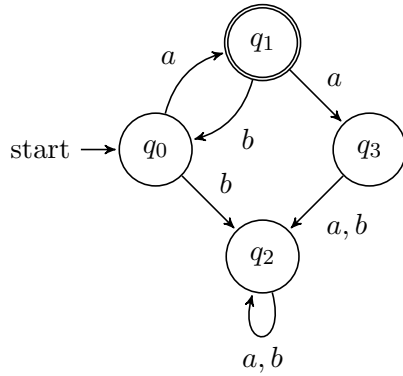


2. Harjoitusten malliratkaisut

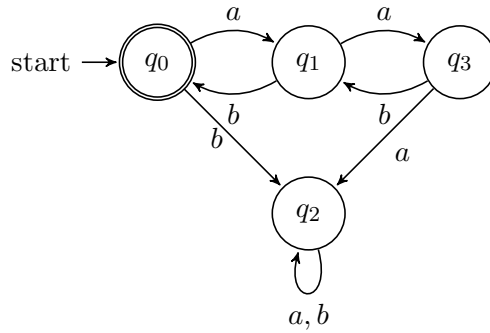
Jani Rahkola ja Juhana Laurinharju

1. Olkoon kahden äärellisen automaatin M_1 ja M_2 tilat ja siirtymät seuraavat.

- Mikä on kunkin automaatin aloitustila?
- Mitkä ovat hyväksyviä tiloja?
- Minkä tilajonon automaattit käyvät läpi syötteellä $aabb$?
- Hyväksyvätkö automaattit syötteen $aabb$?
- Hyväksyvätkö automaattit merkkijonon ε ?



M_1



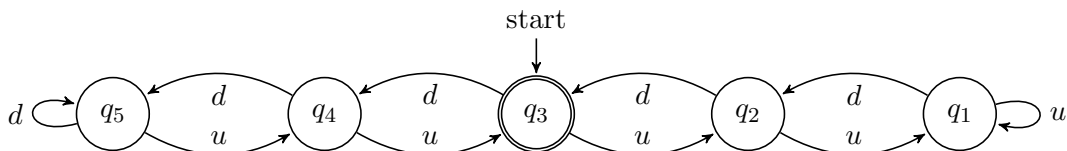
M_2

- | | | |
|-----|-------------------|-------------------|
| (a) | q_0 | q_0 |
| (b) | $\{q_1\}$ | $\{q_0\}$ |
| (c) | $q_0q_1q_3q_2q_2$ | $q_0q_1q_3q_1q_0$ |
| (d) | ei | kyllä |
| (e) | ei | kyllä |

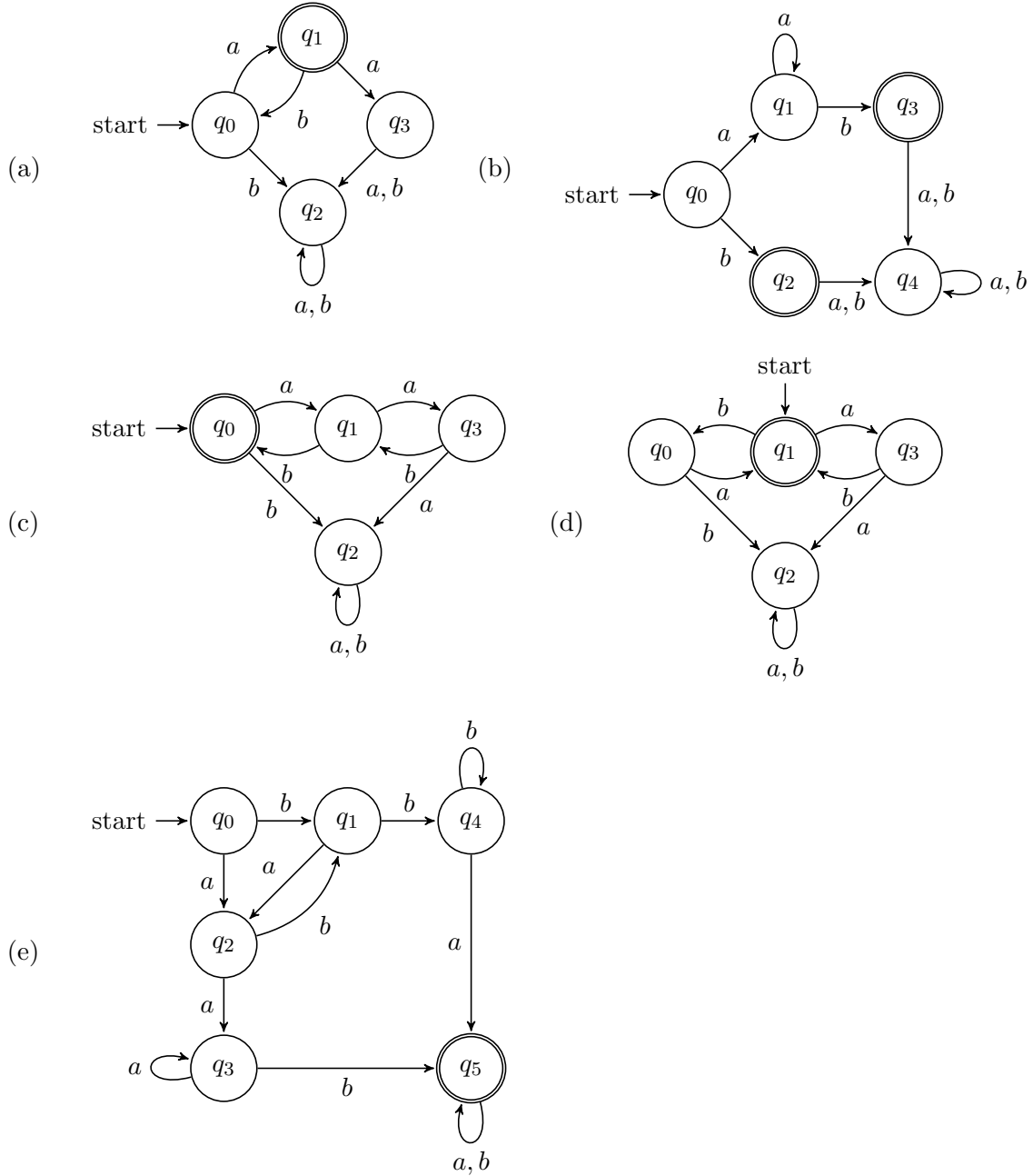
2. Olkoon äärellisen automaatin M formaali kuvaus $(\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{u, d\}, \delta, q_3, \{q_3\})$ missä siirtymäfunktion määrittelee taulukko:

	u	d
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_3
q_3	q_2	q_4
q_4	q_3	q_5
q_5	q_4	q_5

Piirrä automaatti M (tilat ja siirtymät).



3. Minkälaisia merkkijonoja eli sanoja seuraavat äärelliset automaatit hyväksyvät?



(a) $a, aba, ababa, abababa, \dots = \{a\} \circ \{ba\}^* = a(ba)^*$

(b) Merkkijonot joiden alussa on mielivaltainen määrä a -merkkiä ja lopuksi yksi b .

$$\{a\}^* \circ \{b\} = a^*b$$

(c) Sisältää saman määrän a :ta ja b :tä eikä missään kohdassa ei ole ollut siihen mennessä enempää b :tä kuin a :ta eikä missään kohdassa ole ollut siihen mennessä kolmea a :ta enemmän kuin b :tä.

$$(\{a\} \circ \{ab\}^* \circ \{b\})^* = (a(ab)^*b)^*$$

(d) Muodostettu laittamalla merkkijonoja ab ja ba peräkkäin mielivaltaisesti.

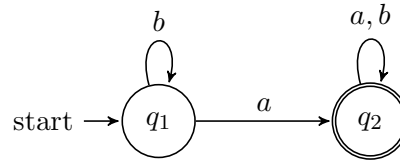
$$\{ab, ba\}^* = (ab|ba)^*$$

(e) Sisältää merkkijonon aab tai bba .

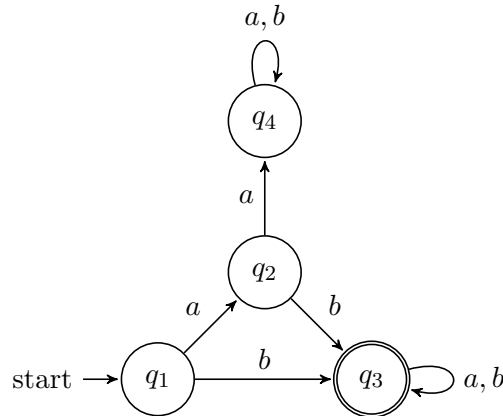
$$\{a, b\}^* \circ \{aab, bba\} \circ \{a, b\}^* = (a|b)^*(aab|bba)(a|b)^*$$

4. Piirrä äärelliset automaattit tiloineen ja siirtymänuolineen seuraaville kielille.

(a) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ sisältää ainakin yhden } a:n\}$

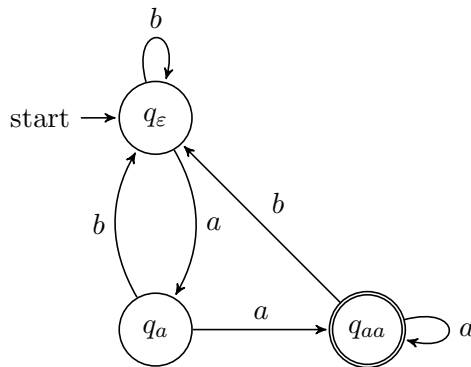


(b) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ alkaa } b \text{ tai } ab:\text{llä}\}$

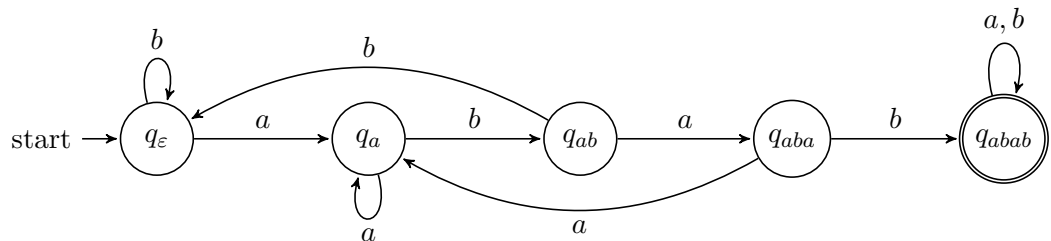


(c) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ loppuu } aa:\text{han}\}$

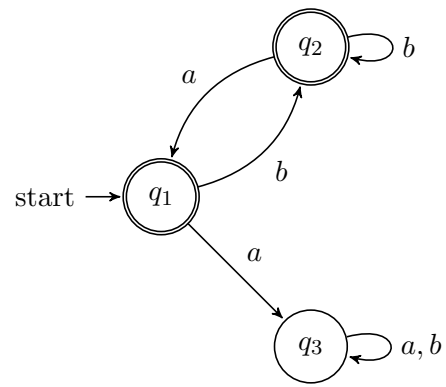
Suunnitellun automaatin olisi tarkoitus ”muistaa”, ollaanko nähty nolla, yksi vai ainakin kaksi a -merkkiä. Luodaan siis automaatile tilat jokaista kolmea vaihtoehtoa varten. Alkutilassa ei olla vielä nähty yhtään a :ta. Tilassa q_a ollaan nähty yksi a ja tilassa q_{aa} ollaan nähty ainakin kaksi a :ta.



(d) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ sisältää merkkijonon } abab\}$



(e) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{jokaisen } w:\text:ssä olevan } a:n \text{ edessä on } b\}$



5. Olkoon kielet A ja B säännöllisiä. Todista että joukkoerotus $A - B$ tuottaa säännöllisen kielen luentokalvojen yhdisteen esimerkin mukaisesti. Piirrä myös pieni esimerkki automaateista $L(M_1) = A$, $L(M_2) = B$ ja $L(M_{A-B}) = A - B$.

Koska A ja B ovat säännöllisiä, on olemassa äärelliset automaattit $M_A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, s_A, F_A)$ ja $M_B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, s_B, F_B)$ jotka tunnistavat kielet A ja B . Siis $L(M_A) = A$ ja $L(M_B) = B$.

Määritellään automaatti $M_{A-B} = (Q_{A-B}, \Sigma, \delta_{A-B}, s_{A-B}, F_{A-B})$ missä

$$\begin{aligned} Q_{A-B} &= Q_A \times Q_B \\ \delta_{A-B}((q_A, q_B), a) &= (\delta_A(q_A, a), \delta_B(q_B, a)) \\ s_{A-B} &= (s_A, s_B) \\ F_{A-B} &= \{(q_A, q_B) \in Q_{A-B} \mid q_A \in F_A \text{ ja } q_B \notin F_B\} = F_A \times (Q_B - F_B) \end{aligned}$$

Konstruktio on hyvin samanlainen kuin yhdisteautomaatillakin. Automaatti simuloi samanaikaisesti molempia alkuperäisiä automaatteja, joten tilajoukkona on $Q_A \times Q_B$ joka siis sisältää kaikki parit (q_A, q_B) , missä q_A on ensimmäisen automaatin tila ja q_B toisen automaatin tila.

Tilasiirtymä pitää nyt määritellä pareilta pareille. Määritellään se niin, että parin ensimmäisessä tilassa siirrytään ensimmäisen automaatin tilasiirtymäfunktiota noudattaen ja toisessa tilassa toisen automaatin tilasiirtymäfunktiota noudattaen.

Hyväksyviä tiloja ovat nyt sellaiset tilaparit (q_A, q_B) joissa ensimmäisen automaatin tila q_A on ensimmäisen automaatin hyväksyvä ja toinen tila q_B ei ole toisen automaatin hyväksyvä tila.

Väite. Yllä määritelty automaatti M_{A-B} tunnistaa kielen $A - B$. Siten kieli $A - B$ on säännöllinen.

Todistus. Olkoon $w \in \Sigma^*$. Nyt $w = w_1 \dots w_n$. Määritellään tilajonot

$$\begin{aligned} r &= r_1 \dots r_{n+1} \text{ ja} \\ p &= p_1 \dots p_{n+1} \end{aligned}$$

joiden läpi automaattit M_A ja M_B kulkevat merkkijonon w aikana siten, että

$$\begin{array}{ccccccc} r_1 & \xrightarrow{w_1} & r_2 & \xrightarrow{w_2} & \dots & \xrightarrow{w_n} & r_{n+1} \\ s_A & & \delta_A(s_A, w_1) & & & & \\ p_1 & \xrightarrow{w_1} & p_2 & \xrightarrow{w_2} & \dots & \xrightarrow{w_n} & p_{n+1} \\ s_B & & \delta_B(s_B, w_1) & & & & \end{array}$$

Automaatti M_A kulkee syötteellä w tilajonon r ja automaatti M_B tilajonon p läpi. Siis esimerkiksi automaatti M_A siirtyy merkillä w_i tilasta r_i tilaan r_{i+1} .

Määritellään myös vastaavasti jono

$$q = q_1 \dots q_{n+1}$$

jonka läpi automaatti M_{A-B} kulkee syötteellä w . Nyt siis

$$\begin{aligned} q_1 &= s_{A-B} = (s_A, s_B) = (r_1, p_1) \\ q_{i+1} &= \delta_{A-B}(q_i, w_i). \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} q_1 & \xrightarrow{w_1} & q_2 & \xrightarrow{w_2} & \dots & \xrightarrow{w_n} & q_{n+1} \\ s_{A-B} & & \delta_{A-B}(s_{A-B}, w_1) & & & & \end{array}$$

Intuitiivisesti näyttäisi siltä, että $q_i = (r_i, p_i)$, sillä

$$\begin{aligned} q_1 &= (r_1, p_1) \\ q_2 &= \delta_{A-B}(q_1, w_1) \\ &= (\delta_A(r_1, w_1), \delta_B(p_1, w_1)) \\ &= (r_2, p_2) \\ &\dots \end{aligned}$$

Näytetään tämä todeksi induktiolla.

Väite. $q_i = (r_i, p_i)$ tai $n + 1 < i$

Todistus.

Alkuaskel Määritelmän nojalla $q_1 = (r_1, p_1)$.

Induktioaskel

Induktio-oletus $i > n + 1$ tai $q_i = (r_i, p_i)$

Induktioaskeleen väite $i + 1 > n + 1$ tai $q_{i+1} = (r_{i+1}, p_{i+1})$

Induktioaskeleen todistus

Jos $i \geq n + 1$, niin $i + 1 > n + 1$. Tarkastellaan siis tapausta $i < n + 1$. Nyt

$$\begin{aligned} q_{i+1} &= \delta_{A-B}(q_i, w_i) && q_{i+1}\text{:n määritelmä} \\ &= \delta_{A-B}((r_i, p_i), w_i) && \text{induktio-oletus} \\ &= (\delta_A(r_i, w_i), \delta_B(p_i, w_i)) && \delta_{A-B}\text{:n määritelmä} \\ &= (r_{i+1}, p_{i+1}) && r_{i+1}\text{:n ja } p_{i+1}\text{:n määritelmät.} \end{aligned}$$

□

Automaatti M_{A-B} hyväksyy merkkijonon w jos ja vain jos $q_{n+1} \in F_{A-B}$. Näytetään nyt, että M_{A-B} hyväksyy merkkijonon w täsmälleen silloin kun w kuuluu kieleen $A - B$.

$$\begin{aligned} q_{n+1} \in F_{A-B} &\Leftrightarrow (r_{n+1}, p_{n+1}) \in F_{A-B} && \text{äskeinen induktio} \\ &\Leftrightarrow r_{n+1} \in F_A \text{ ja } p_{n+1} \notin F_B && F_{A-B}\text{:n määritelmä} \\ &\Leftrightarrow w \in A \text{ ja } w \notin B && F_A \text{ tunnistaa kielen } A \text{ ja } F_B \text{ } B\text{:n} \\ &\Leftrightarrow w \in A - B && \text{joukkoerotuksen } A - B \text{ määritelmä.} \end{aligned}$$

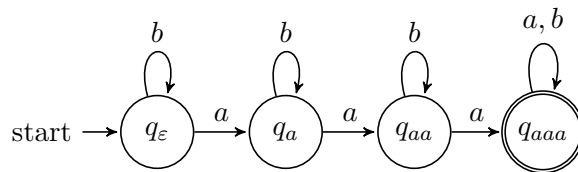
Siis kieli $A - B$ on säännöllinen.

□

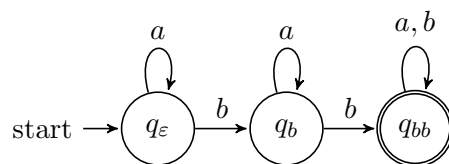
6. Seuraavat kielet koostettu yksinkertaisemmista kielistä säännöllisillä operaatioilla (kaikkia ei vielä todistettu tunnilla). Piirrä jokaisessa kohdassa ensin yksinkertaiset kielet tunnistavat automaattit tiloineen ja siirtymineen ja piirrä sen perusteella lopullinen automaatti (vrt. luentokalvojen yhdisteautomaatti). Kaikissa kohdissa $\Sigma = \{a, b\}$.

- (a) $\{w \mid w \text{ sisältää ainakin kolme } a\text{:ta ja ainakin kaksi } b\text{:tä}\}$

Automaatti joka tunnistaa kielen, jossa jokainen merkkijono sisältää ainakin kolme a :ta.



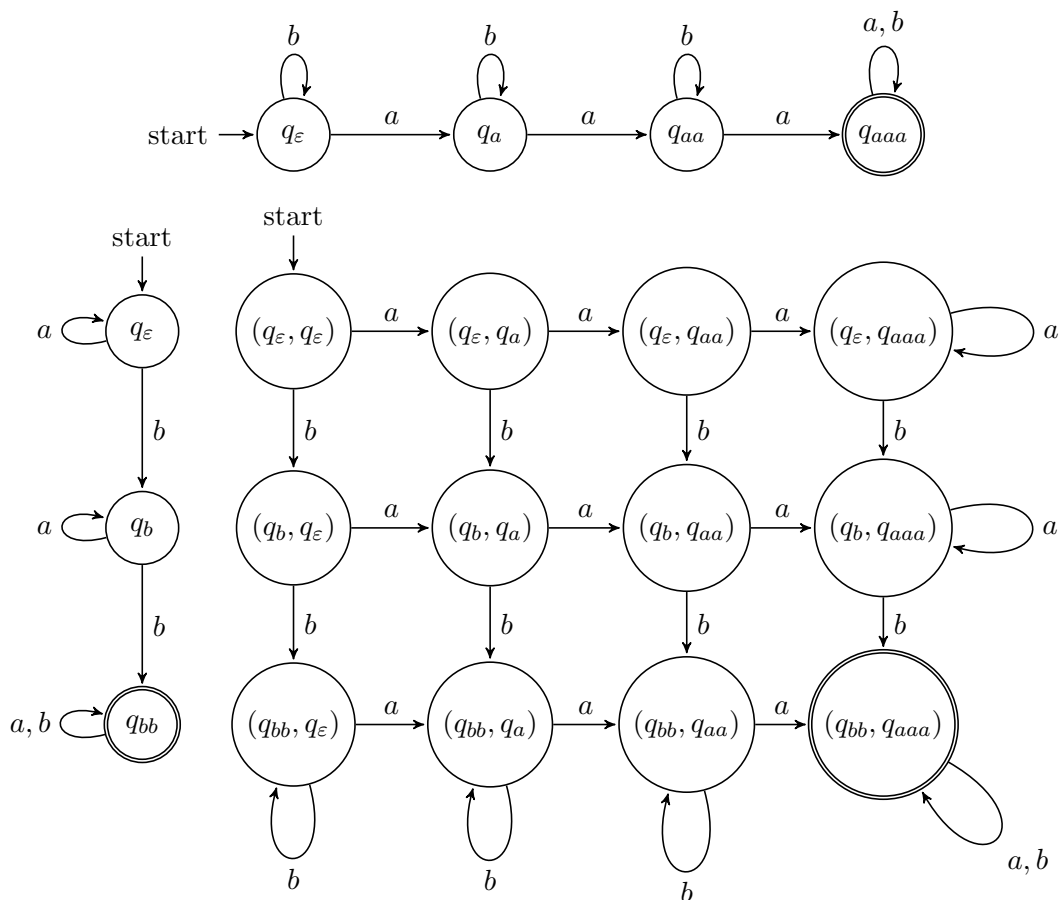
Lisäksi toinen automaatti joka tunnistaa kielen, jossa jokainen merkkijono sisältää ainakin kaksi b :tä.



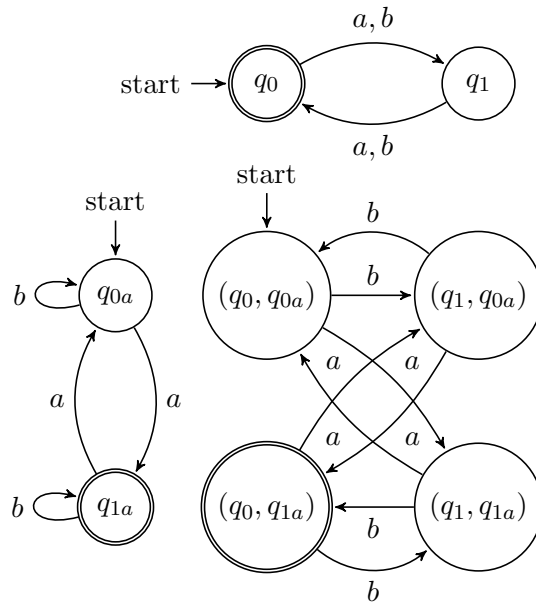
Muodostetaan näistä automaateista leikkausautomaatti. Automaatti pitää samanaikaisesti kirjaa siitä, missä tilassa kumpikin automaatti tällä hetkellä menee ja hyväksyy silloin, kun kumpikin alkuperäisistä automaateista hyväksyy.

Leikkausautomaatin tilat ovat nyt siis jälleen pareja, mutta nyt hyväksyviä tiloja ovat vain sellaiset parit (q_a, q_b) missä q_a on ensimmäisen automaatin hyväksyvä tila ja q_b on toisen automaatin hyväksyvä tila.

Tilannetta voi havainnollistaa piirtämällä toisen alkuperäisistä automaateista vaakasuunnassa ja toisen pystysuunnassa. Leikkausautomaatin voi piirtää nyt hilaksi näiden viereen.

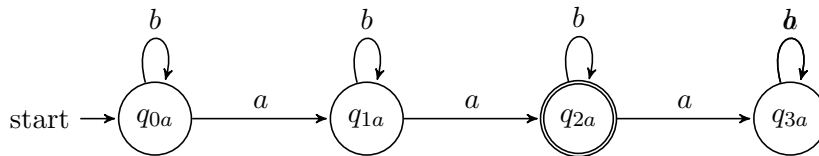


(b) $\{w \mid w\text{:n pituus on parillinen sisältäen parittoman määrän } a\text{:ta}\}$

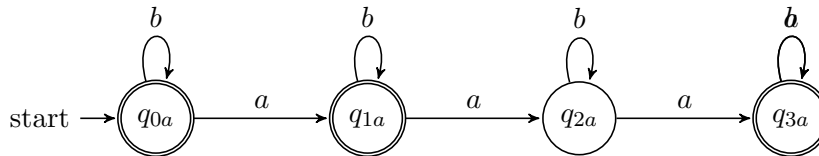


- (c) $\{w \mid w\text{:ssä olevin } a\text{-merkkien määrä ei ole kaksi}\}$

Tehdään ensin automaatti, joka hyväksyy vain merkkijonot joissa on tasan kaksi a :ta.

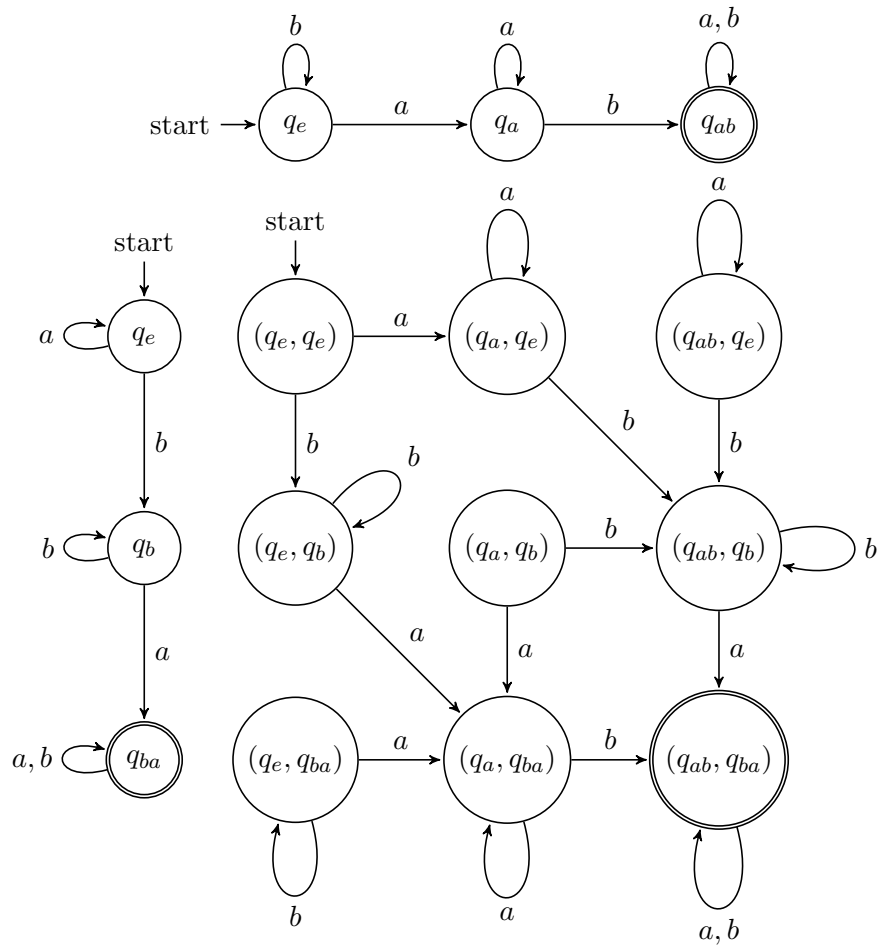


Nyt tästä saadaan merkkijono joka hyväksyy kaikki merkkijonot joissa ei ole tasan kahta a -merkkiä vaihtamalla hyväksyvät ja hylkäävät tilat keskenään.

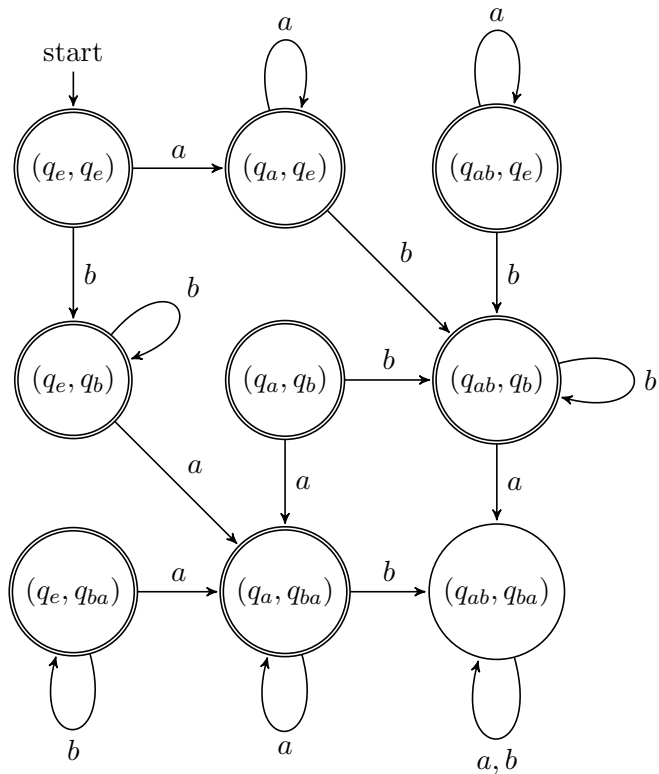


- (d) $\{w \mid w \text{ ei sisällä alimerkkijonoja } ab \text{ ja } ba\}$

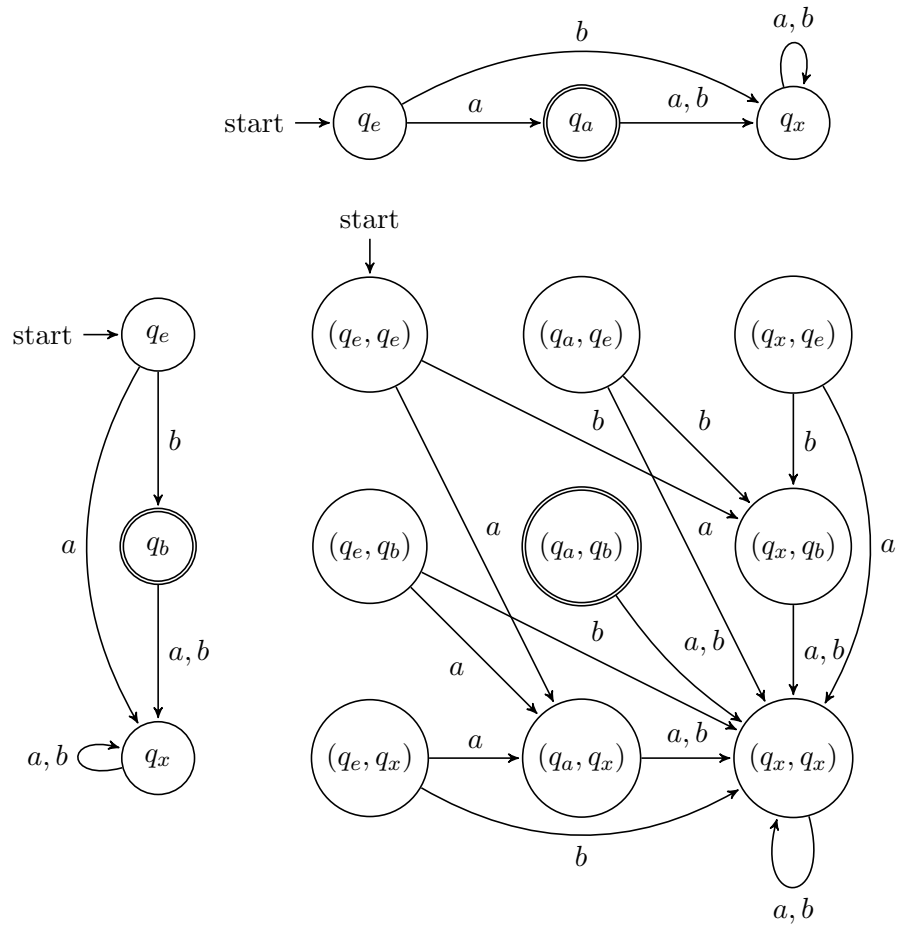
Muodostetaan ensin automaatti joka tunnistaa merkkijonon, joka sisältää sekä merkkijonon ab että ba . Tehdään tämä kuten aikaisemmissakin kohdissa.



Muodostetaan nyt tästä automaatista käänteisen kielen tunnistava automaatti kuten äs-
keisessä kohdassa. Vaihdetaan siis hyväksyvät ja hylkäävät tilat keskenään.



(e) $\{w \mid w \text{ on mikä tahansa muu merkkijono kuin } a \text{ tai } b\}$



Nyt voidaan huomata, että hyväksyvään tilaan ei voi mitenkään päästä. Tämä johtuu siitä, ettei ole olemassa merkkijonoa, joka olisi samanaikaisesti a ja b . Kieli on siis tyhjä.

Muodostetaan jälleen komplementtikielen automaatti, jonka pitäisi siis hyväksyä kaikki merkkijonot, jotka eivät ole pelkkä a tai pelkkä b . Automaatin tulisi siis hyväksyä kaikki merkkijonot.

