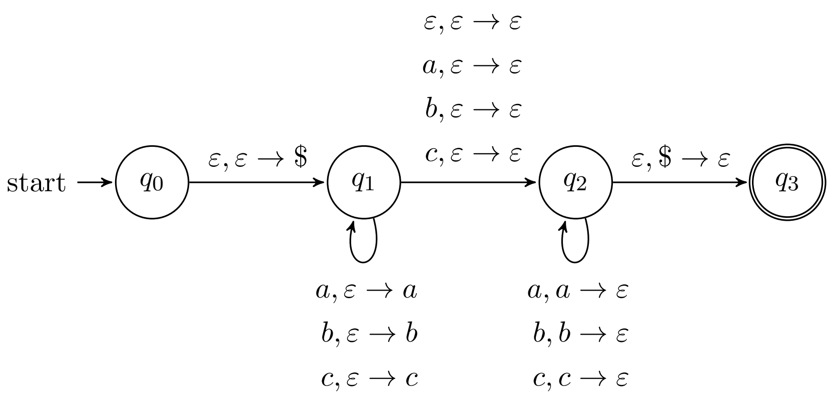
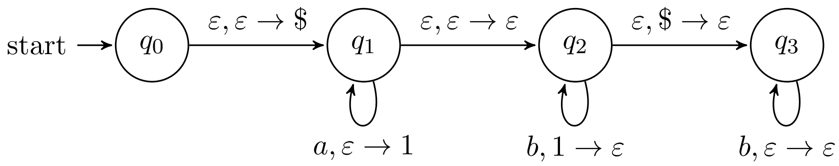
582206 Laskennan mallit, syksy 2012
7. harjoitusten malliratkaisut
Juhana Laurinharju ja Jani Rahkola

1. Esitä pinoautomaatti seuraaville kielille.

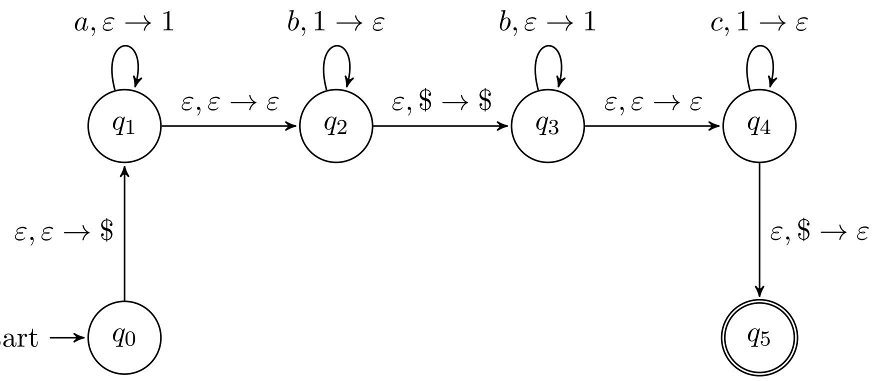
   (a) Kaikki palindromit aakkostosta $\Sigma = \{a, b, c\}$.



   (b) $\{a^i b^j \mid 0 \le i \le j\}$ missä $\Sigma = \{a, b, c\}$



   (c) $\{a^i b^j c^k \mid j = i + k\}$ missä $\Sigma = \{a, b, c\}$



   (d) Kaikki aakkoston $\Sigma = \{0, 1\}$ merkkijonot joissa nollia on kaksi kertaa niin paljon kuin ykkösiä.

2. Tarkastellaan kielioppia

$$\begin{aligned} S &\to S + T \mid T \\ T &\to T * F \mid F \\ F &\to (S) \mid a \end{aligned}$$

   Muodosta merkkijonon $s = (a + a) * a$ jäsennyspuu tämän kieliopin mukaisesti.

   Etsi jäsennyspuusta jokin juuresta lehteen johtava polku, jolla sama muuttuja esiintyy kahdessa solmussa. Muodosta tämän perusteella toistuvuusominaisuuden todistuksen ideaa mukaillen jokin merkkijonon s jako osiin $s = uvxyz$, joilla merkkijono uv^ixy^iz kuuluu tarkasteltavaan kieleen kaikilla $i \in N$.

3. Olkoon A aakkoston $\{0, 1\}$ kieli, joka koostuu niistä merkkijonoista, joissa on sama määrä nollia ja ykkösiä. Tällä kielellä on kontekstiton kielioppi

$$S \to SS \mid 0S1 \mid 1S0 \mid \varepsilon$$

(a) Kielen A eräs toistuvuuspituus on 4. Esitä kieleen A kuuluvalle merkkijonolle $s = 001101$ kaikki eri tavat jakaa se osiin $s = uvxyz$ toistuvuusominaisuuden ehdot toteuttavalla tavalla (lause 2.30; Sipser Theorem 2.34; tässä siis $p = 4$).

u	v	x	y	z
			0011	01
		0	01	101
	0		011	01
	0	0	1	101
	0	01	1	01
	00		11	01
	001		1	01
	0011			01
0			01	101
0			0110	1
0		01	10	1
0	0		1	101
0	0		110	1
0	0	1	1	01
0	01			101
0	01		10	1
0	01	1		01
0	01	10		1
0	011		0	1
0	0110			1
00		1	10	1
00		11	01	
00	1	1	0	1
001			10	1
001		1	01	
001	1		0	1
001	10			1
001	10	1		
0011			01	
0011	0		1	
0011	01			

Yhteensä 31 ehdot täyttävää jakoa.

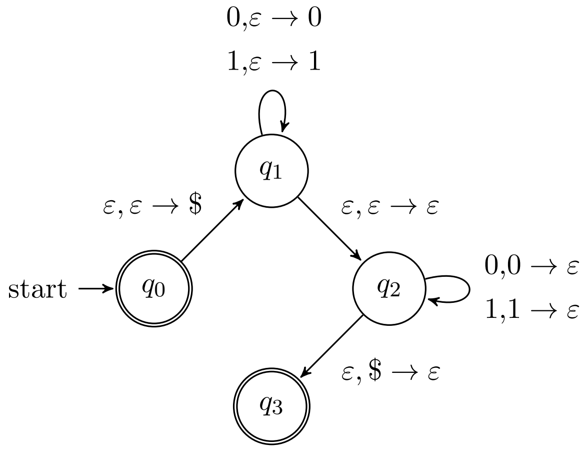
(b) Onko kielellä A pienempiä toistuvuuspituuksia kuin 4? Perustele.

4. (a) Koostukoon aakkoston $\{a, b, c\}$ kieli A merkkijonoista, joissa on yhtä monta a-, b- ja c-merkkiä. Osoita, että A ei ole yhteydetön.

   (b) Osoita, että kieli $\{0^n1^n0^n1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ei ole yhteydetön.

5. Anna yhteydetön kielioppi, joka tuottaa kielen $\{a^ib^jc^k \mid i = 2j \text{ tai } j = 2k\}$. Muodosta apulauseen 2.21 mukaisesti kieliopistasi pinoautomaatti, joka tunnistaa saman kielen.

6. Tee alla olevasta pinoautomaatista Apulauseen 2.27 mukaisesti kielioppi.



7. (a) Osoita, että jos A on yhteydetön ja B säännöllinen kieli, niin $A \cap B$ on yhteydetön.

   Vihje: muodosta pinoautomaatin ja äärellisen automaatin leikkausautomaatti samaan tapaan kuin Jyrkin luentojen lauseessa 1.1 (luentomateriaalin sivut 48–50).

   (b) Tiedetään, että kieli L on yhteydetön ja R säännöllinen. Voidaanko tästä päätellä, että $L - R$ on yhteydetön? Entä $R - L$? Perustele.