TODO $\boxed{D}$: Eval
$\boxed{A}$: Oberflächenint., Gauß $\mathbb{R}^4$
$\boxed{N}$: LineSearch Algo, Wolfe, Trust-Region

Globalübung 12
Mathe 3 - WS20

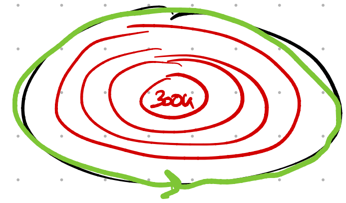
27.01.2021
Lambert Theisen

1

$\boxed{D}$: → Fragen?
→ Besprechung Elasys

$\boxed{A}$ **Oberflächenintegrale**: $f: F \to \mathbb{R}$ skalares Feld

$$\int_F f \, dS := \int_B f(\Phi(p,q)) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial p} \times \frac{\partial \Phi}{\partial q} \right\|_2 dp\,dq$$



↑ Parameterbereich $B = [0,\pi] \times [0, 2\pi]$ $\boxed{R=1}$

Beispiel: Integriere $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ auf der Kugel-Oberfläche mit Radius R und MP in $(0,0,0)$.

→ Kugelkoords:
$$\phi(\theta,\varphi) =: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \sin\theta \cos\varphi \\ R \sin\theta \sin\varphi \\ R\cos\theta \end{pmatrix}$$

$0 \le \varphi \le 2\pi$
$0 \le \theta \le \pi$

sieht kompliziert aus aber $\sin^2 + \cos^2$ rettet uns

$$\Rightarrow f(\Phi(\theta,\varphi)) = R^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + R^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi = R^2 \sin^2\theta$$

→ Weiterhin:
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} R\cos\theta \cos\varphi \\ R\cos\theta \sin\varphi \\ -R\sin\theta \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} -R\sin\theta \sin\varphi \\ R\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} R^2 \sin^2\theta \cos\varphi \\ R^2 \sin^2\theta \sin\varphi \\ R^2 \sin\theta\cos\theta \cos^2\varphi + R^2 \sin\theta \cos\theta \sin^2\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^2 \sin^2\theta \cos\varphi \\ R^2 \sin^2\theta \sin\varphi \\ R^2 \sin\theta \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right\|_2 = \left(R^4 \sin^4\theta \cos^2\varphi + R^4 \sin^4\theta \sin^2\varphi + R^4 \sin^2\theta \cos^2\theta \right)^{1/2}$$

$$= \left(R^4 \sin^4\theta + R^4 \sin^2\theta \cos^2\theta \right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{R^4 \sin^2\theta} \overset{\sin\theta > 0}{=} R^2 \sin\theta$$

→ **Daher:** $\displaystyle\int_{\partial B_2(0,0,0)} f(\Phi(\theta,\varphi))\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(R^2\sin^2\theta)\cdot(R^2\sin\theta)\,d\theta\,d\varphi$

$$= R^4\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta\,d\varphi = 2\pi\cdot R^4\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta$$

Formel:

$$= 2\pi R^4\int_0^{\pi}\tfrac{1}{4}\left(3\sin\theta-\sin(3\theta)\right)d\theta = \frac{\pi R^4}{2}\left[-3\cos\theta+\tfrac{1}{3}\cos(3\theta)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi R^4}{2}\left[3-\tfrac{1}{3}-\left(-3+\tfrac{1}{3}\right)\right] = \frac{8\pi R^4}{3}$$

Satz von Gauß in $\mathbb{R}^n$: Sei $M\subset\mathbb{R}^n$ offene Menge mit stückweise glattem Rand ∂M. Für $F:\bar{M}\to\mathbb{R}^n$ stetig diff'bar gilt:

abgeschlossen + beschränkt → +kompakt

$\nabla\cdot F = \mathrm{div}(F)$ →

$$\boxed{\int_M \nabla\cdot(F)\,dx = \int_{\partial M} F\cdot\nu\,dS}$$

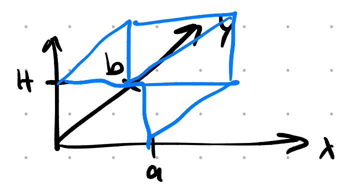
mit $\|\nu\|=1$ äußere Normale.

Beispiel: Berechne den Fluss von $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x\cdot z\\ y\cdot z\\ x^2+y^2\end{pmatrix}$

©TUGraz

durch die Oberfläche des Quaders Q, der durch folgende Flächen begrenzt ist:

$x=0$	$y=0$	$z=0$
$x=a$	$y=b$	$z=h$



→ **Problem:** $\displaystyle\int_{\partial Q} F\cdot\nu\,dS$ wären 6 Integrale....

→ **Lösung:** Nutze Gauß mit $\mathrm{div}\,F = \frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z} = z+z+0 = 2z$

Mit Gauß: $\displaystyle\int_{\partial Q} F\cdot\nu\,dS = \int_Q \mathrm{div}(F)\,dx = \int_0^a\int_0^b\int_0^H 2z\,dz\,dy\,dz$

$$= \int_0^a\int_0^b H^2\,dy\,dz = a\cdot b\cdot H^2 \quad \text{easy} ✓$$

Partielle Integration für Laplace-Op.: (Folgerung von Gauß) M wie oben, $u \in C^2(\bar{M})$, $v \in C^1(\bar{M})$

$$\int_M \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\partial M} v \, \underbrace{\nabla u \cdot \nu}_{\text{ÄN}} \, dS - \int_M v \, \Delta u \, dx$$

$$\Delta : f \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dots$$

mit Laplace-Operator $\Delta u := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{(\partial x_k)^2}$ ("Summe der 2ten Ableitungen)

→ Später sehr wichtig (Mathe 5)

$$\begin{cases} \Delta T = f & \Omega \\ T = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

Nicht so wichtig

$$\int_\Omega \Delta T \, u = \int f u \quad \forall u \in \mathcal{U}_h = \{ f \in L^2, \nabla f \in L^2, f \big|_{\partial\Omega} = 0 \}$$

$$\int \nabla T \cdot \nabla u + \int_{\partial\Omega} u \nabla T \cdot \nu = \int f u$$

Matrix Gleichung wenn $|V_h| < \infty$

N: Recap: Line Search Methods (GD, Newton, ...) mit Schrittweite α_k.

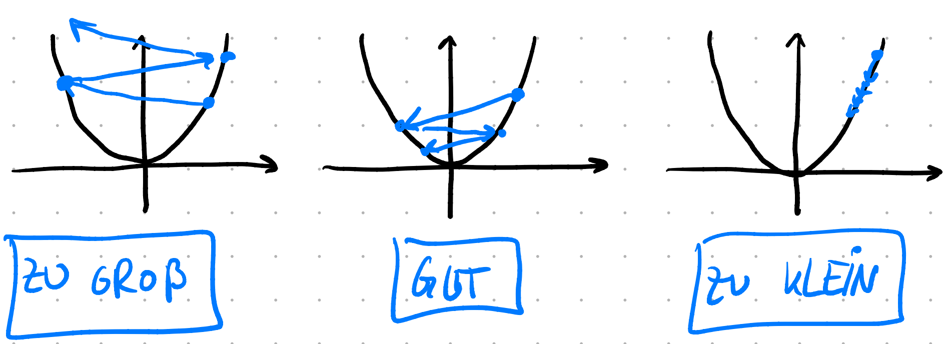
Schrittweiten-Wahl: → Wir haben letzte Woche im Julia NB gesehen, dass die Wahl von α_k entscheidend ist für:

I) Konvergenz

II) Schnelligkeit der Konvergenz

Daher stellt sich die Frage: $\boxed{\text{"Wie wählt man das } \alpha_k\text{?"}}$

Trial-And-Error:



⇝ Wir brauchen etwas besseres.

Stepsize Control Algorithmus

- Given $x^{(k)}$, $\alpha_{max} > 0$, Shrinking factor $\beta \in (0,1)$
- Init: $\alpha = \alpha_{max}$
- While !CONDITION(α_k) do
  - $\alpha_k \longleftarrow \beta \cdot \alpha_{k-1}$ (Decrease stepsize)
- end

→ Backtracking Algorithm $\hat{=}$ Stepsize Control mit Armijo Bedingung:

Armijo-Bedingung:

Für $c_1 \in (0,1)$, wähle $\alpha_k > 0$ sodass:

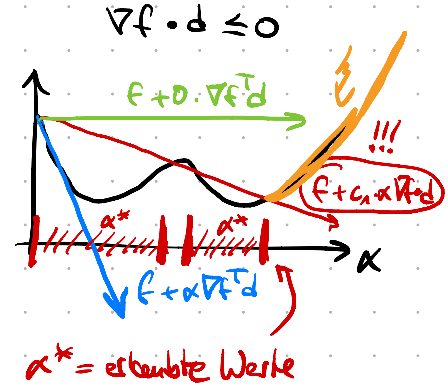
$$\boxed{f(x^k + \alpha_k d^{(k)}) \leq f(x^{(k)}) + \underbrace{c_1}_{>0} \cdot \underbrace{\alpha_k}_{>0} \cdot \underbrace{\nabla f(x^{(k)})^T d^{(k)}}_{\leq 0}}$$

⇒ Strenger als "nur $\nabla f \cdot d \leq 0$"

⇒ Verbietet zu große Schritte

⇒ Problem: Sehr kleine Schritte sind erlaubt.

Daher: Krümmungsbedingung



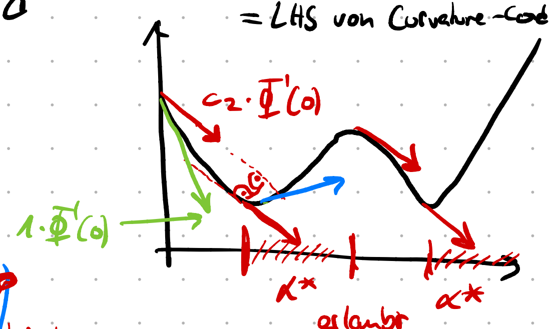
Curvature-Bedingung:

Für $c_2 \in (0,1)$, wähle $\alpha_k > 0$ sodass:

$$\nabla f(x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)})^T d^{(k)} \geq c_2 \cdot \nabla f(x^{(k)})^T d^{(k)}$$

$\Phi(a) = f(x^{(k)} + \alpha d^{(k)})$
$= LHS$ von Curvature-Cond

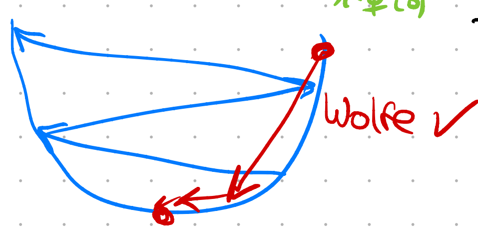
→ Verbietet zu kurze Schrittweiten.



Wolfe Bedingungen:

I) Armijo Bedingung

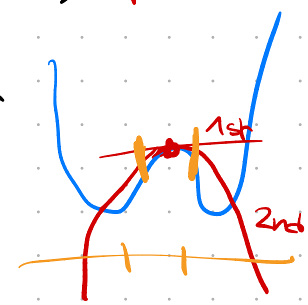
II) Krümmungsbedingung



Mit Wolfe Bedingungen: $\lim_{k \to \infty} \| \nabla f(x^{(k)}) \| = 0$ (Konvergenz zu einem stationären Punkt)

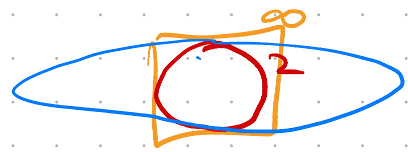
Trust-Region Methods:

- **Problem**: Stationärer Punkt kann auch Sattelpunkt sein
  ⇝ Das wollen wir nicht! (siehe Bsp aus VL + SELF A2) Julia



- **Idea**: Minimiere "lokal" im Gesamten Raum $\mathbb{R}^n$ mit einer Approximation von f (zB. 2nd Order Taylor)
- **Folge**: So können wir auch Sattelpunkten "entkommen"

Algorithm:



- Given $x^{(k)}$
- Replace f by $\hat{f}$ (approximation), e.g.

$$\hat{f}(x) = f(x^{(k)}) + (x - x^{(k)})^T \nabla f(x^{(k)}) + \frac{1}{2}(x - x^{(k)})^T \nabla^2 f(x^{(k)}) (x - x^{(k)})$$

- Für eine Trust Region $D_k := \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^{(k)}\| \leq \delta \}$ mit $\delta > 0$, löse:

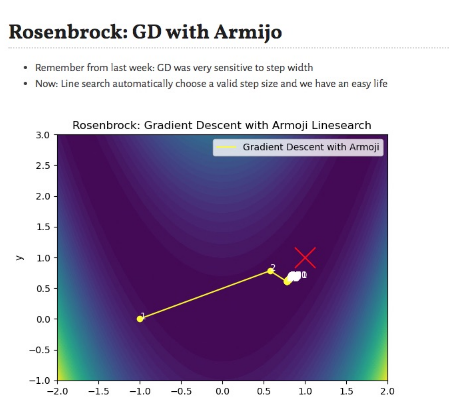
$$\hat{x} = \underset{x \in D_k}{\arg\min}\ \hat{f}(x)$$

- Teste Verbesserung: $\rho = \dfrac{\text{actual improve}}{\text{predicted improve}} = \dfrac{f(x^{(k)}) - f(\hat{x})}{\underbrace{f(x^{(k)})}_{= \hat{f}(x^{(k)})} - \hat{f}(\hat{x})}$

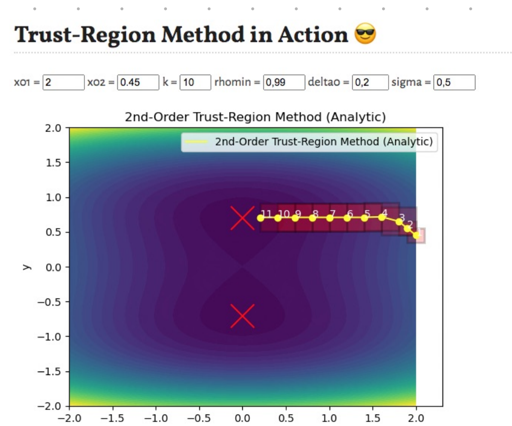
- Wenn $\rho \approx 1$, setze $x^{(k+1)} = \hat{x}$
- Falls nicht: Verkleinere trust region: $\delta \longleftarrow \beta \cdot \delta$ $\quad (\beta \in (0,1))$

Demo:

Line Search GD



Trust-Region Methods



$$\int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \nu \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt \overset{?}{=} \int_{\partial B} f \cdot \nu \, dS$$

$\|\nu\|_2 = 1$

Frage:

Parameterbereich

GÜ10
Lin. Int.
1ster
Art

Skalare Fkt.

Nicht Parameterbereich