TODO [O]: Fragestunde
[A]: Wdh. Lebesgue 2x Klausuraufgaben
[N]: Penalty, Barrier, LPs

Globalübung 14
Mathe 3 – WS20

10.02.21
Lambert Theisen

1

[O]: – Fragestunde 15.03.21 15:00 (Zoom)

↳ Themen vorab per Mail oder Moodle Forum

– HiWi SS21 Mathe 2 : Bei Interesse : Mail an uns ! :-)

$8\frac{h}{w}$ 11€ Googlen
→ Gehalt über Mindest

[N]: **Framework**:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{s.t.} \begin{cases} h(x) = 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases} \iff x \in \mathcal{X}$$

Problem: Constrained Min. ist "schwieriger" als Unconstrained Min.

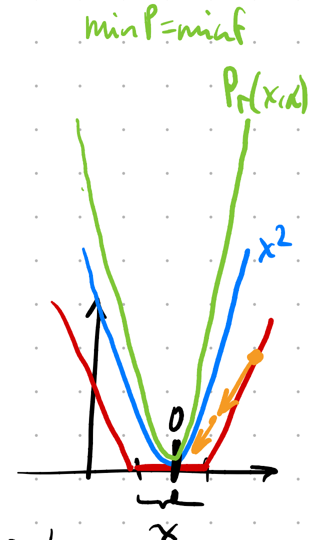
Penalty Methods: Benutze $P_r(x,\alpha) = f(x) + \alpha r(x)$ $\quad \alpha > 0,\ \alpha\in\mathbb{R}$ sodass

$$\min_{x\in\mathcal{X}} f(x) \approx \min_{x\in\mathbb{R}^n} P_r(x,\alpha)$$

→ **Penalty Function**: $r: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist stetig, ≥ 0, $= 0$ in $\mathcal{X}$

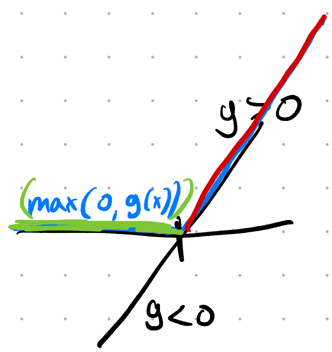
→ **Exaktheit**: P_r ist exakt falls: bei $x^* = \operatorname{argmin}_{x\in\mathcal{X}} f$ $\exists\, \hat{\alpha} > 0$ sodass

$$x^* = \operatorname{argmin}_{x\in\mathbb{R}^n} P_r(x,\alpha) \text{ für ein } \alpha \geq \hat{\alpha}$$



Beispiele: **1-Power Exterior Penalty** (exakt)

$$r_1(x) := \sum_{i=1}^{q} \left(|h_i(x)|\right)^1 + \sum_{j=1}^{m} \left(|\max(0, g_j(x))|\right)^1$$



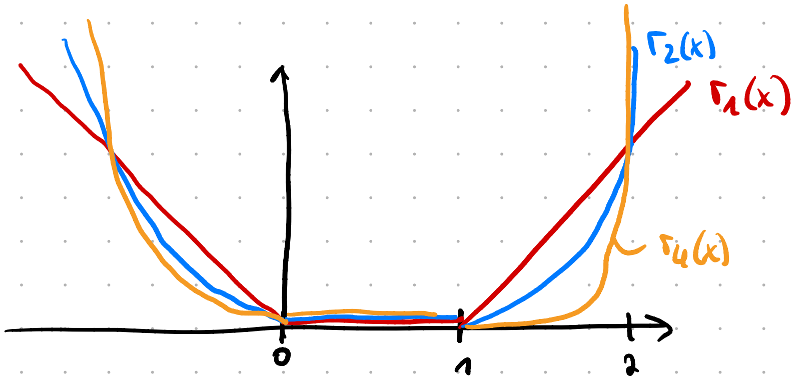
P-Power Exterior Penalty

$$f(x) + \alpha \cdot r_p(x) := \sum_{i=1}^{q} |h_i(p)|^p + \sum_{j=1}^{m} \left(|\max(0, g_j(x))|\right)^p \qquad p \geq 1$$

P-Norm Exterior Penalty

$$r_{\|\cdot\|_p}(x) := \left(r_p(x)\right)^{1/p}$$

Visualisierung: zB $\mathcal{X} = \{ x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{x-1 \le 0}_{g_1(x)} \;\wedge\; \underbrace{-x \le 0}_{g_2(x)} \}$ $\quad 0 \le x \le 1$



Problem: Differenzierbarkeit ist nicht immer gegeben, siehe oben bei $r_1(1)$.

↳ Braucht man aber oft für zB. Gradient (∇f) oder Newton ($\nabla^2 f$) Methoden.

⇝ Julia Demo

Barrier Methods: Benutze **Barrier Funktion**: $B(x,\beta) := f(x) + \beta I(x)$, $\beta > 0$

mit **Interior Funktion $I(x)$**:
I) $I(x) < \infty \quad \forall x \in \operatorname{int}(\mathcal{X})$
II) $I(x) = \infty \quad \forall x \in \partial\mathcal{X} \cup (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{X})$

Beispiele: (für $g \ge 0$ jetzt!) $\Leftrightarrow -g \le 0$

Inverse "Innen" funktion:
$$I_{inv}(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^m \frac{1}{g_i(x)} & , x \in \operatorname{int}(\mathcal{X}) \\ \infty & , \text{else} \end{cases}$$

Logarithmische Innenfunktion
$$I_{log}(x) := \begin{cases} \sum_{i=1}^m -\log(g_i(x)) & , x \in \operatorname{int}(\mathcal{X}) \\ \infty & , \text{else} \end{cases}$$

Anwendung Barriere Methoden:

→ Löse $x^{(k+1)} = \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}}\; B(x, \beta_k)$ mit $(\beta_k > \beta_{k+1} > \dots) \wedge (\beta_k \to 0)$

sodass $\lim\limits_{k\to\infty} B(x, \beta_k) \overset{(\text{Linearität})}{=} f(x) + \underbrace{\left(\lim\limits_{k\to\infty} \beta_k\right) I(x)}_{\to 0} = f(x)$ $\quad x \in \operatorname{Int}(\mathcal{X})$

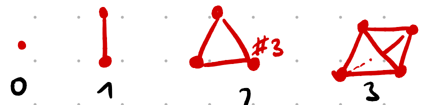
Linear Programming (LP): $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} c^T x$ s.t. $\begin{cases} Ax = b \\ x \ge 0 \end{cases}$ (**Standard Form**)

$x \in \mathbb{Z}^n$ (integer LP)

↳ $h(x) = Ax - b$, $g(x) = x$, $f(x) = c^T x$

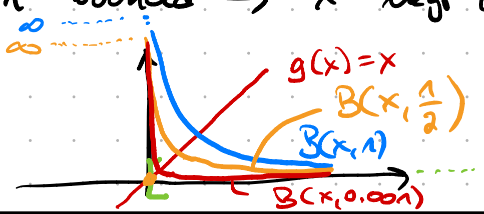
oder **kanonisch**: $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} c^T x$ s.t. $\{ Ax \ge b$

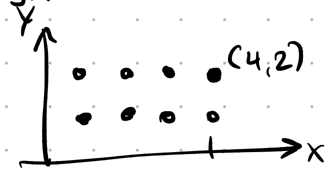
Eigenschaften von LPs:



→ Feasability Region ist Polytop (Punkt, Strecke, Polygon, Polyeder, ...), der auch unbeschränkt sein kann

→ Falls $\mathcal{X}$ bounded ⇒ x^* liegt auf Eckpunkt („Eckpunkt-Checker ⇝ Algorithmus")





A Wdh.: Lebesgue

Beispiel-Aufgabe #1

Aufgabe 2.
Gegeben sei $\Omega =]0,1[$ sowie die Funktionen

$$f : \Omega \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$g : \Omega \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \exp(-x).$$

(a) Ist g Lebesgue-messbar? Ist g Lebesgue-integrierbar? ⟺ $\int |g| < \infty$

(b) Geben Sie eine Funktion h an mit $f \neq h$ und $h \sim f$ bzgl. der Äquivalenzrelation
$$u \sim v \Leftrightarrow u = v \quad \text{fast überall auf } \Omega.$$

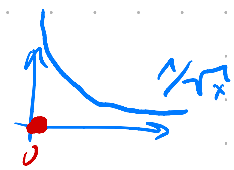
(c) Zeigen Sie dass
(i) $f \in L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < 2$,
(ii) $g \in L^q(\Omega)$ für $1 \leq q \leq \infty$.

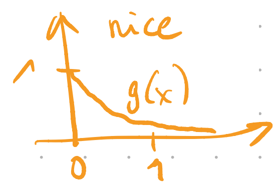
(d) Folgern Sie aus (c) dass $f \cdot g \in L^1(\Omega)$.

WS19

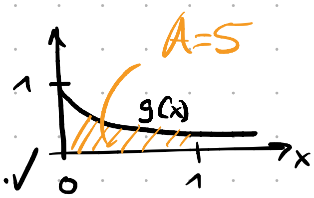
// (0,1)

$f \in L^p(\Omega)$ ⟺ $\left(\int_\Omega |f|^p\right)^{1/p} < \infty$



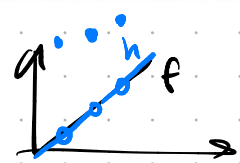


a) g ist stetig
⇒ g ist L-messbar. ✓



$$\int_0^1 g(x)\,dx = \left[-\exp(-x)\right]_0^1 = 1 - \exp(-1) < \infty$$

⇒ g ist L-int'bar. ✓

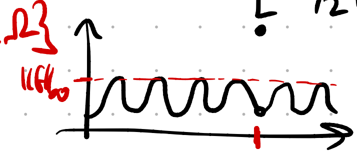


b) $h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{sonst} \\ 42, & x = \frac{1}{2} \end{cases}$ ist fast überall (bis auf Nullmenge) gleich f.

c) I) $\int_0^1 |f|^p\,dx = \int_0^1 \left|\frac{1}{\sqrt{x}}\right|^p dx = \int_0^1 x^{-p/2} = \left[\frac{1}{-p/2+1} \cdot x^{-p/2+1}\right]_0^1 < \infty$ für $p<2$

$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \min\{C \in \mathbb{R} \mid |f(x)| \leq C \text{ a.e. } x \in \Omega\}$

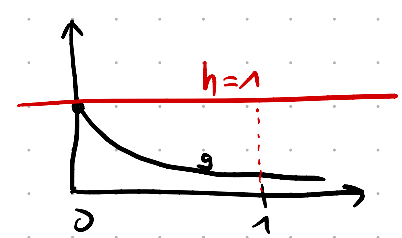
⇒ $f \in L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < 2$.



für $2 > p$

II) g ist durch $h(x) = 1$ nach oben beschränkt.

⇒ $\int_0^1 |g|^p\,dx \leq \int_0^1 1^p\,dx = 1 < \infty$



⇒ $g \in L^p(\Omega)$ mit $1 \leq p \leq \infty$

Je größer p, desto "schöner" ist Fkt. ⇝ einfacher, mehr Regularität, Glattheit

d) $f \in L^{3/2}(\Omega)$ und $g \in L^3(\Omega)$ und $\quad \frac{1}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$

($p = 3/2$, $q = 3$) $\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1}$

⇒ Hölder-Ungl.: $\|f \cdot g\|_1^2 \leq \underbrace{\|f\|_{L^{3/2}}}_{<\infty \text{ per Def.}}^2 \cdot \|g\|_{L^3}^2 < \infty \Rightarrow (f \cdot g) \in L^1(\Omega)$

$< \infty$ per Def. denn $f \in L^{3/2}$ ⟺ $\int |f|^{3/2} < \infty$ ⟺ $\left(\int |f|^p\right)^{1/p}$

Aufgabe 1.
Sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} (n/\sqrt{x})\sin(x/n), & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\{f_n\} \subset L^1([0,1])$.

(b) Die Folge $\{f_n\}$ konvergiert gegen die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ im Sinne der a.e. punktweisen Konvergenz und der

(c) gleichmäßigen Konvergenz.

(d) Die Funktionenfolge $\{f_n\}$ konvergiert gegen f in $L^1([0,1])$.

Hinweis:

- $|\sin(t)| \leq |t|$.
- $\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$.

WS18

Beispiel-Aufgabe #2:

a) $\int_0^1 |f_n(x)|\,dx = \int_0^1 \left|\frac{n}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{x}{n}\right)\right| dx$

$$\overset{\text{Tipp1 } t = x/n}{\leq} \int_0^1 \left|\frac{n}{\sqrt{x}} \; \frac{x}{n}\right| dx = \int_0^1 \sqrt{x} = \frac{2}{3} < \infty$$

$\Rightarrow f_n \in L^1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$,

b) Fast überall punktweise:

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - \sqrt{x}| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{x}{n}\right) - \sqrt{x}\right|$$

$$= \sqrt{x} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{x}\sin\left(\frac{x}{n}\right) - 1\right| \overset{\boxed{\text{Tipp2 mit } t = x/n}}{=} \sqrt{x} \cdot |1 - 1| = 0$$

c) gleichmäßige Konvergenz

Trick: Taylor mit Restterm: $\frac{n}{x}\sin\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{n}{x}\left(\frac{x}{n}\overset{\cos(0)}{\sin'(0)} + \frac{1}{3!}\left(\frac{x}{n}\right)^3 \sin'''(\xi)\right)$, $\xi \in \left[0, \frac{x}{n}\right]$

$$\Rightarrow |f_n(x) - \sqrt{x}| = \sqrt{x}\left|\frac{n}{x}\sin\left(\frac{x}{n}\right) - 1\right| = \sqrt{x}\left|\frac{n}{x}\left(\frac{x}{n}\underbrace{\sin'(0)}_{=1} + \frac{1}{6}\left(\frac{x}{n}\right)^3 \sin'''(\xi)\right) - 1\right|$$

$$= \sqrt{x}\left|\frac{n}{x}\frac{1}{6}\left(\frac{x}{n}\right)^3 \cdot \cos(\xi)\right|$$

$$\overset{\cos \in [-1,1]}{\leq} \sqrt{x}\left|\frac{1}{6}\frac{x^2}{n^2}\right| \overset{x \in [0,1]}{\leq} \sqrt{1}\left|\frac{1 \cdot 1^2}{6n^2}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{6n^2}\right|$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - \sqrt{x}| \leq \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{6n^2}\right| = 0$$

↑ gleichm. Konvergenz

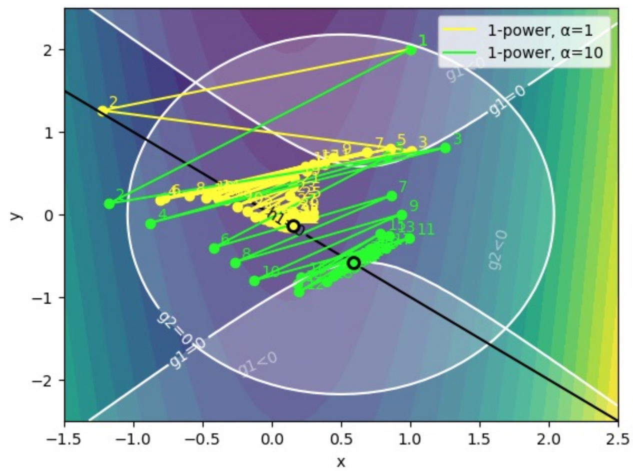
d) Konvergenz in $L^1(0,1)$:

$$\|f_n - \sqrt{x}\|_{L^1} = \int_0^1 |f_n(x) - \sqrt{x}|\,dx \overset{c)}{\leq} \left|\frac{1}{6n^2}\right| \int_0^1 1 \cdot dx = \left|\frac{1}{6n^2}\right| \to 0$$

Demo: Penalty Method

Solve and Visualize Convergence History

steps = 50, penalty = ☐, αp = 1




```
visualize([
        gradient_descent_wolfe(x->P(x, p, 1, 1), [1,2], steps)[2],
        gradient_descent_wolfe(x->P(x, p, 10, 1), [1,2], steps)[2],
], p, legend = ["1-power, α=1", "1-power, α=10"],
    showotherfunction = if penalty x->P(x, p, αp, 1) else nothing end
)
```