O: Alles klar soweit?
A: Integration (PI, Sub), P37
N: Gauß, Determinante (wenn Zeit)

Globalübung 12
Mathe 1
WS 25/26

16.01.2026
Lambert Theisen

A Integration:

I) Partielle Integration (Wdh.): folgt aus PR $(f\cdot g)' = f'g + fg'$

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \Big[f(x)\,g(x)\Big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

Beispiel:

→ Mehrmaliges Anwenden bei trigonom. Fkt.

Aufgabe 9.

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a)

$$\int_{-1}^{1} x^2 \sin(\pi x)\,dx,$$

1) Sei $f(x) = x^2$ und $g'(x) = \sin(\pi x)$

$\Rightarrow \quad f'(x) = 2x \qquad g(x) = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)$

Daher: $$\int_{-1}^{1} x^2 \sin(\pi x)\,dx \overset{1)}{=} \left[x^2\cdot\left(-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 2x\left(-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right)dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\underbrace{\left(\cos(\pi) - \cos(-\pi)\right)}_{0} + \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} x\cdot\cos(\pi x)\,dx}_{(*)}$$

$\Delta\varphi = 2\pi$

2) Erneut PI: Sei $\tilde{f}(x) = x \quad , \quad \tilde{g}'(x) = \cos(\pi x)$

$\Rightarrow \quad \tilde{f}'(x) = 1 \quad , \quad \tilde{g}(x) = \frac{1}{\pi}\sin(\pi x)$

Dann gilt für $(*)$: $$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} x\cos(\pi x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\left[x\cdot\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1}\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\,dx\right)$$

$$= -\frac{2}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\sin(\pi x)\,dx$$

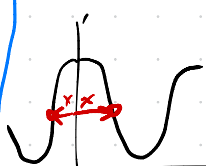
$$= -\frac{2}{\pi^2}\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{2}{\pi^3}\left(\cos(\pi) - \cos(-\pi)\right)$$

$$= \frac{2}{\pi^3}\left(\cos(\pi) - \cos(\pi)\right) = 0$$

$\int(\ldots) \overset{PI}{=} [\ldots] + \int(\ldots)$

$2\int(\cdot) = [\cdot]$
$\Rightarrow \int(\cdot) = \frac{1}{2}[\cdot]$



Cosinus ist gerade:
$\cos(x) = \cos(-x)$

3er product:
$$\int \underbrace{a\cdot b}_{f}\cdot\underbrace{c}_{g'}$$

II) Integration durch Substitution:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\;\varphi'(x)\;dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\;dy$$

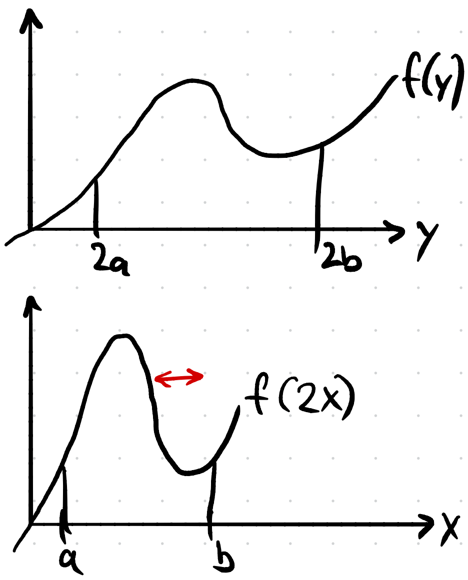
→ Vorraussetzungen:
1) $f: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ ist stetig
2) $\varphi: [a,b] \to [\alpha,\beta]$ ist stetig diff'bar.

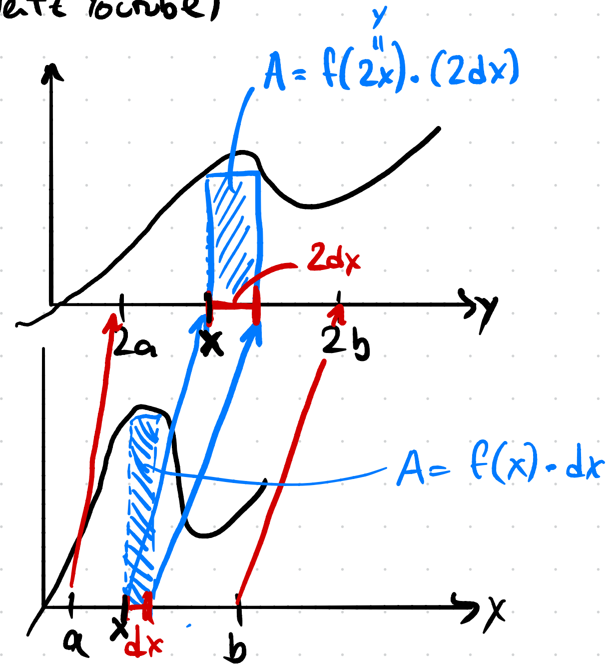
Intuition mit $y = \varphi(x) = 2x$ (→ Weitz Youtube)

$$\int_{2a}^{2b} f(y)\,dy$$

$\updownarrow \; ?$

$$\int_a^b f(2x)\,dx$$





Beispiel 1: $\displaystyle\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

$$\boxed{\text{Sub } u = \sqrt{x}\,,\quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \;\leadsto\; dx = 2\sqrt{x}\,du = 2u\,du}$$

$\phi(4) = (\sqrt{x})(4)$

$$= \int_{\sqrt{1}}^{\sqrt{4}} \frac{1+u}{u}\,2u\,du = \int_1^2 \frac{1+u}{1}\cdot 2\,du -$$

$$= \int_1^2 2(1+u)\,du = \left[2u + u^2\right]_1^2 = (2\cdot 2 + 2^2) - (2\cdot 1 + 1^2)$$
$$= 8 - 3 = 5$$

Beispiel 2: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left[\sin^3(t) + e^{\sin(t)}\right] \cos(t)\,dt$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \phi(t) = \sin(t) \\ \Rightarrow dx = \cos(t)\,dt \end{array}}$$

$$\overset{\text{Sub}}{=} \int_{\sin(0)=0}^{\sin(\pi/2)=1} \left[x^3 + e^x\right] dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + e^x\right]_0^1 = \left(\frac{1}{4} + e\right) - (0+1) = e - \frac{3}{4}$$

Achtung: Grenzen Transformieren!

A) Partialbruchzerlegung (ab ≈1700, Leibniz, Joh. I Bernoulli)

→ hilfreiches Werkzeug, insbesondere für Integration von rationalen Funktionen $f(x) = p(x)/q(x)$ mit p, q Polynome.

→ Idee: Darstellung einer rationalen Funktion f als Summe von:

1) Polynomfunktionen (PDiv mit evtl. Restglied) 2) Brüche der Form $\frac{a}{(x-x_i)^j}$ (PBZ)

wobei x_i die PS von f.

→ PBZ: Sei $R(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ mit $\text{grad}(Z) < \text{grad}(N)$ wobei die n versch. NS von $N(x)$ x_i mit Häufigkeit r_i sind.

- $N(x) = (x-x_1)^{r_1} \cdot (\ldots) \cdot (x-x_n)^{r_n}$ möglich. ($x_i \in \mathbb{C}$ möglich)

x^2+1 $\cancel{\Psi}$

- Ansatz: $$R(x) \overset{!}{=} \underbrace{\frac{a_{11}}{x-x_1}}_{\substack{x_1 \text{ ist}\\ 1\text{-fache}\\ \text{reelle NS}}} + \underbrace{\frac{a_{21}}{(x-x_2)} + \ldots + \frac{a_{2n}}{(x-x_2)^n}}_{\substack{x_2 \text{ ist } n\text{-fache}\\ \text{reelle NS}\\ \text{von } N(x)}} + \underbrace{\frac{b_{31}x+c_{31}}{x^2+p_3x+q_3} + \ldots + \frac{b_{3m}x+c_{3m}}{(x^2+p_3x+q_3)^m}}_{\substack{x_3 \text{ ist } m\text{-fache komplexe}\\ \text{Polstelle von } R(x)\ [\Leftrightarrow \text{NS von } N(x)]}} + \ldots$$

mit $x^2+p_ix+q_i \overset{!}{=} (x-z_i)\cdot(x-\bar{z}_i)$ für $z_i \in \mathbb{C}$.

- Dann $R(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} \overset{!}{=} \text{Ansatz}(x) \quad | \cdot N(x)$

$\Leftrightarrow \quad Z(x) \overset{!}{=} \text{Ansatz}(x) \cdot N(x)$ ⇝ Lsg. mit Koeff.vergleich.

Beispiel: Als Restglied einer PDiv erhält man $f(x) = \frac{1}{\underbrace{x^3-x^2+x-1}_{N(x)}}$.

→ Rate NS: $x_1 = 1$.

→ PDiv um Lin.Fak. $(x-x_1)$ auszuklammern: $N(x) = (x-x_1)\underbrace{(x^2+1)}_{N_2(x)}$

→ NS von $N_2(x)$ lauten: $\{x_2 = i,\ x_3 = -i\} \subset \mathbb{C}$

→ Daher Ansatz: $f(x) \overset{!}{=} \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{\underbrace{x^2+1}_{N_2(x)}} \quad | \cdot N(x) = (x-1)(x^2+1)$

$$\Leftrightarrow Z(x) = \quad 1 \overset{!}{=} \frac{A \cdot (x-1)(x^2+1)}{(x-1)} + \frac{(Bx+C)(x-1)(x^2+1)}{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow 0x^2 + 0x + 1 = Ax^2 + 0x + A + Bx^2 + (-B+C)x + (-C)$$

→ Koeffizientenvergleich:

$$\left.\begin{aligned} \text{I)}\ 0 &= A + B \\ \text{II)}\ 0 &= -B + C \\ \text{III)}\ 1 &= A - C \end{aligned}\right\} \overset{\text{Gauß}}{\rightsquigarrow} \begin{aligned} A &= 1/2 \\ B &= -1/2 \\ C &= -1/2 \end{aligned}$$

→ $\{A, B, C\}$ einsetzen:

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{x+1}{2(x^2+1)}$$

⇝ einfacher für Integration

Beispiel Integration: (Klassiker mit $\arctan(x)$)

Aufgabe 50. (Partialbruchzerlegung)
Berechnen Sie folgendes Integral

$$\int_0^1 \frac{Z(x)}{N(x)} dx := \int_0^1 \frac{1}{x^3+1} dx$$

mittels Partialbruchzerlegung.

- NS $x_1 = -1$ von $N(x)$ sieht man!
- Polynomdivision von $N(x)$:

$$\begin{aligned} & x^3 + 1 : (x+1) = x^2 - x + 1 \\ & -(x^3 + x^2) \\ & \quad 0 \quad -x^2 \\ & \quad -(-x^2 - x) \\ & \qquad\qquad x \\ & \qquad -(x+1) \\ & \qquad\qquad 0 \end{aligned}$$

- Daher $N(x) = (x+1)\underbrace{(x^2 - x + 1)}_{\text{keine reellen NS}}$
- Ansatz (...): $1 \overset{!}{=} A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x+1)$ (*)

$$\rightsquigarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ -A + B + C = 0 \\ A + C = 1 \end{cases}$$

lösen oder mit Gauß oder Trick...

- Trick: Setze eine NS in (*) ein, z.B. $x_1 = -1$:

$$1 \overset{!}{=} A\underbrace{((-1)^2 - (-1) + 1)}_{3} + (Bx + C)\underbrace{(-1+1)}_{=0\,!}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 1/3}$$

Mit $\begin{cases} A + B = 0 \\ A + C = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = -1/3}, \quad \boxed{C = 2/3}$

- Daher:

$$f(x) = 1/3 \left[\underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\text{Integral trivial}} + \frac{2-x}{x^2 - x + 1} \right]$$

Integral schwer weil Zähler ungleich Ableitung vom Nenner (Produktregel, wait for it)

$$f(x) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\,\frac{2x-4}{x^2-x+1}\right]$$

4 stört, wir wollen 1

weil $\frac{d}{dx}(x^2-x+1) = 2x-1$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x+1} - \underbrace{\frac{1}{2}\,\frac{2x-1}{x^2-x+1}}_{\text{easy weil } N'=Z} + \underbrace{\frac{1}{2}\,\frac{3}{x^2-x+1}}_{\text{schwer}}\right]$$

↳ aber wir wissen auswendig:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$$

$$\ln(x^2-x+1)' = \frac{1}{x^2-x+1} \cdot \underbrace{(x^2-x+1)'}_{2x-1}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\,\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\,\frac{3}{\underbrace{x^2-x+\frac{1}{4}}_{(x-1/2)^2}+\frac{3}{4}}\right]$$

Integration

Letztes Problem: Hier muss 1

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{6}\,\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{6}\cdot\frac{4}{3}\,\frac{1}{\underbrace{\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}_{\left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}x - \frac{\cancel{\sqrt{4}}}{\sqrt{3}}\frac{1}{\cancel{2}}\right)^2}+1}$$

Schlussendlich: $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx$

Sub $z = \frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{dz}{dx} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,dz$

$$= \frac{1}{3}\left[\ln(x+1)\right]_0^1 - \frac{1}{6}\left[\ln(x^2-x+1)\right]_0^1 + \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{z^2+1}\,dz$$

$$= \frac{1}{3}\left[\ln(2) - \underbrace{\ln(1)}_{=0}\right] - \frac{1}{6}\left[\underbrace{\ln(1)}_{=0} - \underbrace{\ln(1)}_{=0}\right] + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\underbrace{\operatorname{atan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}_{\pi/6} - \underbrace{\operatorname{atan}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}_{-\pi/6}\right]$$

Tabelle oder auswendig!

$$= \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2\pi}{6}$$

LA — Lineare Gleichungssysteme (LGS):

$\mathbb{R}^{m \times n} \cdot \mathbb{R}^{n} = \mathbb{R}^{m}$

Finde $x \in \mathbb{R}^n$ sodass $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Siehe VL

→ **Lösbarkeit**: $\exists x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = b \iff b \in \mathrm{Im}(A) \iff \mathrm{rang}([A \mid b]) = \mathrm{rang}(A)$

→ **Lösungsmenge**: $b \in \mathrm{Im}(A)$ (Lösbarkeit) & $Ax_s = b$ gilt, dann

$\boxed{\$ \backslash\mathrm{mathcal}(L)}$ → $\mathcal{L} = x_s + \ker(A)$ $\quad$ [denn $A(x_s + x_{kern}) = Ax_s + \underbrace{Ax_k}_{=0} = b$]

Daran sieht man: Falls $\ker(A) = \{0\}$, dann ist Lösung $\mathcal{L}$ unique!

Lösen von LGS:

$A = (a_{ij})$ $\qquad \hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

1) **Diagonalmatrix**: $x_i = b_i / a_{ii}$ easy

2) **Dreiecksmatrix**: Rückwärts-Einsetzen: $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$, $x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1,n-1}}(-a_{n-1,n} x_n + b_{n-1}), \ldots$

↳ Generation mit Gauß

Gauß-Algorithmus:

"Addition, Skalierung, Vertauschung von Zeilen bis Δ-Mat."

→ **Beispiel 1 (SS2019)**:

Aufgabe 13.

a) Für welche $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ hat das Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} & 0 \\ a & 2 & \frac{1}{a} \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}}_{:=A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{:=b}.$$

keine, genau eine, mehr als eine Lösung? Charakterisieren Sie den Lösungsraum für alle Möglichkeiten.

$\mathcal{L}$ $\quad \mathcal{L}$ $\quad L$

a) Idee:
Bringe $[A|b]$ auf rechte obere Δ-Form mit Gauß.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/a & 0 & 1/a \\ a & 2 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{II} \neq \text{III}]{Z_2 \mapsto Z_2 - a \cdot Z_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/a & 0 & 1/a \\ 0 & 1 & 1/a & -1 \\ 0 & a & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{Z_3 \mapsto Z_3 - aZ_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/a & 0 & 1/a \\ 0 & 1 & 1/a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+a \end{array}\right]$$

könnte Nullzeile werden!

Fallunterscheidung für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

1) $\boxed{a = -1}$:

LGS: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $\iff$ $\begin{cases} 1x_1 - 1x_2 + 0x_3 = -1 \\ 0x_1 + 1x_2 - 1x_3 = -1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases}$

mit einer Nullzeile.

Wähle $x_3 = \alpha$ $\Rightarrow$ $x_2 = -1 + x_3 = -1 + \alpha$
$\qquad x_1 = -1 + x_2 = -2 + \alpha$

$\Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha - 2 \\ \alpha - 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ mit Dimension 1.

II) $\boxed{a \neq -1}$ Letze Zeile: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 \overset{!}{=} 1+a \neq 0$

$\Rightarrow$ keine Lösung denn $\nexists\, x \in \mathbb{R}^3$ mit

$$(0\ \ 0\ \ 0) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1+a \neq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$\Rightarrow$ Für $a \neq -1$ existieren keine Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$ ✓

→ **Beispiel 2**: Finde normierte untere Δ-Matrix L und obere Δ-Matrix R

$\hat{=}\ L \cdot U$ (englisch)

sodass
$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} =: A = L \cdot R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \ell_{21} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix} \hat{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & \\ 0 & \end{bmatrix}$$

Gauß:
$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)\ Z_2 \mapsto Z_2 - \frac{1}{2} Z_1} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = R$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \quad (A)^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - c b} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Operation (1) entspricht $L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ mit $(L_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

Daher $L_1 A = R \iff A = \underbrace{(L_1)^{-1}}_{=:L} R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = A$ ✓

Generell gilt: Für A regulär (rang $= n$) & quadratisch gibt es:

$$\boxed{P \cdot A = L \cdot R}$$

$L = (L_n \cdot L_{n-1} \cdot \ldots \cdot L_1)^{-1}$ — Normierung $\ell_{ii} := 1$ — Gauß-Operationen

in Permutationsmatrix würden Zeilenvertauschungen stehen

zB. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

→ **Zerlegung $A = LR$ nützlich**: für LGS mit mehreren rechten Seiten:

$$b = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$$

$$\begin{aligned} & A x = b_i \\ \iff & L R x = b_i \\ \iff & L y = b_i \quad (y := Rx) \end{aligned}$$

← einfach zu lösen weil Δ-Form

Lösung x letztlich über $Rx = y$ (auch "einfach")

⇝ LR-Zerlegung "nur" einmal zu berechnen!

Wärmeleitungs-Simulations mit $f_{heat} = f(t)$

t_1	t_2	t_3
0sec	1sec	2sec
$f_{heat} = 1$	$f_h = 1.5$	$f_h = 2.5$

$$\begin{pmatrix} 1 & r_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \overset{?!}{\exists}\ A = \overset{L_1}{\begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} r_{12} \\ 1 \end{pmatrix} \ ?!$$

Gauß-Algorithmus (again)

Pivotisierung: → oft entscheidend bei Computer Berechnungen für stabilen Algorithmus (z.B. "Teilen durch betragsm. größtes El.")

Lösbarkeit mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: und Treppenstruktur $(A|b) \xrightarrow{\text{Gauß}} (\tilde{A}|\tilde{b})$

$\tilde{A} = [\,{}_0\!\!\diagdown\,]$

1) ohne Delle / NZ: eindeutige Lösung
2) NZ trifft auf homogene Rechte Seite ($b_i = 0$) (Konsistenz): #NZ freie Params
3) NZ trifft auf inhomogene RHS: keine Lsg.

$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \overset{!}{=} 1$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Beispiel (schwerer als letzte Woche, WS2018):

Aufgabe 13.
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1-2\alpha & 2+2\alpha \end{pmatrix} x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b}.$$

(a) Bringen Sie das lineare Gleichungssystem auf Treppenform.

(b) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem eindeutig, mehrdeutig oder gar nicht lösbar?

(c) Geben Sie die Lösung für $\alpha = -2$, $\beta = 1$ an.

Klausur: Transformationen angeben!

a)

$$\left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1-2\alpha & 2+2\alpha \end{matrix}}_{A} \left| \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ \beta \\ 1 \\ 2 \end{matrix}}_{b} \right.\right] \xrightarrow{\mathrm{II})-\mathrm{I}(..)} \left[\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2\alpha & 3+2\alpha \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 \\ \beta-1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \right.\right] \xrightarrow{(..)} \left[\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2\alpha & 3+2\alpha \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 \\ \beta-1 \\ -\beta \\ 1 \end{matrix} \right.\right] \dots$$

$z_3 \mapsto z_3 - z_2$

$$\dots \xrightarrow{(..)} \left[\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3+\alpha \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 \\ \beta-1 \\ -\beta \\ 1+\alpha\beta \end{matrix} \right.\right]$$ ist Treppenform ✓

erlaubt 0

denn: $\Leftrightarrow x_4 \cdot 1 = 0 \Rightarrow x_4 = 0$

b) Lösbarkeit: ⤳ Untersuche Nullzeilen in Abh. von α, β

I) Für $3 + \alpha \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha \neq -3}$: keine NZ ⇒ eindeutige Lösung (denn rang(A) = n durch Treppenform ersichtlich)

II) $\boxed{\alpha = -3} \wedge (1 + \alpha\beta = 1 - 3\beta = 0 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 1/3})$:
homogene RHS
⇒ 1 NZ: ∞-viele Lsg.

III) $\boxed{\alpha = -3} \wedge \boxed{\beta \neq -1/3}$: keine Lösung denn NZ + inhomogene RHS!

c) Lösung für $\alpha=-2,\ \beta=-1$ => eindeutige Lösung mit b)

$$\Rightarrow [\tilde{A}|\tilde{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

⇝ Rückwärtseinsetzen.

(oder mit Gauß weiter auf Diag.-Form...)

4 IV) $x_4 = -1$

3 III) $-2x_3 + x_4 = -1 \Leftrightarrow x_3 = -\frac{1}{2}(-1-x_4) \Leftrightarrow x_3 = \frac{1}{2}(1+(-1)) = 0$

$\Leftrightarrow x_3 = 0$

2 II) $2x_2 + \cancel{x_3} - 2x_4 = 0 \Leftrightarrow x_2 = x_4 = -1$

1 I) $x_1 + (-1) + 0 - (-1) = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1$

=> Lösungsmenge $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \right\}$. $\dim(\mathcal{L}) = 0$ eindeutig ✓

Determinanten

- Skalarwertige Funktion von Matrixeinträgen einer quadratischen Matrix
- ganz oft nützlich & wichtig, z.B. Eigenwerte (später im Semester)

Def 1: (unique)

I) $\det(AB) \overset{!}{=} \det(A)\cdot\det(B)$

II) $\det(T) = \prod_{i=1}^{n} t_{ii}$ mit

T Dreiecksmatrix

Def 2: (eindeutig bestimmt)

I) $\det(I) = 1$

II) $\det\left(\begin{bmatrix} - r_1 - \\ - r_i - \\ - r_j - \\ \vdots \\ - r_n - \end{bmatrix}\right) = -1 \det\left(\begin{bmatrix} - r_1 - \\ - r_j - \\ - r_i - \\ \vdots \\ - r_n - \end{bmatrix}\right)$ [Wikipedia engl.]

III) $\det\left(\begin{bmatrix} - r_1 - \\ - r_i - \\ \vdots \\ - r_n - \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{\alpha}\det\left(\begin{bmatrix} - r_1 - \\ - \alpha r_i - \\ \vdots \\ - r_n - \end{bmatrix}\right)$ $\alpha \in \mathbb{R}$

IV) $\det\left(\begin{bmatrix} - r_1 - \\ - r_i - \\ \vdots \\ - r_n - \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} - r_1 - \\ - r_i + \alpha\cdot r_j - \\ \vdots \\ - r_n - \end{bmatrix}\right)$

Bsp 1: $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1\cdot 4 - 3\cdot 2 = -2$

$\det\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}_{=:A} = 1\cdot 4 - 2\cdot 2 = 0$

⇝ $\det(A) = 0 \Leftrightarrow A$ singulär $\Leftrightarrow A$ nicht invertierbar

$\Leftrightarrow Ax=b$ nicht $\forall b$ lösbar

Laplacescher Entwicklungssatz [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz kann man die Determinante einer $n \times n$-Matrix „nach einer Zeile oder Spalte entwickeln". Die beiden Formeln lauten

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij} \text{ (Entwicklung nach der } j\text{-ten Spalte)}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij} \text{ (Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile),}$$

wobei A_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$-Untermatrix von A ist, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht. Das Produkt $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ wird Cofaktor $\tilde{a}_{ij}$ genannt.

Bsp 2) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$

Laplace 1. Zeile: $\det(B) = +1\cdot\det\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} - 2\cdot\underbrace{\det\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}}_{=0} + 3\cdot\underbrace{\det\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}}_{=0} = \det\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = 4\cdot 7 - 6\cdot 5$

Laplace 1. Spalte: $\det(B) = +1\cdot\det\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} - 0\cdot(\dots) + 0\cdot(\dots) = 4\cdot 7 - 6\cdot 5$

Es kommt immer dasselbe heraus: ⇝ Clever sein & Nullen entwickeln!

⇝ 4x4, 5x5, ... Matrizen brauchen mehrmalige, rekursive Anwendung von Laplace!