TODO
[O]: Evaluierung
[A]: PI, Stokes
[N]: Armijo, Wolfe, Trust Region

Globalübung 13
–WS21–

Lambert Theisen ①
19.01.2022

[O] https://www.campus.rwth-aachen.de/evasys/online.php?p=GFSPK → Evaluierung :-)

[A]

Partielle Integration: für Laplace-Op. (Folgerung von Gauß) $\begin{pmatrix} M \text{ offene Menge} \\ \text{mit st.weise glatten} \\ \text{Rand } \partial M \end{pmatrix}$, $u \in C^2(\bar{M})$, $v \in C^1(M)$

$$\int_M \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\partial M} v \, \nabla u \cdot \nu \, dS - \int_M v \, \Delta u \, dx$$

ÄN

$\Delta : f \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dots$

mit Laplace-Operator $\Delta u := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{(\partial x_k)^2}$ („Summe der 2ten Ableitungen")

→ Später sehr wichtig (Mathe 5)

⇝ HA

$$\begin{cases} \Delta T = f & \Omega \\ T = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

$T = 300K$ $\partial\Omega$

Nicht so wichtig

OK

300K

$$\int_\Omega \Delta T \, u = \int f u \quad \forall u \in V_h = \{ f \in L^2, \nabla f \in L^2, f|_{\partial\Omega} = 0 \}$$

$$\int \nabla T \cdot \nabla u + \int_{\partial\Omega} u \, \nabla T \cdot \nu = \int f u$$

Matrix Gleichung wenn $|V_h| < \infty$

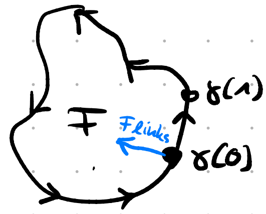
A

Satz von Stokes

Für stetig diffbares Vektorfeld f auf regulärer Fläche F gilt

rot f nur in 3D definiert.
$\tilde{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\int_F \operatorname{rot} f \cdot \nu \, ds = \int_\gamma f \cdot ds}$$



wobei γ parametrisiert Randkurve ∂F mit positiver Orientierung

("Fläche liegt links beim Durchlaufen von γ")

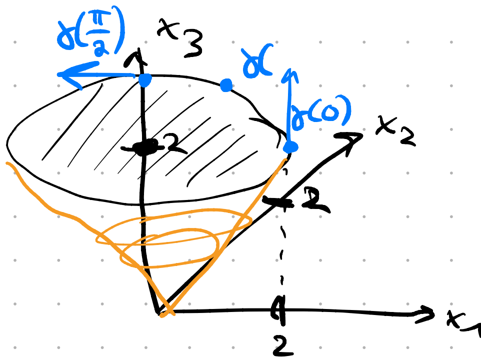
Beispiel: Sei $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_2 \\ -x_1 x_3 \\ x_2 x_3^2 \end{pmatrix}$ sowie die Fläche

$$F = \left\{ \underbrace{x_3 \geq \tfrac{1}{2}(x_2^2 + x_1^2)}_{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2 = R} \wedge x_3 = 2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}. \text{ Verifiziere Stokes.}$$

$x_3 = 2 \geq \frac{1}{2}(x_2^2 + x_1^2)$ F

$\Leftrightarrow$ $4 \geq x_2^2 + x_1^2$

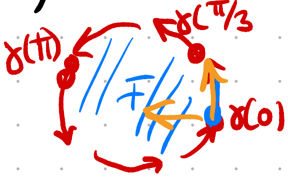
$2 \geq \sqrt{x_2^2 + x_1^2} = \left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|_2$



I) Berechne RHS: $\int_\gamma f \cdot ds$

Randkurve $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ 2 \end{pmatrix}, \; t \in [0, 2\pi]$

ist "positiv orientiert" ✓



Daher $\int_\gamma f \cdot ds = \int_0^{2\pi} \langle f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt$

Güzo: Arbeitsintegral

mit $\gamma'(t) = \begin{bmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{bmatrix}$, $f(\gamma(t)) = \begin{bmatrix} 6 \cdot \sin(t) \\ -4\cos(t) \\ 4\sin(t)\cos^2(t) \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \int_{\delta} f \cdot ds = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{bmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6\sin(t) \\ -4\cos(t) \\ 4\sin(t)\cos^2(t) \end{bmatrix} \right\rangle dt$$

RHS Stokes

$$= \int_0^{2\pi} \left[-12\sin^2(t) - 8\cos^2(t) \right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-12\left(1-\cos^2(t)\right) - 8\cos^2(t) \right]$$

$$= -12 \int_0^{2\pi} 1\, dt + 4 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2(t)}_{\pi} = -24\pi + 4 \cdot \pi = -20\pi$$

II) LHS : $\int_F \operatorname{rot} f \bullet \nu \, ds$

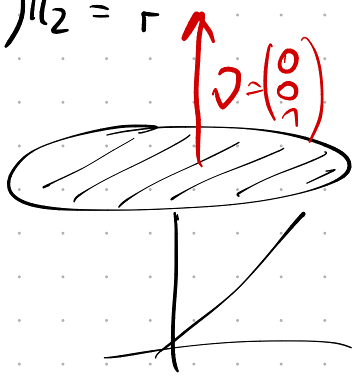
$$\nabla \times f = \begin{bmatrix} \partial_{x_2} f_3 - \partial_{x_3} f_2 \\ \partial_{x_3} f_1 - \partial_{x_1} f_3 \\ \partial_{x_1} f_2 - \partial_{x_2} f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3^2 - (-x_1) \\ 0 - 0 \\ -x_3 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_3^2 \\ 0 \\ -x_3 - 3 \end{bmatrix}$$

Fläche F : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi) = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad 0 \leq r \leq 2$, $\quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$\Rightarrow \|\nu\|_2 = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right\|_2$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi \end{pmatrix} \right\|_2 = r$$

$$\Rightarrow \nu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left(= \frac{\partial\Phi/\partial r \times \partial\Phi/\partial\varphi}{\|\partial\Phi/\partial r \times \partial\Phi/\partial r\|_2} \right)$$



$$\Rightarrow \int_F \operatorname{rot} f \bullet \nu \, ds = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (\operatorname{rot} f)(\Phi(r,\varphi)) \bullet \nu \, d\varphi \, dr$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} r\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi \\ 0 \\ -3-2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\varphi \, dr$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} -5 \, d\varphi \, dr = \int_0^2 -10\pi \, dr = -20\pi$$

Stokes verifiziert weil LHS = RHS .

HA c) = 2x b) benutzen

N. **Recap:** Line Search Methods (GD, Newton, ...) mit Schrittweite α_k.

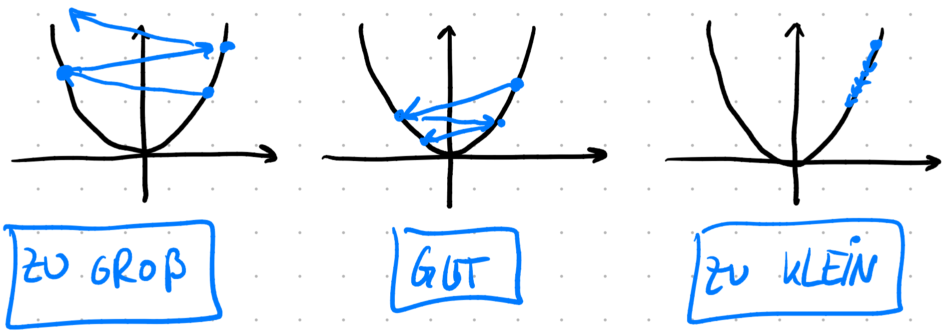
Schrittweiten-Wahl: → Wir haben letzte Woche im Julia NB gesehen, dass die Wahl von α_k entscheidend ist für:

I) Konvergenz

II) Schnelligkeit der Konvergenz

Daher stellt sich die Frage: "Wie wählt man das α_k?"

Trial-And-Error:



⇝ Wir brauchen etwas besseres.

Stepsize Control Algorithmus

- Given $x^{(k)}$, $\alpha_{max} > 0$, Shrinking factor $\beta \in (0,1)$
- Init: $\alpha = \alpha_{max}$
- While !CONDITION(α_k) do
  - $\alpha_k \longleftarrow \beta \cdot \alpha_{k-1}$ (Decrease stepsize)
- end

→ Backtracking Algorithm $\hat{=}$ Stepsize Control mit Armijo Bedingung:

Armijo-Bedingung:

Für $c_1 \in (0,1)$, wähle $\alpha_k > 0$ sodass:

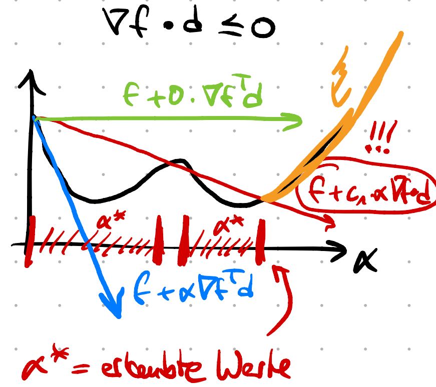
$$\boxed{f(x^k + \alpha_k d^{(k)}) \leq f(x^{(k)}) + \underbrace{c_1}_{>0} \cdot \underbrace{\alpha_k}_{>0} \cdot \underbrace{\nabla f(x^{(k)})^T d^{(k)}}_{\leq 0}}$$

⇒ Strenger als "nur $\nabla f \cdot d \leq 0$"

⇒ Verbietet zu große Schritte

⇒ Problem: Sehr kleine Schritte sind erlaubt.

Daher: Krümmungsbedingung



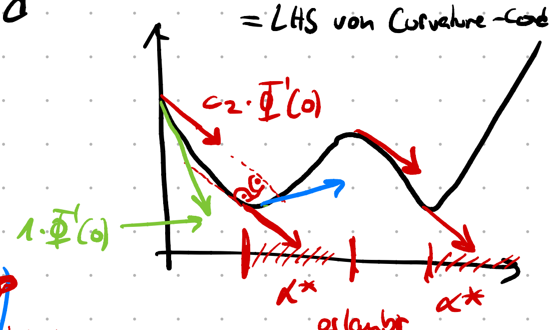
Curvature-Bedingung:

Für $c_2 \in (0,1)$, wähle $\alpha_k > 0$ sodass:

$$\nabla f(x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)})^T d^{(k)} \geq c_2 \nabla f(x^{(k)})^T d^{(k)}$$

$\Phi(a) = f(x^{(k)} + \alpha d^{(k)})$
= LHS von Curvature-Cond

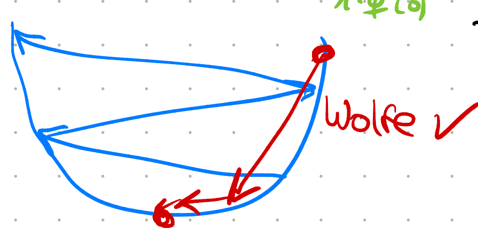
→ Verbietet zu kurze Schrittweiten.



Wolfe Bedingungen:

I) Armijo Bedingung

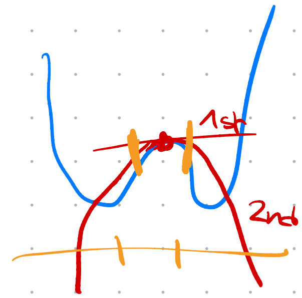
II) Krümmungsbedingung



Mit Wolfe Bedingungen: $\lim_{k \to \infty} \| \nabla f(x^{(k)}) \| = 0$ (Konvergenz zu einem stationären Punkt)

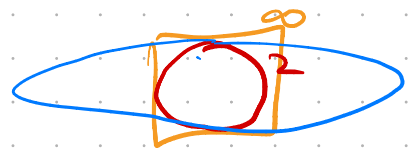
Trust-Region Methods:

- **Problem**: Stationärer Punkt kann auch Sattelpunkt sein
  ⇝ Das wollen wir nicht! (siehe Bsp aus VL + SELF12) Julia



- **Idea**: Minimiere "lokal" im D_k mit einer Approximation von f (zB. 2nd Order Taylor)
- **Folge**: So können wir auch Sattelpunkten "entkommen"

Algorithm:



- Given $x^{(k)}$
- Replace f by $\hat{f}$ (approximation), e.g.

$$\hat{f}(x) = f(x^{(k)}) + (x - x^{(k)})^T \nabla f(x^{(k)}) + \frac{1}{2}(x - x^{(k)})^T \nabla^2 f(x^{(k)})(x - x^{(k)})$$

- Für eine Trust Region $D_k := \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^{(k)}\| \leq \delta \}$ mit $\delta > 0$, löse:

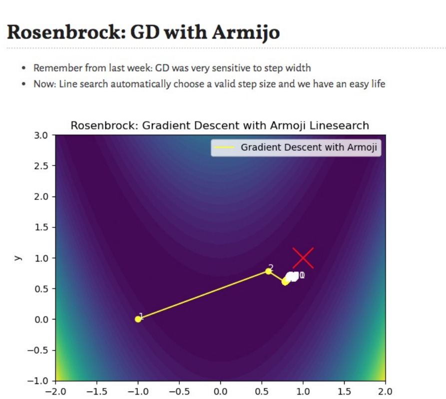
$$\hat{x} = \underset{x \in D_k}{\arg\min}\ \hat{f}(x)$$

- Teste Verbesserung: $\rho = \dfrac{\text{actual improve}}{\text{predicted improve}} = \dfrac{f(x^{(k)}) - f(\hat{x})}{\underbrace{f(x^{(k)})}_{= \hat{f}(x^{(k)})} - \hat{f}(\hat{x})}$

- Wenn $\rho \approx 1$, setze $x^{(k+1)} = \hat{x}$
- Falls nicht: Verkleinere trust region: $\delta \longleftarrow \beta \cdot \delta$ $(\beta \in (0,1))$

Demo:

Line Search GD



Trust-Region Methods