

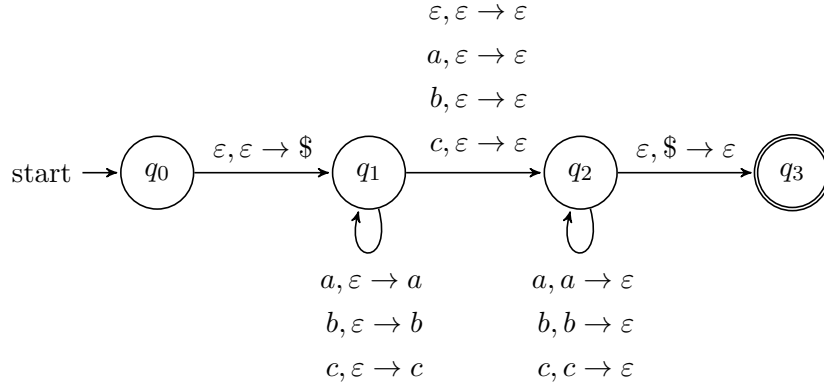
582206 Laskennan mallit, syksy 2012

7. harjoitusten malliratkaisut

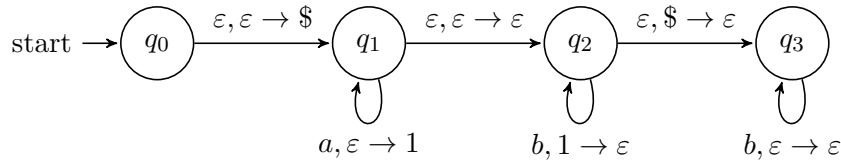
Juhana Laurinharju ja Jani Rahkola

1. Esitä pinoautomaatti seuraaville kielille.

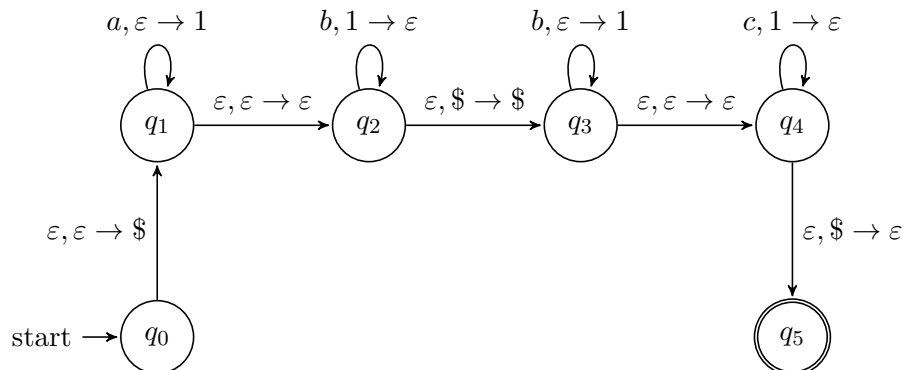
(a) Kaikki palindromit aakkostosta $\Sigma = \{a, b, c\}$.



(b) $\{a^i b^j \mid 0 \leq i \leq j\}$ missä $\Sigma = \{a, b, c\}$



(c) $\{a^i b^j c^k \mid j = i + k\}$ missä $\Sigma = \{a, b, c\}$



(d) Kaikki aakkoston $\Sigma = \{0, 1\}$ merkkijonot joissa nollia on kaksi kertaa niin paljon kuin ykkösiä.

2. Tarkastellaan kielioppia

$$S \rightarrow S + T \mid T$$

$$T \rightarrow T * F \mid F$$

$$F \rightarrow (S) \mid a$$

Muodosta merkkijonon $s = (a + a) * a$ jäsenyspuu tämän kieliopin mukaisesti.

Etsi jäsenyspuusta jokin juuresta lehteen johtava polku, jolla sama muuttuja esiintyy kahdessa solmussa. Muodosta tämän perusteella toistuvuusominaisuuden todistuksen ideaa mukailen jokin merkkijonon s jako osiin $s = uvxyz$, joilla merkkijono $uv^i xy^i z$ kuuluu tarkasteltavaan kieleen kaikilla $i \in \mathbb{N}$.

3. Olkoon A aakkoston $\{0, 1\}$ kieli, joka koostuu niistä merkkijonoista, joissa on sama määrä nollia ja ykkösiä. Tällä kielellä on kontekstiton kielioppi

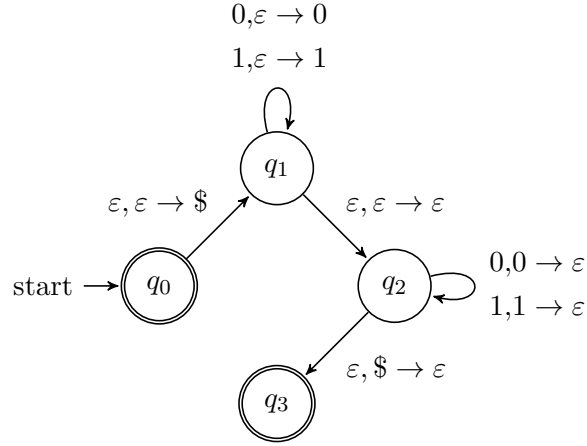
$$S \rightarrow SS \mid 0S1 \mid 1S0 \mid \varepsilon$$

- (a) Kielen A eräs toistuvuuspituuks on 4. Esitä kieleen A kuuluvalla merkkijonolla $s = 001101$ kaikki eri tavat jakaa se osiin $s = uvxyz$ toistuvuusominaisuuden ehdot toteuttavalla tavalla (lause 2.30; Sipser Theorem 2.34; tässä siis $p = 4$).

| u | v | x | y | z |
|------|------|-----|------|-----|
| | | | 0011 | 01 |
| | | 0 | 01 | 101 |
| | 0 | | 011 | 01 |
| | 0 | 0 | 1 | 101 |
| | 0 | 01 | 1 | 01 |
| | 00 | | 11 | 01 |
| | 001 | | 1 | 01 |
| | 0011 | | | 01 |
| 0 | | | 01 | 101 |
| 0 | | | 0110 | 1 |
| 0 | | 01 | 10 | 1 |
| 0 | 0 | | 1 | 101 |
| 0 | 0 | | 110 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 01 |
| 0 | 01 | | | 101 |
| 0 | 01 | | 10 | 1 |
| 0 | 01 | 1 | | 01 |
| 0 | 01 | 10 | | 1 |
| 0 | 011 | | 0 | 1 |
| 0 | 0110 | | | 1 |
| 00 | | 1 | 10 | 1 |
| 00 | | 11 | 01 | |
| 00 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 001 | | | 10 | 1 |
| 001 | | 1 | 01 | |
| 001 | 1 | | 0 | 1 |
| 001 | 10 | | | 1 |
| 001 | 10 | 1 | | |
| 0011 | | | 01 | |
| 0011 | 0 | | 1 | |
| 0011 | 01 | | | |

Yhteensä 31 ehdot täyttävää jakoa.

- (b) Onko kielellä A pienempiä toistuvuuspituuksia kuin 4? Perustele.
4. (a) Koostukoon aakkoston $\{a, b, c\}$ kieli A merkkijonoista, joissa on yhtä monta a -, b - ja c -merkkiä. Osoita, että A ei ole yhteydetön.
- (b) Osoita, että kieli $\{0^n 1^n 0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ei ole yhteydetön.
5. Anna yhteydetön kielioppi, joka tuottaa kielen $\{a^i b^j c^k \mid i = 2j \text{ tai } j = 2k\}$. Muodosta apulauseen 2.21 mukaisesti kieliopistasi pinoautomaatti, joka tunnistaa saman kielen.
6. Tee alla olevasta pinoautomaatista Apulauseen 2.27 mukaisesti kielioppi.



7. (a) Osoita, että jos A on yhteydetön ja B säännöllinen kieli, niin $A \cap B$ on yhteydetön.

Vihje: muodosta pinoautomaatin ja äärellisen automaatin leikkausautomaatti samaan tapaan kuin Jyrkin luentojen lauseessa 1.1 (luentomateriaalin sivut 48–50).

Olkoon A yhteydetön kieli ja $M_A = (Q_A, \Sigma, \Gamma, \delta_A, q_{A0}, F_A)$ automaatti joka tunnistaa kielen A . Olkoon B säännöllinen kieli ja $M_B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, q_{B0}, F_B)$ deterministinen automaatti joka tunnistaa kielen B .

Väite. *Kieli $A \cap B$ on säännöllinen.*

Todistus. Leikkauksen tunnistava automaatti luodaan samankaltaisella menetelmällä kuin säännöllisten kielten tapauksessa. Ero säännöllisten kielten tapaukseen on siirtymäfunktion $\delta_{A \cap B}$ määrittelyssä.

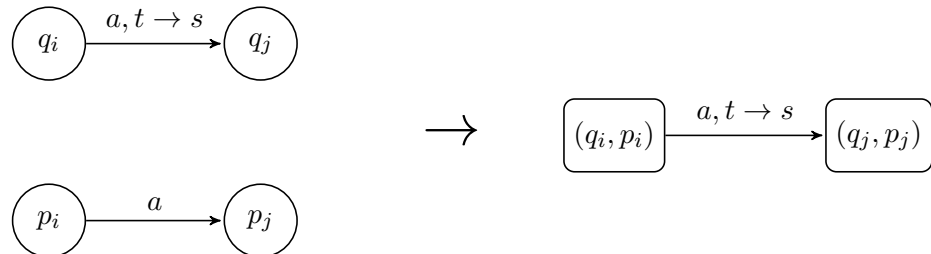
Muodostetaan siis automaatti

$$M_{A \cap B} = (Q_A \times Q_B, \Sigma, \Gamma, \delta_{A \cap B}, (q_{A0}, q_{B0}), F_A \times F_B)$$

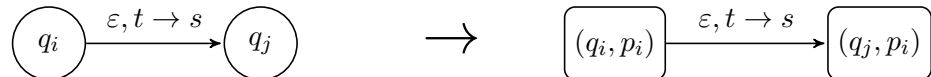
missä siirtymäfunktio $\delta_{A \cap B}$ on määritelty seuraavasti.

$$\delta_{A \cap B}((q_i, p_i), a, t) = \begin{cases} \{((q_j, p_i), s) \mid \delta_A(q_i, \varepsilon, t) = (q_j, s)\} & \text{kun } a = \varepsilon \\ \{((q_j, p_j), s) \mid \delta_B(q_i, a) = q_j \text{ ja } \delta_A(p_i, a, t) = (p_j, s)\} & \text{muulloin} \end{cases}$$

Automaatin tilajoukko on siis karteeminen tulo alkuperäisten automaattien tiloista. Kaikki uuden automaatin tilat ovat siis muotoa (q, p) missä $q \in Q_A$ ja $p \in Q_B$. Siirtymät noudattavat parin ensimmäisen alkion kohdalla automaatin M_A siirtymäfunktiota ja toisen alkion kohdalla automaatin M_B siirtymäfunktiota. Pinon käsittely noudattaa aina automaatin M_A siirtymäfunktiota, sillä automaatissa M_B ei ole pinoa.



Pinoautomaatti M_A on epädeterministinen, mutta M_B ei. Pinoautomaatin epädeterminististen siirtymien kohdalla uudessa automaatissa tilaparin jälkimmäinen alkio ei muutu. Ensimmäinen alkio noudattaa pinoautomaatin M_A siirtymäfunktiota.



Nyt luotu automaatti $M_{A \cap B}$ hyväksyy merkkijonon w jos ja vain jos M_A ja M_B hyväksyvät merkkijonon w . Siis $M_{A \cap B}$ tunnistaa kielen $A \cap B$. \square

- (b) Tiedetään, että kieli L on yhteydetön ja R säännöllinen. Voidaanko tästä päätellä, että $L - R$ on yhteydetön? Entä $R - L$? Perustele.

Väite. *Olkoon L yhteydetön ja R säännöllinen kieli. Nyt $L - R$ on yhteydetön.*

Todistus. Joukko-opista tiedämme, että $L - R = L \cap \overline{R}$. Lisäksi tiedämme, että säännölliset kielet ovat suljettuja komplementin suhteen. Nyt siis edellisen kohdan nojalla $L \cap \overline{R}$ on yhteydetön, ja siten myös $L - R$ on yhteydetön. \square

Toinen suunta ei päde yleisesti. Koska yhteydettömät kielet eivät ole suljettuja komplementin suhteen, on olemassa yhteydetön kieli jonka komplementti ei ole yhteydetön. Olkoon L jokin tällainen kieli. Olkoon nyt $R = \Sigma^*$ joka tunnetusti säännöllinen. Nyt siis L on yhteydetön ja R säännöllinen, mutta $R - L = \Sigma^* - L = \overline{L}$ joka oletuksen mukaan ei ole yhteydetön.