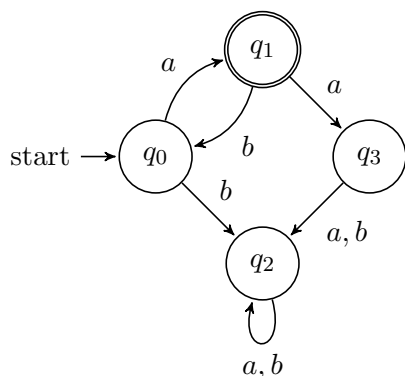
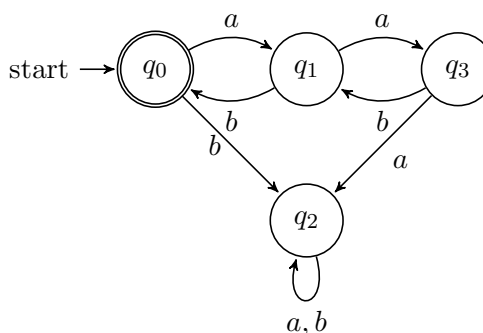


2. Harjoitusten malliratkaisut

Jani Rahkola ja Juhana Laurinharju

1. Olkoon kahden äärellisen automaatin M_1 ja M_2 tilat ja siirtymät seuraavat.

- (a) Mikä on kunkin automaatin aloitustila?
 (b) Mitkä ovat hyväksyviä tiloja?
 (c) Minkä tilajonon automaattit käyvät läpi syötteellä $aabb$?
 (d) Hyväksyvätkö automaattit syötteen $aabb$?
 (e) Hyväksyvätkö automaattit merkkijonon ε ?

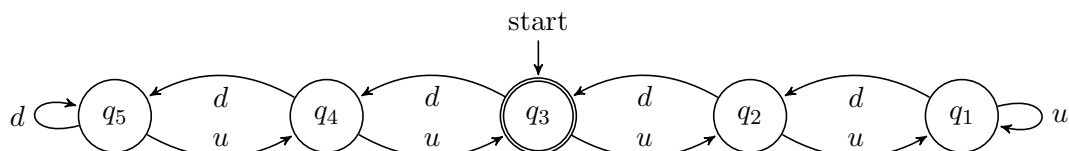
 M_1  M_2

- | | | |
|-----|-------------------|-------------------|
| (a) | q_0 | q_0 |
| (b) | $\{q_1\}$ | $\{q_0\}$ |
| (c) | $q_0q_1q_3q_2q_2$ | $q_0q_1q_3q_1q_0$ |
| (d) | ei | kyllä |
| (e) | ei | kyllä |

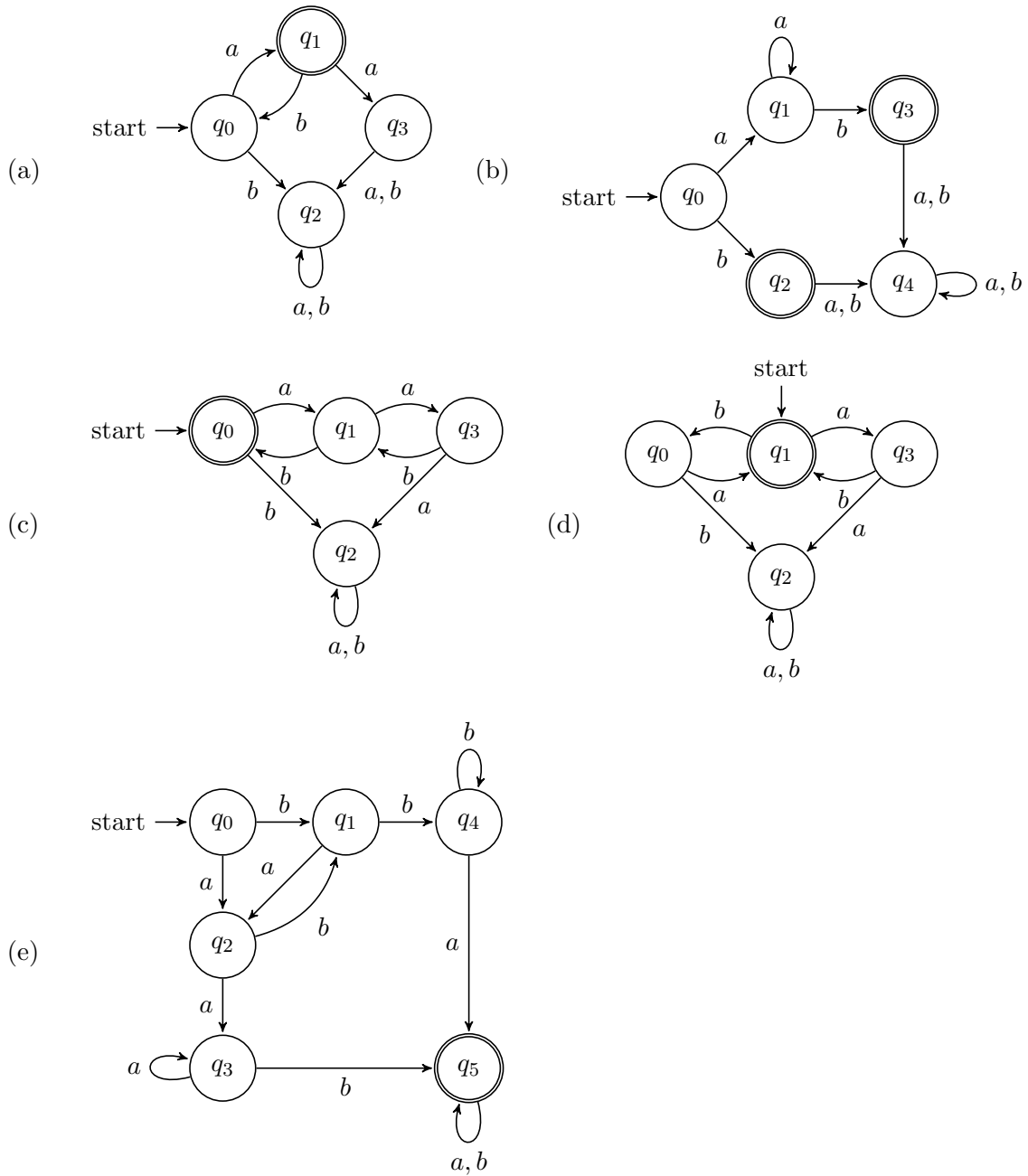
2. Olkoon äärellisen automaatin M formaali kuvaus $(\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{u, d\}, \delta, q_3, \{q_3\})$ missä siirtymäfunktion määrittelee taulukko:

	u	d
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_3
q_3	q_2	q_4
q_4	q_3	q_5
q_5	q_4	q_5

Piirrä automaatti M (tilat ja siirtymät).



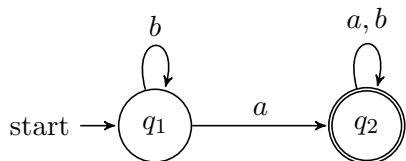
3. Minkälaisia merkkijonoja eli sanoja seuraavat äärelliset automaattit hyväksyvät?



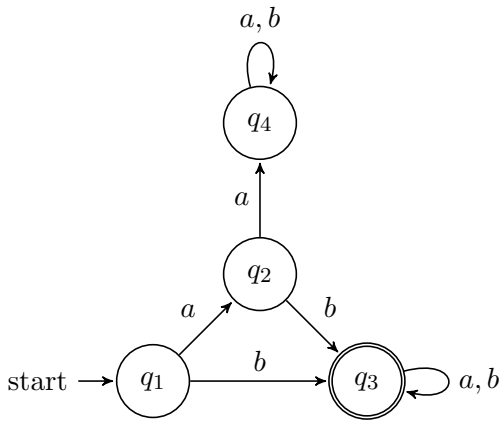
- (a) $\{a\} \circ \{ba\}^* = a(ba)^*$
 (b) $\{a\}^* \circ \{b\} = a^*b$
 (c) $(\{a\} \circ \{ab\}^* \circ \{b\})^* = (a(ab)^*b)^*$
 (d) $\{ab\}^* \cup \{ba\}^* = (ab)^*|(ba)^*$
 (e) $\{a, b\}^* \circ \{aab, bba\} \circ \{a, b\}^* = (a|b)^*(aab|bba)(a|b)^*$

4. Piirrä äärelliset automaatit tiloiheen ja siirtymänuoloiheen seuraaville kielille.

- (a) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ sisältää ainakin yhden } a:n\}$

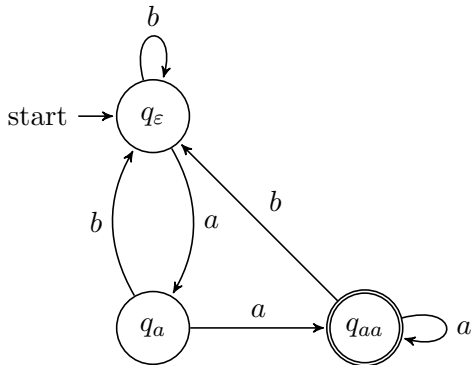


- (b) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ alkaa } b \text{ tai } ab:\text{llä}\}$

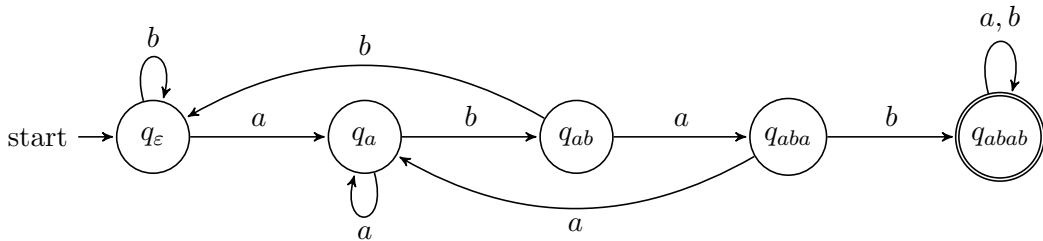


(c) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ loppuu } aa\text{:han}\}$

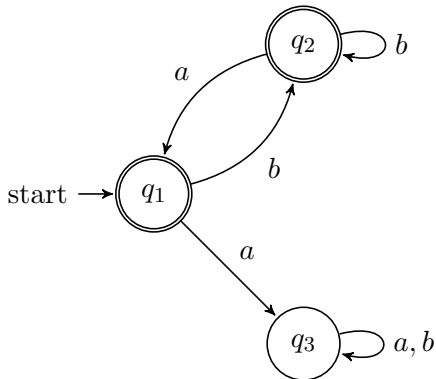
Suunnitellun automaatin olisi tarkoitus ”muistaa”, ollaanko nähty nolla, yksi vai ainakin kaksi a -merkkiä. Luodaan siis automaatille tilat jokaista kolmea vaihtoehtoa varten. Alku-tilassa ei olla vielä nähty yhtään a :ta. Tilassa q_a ollaan nähty yksi a ja tilassa q_{aa} ollaan nähty ainakin kaksi a :ta.



(d) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ sisältää merkkijonon } abab \}$



(e) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{jokaisen } w\text{:ssä olevan } a\text{:n edessä on } b\}$



5. Olkoon kielet A ja B säännöllisiä. Todista että joukkoerotus $A - B$ tuottaa säännöllisen kielien luentokalvojen yhdisteen esimerkin mukaisesti. Piirrä myös pieni esimerkki automaateista $L(M_1) = A$, $L(M_2) = B$ ja $L(M_{A-b}) = A - B$.

Koska A ja B ovat säännöllisiä, on olemassa äärelliset automaatit $M_A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, s_A, F_A)$ ja $M_B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, s_B, F_B)$ jotka tunnistavat kielet A ja B . Siis $L(M_A) = A$ ja $L(M_B) = B$.

Määritellään automaatti $M_{A-B} = (Q_{A-B}, \Sigma, \delta_{A-B}, s_{A-B}, F_{A-B})$ missä

$$\begin{aligned} Q_{A-B} &= Q_A \times Q_B \\ \delta_{A-B}((q_A, q_B), a) &= (\delta_A(q_A, a), \delta_B(q_B, a)) \\ s_{A-B} &= (s_A, s_B) \\ F_{A-B} &= \{(q_A, q_B) \in Q_{A-B} \mid q_A \in F_A \text{ ja } q_B \notin F_B\} = F_A \times (Q_B - F_B) \end{aligned}$$

FIXME: Motivaatio

Väite. Yllä määritelty automaatti M_{A-B} tunnistaa kielen $A - B$. Siten kieli $A - B$ on säännöllinen.

Todistus. Olkoon $w \in \Sigma^*$. Nyt

$$w = w_1 \dots w_n.$$

Määritellään tilajonot

$$\begin{aligned} r &= r_1 \dots r_{n+1} \text{ ja} \\ p &= p_1 \dots p_{n+1} \end{aligned}$$

joiden läpi automaattit M_A ja M_B kulkevat merkkijonon w aikana siten, että

$$\begin{aligned} r_1 &= s_A & p_1 &= s_B \\ r_{i+1} &= \delta_A(r_i, w_i) & p_{i+1} &= \delta_B(p_i, w_i). \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & w_1 & & w_2 & & w_n \\ & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright \\ r_1 & & & r_2 & & \dots & r_{n+1} \\ s_A & & & & & & \end{array}$$

Automaatti M_A kulkee syötteellä w tilajonon r ja automaatti M_B tilajonon p läpi. Siis esimerkiksi automaatti M_A siirtyy merkillä w_i tilasta r_i tilaan r_{i+1} .

Määritellään myös vastaavasti jono

$$q = q_1 \dots q_{n+1}$$

jonka läpi automaatti M_{A-B} kulkee syötteellä w . Nyt siis

$$\begin{aligned} q_1 &= (s_A, s_B) = (r_1, p_1) \\ q_{i+1} &= \delta_{A-B}(q_i, w_i) \\ &= \delta_{A-B}((r_i, p_i), w_i) \\ &= (\delta_A(r_i, w_i), \delta_B(p_i, w_i)) \\ &= (r_{i+1}, p_{i+1}). \end{aligned}$$

Tällöin automaatti M_{A-B} hyväksyy merkkijonon w jos ja vain jos $q_{n+1} \in F_{A-B}$.

$$\begin{aligned} q_{n+1} \in F_{A-B} &\Leftrightarrow (r_{n+1}, p_{n+1}) \in F_{A-B} \\ &\Leftrightarrow r_{n+1} \in F_A \text{ ja } p_{n+1} \notin F_B \\ &\Leftrightarrow w \in A \text{ ja } w \notin B \\ &\Leftrightarrow w \in A - B \end{aligned}$$

Siis automaatti M_{A-B} hyväksyy merkkijonon w täsmälleen silloin kun merkkijono w kuuluu kieleen $A - B$. Siis kieli $A - B$ on säännöllinen. \square