \sum_{j=0}^{\tilde{n}} \binom{n}{2j} [(\sqrt{3})^{2j} + (-\sqrt{3})^{2j}] \\ &= \sum_{j=0}^{\tilde{n}} \binom{n}{2j} [3^j + 3^j] = 2 \cdot \sum_{j=0}^{\tilde{n}} \binom{n}{2j} 3^j \in \mathbb{N} \quad \checkmark\end{aligned}$$

(\*) ungerade  
falls weg.  
=: No

Fall 2:  $n = 2\tilde{n} + 1$ ,  $\tilde{n} \in \mathbb{N}$  (d.h.  $n$  ist ungerade)

$$\begin{aligned}\text{Dann } \sum_{j=0}^{2\tilde{n}+1} \binom{n}{j} [(\sqrt{3})^j + (-\sqrt{3})^j] &= \sum_{j=0}^{2\tilde{n}} \binom{n}{j} [(\sqrt{3})^j + (-\sqrt{3})^j] \\ &\quad + \binom{n}{2\tilde{n}+1} [(\sqrt{3})^{2\tilde{n}+1} + (-\sqrt{3})^{2\tilde{n}+1}] \\ &= 0 \quad \checkmark\end{aligned}$$

EN laut Fall 1

6

## 2b) Ungleichung (Alternative Notation)

$$\begin{aligned}
 |2 - (x+1)| \leq 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} |2 - (x+1)| \leq 1, x+1 \geq 0 & 1 \\ |2 + (x+1)| \leq 1, x+1 < 0 & 2 \end{cases} \\
 \text{Def.} \quad \text{Betrag} \quad \rightarrow & \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - (x+1) \leq 1, (x+1 \geq 0) \wedge (2 - (x+1)) \geq 0 & 1.1 \\ -2 + (x+1) \leq 1, (x+1 \geq 0) \wedge (2 - (x+1)) < 0 & 1.2 \\ 2 + (x+1) \leq 1, (x+1 < 0) \wedge (2 + (x+1)) \geq 0 & 2.1 \\ -2 - (x+1) \leq 1, (x+1 < 0) \wedge (2 + (x+1)) < 0 & 2.2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x, (x \geq -1) \wedge (1 \geq x) \\ x \leq 2, (x \geq -1) \wedge (1 < x) \\ x \leq -2, (x < -1) \wedge (x \geq -3) \\ x \geq -4, (x < -1) \wedge (x < -3) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0, 1] \\ x \in (1, 2] \\ x \in [-3, -2] \\ x \in [-4, -3] \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-4, -2] \cup [0, 2]
 \end{aligned}$$

V3

## Aufgabe V 3. Mengen, Ungleichungen

7

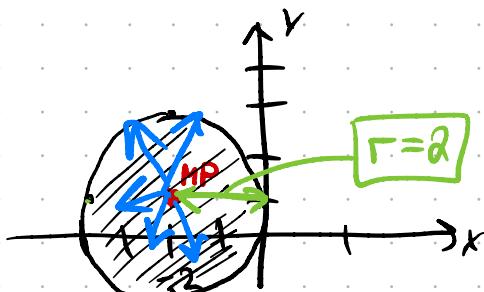
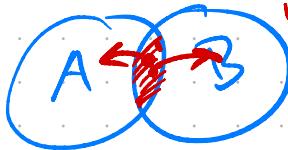
Skizzieren Sie die folgenden Mengen

- (a)  $M_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+2)^2 + (y-1)^2 \leq 4 \wedge (y \leq 0 \vee y > 1)\}$
- (b)  $M_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > |y|\}$
- (c)  $M_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2x + y^2 \leq 0\}$

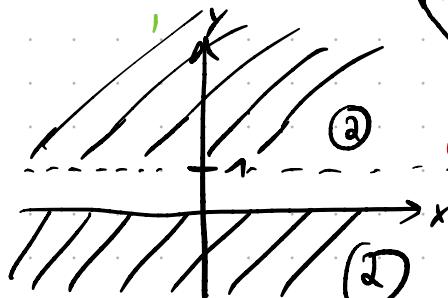
a) Zuerst:  $(x+2)^2 + (y-1)^2 \leq 4$  |  $\sqrt{\cdot}$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-x_m)^2 + (y-y_m)^2} \leq r \quad (\text{Kreisgleichung})$$

mit  $\begin{bmatrix} x_m \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, r = 2$



Dann:  $(y \leq 0) \vee (y > 1)$

Gesamt:

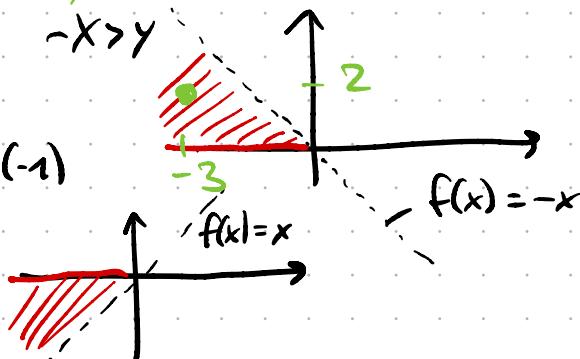
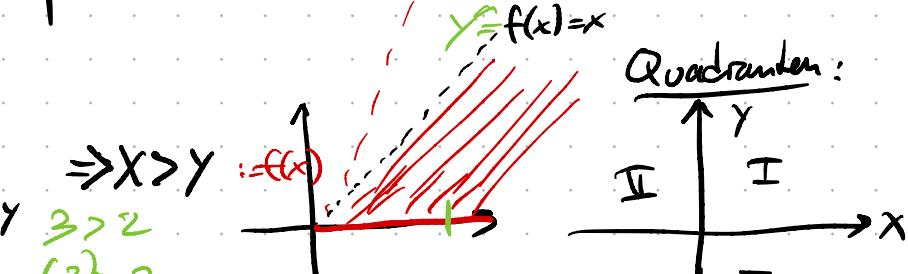
b)  $|x| > |y|$

①  $x, y > 0 \Rightarrow |x| = x, |y| = y \Rightarrow x > y$   $3 > 2$   $-(-3) > 2$

②  $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow -x > y$

③  $x, y < 0 \Rightarrow -x > y$

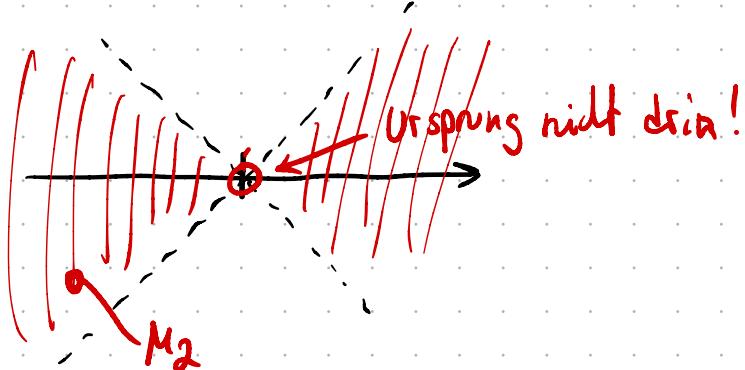
$x < y$



IV)  $y < 0, x > 0 \Rightarrow x > -y \Leftrightarrow y > -x$



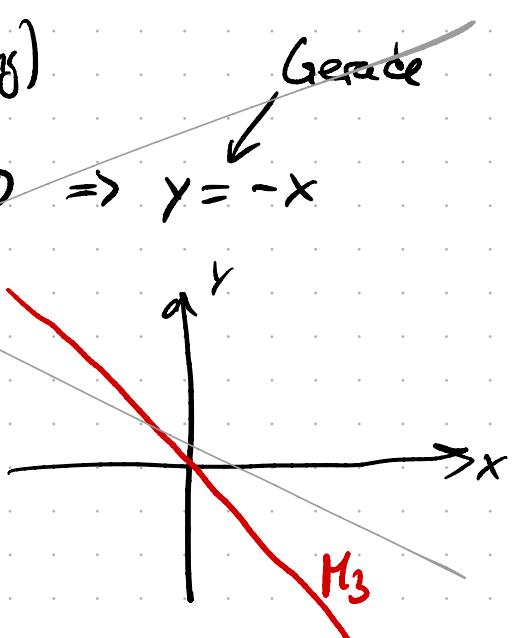
Gesamt:



c)  $x^2 + 2xy + y^2 \leq 0$  (<sup>8.00 VÜ</sup> ~~≠ Autgabenstellung~~)

Trich:  $\Leftrightarrow (x+y)^2 \leq 0 \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow y=-x$

$\geq 0$ . Kann nur Null werden  
Wenn Argument Null



Neu:  $x^2 + 2x + y^2 \leq 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + \underbrace{1-1}_{=0} + y^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1) + y^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow [x - (-1)]^2 + [y - 0]^2 \leq 1 \quad (\text{Kreis wie } \alpha)$$

$$(x - X_M)^2 + (y - Y_M)^2 \leq r^2$$

