TODO: [Orga]: Letztes Mal, in 2W: Ateles, Evaluation, Mitte Juni :-)
[A]: Lin Adv, Methode der Charak
[N]: konv Diff Diskretisierung
Pü
TODO 29.05 → Verschieben ?!

Globalübung 06
Mathe IV (SS20)

14.05.2020

Lambert Theisen

①

[A]: Lineare Advektionsgleichung : $\partial_t u + \nabla_x (a u) = 0 \iff \partial_t u + \vec{a} \cdot \nabla_x u = 0$

Konti-Gleichung (Massenerhaltung, Thermo I/II?) (ein Bsp. von Lin Adv.)

div : "Reduziert die Dim um 1"

$$\partial_t \rho + \underbrace{\nabla_x \cdot (\rho u)}_{\operatorname{div}(\rho u)} = 0 \iff \partial_t \rho + \nabla \rho \cdot u + \rho (\nabla \cdot u) = 0$$

Inkompressibel : $\nabla \cdot u = 0$

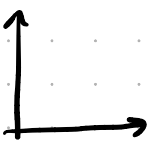
$$\iff \quad \partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho = 0$$

→ Herleitung : => VL

→ Lösungsstrategie : Methode der Charakteristiken

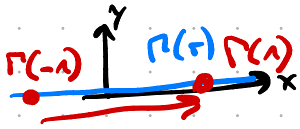
Method of Characteristics (für quasilineare PDEs in $\mathbb{R}^2$)

→ **Setup**: $a(u,x,y) \cdot \partial_x u(x,y) + b(u,x,y) \cdot \partial_y u(x,y) = c(u,x,y)$



mit "Daten" $u(\Gamma(r)) = u_0(r)$ gegeben (AB, RB)

↳ zB: $u(x, y=0) = u(\Gamma(r)) = u_0(x)$

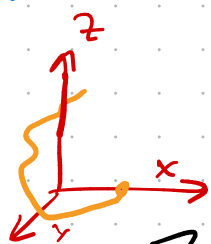


Γ : "Schieberegler"

→ Wir suchen Kurven $\gamma(s) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $s \mapsto (x(s), y(s), z(s))^T$

auf denen die Lösung bekannt ist $u(x(s), y(s)) = z(s)$

$\gamma(s)$ nennen wir Charakteristiken.



[Char. Grundkurve : $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
$z(s) = u(\tilde{\gamma}(s))$ $\quad s \mapsto \tilde{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$
→ Projektion auf x,y Plane]

→ **Charakteristische Gleichungen** :

Betrachte $\displaystyle \frac{d}{ds} z(s) = \frac{d}{ds} u(x(s), y(s)) \overset{\text{CR}}{=} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds}$

Vergleich mit PDE (oben) liefert : $u(x(s), y(s)) = z(s)$

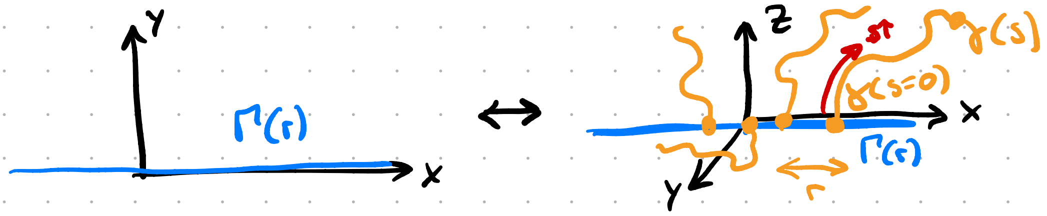
Oftmals eins von beiden konstant (s.o. $y=0$)

$$\text{I)} \quad \frac{dx}{ds} = a(x(s), y(s), z(s)) \quad , \quad x(s=0, \boxed{r}) = x_0(r)$$

$$\text{II)} \quad \frac{dy}{ds} = b(x(s), y(s), z(s)) \quad , \quad y(s=0, r) = y_0(r)$$

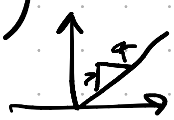
$$\text{III)} \quad \frac{dz}{ds} = c(x(s), y(s), z(s)) \quad , \quad z(s=0, r) = z(x_0(r), y_0(r)) = z_0(r)$$

→ AB der Char. Gl. indem man $s=0$ auf $\Gamma(r)$ festlegt (ist erlaubt)



②

$\Gamma(r) = \begin{pmatrix} \alpha \cdot r \\ r \end{pmatrix}$ nicht so



→ **Bedingungen für Lösbarkeit**: I) $F: (s,r) \mapsto (x(s), y(s))$ muss lokal inv'bar

$$\overset{\text{Funk.det}}{\Leftrightarrow} \det(D F) = \begin{vmatrix} \partial_s x & \partial_s y \\ \partial_r x & \partial_r y \end{vmatrix} \neq 0$$

II) Invertierung F^{-1} muss explizit bestimmbar sein.

→ **Strategie**:

1) Charakteristische Gleichungen aufstellen
2) $x(s,r)$, $y(s,r)$, $z(s,r)$ als Lösung der ODEs erhalten
3) $u(x,y)$ aufstellen mit Elimination von s, r.

$\Leftrightarrow$ Invertierung von $F: (s,r) \mapsto (x(s,r), y(s,r))$ durchführen.

$u(\alpha x, x) \Rightarrow \Gamma(r) = \begin{pmatrix} \alpha r \\ r \end{pmatrix}$

→ **Bsp**:

$\Gamma(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}$

Aufgabe 2. **(Transportgleichungen)**
Gegeben sei die Transportgleichung

$$u_x(x,y) + u_y(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$u(0,y) = \cos(y), \quad y \in \mathbb{R} \quad , x = 0$$

a) Ermitteln Sie mithilfe der Charakteristikenmethode einen Kandidaten u für die Lösung dieser Transportgleichung.

b) Verifizieren Sie, dass Ihr Kandidat u aus Teil (a) die Transportgleichung erfüllt.

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{RB: } u(0,y) = \cos(y), \ y \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow x_0 = 0, \ y_0 = y_0(r) = r \end{aligned}} \ !$$

Char. Gl.s:

I) $x'(s) = 1$, $x(0) = 0$

II) $y'(s) = 1$, $y(0) = y_0$

variabel! $\Gamma(r)$ trifft

(formal korrekter eigentlich: $y(0,r) = r$)

III) $z'(s) = 0$, $z(0,r) = u(x(0,r), y(0,r))$
$= u(0, y_0)$ ✓

Lösen der ODEs: I) $x(s) = s + \alpha_1$, $x(0) = \alpha_1 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 0}$

$\Rightarrow \boxed{x(s) = s}$

II) $y(s) = s + \alpha_2$, $y(0) = \alpha_2 \overset{!}{=} y_0 \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = y_0}$

$\Rightarrow \boxed{y(s) = s + y_0}$ $\Leftrightarrow y_0 = y - s = y - x$

III) $z'(s) = 0 \Rightarrow z(s) \overset{\text{const}}{=} z(0) = u(0, y_0) = \cos(\underset{r!}{\underset{\shortparallel}{y_0}})$

$\Rightarrow \boxed{z(s) = \cos(y(s) - s) = \cos(y - x)}$

Test: $u(x,y) = \cos(y-x)$ (3)

$$\partial_x u = -(-\sin(y-x)) = \sin(y-x)$$

$$\partial_y u = -\sin(y-x)$$

PDE: $\partial_x u + \partial_y u = 0$ erfüllt. ✓

RB: $u(0,y) = \cos(y)$ erfüllt. ✓

Schwerere Beispiele:

→ Komplexeres $\Gamma(r)$, zB $\Gamma(r) = (ar, r)$ (wie in VL)

→ Inhomogenität ($c \neq 0$ RHS) (hier)

Aufgabe 87. (Charakteristiken)
Wir betrachten die Transportgleichung der vorherigen Übung, allerdings den inhomogenen Fall und mit veränderter Anfangsbedingung,

$$a(x,y)^T \nabla u(x,y) = y^2 - x^2, \ (x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^+,$$
$$u(0,y) = y,$$

$\Gamma(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}$

mit

$$a(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}.$$

a) Ermitteln Sie mithilfe der Charakteristikenmethode einen Kandidaten für die Lösung dieser Transportgleichung.

b) Verifizieren Sie, dass Ihr Kandidat u aus (a) die Transportgleichung erfüllt.

Strategie...

Char Gls:

I) $\frac{d}{ds} x(s,r) = y(s,r)$, $x(0,r) = 0$

II) $\frac{d}{ds} y(s,r) = -x(s,r)$, $y(0,r) = r$ ← weil RB auf y-Achse

III) $\frac{d}{ds} z(s,r) = [y(s,r)]^2 - [x(s,r)]^2$, $z(0,r) = u(0,r) = r$

Lösen des ODE Systems: → nicht ganz so einfach

→ Betrachte zuerst lineares Subsystem $\frac{d}{ds} \underbrace{\begin{pmatrix} x(s,r) \\ y(s,r) \end{pmatrix}}_{\phi(s)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x(s,r) \\ y(s,r) \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \phi'(s) = A \cdot \phi(s)$ $e^{A\cdot s}$?!

→ ODE-Theorie (siehe letzte Semester)

- EVal: $\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \Lambda = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$
- EVec: $(A - \lambda_1 I)v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

  $(A - \lambda_2 I)v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A = S \cdot \Lambda \cdot S^{-1}$ mit $S = \begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix}$, $S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$

- Fundamentalmatrix: $e^{A\cdot s} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{is} & 0 \\ 0 & e^{-is} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow e^{A\cdot s} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{is} & -ie^{is} \\ -ie^{-is} & e^{-is} \end{bmatrix} \overset{(\dots)}{=} \begin{bmatrix} \cos(s) & \sin(s) \\ \sin(s) & \cos(s) \end{bmatrix}$$

Recheck!

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \phi = c_1 \cdot \begin{bmatrix} \cos(s) \\ \sin(s) \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} \sin(s) \\ \cos(s) \end{bmatrix}$$

RB: $x(0,r) = c_1 \cdot \cos(0) + c_2 \cdot \sin(0) = c_1 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$

$r = y(0,r) = c_1 \cdot \sin(0) + c_2 \cdot \cos(0) = c_2 \overset{!}{=} r \Rightarrow \boxed{c_2 = r}$

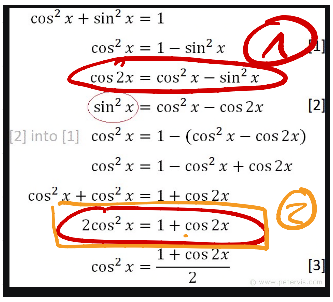
$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x(s,r) &= r \cdot \sin(s) \\ y(s,r) &= r \cdot \cos(s) \end{aligned}}$$ (charakteristische Grundkurven $\tilde{\gamma}$)

Remark: Man hätte bestimmt auch $z(s,r)$ mit ins System nehmen können.

$$z'(s) = [y(s,r)]^2 - [x(s,r)]^2 = r^2(\cos^2(s) - \sin^2(s))$$

$$= r^2 \cos(2s) = r^2(2\cos^2(s) - 1)$$

$$= 2r^2\cos^2(s) - r^2$$


cos² x + sin² x = 1
cos² x = 1 − sin² x [1]
cos 2x = cos² x − sin² x
sin² x = cos² x − cos 2x [2]
[2] into [1] cos² x = 1 − (cos² x − cos 2x)
cos² x = 1 − cos² x + cos 2x
cos² x + cos² x = 1 + cos 2x
2cos² x = 1 + cos 2x
cos² x = (1 + cos 2x)/2 [3]

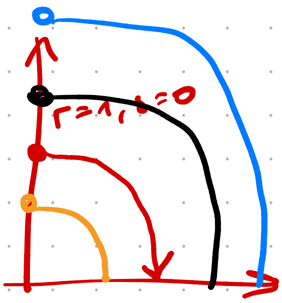
$$\Rightarrow z(s) = \int [2r^2\cos^2(s) - r^2]\, ds + C(x,y)$$

$$✓ = 1 \cdot r^2(s + \cos(s)\sin(s)) - r^2 \cdot s +$$

$$= r^2 \cos(s) \cdot \sin(s) + C$$

RB $z(s=0,r) = C \overset{!}{=} r \Rightarrow \boxed{C = r}$

$$\Rightarrow z(s,r) = r^2 \cos(s)\sin(s) + r$$ ✓ II)



Inverstierung von $(s,r) \mapsto (x(s,r), y(s,r))$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & \sin(s) \\ r & \cos(s) \end{pmatrix}$ getauschte Pk $\Rightarrow$ "leichte" Invertierung (von oben). Es gilt: $r^2 \underbrace{(\sin^2(s) + \cos^2(s))}_{=1} = x^2 + y^2$

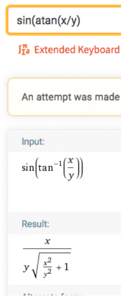
$\Rightarrow s = \operatorname{atan}\left(\frac{x}{y}\right)$ $\Rightarrow$ Wähle $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(r > 0)$

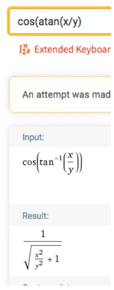
und es gilt $(x(s=0,r), y(s=0,r)) = (0,r) = (0,y)$ RB ✓

$$\Rightarrow u(x,y) = r^2 \cos(s)\sin(s) + r$$

$$= (x^2+y^2)\cos\left(\operatorname{atan}\left(\tfrac{x}{y}\right)\right)\sin\left(\operatorname{atan}\left(\tfrac{x}{y}\right)\right) + \sqrt{x^2+y^2}$$

$$= x^2+y^2 \underbrace{\left[\frac{1}{\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right)^{1/2}}\right]}_{\frac{1}{y^{-1}(x^2+y^2)^{1/2}}} \underbrace{\left[\frac{x}{y\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right)^{1/2}}\right]}_{\frac{x}{y\cdot y^{-1}\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right)^{1/2}}} + \sqrt{x^2+y^2}$$





$$= \left\|\binom{x}{y}\right\|_2^2 \cdot \frac{y}{\left\|\binom{x}{y}\right\|_2} \cdot \frac{x}{\left\|\binom{x}{y}\right\|_2} + \left\|\binom{x}{y}\right\|_2$$

$$= xy + \sqrt{x^2+y^2}$$

Probe mit Einsetzen in PDE: ⇝ HW!

$\boxed{N}$: Konvektions-Diffusions-Gleichung: $(\Omega = (0,1)^d,\ \varepsilon > 0,\ v \in \mathbb{R}^d)$

"Diff. Stärke" (ε), konv. Richtung (v)

$$\begin{cases} -\varepsilon \Delta u + v \cdot \nabla u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

1D Lösung mit Peclet Zahl: → HA

Finite Differenzen (Δ: wie bei Poisson)

$$\to \nabla u = \begin{bmatrix} \partial_x u(x,y) \\ \partial_y u(x,y) \end{bmatrix}$$ zentral, linksseitig, rechtsseitig, ...

I) zentral: $\partial_x u \approx \frac{1}{2h}[-1\ \ 0\ \ 1]_3$ ($p=2$, instabil → HA!)

II) Linksseitig: $\partial_x u \approx \frac{1}{h}[-1\ \ 1\ \ 0]_3$ ($p=1$)

III) Rechtsseitig: $\partial_x u \approx \frac{1}{h}[0\ \ -1\ \ 1]_3$ ($p=1$)

Upwind-Verfahren (für Stabilität): ($d=2$)

$v_1 = -1 \Rightarrow v_1^+ = 0$
$v_1^- = -1$

→ Adaptiv nach $v \in \mathbb{R}^2$

$$\partial_x u \approx \frac{1}{h}\begin{cases} [-1\ \ 1\ \ 0] & v_1 > 0 \\ [0\ \ -1\ \ 1] & v_1 \le 0 \end{cases}$$

→ Bessere Notation

$v_1^+ := \max(0, v_1)$

$v_1^- := \min(0, v_1)$

$$\rightarrow \quad v \cdot \nabla u \approx \left[D_x^{up} \right]_3 + \left[D_y^{up} \right]_3$$

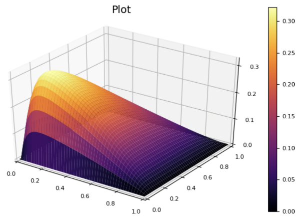
$$\underbrace{= \frac{1}{h} \begin{bmatrix} & v_2^- & \\ -v_1^+ & |v_1| + |v_2| & v_1^- \\ & -v_2^+ & \end{bmatrix}_3}_{+ \; \Delta_h}$$

$$\boxed{\begin{gathered} \Omega = (0,1)^2 \\ h_x = h_y = 1 \end{gathered}}$$

```
[4]: Ω = UnitSquareUniform(50)
     bcs = RectangleBCs(x -> 0, y -> 0, x -> 0, y -> 0)
     f(x,y) = 10
     v = [-0.2, -0.2]
     use_upwind = false

     u_stable = solveConvDiff(Ω, f, v, 1E0, use_upwind, bcs)
     plotSol(Ω, u_stable, bcs)
```

[4]:




```
[5]: u_instable = solveConvDiff(Ω, f, v, 1E-1, use_upwind, bcs) # lower epsilon/v
     ↪ratio
     plotSol(Ω, u_instable, bcs)
```

[5]: