Soit $P = \{h : D(h) \subseteq E \to \mathbb{R} \mid D(h)$ sous-espace vectoriel de E, h linéaire, $G \subseteq D(h), h$ prolonge g et $h(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in D(h)\}$. On munit P de la relation d'ordre suivante :

$h_1 \leq h_2 \Leftrightarrow D(h_1) \subseteq D(h_2)$ et h_2 prolonge h_1.

Ceci représente effectivement une relation d'ordre puisque :

- $h_1 \leq h_1$ (Réflexive)
- $h_1 \leq h_2$ et $h_2 \leq h_1 \Rightarrow h_1 = h_2$ (Antisymétrique)
- $h_1 \leq h_2$ et $h_2 \leq h_3 \Rightarrow h_1 \leq h_3$ (Transitive)

Puisque $g \in P$, P est non vide.

Soit $Q \subseteq P$ un sous-ensemble ordonné défini par $Q = \{h_i \mid i \in I\}$ tel que $D(h) = \bigcup_{i \in I}(D(h_i))$ et $h(x) = h_i(x)$ si $x \in D(h_i)$.

Il faut montrer que h majore Q pour dire que P est inductif.

On a pour tout x dans $D(h)$, $h(x)$ existe.

Soit $x \in D(h)$ et on suppose qu'il existe i_1 et i_2 tels que $x \in D(h_{i1})$ et $x \in D(h_{i2})$.

Donc

$$\begin{cases} h(x) = h_{i1}(x), \\ h(x) = h_{i2}(x), \end{cases}$$

Et on sait que Q est totalement ordonné donc $h_{i1} \leq h_{i2}$ ou bien $h_{i2} \leq h_{i1}$.

Pour $h_{i1} \leq h_{i2}$, on a $D(h_{i1}) \subseteq D(h_{i2})$ et $h_{i1}(x) = h_{i2}(x)$ pour x dans $D(h_{i1})$. Le même raisonnement s'applique pour le cas où $h_{i1} \leq h_{i2}$.

On peut voir l'unicité des valeurs de h, donc h est bien définie et majore Q. Par conséquent, P est inductif.

D'après le lemme de Zorn, P admet un élément maximal que l'on notera f. Montrons que $D(f) = E$.

Supposons par l'absurde que $D(f) \neq E$. Soit $x_0 \notin D(f)$. Posons $D(h) = D(f) + \mathbb{R}x_0$.

Pour $x \in D(f)$, définissons $h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha$ où α est tel que $h \in P$.

On sait que $h(x + tx_0) \leq p(x + tx_0)$, donc

$$\begin{cases} f(x) + \alpha \leq p(x + x_0), \\ f(x) - \alpha \leq p(x - x_0), \end{cases}$$

pour tout $x \in D(f)$.

C'est-à-dire qu'il faut choisir α tel que

$$\sup_{y \in D(f)} (f(y) - p(y - x_0)) \leq \alpha \leq \inf_{x \in D(f)} (p(x + x_0) - f(x)).$$

Ce choix est possible puisque

$$f(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - f(x),$$

pour tout $x \in D(f)$ et tout $y \in D(f)$.

On a donc

$$f(x) + f(y) \leq p(x + y) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0).$$

On conclut que f est majorée par h et que $f \neq h$, ce qui est absurde puisque f est maximale.