# Théorème de Hahn-Banach

LAMLIH Houssam

## 1 Introduction

Les résultats fondamentaux sur les espaces topologiques dont la topologie est induite par une métrique, en particulier les espaces vectoriels normés, ont été largement étudiés. Cependant, dans ce travail, notre objectif est d'approfondir l'étude du théorème de Hahn-Banach dans sa forme géométrique.

Le théorème de Hahn-Banach est un résultat clé en analyse fonctionnelle qui permet d'étendre des fonctionnelles linéaires sur des sous-espaces à tout l'espace vectoriel. Dans ce contexte, nous considérons un IR-espace vectoriel topologique $E$, un convexe ouvert non vide $C$ et un sous-espace affine $L$ disjoint de $C$. Le théorème affirme qu'il existe alors un hyperplan affine contenant $L$ et disjoint de $C$, ce qui implique qu'il est également fermé.

Notre étude se déroulera en plusieurs étapes. Tout d'abord, nous examinerons le cas où $E$ est un IR-espace vectoriel normé, tel que traité dans la référence [1]. Ensuite, nous aborderons le cas plus général d'un IR-espace vectoriel topologique en nous appuyant sur le théorème (T.2, XIX,6; 1) présenté dans la référence [2]. Cela nécessitera l'étude préalable de certains résultats sur les espaces vectoriels topologiques.

Le plan que nous suivrons est le suivant :

- Dans un premier temps, nous présenterons le théorème de Hahn-Banach dans le cas d'un espace vectoriel normé (EVN) en nous référant à [1].
- Ensuite, nous aborderons les espaces vectoriels topologiques (EV-Top) en fournissant leur définition et des exemples, notamment les espaces vectoriels normés (EVN). Nous étudierons également les propriétés des voisinages de l'origine et des voisinages d'un point dans ces espaces. Nous discuterons également des EV-Top séparés et de la propriété selon laquelle l'adhérence d'un sous-espace vectoriel est également un sous-espace vectoriel. Enfin, nous examinerons le quotient $E/F$ dans un EV-Top, où $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
- Enfin, nous reviendrons au théorème de Hahn-Banach dans le cadre plus général d'un EV-Top, en utilisant les résultats précédemment établis.

Cette étude approfondie du théorème de Hahn-Banach dans différents contextes d'espaces vectoriels topologiques nous permettra de mieux comprendre les concepts et les propriétés fondamentaux de l'analyse fonctionnelle.

# 2 Théorème de Hahn-Banach dans un Espace Vectoriel Normé

## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudierons le théorème de Hahn-Banach dans sa forme analytique pour les espaces vectoriels normés. Le théorème de Hahn-Banach est un résultat fondamental en analyse fonctionnelle qui permet d'étendre des fonctionnelles linéaires sur des sous-espaces à tout l'espace vectoriel.

## 2.2 Préliminaires

Avant de présenter le théorème de Hahn-Banach, nous rappellerons brièvement les notions de base utilisées dans la démonstration.

**Définition 2.1.** $P$ muni d'une relation d'ordre partiel $\leq$. On dit que $Q$ inclus dans $P$ est totalement ordonné si pour tout $(a, b) \in Q$, on a $a \leq b$ ou $b \leq a$.

**Définition 2.2.** Soit $Q$ un sous-ensemble de $P$ ; on dit que $c \in P$ est un majorant de $Q$ si pour tout $a \in Q$, $a \leq c$.

**Définition 2.3.** $m \in P$ est un élément maximal de $P$ si pour tout $x \in P$ tel que $m \leq x$, on a $x = m$.

**Définition 2.4.** $P$ est inductif si tout sous-ensemble totalement ordonné de $P$ admet un majorant.

**Lemme 2.1.** *(Lemme de Zorn) Tout ensemble ordonné, inductif, non vide, admet un élément maximal.*

## 2.3 Théorème de Hahn-Banach

Le théorème garantit l'existence d'une extension linéaire continue d'une fonctionnelle linéaire définie sur un sous-espace à tout l'espace vectoriel.

Soit $p : E \to \mathbb{R}$ une application telle que :

- $p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall x \in E, \lambda \geq 0,$
- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

Soit $G \subseteq E$ un sous-espace vectoriel et $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire telle que $g(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in G$.

Alors il existe une forme linéaire $f$ définie sur $E$ qui prolonge $g$ et telle que $f(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.

## 2.4 Démonstration

Soit $P = \{h : D(h) \subseteq E \to \mathbb{R} \mid D(h)$ sous-espace vectoriel de $E, h$ linéaire, $G \subseteq D(h), h$ prolonge $g$ et $h(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in D(h)\}$. On munit $P$ de la relation d'ordre suivante :

$h_1 \leq h_2 \Leftrightarrow D(h_1) \subseteq D(h_2)$ et $h_2$ prolonge $h_1$.

Ceci représente effectivement une relation d'ordre puisque :

- $h_1 \leq h_1$ (Réflexive)

  Puisque $D(h_1) \subseteq D(h_1)$ et $h_1$ prolonge $h_1$

- $h_1 \leq h_2$ et $h_2 \leq h_1 \Rightarrow h_1 = h_2$ (Antisymétrique)

  On a $h_1 \leq h_2$ et $h_2 \leq h_1$ donc

$$\begin{cases} D(h_1) \subseteq D(h_2) \text{ et } h_2 \text{ prolonge } h_1 \\ D(h_2) \subseteq D(h_1) \text{ et } h_1 \text{ prolonge } h_2 \end{cases}$$

  Alors $D(h_1) = D(h_2)$ et $h_1 = h_2$

- $h_1 \leq h_2$ et $h_2 \leq h_3 \Rightarrow h_1 \leq h_3$ (Transitive)

  On a $h_1 \leq h_2$ et $h_2 \leq h_3$ donc

$$\begin{cases} D(h_1) \subseteq D(h_2) \text{ et } h_2 \text{ prolonge } h_1 \\ D(h_2) \subseteq D(h_3) \text{ et } h_3 \text{ prolonge } h_2 \end{cases}$$

  Alors $D(h_1) \subseteq D(h_3)$ et $h_3$ prolonge $h_1$

Puisque $g \in P$, $P$ est non vide.

Soit $Q \subseteq P$ un sous-ensemble ordonné défini par $Q = \{h_i \mid i \in I\}$ tel que $D(h) = \bigcup_{i \in I}(D(h_i))$ et $h(x) = h_i(x)$ si $x \in D(h_i)$.

Il faut montrer que $h$ majore $Q$ pour dire que $P$ est inductif.

On a pour tout $x$ dans $D(h)$, $h(x)$ existe.

Soit $x \in D(h)$ et on suppose qu'il existe $i_1$ et $i_2$ tels que $x \in D(h_{i1})$ et $x \in D(h_{i2})$.

Donc

$$\begin{cases} h(x) = h_{i1}(x), \\ h(x) = h_{i2}(x), \end{cases}$$

Et on sait que $Q$ est totalement ordonné donc $h_{i1} \leq h_{i2}$ ou bien $h_{i2} \leq h_{i1}$.

Pour $h_{i1} \leq h_{i2}$, on a $D(h_{i1}) \subseteq D(h_{i2})$ et $h_{i1}(x) = h_{i2}(x)$ pour $x$ dans $D(h_{i1})$. Le même raisonnement s'applique pour le cas où $h_{i1} \leq h_{i2}$.

On peut voir l'unicité des valeurs de $h$, donc $h$ est bien définie et majore $Q$. Par conséquent, $P$ est inductif.

D'après le lemme de Zorn, $P$ admet un élément maximal que l'on notera $f$. Montrons que $D(f) = E$.

Supposons par l'absurde que $D(f) \neq E$. Soit $x_0 \notin D(f)$. Posons $D(h) = D(f) + \mathbb{R}x_0$.

Pour $x \in D(f)$, définissons $h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha$ où $\alpha$ est tel que $h \in P$.

On sait que $h(x + tx_0) \leq p(x + tx_0)$, donc

$$\begin{cases} f(x) + \alpha \leq p(x + x_0), \\ f(x) - \alpha \leq p(x - x_0), \end{cases}$$

pour tout $x \in D(f)$.

C'est-à-dire qu'il faut choisir $\alpha$ tel que

$$\sup_{y \in D(f)} (f(y) - p(y - x_0)) \leq \alpha \leq \inf_{x \in D(f)} (p(x + x_0) - f(x)).$$

Ce choix est possible puisque

$$f(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - f(x),$$

pour tout $x \in D(f)$ et tout $y \in D(f)$.

On a donc

$$f(x) + f(y) \leq p(x + y) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0).$$

On conclut que $f$ est majorée par $h$ et que $f \neq h$, ce qui est absurde puisque $f$ est maximale.

# 3 Espaces vectoriels topologiques

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudierons les espaces vectoriels topologiques (EV-Top). Les EV-Top sont des structures algébriques combinées à des notions de topologie, ce qui permet d'introduire des concepts d'ouvertures, de limites et de continuité dans les espaces vectoriels.

## 3.2 Définition des Espaces Vectoriels Topologiques (EV-Top)

**Définition 3.1.** Une topologie sur un ensemble $X$ est une collection $\mathcal{T}$ de sous-ensembles de $X$ ayant les propriétés suivantes :

- L'ensemble vide $\emptyset$ et $X$ lui-même appartiennent à $\mathcal{T}$.
- L'intersection finie de tout nombre d'éléments de $\mathcal{T}$ appartient à $\mathcal{T}$.
- L'union arbitraire d'éléments de $\mathcal{T}$ appartient à $\mathcal{T}$.

L'ensemble $X$ muni de la topologie $\mathcal{T}$ est appelé un espace topologique.

**Définition 3.2.** Un espace vectoriel topologique est un espace vectoriel $E$ muni d'une topologie $\mathcal{T}$, telle que les opérations de l'addition vectorielle et de la multiplication par un scalaire sont continues par rapport à cette topologie.

Plus formellement, soit $E$ un espace vectoriel et $\mathcal{T}$ une topologie sur $E$. On dit que $(E, \mathcal{T})$ est un espace vectoriel topologique si les deux opérations suivantes sont continues :

- L'addition vectorielle : $+ : E \times E \to E$, $(x, y) \mapsto x + y$.
- La multiplication par un scalaire : $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$.

## 3.3 Exemples d'Espaces Vectoriels Normés (EVN)

Les espaces vectoriels normés (EVN) sont des exemples importants d'espaces vectoriels topologiques. Dans un EVN, une norme est associée à chaque vecteur, ce qui définit la topologie de l'espace. Voici quelques exemples d'EVN :

- L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne.
- L'espace des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ muni de la norme de la convergence uniforme.
- L'espace des séquences convergentes muni de la norme infinie.

Ces exemples illustrent comment une norme peut être utilisée pour définir une topologie sur un espace vectoriel, ce qui permet d'introduire des concepts de convergence et de continuité.

## 3.4 Voisinages d'un Point

Dans un espace topologique, les voisinages d'un point sont des ensembles qui contiennent ce point et qui permettent de capturer sa proximité avec d'autres points de l'espace. Voici quelques propriétés des voisinages d'un point $p$ :

1. Tout ouvert contenant $p$ est un voisinage de $p$.
2. Tout sous-ensemble contenant un voisinage de $p$ est également un voisinage de $p$.
3. L'intersection de deux voisinages de $p$ est un voisinage de $p$.

Les voisinages d'un point sont essentiels pour décrire les concepts de convergence, de limite et de continuité dans un espace topologique.

## 3.5 Voisinages d'un Ensemble Ouvert

De manière similaire, les voisinages d'un ensemble ouvert capturent sa proximité avec d'autres ensembles dans l'espace topologique. Voici quelques propriétés des voisinages d'un ensemble ouvert $O$ :

1. Tout ouvert contenant $O$ est un voisinage de $O$.
2. Tout sous-ensemble contenant un voisinage de $O$ est également un voisinage de $O$.
3. L'intersection de deux voisinages de $O$ est un voisinage de $O$.

Les voisinages d'un ensemble ouvert permettent de décrire la notion de connexité, de continuité des fonctions et d'autres propriétés importantes des espaces topologiques.

## 3.6 Espaces Vectoriels Topologiques Séparés

Les espaces vectoriels topologiques séparés, également appelés espaces de Hausdorff, sont des espaces vectoriels topologiques ayant une propriété de séparation supplémentaire. Cette propriété de séparation permet d'isoler les points de l'espace de manière plus précise. Dans cette section, nous explorerons les caractéristiques des espaces vectoriels topologiques séparés.

### 3.6.1 Définition

Un espace vectoriel topologique $E$ est appelé séparé ou de Hausdorff s'il satisfait l'une des conditions équivalentes suivantes :

- Pour tout $x, y \in E$ tels que $x \neq y$, il existe des ouverts $U$ et $V$ tels que $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.
- Les singletons de $E$ sont des ensembles fermés.
- La diagonale $\Delta = \{(x, x) \mid x \in E\}$ est un ensemble fermé dans $E \times E$ muni de la topologie produit.

### 3.6.2 Propriétés

Les espaces vectoriels topologiques séparés possèdent plusieurs propriétés intéressantes:

- Tout sous-espace d'un espace vectoriel topologique séparé est également séparé.
- La limite d'une suite convergente dans un espace vectoriel topologique séparé est unique.
- L'intersection finie d'ensembles fermés dans un espace vectoriel topologique séparé est également fermée.

Ces propriétés garantissent une bonne séparation entre les points de l'espace et facilitent l'étude de la convergence et de la continuité dans les espaces vectoriels topologiques.

### 3.6.3 Exemples

Voici quelques exemples d'espaces vectoriels topologiques séparés :

- L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie usuelle est un espace vectoriel topologique séparé.
- L'espace des fonctions continues sur un intervalle fermé et borné est un espace vectoriel topologique séparé.
- L'espace des séquences convergentes muni de la topologie de la convergence simple est un espace vectoriel topologique séparé.

Ces exemples illustrent la présence de la propriété de séparation dans des espaces vectoriels topologiques couramment étudiés.

## 3.7 Adhérence d'un Sous-Espace Vectoriel

Soit $E$ un espace vectoriel et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Nous allons démontrer que l'adhérence de $F$, notée $\overline{F}$, est également un sous-espace vectoriel de $E$.

Pour montrer que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel, nous devons vérifier les trois conditions suivantes :

1. **Inclusion de zéro** : Comme $F$ est un sous-espace vectoriel, il contient le vecteur nul $\mathbf{0}$. Par conséquent, $\mathbf{0} \in \overline{F}$.
2. **Stabilité sous l'addition** : Soient $x, y \in \overline{F}$. Cela signifie que pour tout voisinage $V_x$ de $x$ et tout voisinage $V_y$ de $y$, il existe des vecteurs $u \in V_x \cap F$ et $v \in V_y \cap F$. Comme $F$ est un sous-espace vectoriel, il est stable sous l'addition, donc $u+v \in F$. Puisque $V_x \cap F$ et $V_y \cap F$ sont des voisinages de $x$ et $y$ respectivement, il existe un voisinage $V$ de $x+y$ tel que $V \subseteq V_x + V_y$. Ainsi, $V \cap F \subseteq (V_x + V_y) \cap F = (V_x \cap F) + (V_y \cap F) \subseteq F$. Par conséquent, $x + y \in \overline{F}$.
3. **Stabilité sous la multiplication par un scalaire** : Soit $\lambda$ un scalaire et $x \in \overline{F}$. Cela signifie que pour tout voisinage $V_x$ de $x$, il existe un vecteur $u \in V_x \cap F$. Comme $F$ est un sous-espace vectoriel, il est stable sous la multiplication par un scalaire, donc $\lambda u \in F$. Puisque $V_x \cap F$ est un voisinage de $x$, il existe un voisinage $V$ de $\lambda x$ tel que $V \subseteq \lambda V_x$. Ainsi, $\lambda V \cap F \subseteq \lambda(V_x \cap F) \subseteq F$. Par conséquent, $\lambda x \in \overline{F}$.

Ainsi, nous avons montré que $\overline{F}$ satisfait les trois conditions nécessaires pour être un sous-espace vectoriel de $E$. Par conséquent, l'adhérence d'un sous-espace vectoriel $F$ est également un sous-espace vectoriel.

## 3.8 Quotient $E/F$ dans un EV-Top

Dans un espace vectoriel topologique (EV-Top), le quotient $E/F$ d'un espace vectoriel $E$ par un sous-espace vectoriel $F$ est une construction importante. Cette notion de quotient permet de considérer les classes d'équivalence des éléments de $E$ par rapport à $F$. Dans cette section, nous explorerons les propriétés et la structure du quotient $E/F$ dans un EV-Top.

### 3.8.1 Définition

Le quotient $E/F$ est l'ensemble des classes d'équivalence définies sur $E$ par la relation d'équivalence $\sim$ où $x \sim y$ si et seulement si $x-y \in F$. C'est-à-dire, deux éléments $x, y \in E$ sont équivalents modulo $F$ si leur différence $x-y$ appartient à $F$.

### 3.8.2 Structure du Quotient

Le quotient $E/F$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel en utilisant les opérations suivantes :

- L'addition : $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$, où $\overline{x}$ et $\overline{y}$ sont les classes d'équivalence de $x$ et $y$ respectivement.
- La multiplication par un scalaire : $\lambda \cdot \overline{x} = \overline{\lambda x}$, où $\lambda$ est un scalaire et $\overline{x}$ est la classe d'équivalence de $x$.

Ces opérations sont bien définies car si $x' \in \overline{x}$ et $y' \in \overline{y}$, alors $x' - x \in F$ et $y' - y \in F$, ce qui implique $(x' + y') - (x + y) = (x' - x) + (y' - y) \in F$. Ainsi, l'addition et la multiplication par un scalaire ne dépendent pas des représentants choisis dans chaque classe d'équivalence.

### 3.8.3 Topologie sur le Quotient

Le quotient $E/F$ peut également être muni d'une topologie en utilisant la notion de topologie quotient. Une base de voisinages de $\overline{x}$ dans $E/F$ est donnée par les ensembles $\{\overline{V} \mid V \text{ est un voisinage de } x \text{ dans } E\}$, où $\overline{V}$ représente la classe d'équivalence de tous les éléments de $V$. Cette topologie rend la projection naturelle $\pi : E \to E/F$ continue et ouverte.

### 3.8.4 Exemple

Un exemple courant de quotient d'un EV-Top est le quotient de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ par un sous-espace vectoriel $F$. Le quotient $\mathbb{R}^n/F$ donne naissance à un espace vectoriel topologique appelé l'espace des classes d'équivalence des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ modulo $F$. La structure et la topologie de cet espace dépendent des propriétés de $F$.

# 4 Théorème de Hahn-Banach dans le cas d'un EV-Top

## 4.1 Enoncé

(1) Soient $E$ un espace vectoriel et $f$ une forme linéaire sur $E$, non identiquement nulle. Alors l'équation $f(x) = 0$ définit un sous-espace vectoriel hyperplan $H_1$ de $E$.

(2) Inversement, tout hyperplan $H$ admet une infinité d'équations de ce type. Toutes les formes linéaires correspondantes sont proportionnelles à l'une d'entre elles.

(3) Si $E$ est un espace vectoriel topologique, un hyperplan $H$ est soit fermé, soit dense. Il est fermé si et seulement si les formes linéaires $f$ définissant $H$ par l'équation $f(x) = 0$ sont continues.

## 4.2 Demonstration

(1) Soit $H_1 = \mathrm{Ker}(f)$ et soit $e \in E$ tel que $f(e) \neq 0$, on peut supposer que $f(e) = 1$.

Considérons un élément arbitraire $x \in E$. Nous pouvons l'exprimer de manière unique sous la forme :

$x = \lambda e + y$, où $\lambda \in K$ et $y \in H_1$.

Maintenant, examinons la valeur de $f(x)$ :

$f(x) = f(\lambda e + y)$.

Puisque $f$ est une forme linéaire, nous avons :

$f(x) = \lambda f(e) + f(y)$.

Cependant, puisque $y \in H_1$, c'est-à-dire $y \in \mathrm{Ker}(f)$, nous avons $f(y) = 0$. Ainsi, nous pouvons simplifier l'expression précédente :

$f(x) = \lambda$.

En utilisant cette relation, nous pouvons réécrire $x$ comme suit :

$x = f(x)e + (x - f(x)e)$.

Notons que $y = x - f(x)e$ est un élément de $H_1$. Par conséquent, nous avons montré que tout $x$ peut être exprimé comme la somme d'un élément appartenant à $H_1$ et d'un multiple de $e$.

Cela montre que $H_1$ est supplémentaire à $\mathrm{Vect}(e)$ dans $E$.

Ainsi, $H_1$ est un hyperplan dans $E$.

Cette première partie de la démonstration établit que l'équation $f(x) = 0$ définit un sous-espace vectoriel hyperplan $H_1$ de $E$.

(2) Soit $H$ un hyperplan de $E$. Choisissons un vecteur $e$ qui est supplémentaire à $H$ dans $E$. Cela signifie que tout vecteur $x$ de $E$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $x = \lambda e + y$, où $\lambda \in K$ et $y \in H$.

Considérons maintenant l'application linéaire $f$. Puisque $x = \lambda e + y$, nous avons :

$f(x) = f(\lambda e + y)$.

En utilisant la linéarité de $f$, nous pouvons écrire :

$f(x) = \lambda f(e) + f(y)$.

Comme $y \in H$ et $f(y) = 0$

Cela montre que la valeur de $f(x)$ dépend linéairement de $\lambda$ pour tout $x \in E$. En d'autres termes, $f$ est une application linéaire.

De plus, puisque $e$ est un vecteur supplémentaire à $H$, il ne se trouve pas dans $H$, et donc $f(e) \neq 0$. Cela implique que $f$ n'est pas identiquement nulle.

Maintenant, supposons que $f(x) = 0$. Alors, en utilisant l'expression précédente $x = \lambda e + y$, nous obtenons $\lambda f(e) = 0$. Puisque $f(e) \neq 0$, nous devons avoir $\lambda = 0$. Cela signifie que $x = y \in H$. Ainsi, l'ensemble des zéros de $f$ correspond à $H$.

Maintenant, considérons une autre forme linéaire $g$ qui est nulle sur $H$. Nous pouvons choisir $g$ telle que $g(e) = k$ pour une certaine constante $k$. Alors, pour tout $x \in E$, nous avons :

$g(x) = g(\lambda e + y) = \lambda g(e) + g(y) = \lambda k$.

D'autre part, nous savons que $f(x) = \lambda$ pour tout $x \in E$. Par conséquent, nous avons :

$g(x) = k\lambda = kf(x)$.

Ainsi, nous avons établi que $g$ est proportionnelle à $f$. Cette démonstration montre que tout hyperplan $H$ admet une infinité d'équations de la forme $f(x) = 0$, et les formes linéaires correspondantes sont proportionnelles les unes aux autres.

(3)