

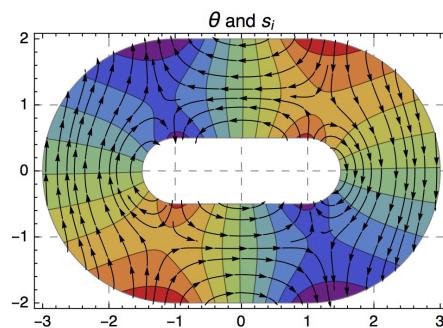
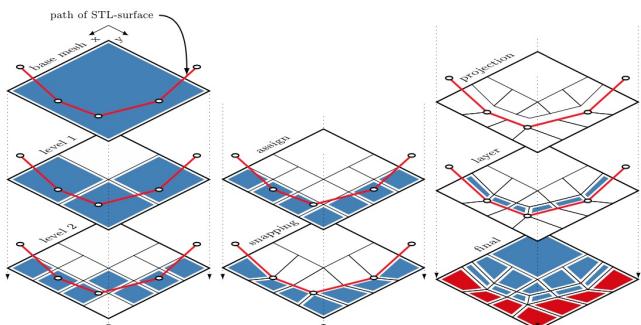
- TODO
- Orga
 - A: L^p-Spaces, Konvergenz
 - N: SVD, Banach-Fix, Gersgorin

Globalübung - 8 - Mathe 3 - WS2021

10.12.2021

Lambert Theisen (1)

- Lambert:
- CES B.Sc. 2014 - 2018 (Thesis: Torrilhon) Meshing
 - M.Sc. 2018 - 2019 (Thesis: Torrilhon) Simulation
 - 2019 - now Promotion (Prof. Stamm) Eigenvalue Problems, DD, Quantum
- Fragen per Mail → Etherpad für Feedback (siehe Moodle)
- Webseite für Kontakt: http://www.acom.rwth-aachen.de/5_people/theisen/start



Global:	$\mathcal{H}\psi = \mathcal{L}\psi = E\psi \text{ in } \Omega = \bigcup_{j=1}^5 \Omega_j$
Local (with DD):	$\mathcal{L}\psi_j = f_j \text{ in } \Omega_j$
	$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5$
ψ_1 ($E_1 \approx 3.81$)	
ψ_2 ($E_2 \approx 4.24$)	
ψ_3 ($E_3 \approx 4.92$)	
ψ_4 ($E_4 \approx 5.80$)	
ψ_5 ($E_5 \approx 6.56$)	

A L^p-Räume:

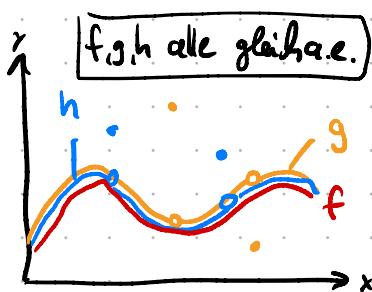
Def

wobei $L^p(\Omega; \mathbb{R}) := \{ [f]_n \mid f \in L^p(\Omega; \mathbb{R}) \}$

[TRIVIA]
C'est française
Lebesgue
= "Lebeck"

$[f]$ ≈ Repräsentant der Äquivalenzklasse $[f] = \{ g \in L^p \mid f \sim g \}$
bzgl. Gleichheit "fast überall" (a.e.), sprich:

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ a.e.}$$



Definition [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Eine Norm ist eine Abbildung $\|\cdot\|$ von einem Vektorraum V über dem Körper \mathbb{K} der reellen oder den komplexen Zahlen in die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen \mathbb{R}_0^+ .

$\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}_0^+, x \mapsto \|x\|$.

für alle Vektoren $x, y \in V$ und alle Skalare $\alpha \in \mathbb{K}$ die folgenden drei Axiome erfüllt:

(1) Definitheit:

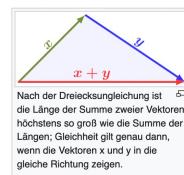
$$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0,$$

(2) absolute Homogenität:

$$\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|,$$

(3) Subadditivität oder Dreiecksungleichung:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$



Nach der Dreiecksungleichung ist die Länge der Summe zweier Vektoren höchstens so groß wie die Summe der Längen; Gleichheit gilt genau dann, wenn die Vektoren x und y in die gleiche Richtung zeigen.

L^p-Norm: $\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ (vgl. $\|\vec{v}\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots}$)

$$\|\vec{v}\|_2$$

→ Warum überhaupt die Äquivalenzklassen? → Weil Definitheit der Norm sonst nicht gilt ↴

$\rightarrow \left\| \begin{cases} 1 & \text{if } x=0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \right\|_{L^2((0,1), \mathbb{R})} = 0$ obwohl $f(x) \neq 0$, aber $f(x)=0 \text{ a.e.} \Rightarrow$ Use Äquivalenzklasse (2)

Properties:

I) **A-Inequality (Minkowski):** Let $f, g \in L^p(\Omega; \mathbb{R})$

$$\begin{array}{c} \|fg\| \\ \triangle \\ \|f\| \end{array}$$

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

TRIVIA
p, q sind "Hölder-Konjugat"

II) **Hölder-Inequality:** Let $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Then for $f \in L^p, g \in L^q$

$$\text{we have } \|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q < \infty$$

$$\int_{\Omega} |f \cdot g| dx$$

↳ Spezialfall $p=q=2 \Rightarrow$ (Cauchy-Schwarz)

$$\|f \cdot g\|_1 = |\langle f, g \rangle_{L^2}| \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|g\|_{L^2}$$

$$|\int f \cdot g|$$

III) $L^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ ist besonders denn der Raum enthält alle Funktionen f , die

$$\|f\|_\infty := \max \{ |f(x)| \mid x \in \Omega \setminus N \} < \infty \quad ("essentially bounded")$$

wobei N Nullmenge ist.

Konvergenzbegriffe:

Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dann konvergiert f_k gegen f

Stark

I) **GLEICHMÄIG:** falls f, f_k beschränkt ($|f, f_k| \leq C$) und: $\max_{x \in \Omega} |f_k(x) - f(x)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

II) **PUNKTWEISE:** falls $\forall x \in \Omega : |f_k(x) - f(x)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

III) **FAST ÜBERALL**: falls $\forall x \in \Omega \setminus N : |f_k(x) - f(x)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, $N \triangleq$ Nullmenge

schwach

keine
Relation

$$\left(\int |f - g|^p \right)^{1/p}$$

$$\dots : \|f_k(x) - f(x)\|_p \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$\dots$$

Aufgabe 2. // (0,1)
Gegeben sei $\Omega = [0, 1]$ sowie die Funktionen

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \exp(-x)$$



(3)

Beispiel-Aufgabe 2a:

- a) g ist stetig $\Rightarrow g$ ist L -messbar. ✓

$$\int_0^1 g(x) dx = \left[-\exp(-x) \right]_0^1 = 1 - \exp(-1) < \infty$$

$\Rightarrow g$ ist L -int'bar. ✓

b) $h(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ sonst} \\ 42 & , x = \frac{1}{2} \end{cases}$

ist fast überall (bis auf Nullmenge) gleich f .

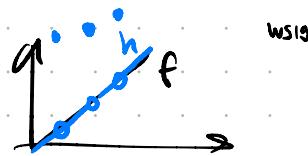
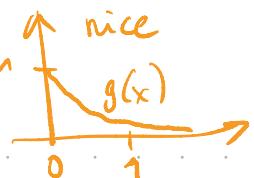
(c) Zeigen Sie dass

$$(i) f \in L^p(\Omega) \text{ für } 1 \leq p < 2,$$

$$(ii) g \in L^q(\Omega) \text{ für } 1 \leq q \leq \infty.$$

$$(d) Folgern Sie aus (c) dass $f \cdot g \in L^1(\Omega)$.$$

$$f \in L^p(\Omega) \Leftrightarrow \int_{\Omega} |f|^p < \infty$$



c) $\|f\|_p^p = \int_0^1 |f(x)|^p dx = \int_0^1 \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \right|^p dx = \int_0^1 x^{-p/2} dx = \left[\frac{1}{-\frac{p}{2} + 1} \cdot x^{-\frac{p}{2} + 1} \right]_0^1 < \infty \text{ für } p < 2$

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \min \{ C \in \mathbb{R} \mid |f(x)| \leq C \text{ a.e. } x \in \Omega \}$$

$\Rightarrow f \in L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < 2$.

für $2 > p$

II) g ist durch $h(x)=1$ nach oben beschränkt.

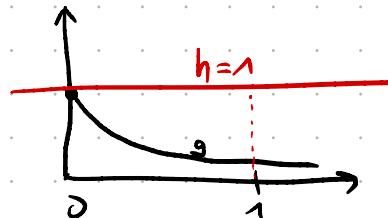
$$\Rightarrow \int_0^1 |g(x)|^p dx \leq \int_0^1 1^p dx = 1 < \infty$$

$\Rightarrow g \in L^p(\Omega)$ mit $1 \leq p \leq \infty$

$$\frac{p}{p} + \frac{1}{p} = 1$$

je größer p , desto "schöner" ist $f \cdot g$.

z. B. eindeutiger, mehr Regelmäßigkeit, Glättlichkeit



d) $f \in L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ und $g \in L^3(\Omega)$ und

$$\frac{1}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$$\Rightarrow \text{Hölder-Ungl. : } \|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_{\frac{3}{2}}^{\frac{2}{3}} \|g\|_3^{\frac{1}{3}} < \infty \Rightarrow (f \cdot g) \in L^1(\Omega)$$

$$\underbrace{\|f\|_{\frac{3}{2}}^{\frac{2}{3}} < \infty}_{\text{p-Integ.}} \Leftrightarrow f \in L^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \int_{\Omega} |f|^{\frac{3}{2}} < \infty \Leftrightarrow (\int_{\Omega} |f|^p)^{\frac{2}{3}}$$

N

Singular Value Decomposition (SVD):

4

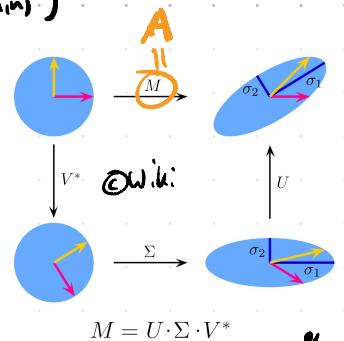
$$\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n} \exists U^T = U^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times m}, V^T = V^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{\min(m,n)})$$

with $\sigma_i \geq 0 \quad \forall i=1.. \min(m,n)$. Such that:

$$A = U \Sigma V^T$$

→ Sehr viele Anwendungen:

↳ Bildkompression, Model-Order-Reduction, Ausgleichsrechnung, Data Science, ML, Computer Vision, ...



Anmerkungen:

$$\rightarrow \|A\|_2 = \sup_{\|u\|=1} \|Au\| = \sigma_1, \quad \text{cond}(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_{\min(m,n)}}$$

$$\rightarrow A = [u_1 \dots u_k] \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_k^T \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^k u_j \sigma_j v_j^T$$

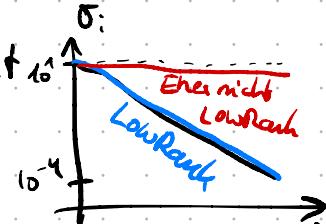
sodass $\sum_{\{j | \sigma_j \geq \varepsilon\}} u_j \sigma_j v_j =: A^\varepsilon \approx A \quad \text{wenn } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (\text{Kompression})$

Das klappt insbesondere gut wenn A "LowRank" Structure hat.

$$\rightarrow \text{Pseudoinverse } A^+ := V \Sigma^+ U^T$$

mit $(\Sigma^+)_{ij} := \begin{cases} 1/\sigma_i & i=j \leq r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

gilt auch für nicht quadratische Matrizen
aber für Singuläre Matrizen
 $A^+ = A^T$ wenn A regulär



$$\rightarrow \text{Ausgleichsrechnung} \quad \min_x \|Ax - b\|_2 = \|Ax^* - b\| \quad \text{mit } x^* = A^+ b \quad (\text{s.o.})$$

(Curve-Fitting z.B.)

c.f. $x = A^{-1}b$ bei regulärem A

Beispiel (Berechnung SVD): Find the SVD of $A = U \Sigma V^T$

where $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \Sigma = \text{selbe Form wie } \Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

1) Singulärwerte berechnen: mit EW von $AA^T = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}$ (kleinere Dimension)
 ATA müsste aufgegeben

$$\det(AA^T - \lambda I) = (\lambda - 17)^2 - 8^2 = \lambda^2 - 34\lambda + 225 = (\lambda - 25)(\lambda - 9)$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{25} = 5 \quad \sigma_2 = \sqrt{9} = 3$$

2) Rechte Singulärvektoren: (Zeilen von V) berechnen (linke Singulärvektoren) gelten auch (5)

als Eigenvektoren von $A^T A \in \mathbb{R}^{n,n} \rightarrow$ diese orthogonal.

$$\text{kern}(A^T A - \sigma_1^2 I) = \begin{bmatrix} -12 & 12 & 2 \\ 12 & -12 & -2 \\ 2 & -2 & -17 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauß}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A^T A - \sigma_2^2 I) = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 2 \\ 12 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauß}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ liegt im Kern.}$$

Der rechte Eigenvektor von $A^T A$ liegt im Kern und ist ortho zu v_1 & v_2 .

$$\text{I) } v_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \perp v_1 \Rightarrow \underline{-a = b}$$

$$\text{II) } v_3 \perp v_2 \Rightarrow v_2^T v_3 = 0 \Leftrightarrow \frac{2a}{\sqrt{18}} + \frac{4c}{\sqrt{18}} = 0 \Leftrightarrow \underline{-a = 2c}$$

$$\Rightarrow v_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir haben: $A = U \Sigma V^T = U \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{4}{\sqrt{18}} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Linke Singulärvektoren: $\sigma_i u_i = A v_i \Leftrightarrow u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$ [$\sigma_i v_i = A^T u_i$ wenn v_i gesucht wäre]

$$\Rightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{125}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{150}} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{150}}}_{=\frac{1}{\sqrt{12}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u_2 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Stickwort:
Rechnungsauglichkeit
Float

Kondition von Eigenwerten: \rightarrow benötigt für numerische Berechnung

Satz von Bauer-Fike: Let $A = T \Lambda T^{-1} \in \mathbb{R}^{n,n}$ with $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

and perturbation $\Delta A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Then $\forall \mu \in \sigma(A + \Delta A)$:

"Messfehler"

$$\min_{\lambda \in \sigma(A)} |\mu - \lambda| \leq \text{cond}_p(T) \|\Delta A\|_p$$

Gut-conditioniertes EV-Probl.
 $\Leftrightarrow \text{cond}_p(T)$ klein
A symm. ($U = U^T$)

\Rightarrow "Je nachdem wie $\text{cond}_p(T)$ ist, ändert sich σ der perturbierten Matrix"

6

Satz von Gershgorin

"Abschätzen von Eigenwerten"

Let $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and $\gamma_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ ("Summe der Spaltenabsoluteinträge ohne Diag.").
 $\sum_{j \neq i} |a_{ij}| \leftarrow$ (Summe der Reihenabsoluteinträge) "geht aus!"

Dann liegen jeder EW von A in mindestens einem Gershgorin-Kreis G_i :

$$\text{mit } G_i := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq \gamma_i\}$$

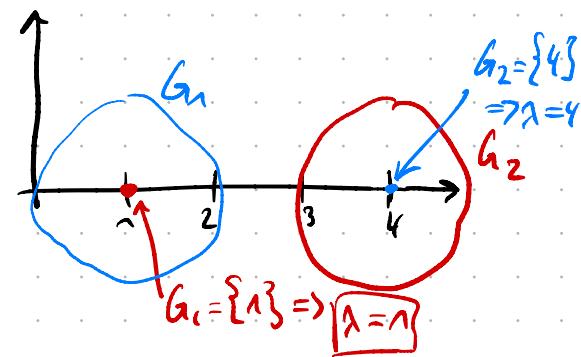
→ Falls alle G_i disjunkt ("keine Überlappung"), dann pro Kreis ein EW.

Einfaches Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma(A) = \{1, 4\}$$



Passt ✓ Eigentlich wissen wir sogar, dass bei Δ -Matrizen die EW auf den Diagonalen stehen... 🤓

Image Compression Using SVD

We consider an grayscale image $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ with entries $A_{ij} \in [0, 1]$ representing the gray intensity.

Singular Value Decomposition

A square matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ can be written as SVD, defined as:

$$A = U \Sigma V^T = \sum_{i=1}^n u_i \sigma_i v_i^T = u_1 \sigma_1 v_1^T + \dots + u_r \sigma_r v_r^T$$

using Images, Testimages, LinearAlgebra, PlutoUI, Plots

Load test image from the Testimages package.



compressed(img, rank)

Live-Demo:

Image Compression
Using SVD

Compressed Image

We construct the compressed image $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ as rank $r = 21$ approximation, defined as:

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^r u_i \sigma_i v_i^T = u_1 \sigma_1 v_1^T + \dots + u_r \sigma_r v_r^T$$

with rank r .

Storage Requirement of Compressed Matrix

Instead of storing n^2 matrix entries, we could now only store the r -times the summation tuple $\{\{u_i, \sigma_i, v_i^T\}\}$ which leads to a size

$$\text{size}(\tilde{A}) = r(n+1+n) = r(2n+1) \ll n^2 = \text{size}(A)$$

```
compressed (generic function with 1 method)
  • function compressed(img, rank)
    • U, R, Vt = svd(img);
    • return Gray.(sum([(U[:,i] * R[i] * Vt[:,i]) for i=1:rank])) # Gray
  • end
```

Check the Singular Values

Rule of thumb: If the decrease of SVs is strong, we have a low rank structure and can compress.

```
> Plots.PlotlyBackend()
  • plotly()
```

Singular Values

