O: ILIAS

E: Kompl. Zahlen, Polar-Koords, Vektorraum

HM1 - Vü 2
WS 22

16.11.2022
Lambert Theisen

O: → ILIAS Räume sollten sichtbar sein
- ↳ Videos
- ↳ PDF-Mitschriften

⇒ Sonst noch Fragen? ⇝ Kontaktformular

E4

Aufgabe V 4. *Polarkoordinaten*

(a) Gegeben seien die komplexen Zahlen $w = \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)$ und $z = \sqrt{3} - \mathrm{i}$. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke und geben Sie die Ergebnisse in Polarkoordinaten, aber auch in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an:

$$\frac{w^5}{z^4}, \quad w^5 - z^4 .$$

(b) Gegeben sei das Polynom $p(X) = X^5 - 3X^4 + 4X - 12$.

(i) Faktorisieren Sie das Polynom in komplexe Linearfaktoren.

(ii) Zerlegen Sie $p(X)$ in *reelle* Faktoren von minimalem Grad.

a) $w = \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)$, $z = \sqrt{3} - i$ gegeben

$\hat{=}\ a + ib$

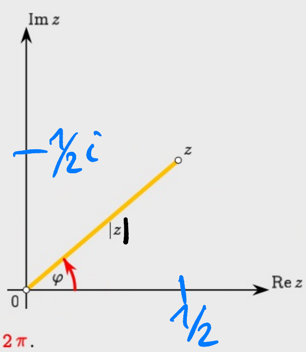
$a = \sqrt{3},\ b = -1$

1.8.1. Definition.

Für jede komplexe Zahl $z \neq 0$ gibt es ein $\varphi \in \mathbb{R}$ so, dass gilt:

$$z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = |z|\cos\varphi + \mathrm{i}\,|z|\sin\varphi$$

Wegen der Periodizität der Winkelfunktionen ist φ nur bis auf Addition eines ganzzahligen Vielfachen von 2π festgelegt (wir verwenden das Bogenmaß zur Angabe des Winkels).



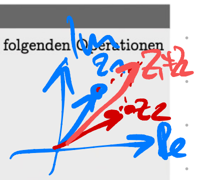
Um Eindeutigkeit zu erreichen, verlangt man $0 \leq \varphi < 2\pi$. Ist dies erfüllt, nennt man $\arg z := \varphi$ das Argument von z.

1.7.1. Konstruktion.

Auf der Menge aller geordneten Paare reeller Zahlen setzen wir die folgenden Operationen fest:

$$(a, b) + (x, y) := (a + x, b + y)$$

$$(a, b) \cdot (x, y) := (ax - by, ay + bx).$$



Wir setzen außerdem $\mathrm{i} := (0, 1)$ und identifizieren 1 mit $(1, 0)$. Dies führt zur Schreibweise $a + b\mathrm{i}$ für (a, b). Den so gewonnenen Rechenbereich nennt man den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Für $w := a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$) nennt man $\operatorname{Re} w := a$ den Realteil und $\operatorname{Im} w := b$ den Imaginärteil von w.

$\boxed{i^2 = -1}$

→ Konvertierung "$a + ib$" → $|z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$

• Betrag: $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$

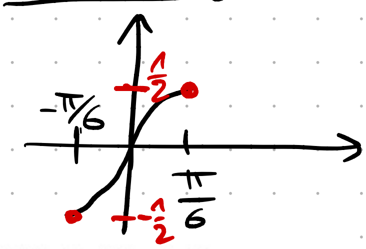
$\left[\overset{1.7.8}{=} \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}\right]$

• Argument (Phase): $z = \sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

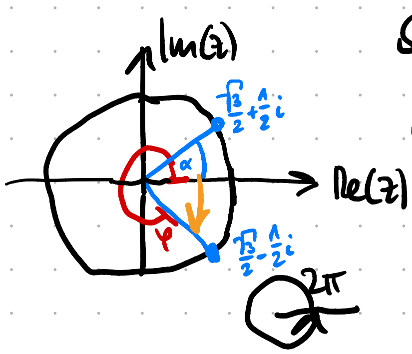
$= |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$\overset{!}{=} 2 \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Sinus ist ungerade:



→ Skizze



• Bei $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ist:

$\sin(\alpha) = \frac{1}{2} \hat{=} \operatorname{Im}$

$\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{=} \operatorname{Re}$

$\varphi \in [0, 2\pi)$

$\Rightarrow \varphi = 2\pi - \alpha$

$= \frac{2\pi}{1} - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$

Werte der Winkelfunktionen

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$-\frac{\pi}{6}$

$-\frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan(x)$?

? $\frac{2\pi}{3}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\alpha = \frac{\operatorname{Im}}{\operatorname{Re}}$

Also: $z = 2\left(\cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{11}{6}\pi\right)\right)$ ③

Berechne z^4, w^5:

Beträge multip. Argumente addieren

$$z_1 \cdot z_2 = (|z_1| \cdot |z_2|) \cdot (\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

$$z^4 \overset{1.8.2.3}{=} \underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}_{2^4} \cdot \left(\cos\left(4\cdot\frac{11}{6}\pi\right) + i\sin\left(4\cdot\frac{11}{6}\pi\right)\right)$$

$$\boxed{\frac{4}{1}\cdot\frac{11}{6}\pi = \frac{22}{3}\pi = 6\pi + \frac{4}{3}\pi}$$

6π: $3\cdot 2\pi$

$$= 16 \cdot \left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right] \quad \varphi' \in [0, 2\pi)$$

$$w^5 = 1^5\left[\cos\left(5\cdot\frac{5}{3}\pi\right) + i\sin\left(5\cdot\frac{5}{3}\pi\right)\right]$$

$$\boxed{5\cdot\frac{5}{3}\pi = \frac{25}{3}\pi = 8\pi + \frac{1}{3}\pi}$$

$$= \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)$$

Berechne w^5/z^4:

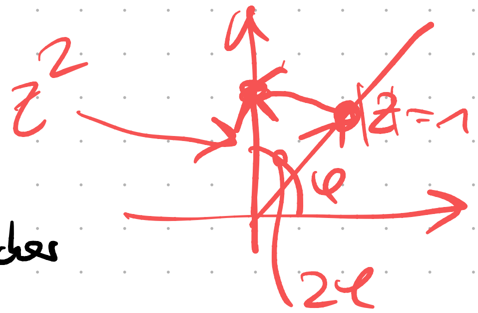
$$2.\ z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar z}{|z|^2} = \frac{1}{|z|}(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi) = \frac{1}{|z|}(\cos(-\varphi) + \mathrm{i}\sin(-\varphi))$$

$$\Rightarrow \frac{w^5}{z^4} = w^5 \cdot (z^4)^{-1} \overset{1.8.2.2.}{=} w^5 \cdot \left[\frac{1}{16}\cdot\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right)\right]$$

$$\overset{(1.8.2.3)(s.o.)}{=} \frac{1}{16}\left[\cos\left(\pi/3 - 4\pi/3\right) + i\sin\left(\pi/3 - 4\pi/3\right)\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[\underbrace{\cos(-\pi)}_{-1} + i\underbrace{\sin(-\pi)}_{0}\right] \quad \text{(Polarkoords.)}$$

$$= -\frac{1}{16} + 0\cdot i$$



Berechne $w^5 - z^4$: ⇝ Hier ist $a+bi$ praktischer

- $z^4 = 16\left[\cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3)\right] \overset{\text{Tabelle}}{=} 16\left[\left(-\frac{1}{2}\right) + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$
  $= -16\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$
- $w^5 = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3) \overset{\text{Tab.}}{=} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\Rightarrow w^5 - z^4 = \left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{16}{2}\right)\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{16\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \frac{17}{2} + \sqrt{3}\cdot\frac{17}{2}i = 17\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\overset{\text{Tab}}{=} 17\left(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)\right)$$

b) $p(x) = x^5 - 3x^4 + 4x \underbrace{-12}_{=:a_0} \overset{!}{=} (x-z_1)\cdot(x-z_2)\cdot(x-z_3)\cdot\ldots\cdot(x-z_5)$

Linearfaktoren

$\boxed{\text{vgl. } x^2 - 2 = (x-\sqrt{2})\cdot(x+\sqrt{2})}$
$= x^2 - \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$

(i) Komplexe Linearfaktoren:

⇝ Problem: Grad 5 hat keine allgemeine "pq"-Formel o.ä.
⇒ Erraten einer ganzzahligen Nullstelle (Trick 1.8.10)

1.8.10. Erraten ganzzahliger Nullstellen.

Ist $p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \operatorname{Pol}\mathbb{Z}$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten (also $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{Z}$), so ist jede ganzzahlige Nullstelle ein Teiler von a_0.

> Für jede Nullstelle x_0 von $p(X)$ gilt
>
> $$0 = p(x_0) = \overbrace{a_n\, x_0^n + a_{n-1}\, x_0^{n-1} + \cdots + a_1\, x_0}^{=:\, z} + a_0$$
>
> Ist x_0 ganz, so ist auch z ganz, und durch x_0 teilbar.
> Also ist auch $a_0 = -z$ durch x_0 teilbar.

Im Fall $a_0 \neq 0$ besitzt a_0 nur endlich viele Teiler, man kann also algorithmisch alle ganzzahligen Nullstellen von $p(X)$ bestimmen.

Erraten von NS: $a_0 = -12$ bei uns

⇝ Teste daher die Teiler von -12: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6$

I. $p(1) = 1^5 - 3\cdot 1^4 + 4\cdot 1 - 12 = 1 - 3 + 4 - 12 = -10 \neq 0$

II. $p(2) = 2^5 - 3\cdot 2^4 + 4\cdot 2 - 12 = 32 - 48 + 8 - 12 = -20 \neq 0$

III. $p(3) = \underbrace{3^5 - 3\cdot 3^4}_{=0} + \underbrace{4\cdot 3 - 12}_{=0} = 0$ ✓

Grad −1

$p(x) = (x-3)\cdot q(x)$

$q = \frac{p(x)}{(x-3)}$?

⇒ $z = 3$ ist NS ⇒ $(x-3)$ ist Linearfaktor

Polynomdivision: ⇒ $x^5 - 3\cdot x^4 + 4\cdot x - 12 : (x - 3) = x^4 + (\cancel{0\cdot x^3}) + 4$

$x^4\cdot(x-3)$ → $(x^5 - 3\cdot x^4)$
$0 \quad + \quad 0$

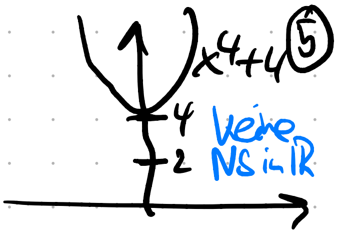
$0\cdot x^3 (x-3)$ → 0

$0 + 4x - 12$
$0 + 4x - 12$
0

⇒ $p(x) = (x-3)\cdot(x^4+4)$

⇒ $p(x) = (x-3)(x^4+4)$

NS von (x^4+4): $\rightsquigarrow$ Wir erwarten komplexe NS



5

$w^4 = -4$

$\rightsquigarrow$ Löse Gleichung: $w^n = z$ mit $z = -4, n = 4$

$\Rightarrow$ Verwende komplexes Wurzelziehen nach 1.8.4

1.8.4. Wurzelziehen bei komplexen Zahlen.

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $z = r(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Gesucht ist eine n-te Wurzel aus z, also $w = s(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \in \mathbb{C}$ mit $w^n = z$.
Ansatz: $w^n = z \iff s^n\left(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)\right) = r(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta)$.
Durch Vergleich der Beträge ergibt sich zuerst $s = \sqrt[n]{r}$,
dann $n\varphi = \beta + 2\pi\ell$ mit $\ell \in \mathbb{Z}$ [wg. der Periodizität von cos und sin],
also

$$\varphi \in \left\{ \frac{\beta}{n} + \ell\frac{2\pi}{n} \,\middle|\, \ell \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Wegen der Periodizität der Winkelfunktionen kann man sich auf Werte von ℓ im Intervall $[0, n-1]$ beschränken.

[für $\ell = 0, \pm n, \pm 2n, \ldots$ erhält man stets dieselbe Wurzel, weil sich φ nur um Vielfache von 2π ändert.]

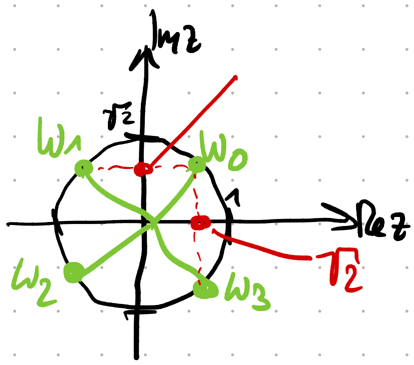
Man erhält also n verschiedene n-te Wurzeln von z, nämlich

$$w_\ell := \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\tfrac{\beta}{n} + \ell\tfrac{2\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{\beta}{n} + \ell\tfrac{2\pi}{n}\right)\right) \quad \text{für } \ell \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

$\rightarrow$ Schreibe z in PK: $z = -4 = 4(\cos(+\pi) + i\sin(+\pi))$

Damit erhalten wir: $w_\ell = \sqrt[4]{4}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \ell\cdot\frac{2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \ell\cdot\frac{2\pi}{4}\right)\right), \quad \ell \in \{0,1,2,3\}$

$$\Rightarrow w_0 = \sqrt{2}\cdot(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)) \overset{\text{Tabelle}}{=} 1 + i$$
$$w_1 = \sqrt{2}\cdot(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)) = -1 + i$$
$$w_2 = \sqrt{2}\cdot(\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)) = -1 - i$$
$$w_3 = \sqrt{2}\cdot(\cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4)) = 1 - i$$



Zerlegung von $p(x)$ in $\mathbb{C}$:

$\overline{a+bi} = a - b\cdot i$

$$\Rightarrow p(x) = (x-3)\cdot(x-\overbrace{(1+i)}^{w_0})\cdot(x-\overbrace{(-1+i)}^{w_1})\cdot(x-\overbrace{(-1-i)}^{w_2})\cdot(x-\overbrace{(1-i)}^{w_3})$$

Paare kompl. konjugierter NS

(ii) Zerlegung von $p(x)$ in reelle Faktoren minimalen Grades

$\overline{\alpha + i\beta} = \alpha - i\beta$

→ Komplexe NS treten als Paare kompl. konj. Zahlen auf

Daher: $(x-a)\cdot(x-\bar{a}) = [(x - Re(a)) - i\, Im(a)] \cdot [(x - Re(\bar{a})) \underbrace{- i\, Im(\bar{a})}_{= +i\, Im(a)}]$

$$\overset{\text{3rd bin. Formel}}{=} [x - Re(a)]^2 - i^2 [Im(a)]^2$$

$$= [x - Re(a)]^2 + [Im(a)]^2 \in \mathbb{R} \; !$$

Nicht minimal:
$p(x) = (x^5 - 4x^4 + x + 12)$

Bei uns daher:

$$p(x) = (x-3) \cdot \overbrace{((x-1)^2 + 1^2)}^{(x-w_0)\cdot(x-w_3)} \cdot ((x+1)^2 + 1^2)$$

$$= \underbrace{(x-3)}_{\text{Grad 1}} \cdot \underbrace{(x^2 - 2x + 2)}_{\text{Grad 2}} \cdot \underbrace{(x^2 + 2x + 2)}_{\text{Grad 2}}$$

ist die gesuchte Zerlegung in $\mathbb{R}$ mit Faktoren minimalen Grades.

Es

⑧

Aufgabe V 5. *Untervektorraum*

Skizzieren Sie die Menge

$x^2 = 1$

$$\mathcal{M} := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - \mathrm{i}| = \left| z + \frac{\sqrt{3} + \mathrm{i}}{2} \right| \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ einen $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{C}$ bildet.

Menge vereinfachen: Sodass $z \in \mathcal{M} \subseteq \mathbb{C}$ als $z = x + iy$ darstellbar $(x, y \in \mathbb{R})$

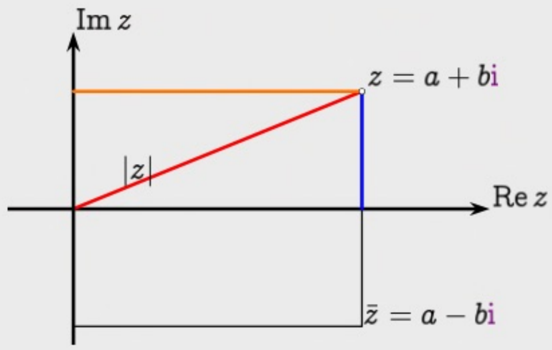
$$|z - i| = \left|z + \frac{\sqrt{3}+i}{2}\right| \Leftrightarrow |x + iy - i| = \left|x + iy + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right|$$

$$\overset{1.1\ \geq 0}{\Leftrightarrow} |x + (y-1)i|^2 = \left|\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(y + \frac{1}{2}\right)i\right|^2$$

1.7.8. Komplexe Konjugation, Betrag.

Für $z = a + bi \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

1. $\bar{z} := \overline{(a + bi)} := a - bi$
2. $|z| := \sqrt{z\,\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$



$z = x + iy$

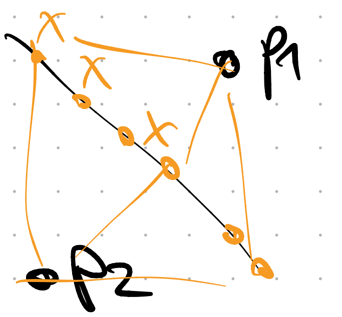
$$\overset{1.7.8}{\Leftrightarrow} x^2 + (y-1)^2 = \left(x + \sqrt{3}/2\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = \underset{0}{x^2} + \sqrt{3}x + \frac{3}{4} + \underset{0}{y^2} + \underset{3y}{y} + \underset{0}{\frac{1}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \sqrt{3}x + 3y$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x = -\frac{1}{\sqrt{3}}x}_{\text{Geradengleichung } (*)}$$

$|x - p_1| = |x - p_2|$



Geometrische Interpretation: Jedes $z = x + yi \in \mathcal{M}$ hat wegen

$|z - i| = \left|z + \frac{\sqrt{3}+i}{2}\right| = \left|z - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right|$ von i und $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

und liegt nach $(*)$ auf der Geraden $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$.

Einzeichnen mit PK / Wertetabelle:

Tab ↳

Werte der Winkelfunktionen

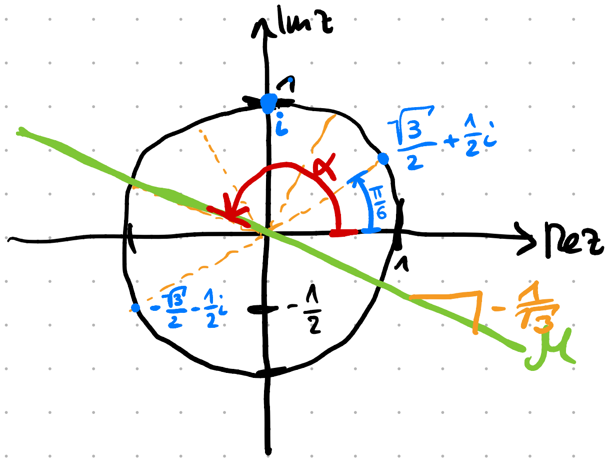
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

- $i = 0 + i \overset{\text{Tab}}{=} 1(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2))$
- $\left|-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right| \overset{1.7.8}{=} \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{0.5} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$
- $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \overset{\text{Tab}}{=} \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos(\pi + \pi/6) + i\sin(\pi + \pi/6)$$
$$= \cos(7\pi/6) + i\sin(7\pi/6)$$

$\varphi(i)$ $\quad$ $\varphi\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

⇝ Hilfswinkel zum Skizzieren: $\alpha = \underbrace{\frac{\pi/2 + 7\pi/6}{2}}_{\text{MW beider Winkel}} = \frac{5\pi}{6}$



Ist $\mathcal{M}$ ein $\mathbb{R}$ Untervektorraum von $\mathbb{C}$?

⇝ Wir verifizieren die Definition 2.3.4

Im eben geführten Beweis haben wir nicht die Vektorraumaxiome verifiziert [weil die im umgebenden Vektorraum $\mathbb{R}^2$ schon gelten], sondern uns nur vergewissert, dass die Operationen (Addition, Multiplikation mit Skalaren) nicht aus $\mathcal{L}$ herausführen. Dies ist ein allgemeines Prinzip:

2.3.4. Definition.

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt Untervektorraum (kurz UVR), wenn gilt:

- Mit $u, v \in U$ liegt auch $u + v$ in U.
- Mit $u \in U$ liegt für alle $s \in \mathbb{K}$ auch $s \cdot u$ in U.
- $0 \in U$.

2.3.5. Beispiel.

Der Lösungsraum des in 2.3.3 betrachteten homogenen linearen Gleichungssystems ist ein UVR von $\mathbb{R}^2$.

Teilmenge: $M \subseteq \mathbb{C}$ nach Definition ✓

Addition: Sei $u := x_1 + y_1 \cdot i$, $v = x_2 + y_2 i$ $\in M$

Geradengl. (*) von oben

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} y_1 &= -\frac{1}{\sqrt{3}} x_1 \\ y_2 &= -\frac{1}{\sqrt{3}} x_2 \end{aligned}\right\} + \Rightarrow \underbrace{(y_1+y_2)}_{\hat{y}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \underbrace{(x_1+x_2)}_{\hat{x}} \Rightarrow \text{Geradengl. gilt}$$

$(u+v) = \hat{x} + i \hat{y}$

$\Rightarrow u+v \in M$ ✓

Skalare Multiplikation: Sei $w := x + yi \in M$ und $s \in \mathbb{R}$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} y = -\frac{1}{\sqrt{3}} x \quad \Rightarrow \quad sy = -\frac{1}{\sqrt{3}} (sx)$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} sw = \underbrace{(sx)}_{\tilde{x}} + \underbrace{(sy)}_{\tilde{y}} i \in M \quad ✓$$

Nullelement muss drin: $0 = 0 + 0 \cdot i$ erfüllt $0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0 \Rightarrow 0 \in M$

$\Rightarrow M$ ist $\mathbb{R}$-VR von $\mathbb{C}$.