[O]: Alles klar soweit?

[A]: Integration (PI, Sub), P37

[N]: Gauß, Determinante (wenn Zeit)

Globalübung 12
Mathe 1
WS 25/26

16.01.2026
Lambert Theisen

[A] Integration:

I) **Partielle Integration (Wdh.):** folgt aus PR $(f\cdot g)' = f'g + fg'$

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \Big[f(x)\,g(x)\Big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

Beispiel:

→ Mehrmaliges Anwenden bei trigonom. Fkt.

Aufgabe 9.

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a)

$$\int_{-1}^{1} x^2 \sin(\pi x)\,dx, = \int x\,\underbrace{(x \sin(\pi x))}$$

$x^4 \to 4\cdot x^3$
$\vdots$

1) Sei $f(x) = x^2$ und $g'(x) = \sin(\pi x)$

$\Rightarrow$ $f'(x) = 2x$ $\quad g(x) = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)$

Daher: $$\int_{-1}^{1} x^2 \sin(\pi x)\,dx \overset{1)}{=} \Big[x^2\cdot\Big(-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\Big)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 2x\Big(-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\Big)dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\underbrace{\Big(\cos(\pi) - \cos(-\pi)\Big)}_{0} + \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} x\cdot\cos(\pi x)\,dx}_{(*)}$$

$\Delta\varphi = 2\pi$

2) Erneut PI: Sei $\tilde f(x) = x$, $\tilde g'(x) = \cos(\pi x)$

$\Rightarrow$ $\tilde f'(x) = 1$, $\tilde g(x) = \frac{1}{\pi}\sin(\pi x)$

Dann gilt für $(*)$: $$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} x\cos(\pi x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\Big[x\cdot\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\Big]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1}\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\,dx\right)$$

$$= -\frac{2}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\sin(\pi x)\,dx$$

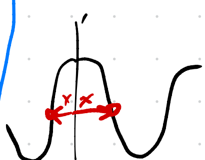
$$= -\frac{2}{\pi^2}\Big[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\Big]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{2}{\pi^3}\Big(\cos(\pi) - \cos(-\pi)\Big)$$

$$= \frac{2}{\pi^3}\Big(\cos(\pi) - \cos(\pi)\Big) = 0$$

$\int(\ldots) \overset{PI}{=} [\ldots] + \int(\ldots)$

$2\int(\ldots) = [\ldots]$
$\Rightarrow \int(\ldots) = \frac{1}{2}[\ldots]$



Cosinus ist gerade:
$\cos(x) = \cos(-x)$

3er product:
$$\int \underbrace{a\cdot b}_{f}\cdot\underbrace{c}_{g'}$$

II) Integration durch Substitution:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy$$

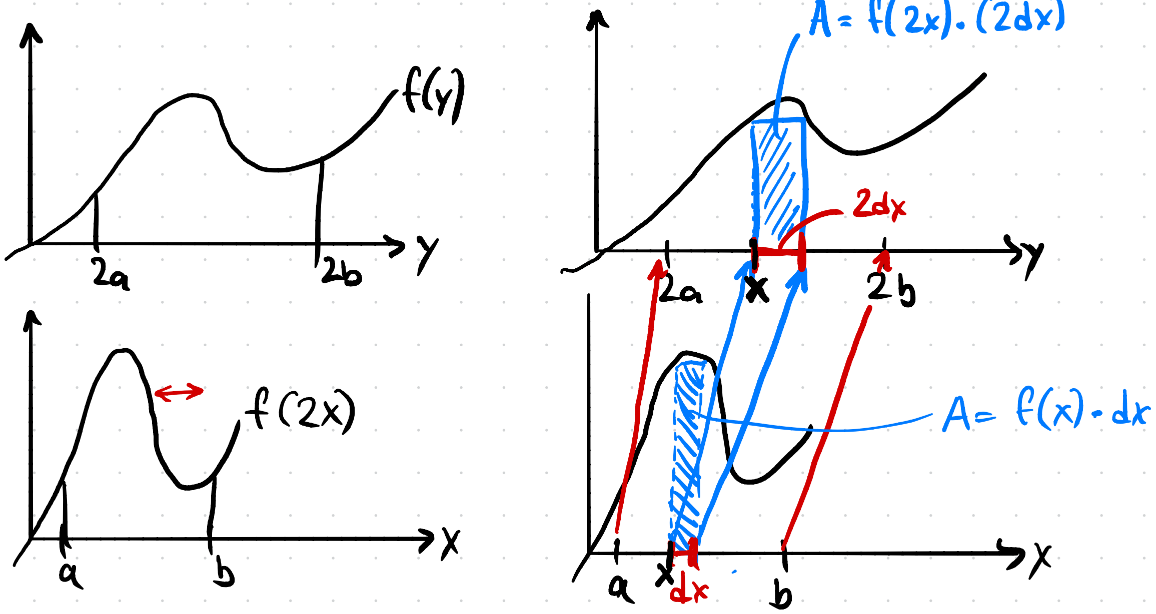
→ Vorraussetzungen:
1) $f: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ ist stetig
2) $\varphi: [a,b] \to [\alpha,\beta]$ ist stetig diff'bar.

Intuition mit $y = \varphi(x) = 2x$ (→ Weitz Youtube)

$$\int_{2a}^{2b} f(y)\,dy$$

$\updownarrow$ 2

$$\int_a^b f(2x)\,dx$$



Beispiel 1: $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

Sub $u = \sqrt{x}$, $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

⇝ $dx = 2\sqrt{x}\,du = 2u\,du$

$\phi(4) = (\sqrt{x})(4)$

$$= \int_{\sqrt{1}}^{\sqrt{4}} \frac{1+u}{u}\,2u\,du = \int_1^2 \frac{1+u}{1}\cdot 2\,du -$$

$$= \int_1^2 2(1+u)\,du = \left[2u + u^2\right]_1^2 = (2\cdot 2 + 2^2) - (2\cdot 1 + 1^2)$$

$$= 8 - 3 = 5$$

Beispiel 2: $\int_0^{\pi/2} \left[\sin^3(t) + e^{\sin(t)}\right] \cos(t)\,dt$

$x = \phi(t) = \sin(t)$

$\Rightarrow dx = \cos(t)\,dt$

Sub

$$\int_{\sin(0)=0}^{\sin(\pi/2)=1} \left[x^3 + e^x\right] dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + e^x\right]_0^1 = \left(\frac{1}{4} + e\right) - (0+1) = e - \frac{3}{4}$$

Achtung: Grenzen Transformieren!

A) Partialbruchzerlegung (ab ≈1700, Leibniz, Joh. I Bernoulli)

→ hilfreiches Werkzeug, insbesondere für Integration von rationalen Funktionen $f(x) = p(x)/q(x)$ mit p, q Polynome.

→ Idee: Darstellung einer rationalen Funktion f als Summe von:

1) $\underbrace{\text{Polynomfunktionen}}_{\text{PDiv mit evtl. Restglied}}$ 2) $\underbrace{\text{Brüche der Form}}_{\text{PBZ}}$ $\dfrac{a}{(x-x_i)^j}$

wobei x_i die PS von f.

→ PBZ: Sei $R(x) = \dfrac{Z(x)}{N(x)}$ mit $\text{grad}(Z) < \text{grad}(N)$ wobei $(x-1)^2$

die n versch. NS von $N(x)$ x_i mit Häufigkeit r_i sind.

• $N(x) = (x-x_1)^{r_1} \cdot (\ldots) \cdot (x-x_n)^{r_n}$ möglich. ($x_i \in \mathbb{C}$ möglich)

x^2+1 ↯

• Ansatz: $R(x) \overset{!}{=} \underbrace{\dfrac{a_{11}}{x-x_1}}_{\substack{x_1 \text{ ist} \\ 1\text{-fache} \\ \text{reelle NS}}} + \underbrace{\dfrac{a_{21}}{(x-x_2)} + \ldots + \dfrac{a_{2n}}{(x-x_2)^n}}_{\substack{x_2 \text{ ist } n\text{-fache} \\ \text{reelle NS} \\ \text{von } N(x)}} + \underbrace{\dfrac{b_{31}x + c_{31}}{x^2+p_3x+q_3} + \ldots + \dfrac{b_{3m}x+c_{3m}}{(x^2+p_3x+q_3)^m}}_{\substack{x_3 \text{ ist } m\text{-fache komplexe} \\ \text{Polstelle von } R(x)\ [\Leftrightarrow \text{NS von } N(x)]}} + \ldots$

mit $x^2 + p_i x + q_i \overset{!}{=} (x-z_i)\cdot(x-\bar{z}_i)$ für $z_i \in \mathbb{C}$.

• Dann $R(x) = \dfrac{Z(x)}{N(x)} \overset{!}{=} \text{Ansatz}(x) \quad | \cdot N(x)$

$\Leftrightarrow Z(x) \overset{!}{=} \text{Ansatz}(x) \cdot N(x)$ ⇝ Lsg. mit Koeff.vergleich.

Beispiel: Als Restglied einer PDiv erhält man $f(x) = \dfrac{1}{\underbrace{x^3-x^2+x-1}_{N(x)}}$.

→ Rate NS: $x_1 = 1$.

→ PDiv um Lin.Fak. $(x-x_1)$ auszuklammern: $N(x) = (x-x_1)\underbrace{(x^2+1)}_{N_2(x)}$

→ NS von $N_2(x)$ lauten: $\{x_2 = i, x_3 = -i\} \subset \mathbb{C}$

→ Daher Ansatz: $f(x) \overset{!}{=} \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Bx+C}{\underbrace{x^2+1}_{N_2(x)}} \quad | \cdot N(x) = (x-1)(x^2+1)$

$$\Leftrightarrow Z(x) = \quad 1 \overset{!}{=} \frac{A\cdot(x-1)(x^2+1)}{(x-1)} + \frac{(Bx+C)(x-1)(x^2+1)}{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow 0x^2+0x+1 = Ax^2+0x+A + Bx^2+(-B+C)x+(-C)$$

→ Koeffizientenvergleich : $\left.\begin{array}{l} \text{I) } 0 = A+B \\ \text{II) } 0 = -B+C \\ \text{III) } 1 = A-C \end{array}\right\}$ Gauß $\rightsquigarrow$ $\begin{array}{l} A = 1/2 \\ B = -1/2 \\ C = -1/2 \end{array}$

→ $\{A, B, C\}$ einsetzen:

$$f(x) = \frac{1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{x+1}{2(x^2+1)}$$ $\rightsquigarrow$ einfacher für Integration

Beispiel Integration: (Klassiker mit arctan(x))

Aufgabe 50. (Partialbruchzerlegung)
Berechnen Sie folgendes Integral

$$\int_0^1 \frac{Z(x)}{N(x)}dx := \int_0^1 \frac{1}{x^3+1}\,dx$$

mittels Partialbruchzerlegung.

- NS $x_1 = -1$ von $N(x)$ sieht man!
- Polynomdivision von $N(x)$:

$$\begin{array}{l} x^3+1 : (x+1) = \underline{x^2-x+1} \\ -(x^3+x^2) \\ \hline 0 \quad -x^2 \\ \quad -(-x^2-x) \\ \hline \qquad\quad x \\ \qquad -(x+1) \\ \hline \qquad\quad 0 \end{array}$$

- Daher $N(x) = (x+1)\overbrace{(x^2-x+1)}^{\text{keine reellen NS}}$
- Ansatz (...) : $1 \overset{!}{=} A(x^2-x+1) + Bx+C)(x+1)$ (*)

$$\rightsquigarrow \left\{\begin{array}{l} A+B = 0 \\ -A+B+C = 0 \\ A+C = 1 \end{array}\right.$$ lösen oder mit Gauß oder Trick...

- Trick: Setze eine NS in (*) ein, z.B. $x_1 = -1$:

$$1 \overset{!}{=} A\underbrace{((-1)^2-(-1)+1)}_{3} + (Bx+C)\underbrace{(-1+1)}_{=0!}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 1/3}$$

Mit $\left\{\begin{array}{l} A+B=0 \\ A+C=1 \end{array}\right.$ $\Rightarrow \boxed{B = -1/3}$, $\boxed{C = 2/3}$

- Daher: $f(x) = 1/3\left[\underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\text{Integral trivial}} + \frac{2-x}{x^2-x+1}\right]$

Integral schwer weil Zähler ungleich Ableitung vom Nenner (Produktregel, wait for it)

$$f(x) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\,\frac{2x-4}{x^2-x+1}\right]$$

4 stört, wir wollen 1

weil $\frac{d}{dx}(x^2-x+1) = 2x-1$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x+1} - \underbrace{\frac{1}{2}\,\frac{2x-1}{x^2-x+1}}_{\text{easy weil } N'=Z} + \frac{1}{2}\,\underbrace{\frac{3}{x^2-x+1}}_{\text{schwer}}\right]$$

$\ln(x^2-x+1)' = \frac{1}{x^2-x+1}\cdot\underbrace{(x^2-x+1)'}_{2x-1}$

↳ aber wir wissen auswendig:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C,\ C\in\mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\,\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\,\frac{3}{\underbrace{x^2-x+\frac{1}{4}}_{(x-1/2)^2}+\frac{3}{4}}\right]$$

Integration

Letztes Problem: Hier muss 1

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{6}\,\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{6}\cdot\frac{4}{3}\,\frac{1}{\underbrace{\frac{4}{3}(x-\frac{1}{2})^2}_{\left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}x-\frac{\cancel{\sqrt{4}}}{\sqrt{3}}\frac{1}{\cancel{2}}\right)^2}+1}$$

Schlussendlich:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx$$

Sub $z = \frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{dz}{dx} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,dz$

$$= \frac{1}{3}\Big[\ln(x+1)\Big]_0^1 - \frac{1}{6}\Big[\ln(x^2-x+1)\Big]_0^1 + \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{z^2+1}\,dz$$

$$= \frac{1}{3}\Big[\ln(2) - \underbrace{\ln(1)}_{=0}\Big] - \frac{1}{6}\Big[\underbrace{\ln(1)}_{=0} - \underbrace{\ln(1)}_{=0}\Big] + \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[\underbrace{\operatorname{atan}\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}_{\pi/6} - \underbrace{\operatorname{atan}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}_{-\pi/6}\Big]$$

Tabelle oder auswendig!

$$= \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2\pi}{6}$$

LA — Lineare Gleichungssysteme (LGS):

$$\mathbb{R}^{m\times n}\cdot\mathbb{R}^{n} = \mathbb{R}^{m}$$

Finde $x\in\mathbb{R}^n$ sodass $Ax=b$ mit $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $b\in\mathbb{R}^m$.

Siehe VL

→ **Lösbarkeit**: $\exists x\in\mathbb{R}^n$ mit $Ax=b \Leftrightarrow b\in \operatorname{Im}(A) \Leftrightarrow \operatorname{rang}\left(\left[\begin{array}{c|c} A & b\end{array}\right]\right) = \operatorname{rang}(A)$

→ **Lösungsmenge**: $b\in\operatorname{Im}(A)$ (Lösbarkeit) & $Ax_s=b$ gilt, dann

`$ \mathcal(L)` → $\mathcal{L} = x_s + \ker(A)$ $\left[\text{denn } A(x_s+x_{kern}) = Ax_s + \underbrace{Ax_k}_{=0} = b\right]$

Daran sieht man: Falls $\ker(A)=\{0\}$, dann ist Lösung $\mathcal{L}$ unique!

Lösen von LGS:

$A=(a_{ij})$ $\qquad \hat{A} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

1) **Diagonalmatrix**: $x_i = b_i / a_{ii}$ easy

2) **Dreiecksmatrix**: Rückwärts-Einsetzen: $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$, $x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1,n-1}}\left(-a_{n-1,n}x_n + b_{n-1}\right), \dots$

↳ Generation mit Gauß.

Gauß-Algorithmus:

"Addition, Skalierung, Vertauschung von Zeilen bis Δ-Mat."

→ **Beispiel 1 (SS 2019)**:

Aufgabe 13.

a) Für welche $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ hat das Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{a} & 0\\ a & 2 & \frac{1}{a}\\ 0 & a & 1\end{pmatrix}}_{:=A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{a}\\0\\1\end{pmatrix}}_{:=b}.$$

keine, genau eine, mehr als eine Lösung? Charakterisieren Sie den Lösungsraum für alle Möglichkeiten.

$\mathcal{L}$ $\mathcal{L}$ L

a) Idee:
Bringe $[A|b]$ auf rechte obere Δ-Form mit Gauß.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/a & 0 & 1/a\\ a & 2 & 1/a & 0\\ 0 & a & 1 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[Z_2 - a\cdot Z_1]{Z_2\mapsto} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/a & 0 & 1/a\\ 0 & 1 & 1/a & -1\\ 0 & a & 1 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[Z_3 - aZ_2]{Z_3\mapsto} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/a & 0 & 1/a\\ 0 & 1 & 1/a & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1+a\end{array}\right]$$

II+III

könnte Nullzeile werden!

Fallunterscheidung für $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$:

1) $\boxed{a=-1}$:

LGS: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$ mit einer Nullzeile.

$\Leftarrow$ $\begin{cases} 1x_1 - 1x_2 + 0x_3 = -1\\ 0x_1 + 1x_2 - 1x_3 = -1\\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0\end{cases}$

Wähle $x_3=\alpha \Rightarrow x_2 = -1+x_3 = -1+\alpha$

$x_1 = -1+x_2 = -2+\alpha$

$\Rightarrow \mathcal{L} = \left\{\begin{pmatrix}\alpha-2\\ \alpha-1\\ \alpha\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \alpha\in\mathbb{R}\right\}$ mit Dimension 1.

II) $\boxed{a \neq -1}$ Letze Zeile: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 \overset{!}{=} 1+a \neq 0$

$\Rightarrow$ keine Lösung denn $\cancel{\exists}\, x \in \mathbb{R}^3$ mit

$$(0 \;\; 0 \;\; 0) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1 + a \neq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$\Rightarrow$ Für $a \neq -1$ existieren keine Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$ ✓

→ **Beispiel 2**: Finde normierte untere Δ-Matrix L und obere Δ-Matrix R

$\hat{=}\, L \cdot U$ (englisch)

sodass
$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} =: A = L \cdot R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \ell_{21} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix} \;\hat{=}\; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & \\ 0 & \end{bmatrix}$$

Gauß:
$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{① Z_2 \mapsto Z_2 - \frac{1}{2} Z_1} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = R$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \quad (A)^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - c b} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Operation ① entspricht $L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ mit $(L_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

Daher $L_1 A = R \iff A = \underbrace{(L_1)^{-1}}_{=:L} R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = A$ ✓

Generell gilt: Für A regulär (rang $= n$) & quadratisch gibt es:

$$\boxed{P \cdot A = L \cdot R}$$

$L = (L_n \cdot L_{n-1} \cdot \ldots \cdot L_1)^{-1}$ — Gauß-Operationen

Normierung $\ell_{ii} := 1$

in Permutationsmatrix würden Zeilenvertauschungen stehen

zB. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \;\hat{=}\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

→ **Zerlegung $A = LR$ nützlich**: für LGS mit mehreren rechten Seiten:

$b = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$

$$\begin{aligned} A x &= b_i \\ \iff L R x &= b_i \\ \iff L y &= b_i \end{aligned} \qquad y := Rx$$

← einfach zu lösen weil Δ-Form

Lösung x letztlich über $Rx = y$ (auch "einfach")

⤳ LR-Zerlegung "nur" einmal zu berechnen!

Wärmeleitungs-Simulations mit $f_{heat} = f(t)$		
t_1	t_2	t_3
0sec	1sec	2sec
$f_{heat} = 1$	$f_h = 1.5$	$f_h = 2.5$

$$\begin{pmatrix} 1 & r_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overset{?!}{\exists}\; A = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{12} \\ 1 \end{pmatrix} \quad ?!$$

L_1

Gauß-Algorithmus (again)

Pivotisierung: → oft entscheidend bei Computer Berechnungen für stabilen Algorithmus (z.B. "Teilen durch betragsm. größtes El.")

Lösbarkeit mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: und Treppenstruktur $(A|b) \xrightarrow{\text{Gauß}} (\tilde{A}|\tilde{b})$

$\tilde{A} = [\,\diagdown\,]$ (mit 0 unter der Diagonale)

1) ohne Delle / NZ: eindeutige Lösung
2) NZ trifft auf homogene Rechte Seite (Konsistenz) ($b_i = 0$): #NZ freie Params
3) NZ trifft auf inhomogene RHS: keine Lsg.

$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \overset{!}{=} 1$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Beispiel (schwerer als letzte Woche, WS2018):

Aufgabe 13.
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1-2\alpha & 2+2\alpha \end{pmatrix} x = \overset{b}{\begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}.$$

(a) Bringen Sie das lineare Gleichungssystem auf Treppenform.

(b) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem eindeutig, mehrdeutig oder gar nicht lösbar?

(c) Geben Sie die Lösung für $\alpha = -2, \beta = 1$ an.

Klausur: Transformationen angeben!

a)

$$\left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1-2\alpha & 2+2\alpha \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ \beta \\ 1 \\ 2 \end{matrix}}_{b}\right] \xrightarrow{\text{II)-I}(..)} \left[\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2\alpha & 3+2\alpha \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 \\ \beta-1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}\right] \xrightarrow{(..)} \left[\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2\alpha & 3+2\alpha \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 \\ \beta-1 \\ -\beta \\ 1 \end{matrix}\right] \dots$$

$z_3 \mapsto z_3 - z_2$

$$\dots \xrightarrow{(..)} \left[\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3+\alpha \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 \\ \beta-1 \\ -\beta \\ 1+\alpha\beta \end{matrix}\right]$$ ist Treppenform ✓

$\hat{=} 0$ erlaubt, denn: $(\Leftrightarrow) \; x_4 \cdot 1 = 0 \Rightarrow x_4 = 0$

b) Lösbarkeit: ⤳ Untersuche Nullzeilen in Abh. von α, β

I) Für $3+\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha \neq -3}$: keine NZ ⇒ eindeutige Lösung (denn rang(A) = n durch Treppenform ersichtlich)

II) $\boxed{\alpha = -3} \wedge \left(1+\alpha\beta = 1 - 3\beta = 0 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 1/3}\right)$: homogene RHS

⇒ 1 NZ: ∞-viele Lsg.

III) $\boxed{\alpha = -3} \wedge \boxed{\beta \neq -1/3}$: keine Lösung denn NZ + inhomogene RHS!

c) Lösung für $\alpha = -2$, $\beta = -1$ $\Rightarrow$ eindeutige Lösung mit b)

$$\Rightarrow [\tilde{A} | \tilde{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \text{Rückwärtseinsetzen.}$$

(oder mit Gauß weiter auf Diag-Form...)

4 IV) $x_4 = -1$

3 III) $-2x_3 + x_4 = -1 \Leftrightarrow x_3 = -\frac{1}{2}(-1 - x_4) \Leftrightarrow x_3 = \frac{1}{2}(1 + (-1)) = 0$

$\Leftrightarrow x_3 = 0$

2 II) $2x_2 + \cancel{x_3} - 2x_4 = 0 \Leftrightarrow x_2 = x_4 = -1$

1 I) $x_1 + (-1) + 0 - (-1) = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1$

$\Rightarrow$ Lösungsmenge $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \right\}$. $\dim(\mathcal{L}) = 0$ eindeutig ✓

Determinanten:
- Skalarwertige Funktion von Matrixeinträgen einer quadratischen Matrix
- ganz oft nützlich & wichtig, z.B. Eigenwerte (später im Semester)

Def 1: (unique)
I) $\det(AB) \overset{!}{=} \det(A) \cdot \det(B)$
II) $\det(T) = \prod_{i=1}^{n} t_{ii}$ mit
T Dreiecksmatrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Def 2: (eindeutig bestimmt)
I) $\det(I) = 1$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$
II) $\det\begin{pmatrix} - r_1 - \\ \vdots \\ - r_i - \\ - r_j - \\ \vdots \\ - r_n - \end{pmatrix} = -1 \det\begin{pmatrix} - r_1 - \\ \vdots \\ - r_j - \\ - r_i - \\ \vdots \\ - r_n - \end{pmatrix}$ [Wikipedia engl.]
III) $\det\begin{pmatrix} - r_1 - \\ - r_i - \\ \vdots \\ - r_n - \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha} \det\begin{pmatrix} - r_1 - \\ - \alpha \cdot r_i - \\ \vdots \\ - r_n - \end{pmatrix}$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$
IV) $\det\begin{pmatrix} - r_1 - \\ - r_i - \\ - r_n - \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} - r_1 - \\ - r_i + \alpha \cdot r_j - \\ - r_n - \end{pmatrix}$

Bsp 1: $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$

$\det\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}_{=:A} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$

$\rightsquigarrow \det(A) = 0 \Leftrightarrow A$ singulär $\Leftrightarrow A$ nicht invertierbar
$\Leftrightarrow Ax = b$ nicht $\forall b$ lösbar

Laplacescher Entwicklungssatz [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz kann man die Determinante einer $n \times n$-Matrix „nach einer Zeile oder Spalte entwickeln". Die beiden Formeln lauten

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij} \text{ (Entwicklung nach der } j\text{-ten Spalte)}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij} \text{ (Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile),}$$

wobei A_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$-Untermatrix von A ist, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht. Das Produkt $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ wird Cofaktor $\tilde{a}_{ij}$ genannt.

Bsp 2) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ $\qquad \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$

$\det B = \underbrace{+1 \cdot 4 \cdot 7 + 2 \cdot 5 \cdot 0 + 0 \cdot 6 \cdot 3 - 0 \cdot 4 \cdot 3 - 6 \cdot 5 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot 7}_{= 28 - 30}$

Laplace 1. Zeile: $\det(B) = +1 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} - 2 \cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}}_{=0} + 3 \cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}}_{=0} = \det\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = 4 \cdot 7 - 6 \cdot 5$

Laplace 1. Spalte: $\det(B) = +1 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} - 0 \cdot (\dots) + 0 \cdot (\dots) = 4 \cdot 7 - 6 \cdot 5$

$\rightsquigarrow$ 4×4, 5×5, ... Matrizen brauchen mehrmalige, rekursive Anwendung von Laplace!

Es kommt immer dasselbe heraus:
$\rightsquigarrow$ Clever sein & Nullen entwickeln!

$$\det \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & d & e & f \\ 0 & 0 & 0 & g & h & i \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = 1 \cdot \det \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \\ 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & \\ \hline 1 & 0 & 0_{2\times 2} \\ 0 & 1 & \end{array}\right]$$

$$= 1 \cdot 1 \det \left[\begin{array}{c|c} 0 & \\ 0 & A \\ 0 & \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \det(A)$$

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0_{n\times n} & C \end{array}\right) \quad \text{mit } A, B, C \text{ quadr.)}$$

$$= \det(A) \cdot \det(C) \quad ?!$$

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \neq \det(A) \cdot \det(D) - \det(C) \cdot \det(B) \, ?!}$$ leider

$$\det(AB - CD)$$

$$= \det(AB) - \det(CD)$$

$$= \det A \cdot \det B$$