Q: Fragen?
A: Kurvenintegrale, ∇-Felder
N: LineSearch, GD, Newton

Globalübung 11
Mathe 3 - WS 24/25

Lambert Theisen
08.01.2025

A KURVENINTEGRALE

Kurvenintegral (1ster Art):
→ für zB Flächeninhalt unter f entlang γ
→ Masse berechnen für gegebene Dichte (→ siehe HA)

Sei $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Kurve mit Weg $\Gamma \subset \Omega$. Dann ist das Kurvenintegral für ein skalares Feld $f: \Omega \to \mathbb{R}$ entlang Γ :

$$\boxed{\int_\Gamma f \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\|_2 \, dt}$$

Beispiel: Sei $\Gamma = \gamma([0,2\pi])$, $\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \gamma'(t) \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$

mit Dichte $\rho: \Gamma \to \mathbb{R}$ $\rho(x,y) = \underbrace{x^2+y^2}_{\mathbb{R}^2}$. Berechne Masse von Γ.

$$M = \int_0^{2\pi} \underbrace{\rho(\gamma(t))}_{\rho(\gamma_1(t), \gamma_2(t))} \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} [\cos^2 + \sin^2(t)] \cdot \sqrt{[-\sin(t)]^2 + [\cos(t)]^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 \cdot 1 \, dt = 2\pi$$

Arbeitsintegral (Kurvenintegral 2ter Art) → Nun vektorwertige Fkt.

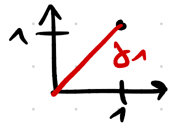
Sei $F_i: \Omega \to \mathbb{R}$ für $i \in \{1,\dots,n\}$ skalare Felder zum Vektorfeld $\boxed{F: \Omega \to \mathbb{R}^n}$, $F = (F_1, \dots, F_n)$. Das Arbeitsintegral von F entlang Γ lautet :

$$\boxed{\int_\Gamma F \cdot dx := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt}$$

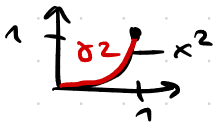
→ "Arbeit $\hat{=}$ Kraft (F) mal Weg (Γ)"

Beispiel

Ex: Given $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ x-y \end{pmatrix}$

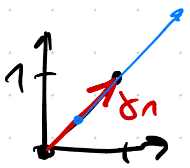


$\to$ Calc $\int_{\gamma_1} f \cdot dx$, $\int_{\gamma_2} f \cdot dx$ for



I

1) Parametrisierung



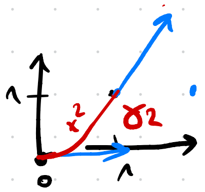
$\Rightarrow \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$

2) Tangentialvektor: $\gamma_1'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) Integral: $\int_{\gamma_1} f \cdot dx = \int_0^1 \langle \underbrace{f(\gamma(t))}_{= \begin{bmatrix} t \cdot t \\ t - t \end{bmatrix}}, \gamma_1' \rangle = \int_0^1 \langle \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

$= \int_0^1 t^2 \, dt = \frac{1}{3}$

II 1) Para:



$\Rightarrow \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$

2) Tangvektor: $\gamma_2'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$

3) Integral: $\int_{\gamma_2} f \cdot dx = \int_0^1 \langle f(\gamma_2(t)), \gamma_2'(t) \rangle \, dt$

$\langle x, y \rangle$
$x \cdot y$

$= \int_0^1 \langle \begin{pmatrix} t \cdot t^2 \\ t - t^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \rangle \, dt$

$= \int_0^1 t^3 + 2t^2 - 2t^3 \, dt \quad \left[\frac{1}{4} t^4 + \frac{2}{3} t^3 \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{2}{3}$ ($-\frac{1}{2}t^4$, $-\frac{1}{2}$)

$= \frac{3}{12} + \frac{8}{12} - \frac{6}{12}$

$= 5/12$

$\to$! Hat f ein Potential?: Nein, weil I ≠ II obwohl $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$, $\gamma_2(b) = \gamma_2(b)$

GRADIENTENFELDER:

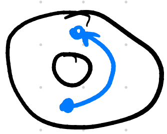
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ein Vektorfeld $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ heißt Gradientenfeld (konservatives Vektorfeld), falls es eine stetig diff'bare Fkt. $\varphi: \Omega \to \mathbb{R}$ gibt mit $\boxed{F = \nabla \varphi}$, φ heißt Potential

Einfachheit von Arbeitsintegralen bei Gradientenfeldern

(F ist Gradientenfeld mit φ)

$\to \boxed{\int_\Gamma F \cdot dx = \ldots = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))}$ (hängt nur von Randpunkten ab!)

$\to$ Falls Γ geschlossene Kurve ($\gamma(a) = \gamma(b)$): $\boxed{\int_\Gamma F \cdot dx = 0}$



zsm. hängend

Satz 1 zu Existenz eines Potentials: Wenn Ω zsm.hängend und $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ Vektorfeld.
Falls $\int_\Gamma F \cdot dx = 0$ ∀ geschlossenen Wege $\Rightarrow$ F hat Potential.

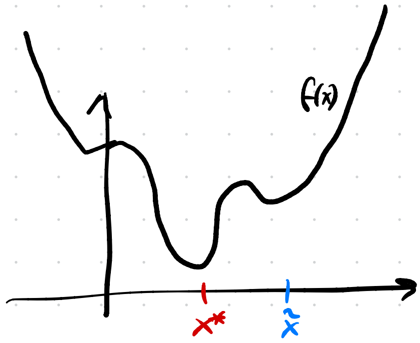
Alle geschlossenen Wege auszuprobieren wird schwierig.... ⇝ Lösung nächste VL :-)

Optimization

(kommt überall vor)

Framework: $\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$ s.t. $\begin{cases} h(x)=0 & \text{"Eq. constraints"} \\ g(x)\geq 0 & \text{"Ineq. constraints"}\end{cases}$

↳ Goal/Objective $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$



→ Feasability region $\mathcal{X} := \{x\in\mathbb{R}^n \mid h(x)=0 \wedge g(x)\geq 0\}$

→ Global Minimum x^*, Lokal Minimum $\tilde{x}$

→ siehe viele Bsp. in der VL

Konvexität: I) Let $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}^n$ be closed and bounded. Every $f\in C$, $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ has at least one minimum and one maximum

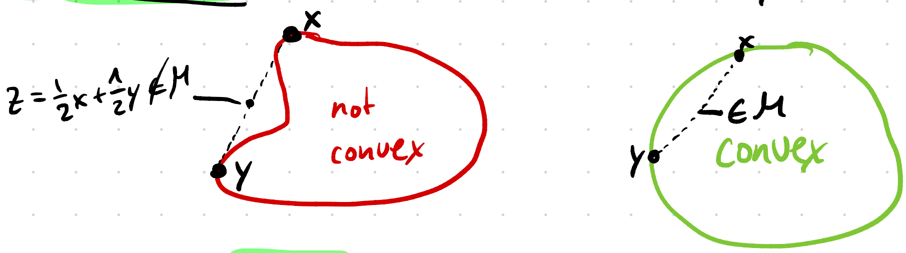
II) If for $f\in C^2(\mathcal{M},\mathbb{R})$: A) $\nabla f(x^*)=0 \wedge \underbrace{\nabla^2 f(x^*)>0}_{\text{pos. def.}} \Rightarrow$ striktes lokales Minimum

Hessematrix

Frage: Wie können wir sicher sein, dass ein lokales Minimum ein globales ist?

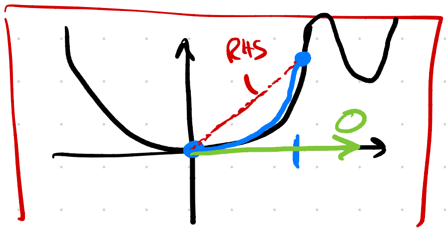
→ Every local minimum of a convex fct. $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ on a convex set $\mathcal{M}$ is a global minimum.

Konvexität von $\mathcal{M}$: Iff $\forall x,y\in\mathcal{M}: \lambda x+(1-\lambda)y\in\mathcal{M}\ \forall\lambda\in[0,1]$



Konvexität von f auf $\mathcal{M}$:

$$\underbrace{f(\lambda x+(1-\lambda)y)}_{\text{LHS}} \leq \underbrace{\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)}_{\text{RHS}}\ \forall\lambda\in[0,1]$$

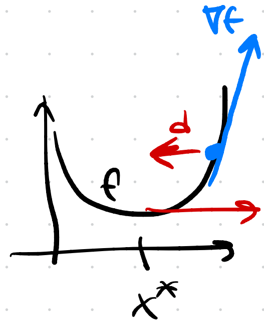


Liniensuche (Line Search):

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$$

- **Allgemeines Framework:**

$$\begin{cases} \bullet \text{ Given } x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ \bullet \text{ for } k = 0, 1, \dots \text{ do} \\ \quad \circ \text{ Compute Descent Direction: } d^{(k)} \in \mathbb{R}^n \\ \quad \circ \text{ Choose step size } \alpha_k > 0 \\ \quad \circ \text{ Update: } x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)} \\ \bullet \text{ end} \end{cases}$$



- **Cool wäre:** $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ und $\lim_{k \to \infty} x^k = x^*$
- **Sinnvoll wäre:** $\nabla f(x^k) d^k \leq 0$ ("Gehe in Richtung Abstieg")
- **Optimal wäre:** $\alpha_k = \arg\min_{\alpha} f(x^k + \alpha d^{(k)})$

Spezifische Varianten (bestimmt durch $d^{(k)}$ und α_k):

I) **Gradient Descent**: $d^{(k)} := -I \cdot \nabla f(x^{(k)})$ "Gehe in Richtg. des Abstiegs"

II) **Newton auf ∇f**: $d^{(k)} := -\left[\nabla^2 f(x^{(k)})\right]^{-1} \nabla f(x^{(k)})$ [hat 2nd-order Information durch die Hessematrix (Krümmung)]

$\rightsquigarrow$ Findet NS von ∇f (genau das wollen wir)

III) Many more.... $\alpha = ?$ $d^{(k)} = -B^{(k)} \nabla f(x^{(k)})$

Demo: Line Search, Gradient Descent