$\boxed{O}$: Fragen? DO 11.12.25 16:30 möge? Probeklausur
$\boxed{A}$: Komplexe Zahlen, Polynomdiv, Einheitswurzeln
$\boxed{LA}$: Basis, Span, Gram-Schmidt, Orthonormalbasen

Globalübung 5
Mathe 1 – WS25

14.11.2025
Lambert Theisen

①

$\boxed{A}$ Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$:

$\mathbb{C} \ni z = a + i\cdot b \quad (a,b\in\mathbb{R})$ $\quad$ $\mathrm{Im}(z)=b$ $\quad$ „$x^2+1=0$ lösbar"

Realteil $\mathrm{Re}(z)=a$ $\quad$ Imaginäre Einheit i, $\boxed{i^2=-1}$

Körperregeln (siehe VL):

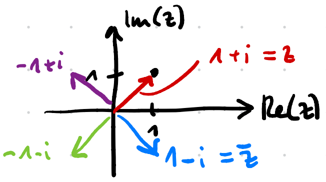
① $z_1+z_2 = \underbrace{(a_1+ib_1)}_{z_1} + \underbrace{(a_2+ib_2)}_{z_2} = (a_1+a_2)+i(b_1+b_2) \in \mathbb{C}$

② $z_1\cdot z_2 = (a_1+ib_1)\cdot(a_2+ib_2) = a_1a_2 + i(b_1a_2+a_1b_2) + i^2 b_1b_2$ $\quad \boxed{i^2=-1}$

$= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(b_1a_2+a_1b_2) \in \mathbb{C}$

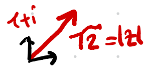
→ Multipl. Inverse: $z\cdot z^{-1} = \left[a+ib\right]\cdot\left[\frac{a}{a^2+b^2} + i\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)\right] \overset{(\dots)}{=} 1 + i0$ ✓

→ Gaußsche Zahlenebene:



→ Komplex konjugiert $\bar{z} = \overline{(a+ib)} := a - ib$

→ Betrag $|z| := \sqrt{z\cdot\bar{z}} \overset{(\dots)}{=} \sqrt{a^2+b^2}$



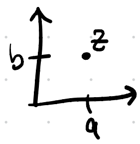
Tipps & Tricks:

① Löse $x^2 - 2x + 5 = 0$ $\quad$ (p, q) $\quad$ $\sqrt{-4} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}$

⇝ pq-Formel $\quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm 2\sqrt{-1} = 1 \pm 2i$

② $i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i} = \frac{i}{-1} = -i$

③ Zeichne $\frac{a+bi}{c+di}$ in Komplexer Zahlenebene. Problem: Wir brauchen Form $z = a+ib$



⇒ Mache Nenner reel durch Erweiterung des Komplex Konjugierten des Nenners. ✓

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di}\cdot 1 = \frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di} = \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{\underbrace{c^2+d^2}_{\in\mathbb{R}\,✓}} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + i\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$

⇝ Beweis $\quad z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\cdot\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{z_2\cdot\bar{z}_2} \overset{\text{Def}}{=} \frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{\underbrace{|z_2|^2}_{\in\mathbb{R}}}$

Bsp)

Aufgabe 1. (Komplexe Zahlen)
Berechnen Sie Betrag, Real- und Imaginärteil und jeweils die komplex Konjugierte der folgenden komplexen Zahlen:

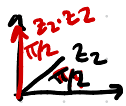
a) $z_1 = \frac{i(2i+2)}{5+i}$,

b) $z_2 = (i+1)^{16}$.

a) $z_1 = \frac{i(2i+2)}{5+i}\cdot\frac{5-i}{5-i} \underset{i^2=-1}{=} \frac{(2i-2)\cdot(5-i)}{25+1} = \frac{-8+12i}{26} = \underbrace{-\frac{4}{13}}_{\mathrm{Re}(z_1)} + \underbrace{\frac{6}{13}}_{\mathrm{Im}(z_1)}i \Rightarrow \bar{z}_1 = -\frac{4}{13} - \frac{6}{13}i$, $\quad |z_1| = \sqrt{\left(\frac{4}{13}\right)^2 + \left(\frac{6}{13}\right)^2} \overset{(\dots)}{=} \frac{2}{\sqrt{13}}$

b) $z_2 = \left((i+1)^2\right)^8 = (\underbrace{i^2+2i+1}_{i^2+1=0})^8 = (2i)^8 = (4i^2)^4 = (-4)^4 = \underbrace{256}_{\mathrm{Re}(z_2)} \Rightarrow \mathrm{Im}(z_2) = 0$

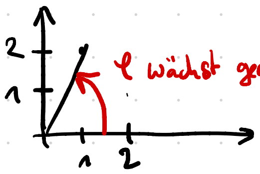
$|z_2| = 256$ easy weil $b=0$



→ $(i+1)^{16}$ war noch okay, aber was wäre mit $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{137}$?

Polarkoordinaten: $z = a+ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$ mit $r = |z|$, $\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{b}{a}$ $\in [0, 2\pi)$

$[0, 2\pi)$



φ wächst gegen Uhrzeigersinn

$z = 1+i = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\pi/4\right) + i\sin\left(\pi/4\right)\right)$

$\frac{\pi}{4} = \operatorname{atan}\left(\frac{b}{a}\frac{1}{1}\right) \approx 0.785 = \frac{0.785}{\pi}\pi = 0.25\pi = \frac{\pi}{4}$

→ Vorteil: Multiplikation easy : $z_1 \cdot z_2 = (r_1\cdot r_2)\cdot\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$ [Drehung!!]

Moivre Formel: Sei $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Dann $z^n = r^n\left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right)$ für $n \in \mathbb{N}$

Polynome: $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1\cdot x + \ldots + a_n\cdot x^n$ hat n (evtl. mehrfache) NS in $\mathbb{C}$ $(n \geq 1)$

Nullstelle x $\Leftrightarrow p(x) = 0$

→ $p(x) = \underset{\text{NS}_1}{(x-x_1)}\cdot\underset{\text{NS}_2}{(x-x_2)}\cdot \ldots \cdot (x-x_n)$ [Produkt aus Linearfaktoren]

Bsp Polynomdivision

c) Das Polynom $p(x) := 2x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 16x - 64$ hat die Nullstellen $x = -2$ und $x = 4$. Ermitteln Sie alle weiteren Nullstellen von p in $\mathbb{C}$.

Grad ≠ 2, pq-Formel ↯

Wir suchen ein q mit $q(x)\cdot\underbrace{(x-(-2))}_{x+2}\cdot(x-4) \overset{!}{=} p(x) \Leftrightarrow q(x) = \frac{p(x)}{(x+2)(x-4)}$ ("Division")

Danach NS von q easy.

$$2x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 16x - 64 : (x+2) = 2x^3 - 8x^2 + 8x - 32 \cdot (x+2) = \ldots = p(x)$$

$-(2x^4 + 4x^3)$ ↓ move down

$0x^4 - 8x^3 - 8x^2$

$-(-8x^3 - 16x^2)$

$+8x^2 - 16x$

$-(8x^2 + 16x)$

$-32x - 64$

$-(32x - 64)$

0 ✓

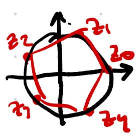
Danach analog $2x^3 - 8x^2 + 8x - 32 : x-4 \overset{(\ldots)}{=} 2x^2 + 8$

$\Rightarrow$ Letztlich $p(x) = (2x^2+8)(x+2)(x-4) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow 2x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4$

$x_{1,2} = \pm 2\sqrt{-1} = \pm 2i$ ← NS 3 & 4 von p

Einheitswurzeln: $p(z) = z^n - 1$ für $n \geq 1$ hat genau n NS z_k $(k = 0, \ldots, n-1)$ mit $|z_k| = 1$



regelm. 5-Eck

und $z_k = \cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(k\frac{2\pi}{n}\right)i$ (EHWs) (⇝ Beweis VL)

⇝ Wer weiß "intuitiv" warum? (Tipp: Drehung)

$\Rightarrow$ Im allgemeinen $z^n - w \overset{!}{=} 0$ mit $z, w \in \mathbb{C}$ (siehe VL)

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\right)$$

r ist von w, φ ebenfalls

Bsp: Welche z lösen $z^3 = (1-i)^6$

b) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z für die gilt

$$z^3 = (1-i)^6. \quad \Leftrightarrow z^3 - w = 0$$

Geben Sie für jede Lösung sowohl den Betrag $|z|$ und Argument ϕ aus dem Interval $[0, 2\pi)$ als auch Real- und Imaginärteil an und zeichnen Sie alle Lösungen in der komplexen Zahlenebene ein.

Hinweis: $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

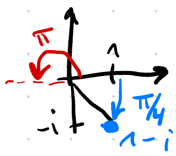
2 Punkte

Zuerst RHS $(1-i)^6$ in PK

$$r = \left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^6 = (\sqrt{2})^6 = 2^3 = 8$$

$$\phi = 6 \cdot \left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 6 \cdot \frac{7}{4}\pi$$



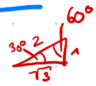
$$= \frac{42}{4}\pi = \frac{21}{4}(2\pi) = \left(5 + \frac{1}{4}\right) 2\pi \Rightarrow \phi = \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$$

Winkel im Gradmass	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Winkel im Bogenmass	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
Cosinus $\frac{\sqrt{4}}{2} =$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
Tangens	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0

$$\Rightarrow z_k \overset{\text{s.o.}}{=} \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\underbrace{\frac{\phi}{n} + k\frac{2\pi}{n}}\right) + i\sin\left(\frac{\phi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)\right)$$

$$=: \phi_k \overset{\boxed{n=3}}{=} \frac{\pi/2}{3} + k\frac{2\pi}{3} = \frac{1+4k}{6} \cdot \pi$$

$$\sqrt[3]{8} = 2$$



Magic Dreieck

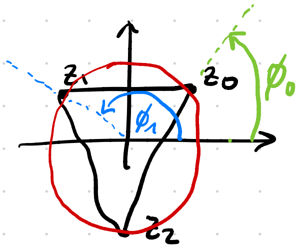
Merken! (Oder Zettel)

Also

$$z_0 = 2\left(\cos\left(\overbrace{\frac{1+4\cdot 0}{6} \cdot \pi}^{\pi/6}\right) + i\sin\left(\frac{1+4\cdot 0}{6} \cdot \pi\right)\right) \overset{\text{Tab.}}{=} 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = 2\left(\cos\left(\underbrace{\frac{1+4\cdot 1}{6}\pi}_{5/6\,\pi}\right) + i\sin\left(\frac{1+4\cdot 1}{6} \cdot \pi\right)\right) \overset{(..)}{=} \sqrt{3} - i$$

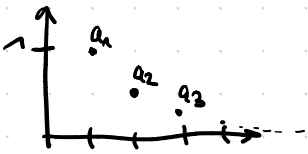
$$z_2 = 2\left(\cos\left(\underbrace{\frac{1+4\cdot 2}{6}}_{\frac{3\pi}{2}}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1+4\cdot 2}{6}\pi\right)\right) \overset{(..)}{=} -2i$$



Folgen: Fragen?

$$a_n := \frac{1}{n}$$

n	a_n
1	1
2	1/2
3	1/3
⋮	⋮



Basis: Teilmenge $B = \{x_1, x_2, \dots x_n\} \subset V$ (VR) ist Basis wenn

I) Alle Elemente von B lin. unabh. $\leadsto$ Dimension $|B| :=$ "Anzahl Basisvektoren"

II) $\forall x \subset V : x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ (jedes x ist Linearkombination aus Basisvektoren)

Linearkombination: $y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \in V$ $\alpha \in \mathbb{K}$

mit $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ Basis von V. zB $V = \mathbb{R}^2$

("Erzeugnis") $\hat{=}$ **Span**: Menge aller Linkomb.: $\text{span}(\{x_1 \dots x_n\}) := \{x \in V : x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \alpha_i \in \mathbb{K}\}$

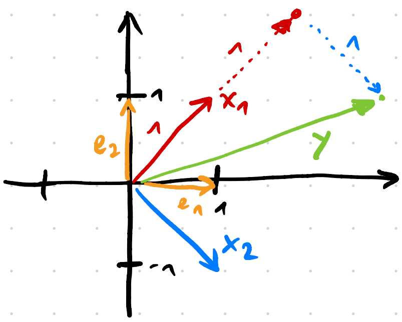
→ **Beispiel**: $x_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. $B_1 := \{x_1, x_2\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^2$

denn $\alpha \cdot x_1 + \beta x_2 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha, \beta = 0$ ("Nullvektor nur trivial darstellbar", "Auslöschung nicht möglich")

gilt (linear unabh.).

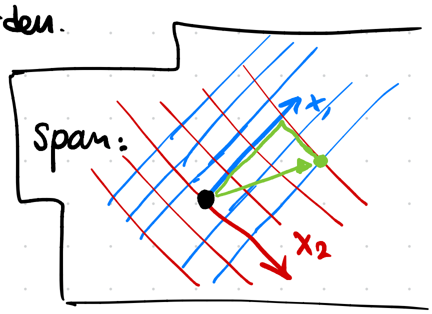
$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\}$ keine Basis des $\mathbb{R}^2$ → weil $2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathbb{R}^2 = \text{span}\{x_1, x_2\} \Leftrightarrow$ Jeder Vektor $y \in \mathbb{R}^2$ kann als Lin. komb. von x_1 & x_2 dargestellt werden.



$$\boxed{y = 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2}$$

$$\boxed{\text{vs. } y = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow y = 3e_1 + 1e_2}$$



Dimension von Erzeugnis = max. Anzahl lin. unabh. Elemente:

1) $\dim\left(\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}\right) = 2 \neq 3$ denn $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ (l.a.).

2) $\dim\left(\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}\right) = 2 \neq 3$ denn $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

3) $\dim\left(\text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}\right) = 0$ denn $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ist lin. abh. weil $\alpha \cdot \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

4) $\dim\left(\text{span}\left\{\underbrace{x_1, \dots, x_{n-1}}_{x_i \in \mathbb{R}^n}, \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\right\}\right) < n$ denn x_i ist lin. abh. zu $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $\forall i$

Bsp.: Stellen Sie $y = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ in der Basis $B = \{b_1, b_2\}$ dar als:

$y = \gamma \cdot b_1 + \delta \cdot b_2$ wobei $b_1 = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

$\leadsto y \stackrel{!}{=} \gamma \cdot b_1 + \delta \cdot b_2$ mit $\langle b_1, b_2 \rangle \neq 0$

$= \gamma \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + \delta \cdot \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \cdot \gamma + 1 \cdot \delta = 2 \\ -1 \cdot \gamma + 3 \cdot \delta = 3 \end{cases} \stackrel{\text{LGS}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{1}{2}}$ $\boxed{\gamma = -\frac{3}{2}}$

... Nützlich für Basiswechsel

Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_m\} \subset V$ falls:

1) $\mathcal{B}$ ist Basis von V
2) Orthogonalität: $\langle x_i, x_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$
3) Normalität: $\|x_i\|_2 := \sqrt{\langle x_i, x_i \rangle} = 1$

$\Big\}$ Orthonormalität: $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

"Kronecker-Delta"

Linearkombination in ONB

kein LGS zu lösen!

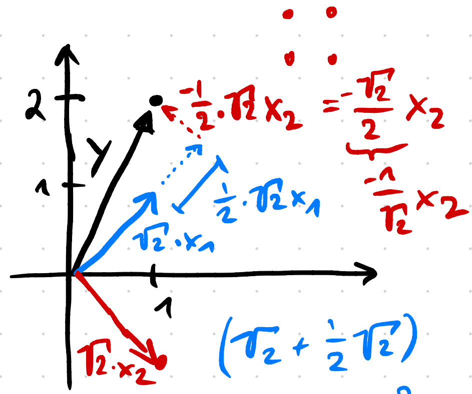
$$y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \in V \quad \text{mit} \quad \alpha_k = \langle y, x_k \rangle \quad \left(\alpha_k = \frac{\langle y, x_k \rangle}{\langle x_k, x_k \rangle} \text{ für "nur" ortho}\right)$$

→ Bsp: $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} =: y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \quad \text{mit}$$

$$\alpha_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(3) = 3/\sqrt{2}$$

$$\alpha_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1) = -1/\sqrt{2}$$



$$\left(\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Gram-Schmidt Orthogonalisierung:

Jede Menge $B = \{x_1, \dots, x_m\} \subset V$ lin. unabh. Vektoren lässt sich zu einem ON-System $B' = \{y_1, \dots, y_m\} \subset V$ umwandeln, sodass

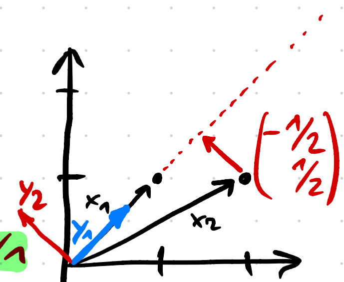
$$\operatorname{span}(B) = \operatorname{span}(B').$$

→ Algorithmus für $B = \{x_1, \dots, x_m\}$

1) $y_1 = x_1 / \|x_1\|$
2) Für $i = 2 \dots m$:
   $\tilde{y}_i = x_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle x_i, y_j \rangle y_j$
   $y_i = \tilde{y}_i / \|\tilde{y}_i\|$
3) $B' = \{y_1, \dots, y_m\}$ ist ONB

→ Beispiel: $B = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$

1) $y_1 = x_1/\|x_1\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$



2) $\tilde{y}_2 = x_2 - \langle x_2, y_1 \rangle y_1$
$= \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\cdot 3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\end{pmatrix}$

$y_2 = \tilde{y}_2/\|\tilde{y}_2\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \tilde{y}_2$

Bsp) (6)

Aufgabe 4. **(Gram-Schmidt Orthogonalisierung)**
Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ mit euklidischem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und induzierter Norm $\|\cdot\|_2 = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$. Gegeben seien die drei Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}.$$

Wenden Sie das Gram-Schmidt Verfahren auf die drei Vektoren an. Was passiert im dritten Schritt des Gram-Schmidt Verfahrens? Erklären Sie die Ursache für das beobachtete Verhalten der Orthogonalisierung.

→ Normiere v_1 : $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

→ Orthogonalisiere v_2 gegen u_1 : $\tilde{v}_2 = v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\rangle \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{5}\cdot\underbrace{\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\rangle}_{=5}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

→ Normiere v_2 : $u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|_2} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ easy

→ Orthogonalisiere v_3 gegen u_1 und u_2:

$$\tilde{v}_3 = v_3 - \langle v_3, u_2\rangle u_2 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 = \begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix} - \left\langle\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \left\langle\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\rangle\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \underbrace{\frac{10}{5}}_{=2}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

∴ Warum Nullvektor?! (v_1, v_2, v_3 sind lin. abh.)