582206 Laskennan mallit, syksy 2012 1. Harjoitusten malliratkaisut

1. (a) $\emptyset \subseteq \emptyset$ sillä tyhjä joukko on jokaisen joukon osajoukko
   (b) $\emptyset \notin \emptyset$ sillä tyhjässä joukossa ei ole yhtään alkiota
   (c) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
   (d) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
   (e) $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b\}\}$
   (f) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{a, b\}\}$ sillä a ja b kuuluvat oikeinpuoleiseen joukkoon
   (g) $\{a, b\} \not\subseteq \mathcal{P}(\{a, b, \{a, b\}\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{\{a, b\}\}, \{a, b\}, \{a, \{a, b\}\}, \{b, \{a, b\}\}, \{a, b, \{a, b\}\}\}$
   (h) $\{\{a, b\}\} \in \mathcal{P}(\{a, b, \{a, b\}\})$
   (i) $\underbrace{\{a, b, \{a, b\}\} - \{a, b\}}_{\{\{a,b\}\}} \neq \{a, b\}$

2. (a)

$$\begin{aligned}(\{1, 3, 5\} \cup \{3, 1\}) \cap \{3, 5, 7\} &= \{1, 3, 5\} \cap \{3, 5, 7\} \\ &= \{3, 5\}\end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned}\bigcup\{\{3\}, \{3, 5\}, \bigcap\{\{5, 7\}, \{7, 9\}\}\} &= \bigcup\{\{3\}, \{3, 5\}, \{5, 7\} \cap \{7, 9\}\} \\ &= \bigcup\{\{3\}, \{3, 5\}, \{7\}\} \\ &= \{3\} \cup \{3, 5\} \cup \{7\} \\ &= \{3, 5, 7\}\end{aligned}$$

   (c)

$$\begin{aligned}(\{1, 2, 5\} - \{5, 7, 9\}) \cup (\{5, 7, 9\} - \{1, 2, 5\}) &= \{1, 2\} \cup \{7, 9\} \\ &= \{1, 2, 7, 9\}\end{aligned}$$

   (d)

$$\mathcal{P}(\{7, 8, 9\}) - \mathcal{P}(\{7, 9\}) = \{\{8\}, \{7, 8\}, \{8, 9\}, \{7, 8, 9\}\}$$

   Tulosjoukkoon siis jäävät ne osajoukot joissa esiintyy 8.

   (e)

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

3. (a)

$$\{1\} \times \{1,2\} \times \{1,2,3\} = \{(1,1),(1,2)\} \times \{1,2,3\}$$
$$= \{(1,2,1),(1,1,2),(1,1,3),(1,2,1),(1,2,2),(1,2,3)\}$$

(b)

$$\emptyset \times \{1,2\} = \emptyset$$

$(a,b) \in \emptyset \times \{1,2\} \Rightarrow a \in \emptyset$ ja koska tyhjässä joukossa ei ole yhtään alkiota, on karteesinen tulo tyhjän joukon kanssa aina tyhjä joukko.

(c)

$$\mathcal{P}(\{1,2\}) \times \{1,2\} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\} \times \{1,2\}$$
$$= \{(\emptyset,1),(\emptyset,2),(\{1\},1),(\{1\},2),$$
$$(\{2\},1),(\{2\},2),(\{1,2\},1),(\{1,2\},2)\}$$

(d)

$$\mathcal{P}(\{\varepsilon\}) = \{\emptyset, \{\varepsilon\}\}$$

4. Ovatko seuraavat väittämät tosia? Selitä miksi jos ovat tai eivät ole.

(a)

Väite. $\{\varepsilon\}^* = \{\varepsilon\}$

Todistus.

$$\{\varepsilon\}^* = \{w_1 w_2 \ldots w_n \mid w_i \in \{\varepsilon\} \text{ kaikilla } 1 \leq i \leq n\}$$
$$= \{w_1 w_2 \ldots w_n \mid w_i = \varepsilon \text{ kaikilla } 1 \leq i \leq n\}$$
$$= \{\varepsilon^k \mid k \geq 1\}$$
$$= \{\varepsilon\}$$

□

(b)

Väite. *Mielivaltaisella aakkostolla* Σ *ja millä tahansa kielellä* $L \subseteq \Sigma^*$, $(L^*)^* = L^*$.

Todistus.
$L^* \subseteq (L^*)^*$
Olkoon $w \in L^*$. Nyt $w \in (L^*)^* = \{w_1 w_2 \ldots w_n \mid n \geq 0, w_i \in L^*$ kaikilla $1 \leq i \leq n\}$ asettamalla $n = 1$ ja $w_1 = w$.

$(L^*)^* \subseteq L^*$

Olkoon $w \in (L^*)^*$. Tällöin

$$w = w_1 w_2 \dots w_n$$

missä $w_i \in L^*$ jokaisella $1 \leq i \leq n$. Olkoon $1 \leq i \leq n$. Nyt

$$w_i = w_{i,1} w_{i,2} \dots w_{i,k_i}$$

missä $w_{i,j} \in L$ joten

$$\begin{aligned} w &= w_1 w_2 \dots w_n \\ &= w_{1,1} \dots w_{1,k_1} \dots w_{n,k_n} \end{aligned}$$

Nyt siis $w \in L^*$ ja siten $(L^*)^* \subseteq L^*$.

□

(c)

Väite. *Jos $a \neq b$, niin $\{a, b\}^* = \{a\}^* \circ (\{b\} \circ \{a\}^*)^*$.*

Todistus. □

(d)

Väite. *Jos Σ on mielivaltainen aakkosto, $\varepsilon \in L_1 \subseteq \Sigma^*$ ja $L_2 \subseteq \Sigma^*$, niin $(L_1 \circ \Sigma^* \circ L_2)^* = \Sigma^*$.*

Todistus. Merkitään $L = (L_1 \circ \Sigma^* \circ L_2)^*$.

$L \subseteq \Sigma^*$:

Olkoon $w \in L$. Nyt $w = l_1 v l_2$ jollain $l_1 \in L_1$, $v \in \Sigma^*$ ja $l_2 \in L_2$ ja koska

$$\begin{aligned} l_1 \in L_1 \subseteq \Sigma^* \Rightarrow l_1 \in \Sigma^* \\ l_2 \in L_2 \subseteq \Sigma^* \Rightarrow l_2 \in \Sigma^* \end{aligned}$$

niin $w = l_1 v l_2 \in \Sigma^* \circ \Sigma^* \circ \Sigma^* = \Sigma^*$. Siis $L \subseteq \Sigma^*$.

$\Sigma^* \subseteq L$:

Olkoon $w \in \Sigma^*$. Nyt $w = \varepsilon w \varepsilon$ ja koska $\varepsilon \in L_1$ ja $\varepsilon \in L_2$, niin $w \in L$. Siis $\Sigma^* \subseteq L$.

Koska $\Sigma^* \subseteq L$ ja $L \subseteq \Sigma^*$, niin $\Sigma^* = L = (L_1 \circ \Sigma^* \circ L_2)^*$.

□

(e)

Väite. *Kaikilla kielillä L, $\emptyset \circ L = L \circ \emptyset = \emptyset$.*

Todistus. Jos $uv \in \emptyset \circ L$, niin $u \in \emptyset$. Koska tyhjässä joukossa ei ole yhtään alkiota, niin myös $\emptyset \circ L$ on tyhjä joukko. Vastaavasti tapauksella $L \circ \emptyset$. Siis $\emptyset \circ L = L \circ \emptyset = \emptyset$. □

5. Olkoon $\Sigma = \{a, b\}$. Esitä joitakin esimerkkejä merkkijonoista, jotka kuuluvat tai eivät kuulu alla määriteltyihin joukkoihin.

   (a) $\{w \mid w = uu^R u \text{ jollakin } u \in \Sigma \circ \Sigma\}$

   Joukkoon kuuluvat siis merkkijonot *aaaaaa*, *bbbbbb*, *abbaab* ja *baabba*.

   (b) $\{w \mid ww = www\}$

   Jos $ww = www$, niin $|ww| = |www|$ ja $2|w| = 3|w|$. Tämä pätee vain jos $|w| = 0$, joten $w = \varepsilon$. Joukkoon kuuluu siis vain tyhjä merkkijono.

   (c) $\{w \mid uvw = wvu \text{ joillakin } u, v \in \Sigma^*\}$

   Valitaan $u = v = \varepsilon$. Nyt $uvw = w = wvu$ kaikilla w. Joukkoon kuuluvat siis kaikki mahdolliset merkkijonot.

   (d) $\{w \mid www = uu \text{ jollakin } u \in \Sigma^*\}$

   Esimerkiksi *ab* kuuluu joukkoon, sillä $(ab)(ab)(ab) = (aba)(aba)$. Toisaalta *abbb* ei kuulu määriteltyyn joukkoon, sillä $(abbb)(abbb)(abbb) = (abbbab)(bbabbb)$ mutta $abbbab \neq bbabbb$. Tämä esimerkki näyttää että kuuluvuusehdoksi ei riitä pituuden parillisuus.

6. Milloin yhtälö $L^+ = L^* - \{\varepsilon\}$ on tosi? Tässä $L^+ = \{l_1 l_2 \dots l_k \mid k \geq 1 \text{ ja } l_i \in L \text{ kaikilla } i\}$

   Väite. *$L^+ = L^* - \{\varepsilon\}$ jos ja vain jos $\varepsilon \notin L$.*

   Todistus. Jos $w \in L$, niin $w \in L^+$. Täten jos $\varepsilon \notin L^+$, niin $\varepsilon \notin L$. Jos $\varepsilon \notin L$, niin ei ole olemassa merkkijonoa $l_1 l_2 \dots l_k = \varepsilon$ missä $l_i \in L$ kaikilla i. Täten $\varepsilon \notin L^+$. Muistetaan lisäksi, että $L^* = L^+ \cup \{\varepsilon\}$. Nyt pätee

$$
\begin{aligned}
\varepsilon \notin L &\Leftrightarrow \varepsilon \notin L^+ \\
&\Leftrightarrow L^+ = L^+ - \{\varepsilon\} \\
&\Leftrightarrow L^+ = (L^+ \cup \{\varepsilon\}) - \{\varepsilon\} \\
&\Leftrightarrow L^+ = L^* - \{\varepsilon\}
\end{aligned}
$$

   Siis $\varepsilon \notin L \Leftrightarrow L^+ = L^* - \{\varepsilon\}$. □

7. Etsi seuraavat ehdot täyttävät merkkijonot.

   (a) Kaksi erillaista viiden mittaista merkkijonoa, joilla täsmälleen samat alimerkkijonot lukuunottamatta sanoja itseään.

   Merkkijonoilla *ababa* ja *babab* on alimerkkijonot ε, *a*, *b*, *ab*, *ba*, *aba*, *bab*, *abab*, ja *baba*.

(b) Merkkijono joka koostuu merkeistä a ja b eikä ole kahden palindromin ketjutus.

$abaabb$ on halutunlainen, sillä se ei itsessään ole palindromi, ja lisäksi $a(baabb)$, $(ab)aabb$, $aba(abb)$, $(abaa)bb$ ja $(abaab)b$ eivät ole kahden palindromin ketjutuksia.

(c) Viiden merkin mittainen merkkijono joka sisältää kaikki mahdolliset aakkoston $\{a, b\}$ kahden mittaiset merkkijonot alimerkkijonoinaan.

Kaikki kahden mittaiset merkkijonot aakkostosta $\{a, b\}$ ovat aa, bb, ab ja ba. Merkkijono $abbaa$ sisältää nämä kaikki.