

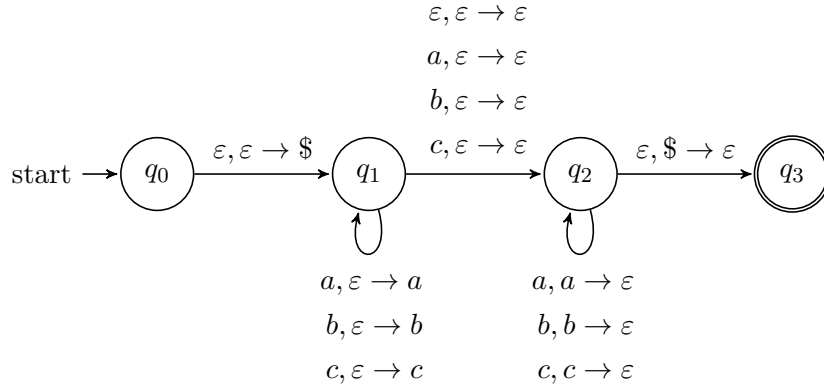
# 582206 Laskennan mallit, syksy 2012

## 7. harjoitusten malliratkaisut

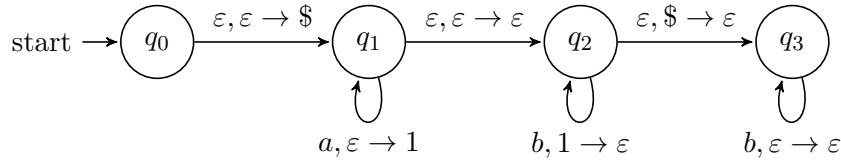
Juhana Laurinharju ja Jani Rahkola

1. Esitä pinoautomaatti seuraaville kielille.

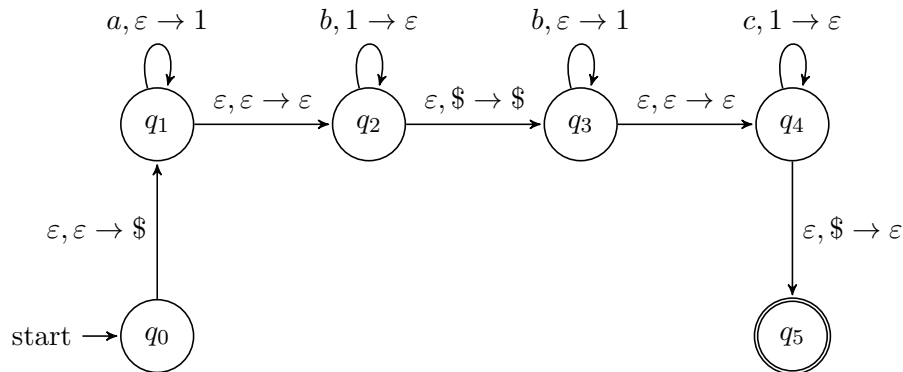
(a) Kaikki palindromit aakkostosta  $\Sigma = \{a, b, c\}$ .



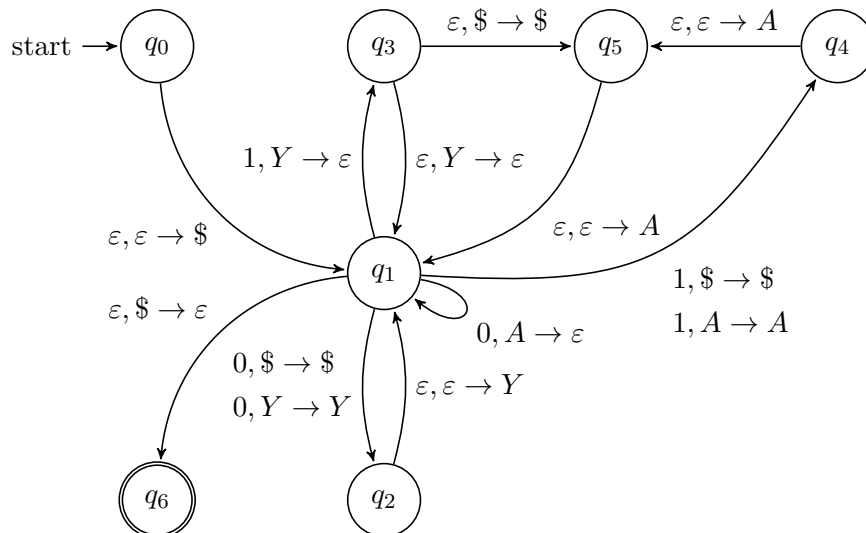
(b)  $\{a^i b^j \mid 0 \leq i \leq j\}$  missä  $\Sigma = \{a, b, c\}$



(c)  $\{a^i b^j c^k \mid j = i + k\}$  missä  $\Sigma = \{a, b, c\}$



(d) Kaikki aakkoston  $\Sigma = \{0, 1\}$  merkkijonot joissa nollia on kaksi kertaa niin paljon kuin ykkösiä.



Automaatin ideana on pitää pinossa kirjaa siitä kuinka paljon nolla-merkkien määrässä on yli- tai alijäämää. Pinoon laitetaan  $A$  jos siirtymä kerryttää alijäämää ja  $Y$  jos se kerryttää ylijäämää. Vastaavasti pinosta poistetaan merkkejä aina tilaisuuden tullen, kun syötemerkin lukeminen tasoittaa nollien ja ykkösten suhdetta.

## 2. Tarkastellaan kielioppia

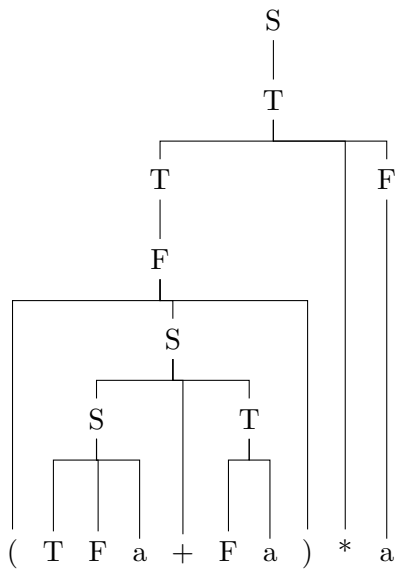
$$S \rightarrow S + T \mid T$$

$$T \rightarrow T * F \mid F$$

$$F \rightarrow (S) \mid a$$

Muodosta merkkijonon  $s = (a + a) * a$  jäsenyspuu tämän kieliopin mukaisesti.

Etsi jäsenyspuusta jokin juuresta lehteen johtava polku, jolla sama muuttuja esiintyy kahdessa solmussa. Muodosta tämän perusteella toistuvuusominaisuuden todistuksen ideaa mukailen jokin merkkijonon  $s$  jako osiin  $s = uvxyz$ , joilla merkkijono  $uv^i xy^i z$  kuuluu tarkasteltavaan kieleen kaikilla  $i \in \mathbb{N}$ .



## 3. Olkoon $A$ aakkoston $\{0, 1\}$ kieli, joka koostuu niistä merkkijonoista, joissa on sama määrä nollia ja ykkösiä. Tällä kielellä on kontekstiton kielioppi

$$S \rightarrow SS \mid 0S1 \mid 1S0 \mid \varepsilon$$

- (a) Kielen  $A$  eräs toistuvuuspituus on 4. Esitä kieleen  $A$  kuuluvalla merkkijonolle  $s = 001101$  kaikki eri tavat jakaa se osiin  $s = uvxyz$  toistuvuusominaisuuden ehdot toteuttavalla tavalla (lause 2.30; Sipser Theorem 2.34; tässä siis  $p = 4$ ).

$u$	$v$	$x$	$y$	$z$
			0011	01
		0	01	101
	0		011	01
	0	0	1	101
	0	01	1	01
	00		11	01
	001		1	01
	0011			01
0			01	101
0			0110	1
0		01	10	1
0	0		1	101
0	0		110	1
0	0	1	1	01
0	01			101
0	01		10	1
0	01	1		01
0	01	10		1
0	011		0	1
0	0110			1
00		1	10	1
00		11	01	
00	1	1	0	1
001			10	1
001		1	01	
001	1		0	1
001	10			1
001	10	1		
0011			01	
0011	0		1	
0011	01			

Yhteensä 31 ehdot täyttävää jakoa.

(b) Onko kielellä  $A$  pienempiä toistuvuuspituuksia kuin 4? Perustele.

4. (a) Koostukoon aakkoston  $\{a, b, c\}$  kieli  $A$  merkkijonoista, joissa on yhtä monta  $a$ -,  $b$ - ja  $c$ -merkkiä.

**Väite.** *Kieli  $A$  ei ole yhteydetön.*

*Todistus.* Oletetaan vastoin väitettä, että kieli  $A$  on yhteydetön. Nyt tehtävässä 7 todistetun nojalla leikkaus  $A \cap L(a^*b^*c^*) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  on yhteydetön. Tämä on kuitenkin tunnetusti ristiriita. Siis kieli  $A$  ei ole yhteydetön.  $\square$

- (b) Osoita, että kieli  $\{0^n 1^n 0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ei ole yhteydetön.

**Väite.** *Kieli  $A = \{0^n 1^n 0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ei ole yhteydetön.*

*Todistus.* Oletetaan vastoin väitettä, että kieli  $A$  on yhteydetön. Nyt pumppauslemman nojalla sillä on pumppauspituus  $p$ . Valitaan merkkijono  $s = 0^p 1^p 0^p 1^p$ . Nyt merkkijonon jakojen  $s = uvxyz$  tulisi täyttää pumppauslemman ehdot.

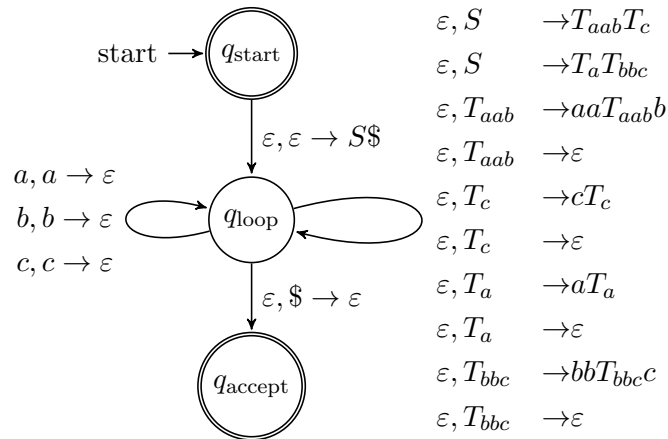
Merkkijonon  $s$  pituus on  $4p$  ja koska osaan  $vxy$  ei saa tulla yli  $p$ :tä merkkiä, täytyy osiin  $u$  ja  $z$  jäädä yhteensä vähintään  $3p$  merkkiä. Nyt siis joko osaan  $u$  jäävät ainakin kaikki merkkijonon  $p$  ensimmäistä nollaa, tai osaan  $z$  jäävät ainakin kaikki merkkijonon  $p$  viimeistä ykköstä.

Jos kieleen  $A$  kuuluvassa merkkijonossa on  $p$  kappaletta peräkkäisiä nollia tai  $p$  kappaletta peräkkäisiä ykkösiä, täytyy merkkijonon pituuden olla  $4p$ . Pumpauslemman mukaan merkkijonon  $uv^0xy^0z = uxz$  tulisi kuulua kieleen  $A$ . Koska osat  $u$  ja  $z$  pitävät sisällään joko  $p$  nollaa tai  $p$  ykköstä, tulisi merkkijonon  $uxz$  pituuden olla edelleen  $4p$  jotta se voisi kuulua kieleen  $A$ . Koska puuttuvat osat  $v$  ja  $y$  eivät kuitenkaan saaneet molemmat olla tyhjiä, täytyy merkkijonon  $uxz$  pituuden olla aidosti vähemmän kuin  $4p$ . Siis  $uxz$  ei kuulu kieleen  $A$ , mikä on ristiriita. Täten kieli  $A$  ei ole yhdeydetön.  $\square$

5. Anna yhteydetön kielioppi, joka tuottaa kielen  $\{a^i b^j c^k \mid i = 2j \text{ tai } j = 2k\}$ . Muodosta apulauseen 2.21 mukaisesti kieliopistasi pinoautomaatti, joka tunnistaa saman kielen.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow T_{aab}T_c \mid T_aT_{bbc} \\ T_{aab} &\rightarrow aaT_{aab}b \mid \varepsilon \\ T_c &\rightarrow cT_c \mid \varepsilon \\ T_a &\rightarrow aT_a \mid \varepsilon \\ T_{bbc} &\rightarrow bbT_{bbc}c \mid \varepsilon \end{aligned}$$

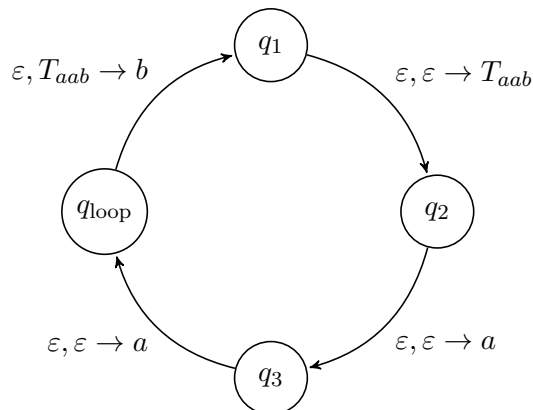
Jos automaateissa saisi laittaa monta aakkosta pinoon kerralla, näyttäisi automaatti seuraavalta:



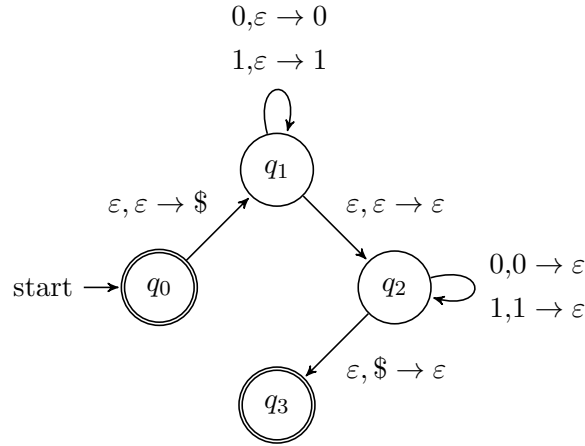
Jokainen sääntö, jossa pinoon lisätään monta symbolia kerralla voidaan avata silmukaksi. Esimerkiksi sääntö

$$\varepsilon, T_{aab} \rightarrow aaT_{aab}b$$

voidaan toteuttaa tavallisella pinokoneella seuraavasti:



6. Tee alla olevasta pinoautomaatista Apulauseen 2.27 mukaisesti kielioppi.



7. (a) Osoita, että jos  $A$  on yhteydetön ja  $B$  säännöllinen kieli, niin  $A \cap B$  on yhteydetön.

*Vihje:* muodosta pinoautomaatin ja äärellisen automaatin leikkausautomaatti samaan tapaan kuin Jyrkin luentojen lauseessa 1.1 (luentomateriaalin sivut 48–50).

Olkoon  $A$  yhteydetön kieli ja  $M_A = (Q_A, \Sigma, \Gamma, \delta_A, q_{A0}, F_A)$  automaatti joka tunnistaa kielen  $A$ . Olkoon  $B$  säännöllinen kieli ja  $M_B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, q_{B0}, F_B)$  deterministinen automaatti joka tunnistaa kielen  $B$ .

**Väite.** *Kieli  $A \cap B$  on säännöllinen.*

*Todistus.* Leikkauksen tunnistava automaatti luodaan samankaltaisella menetelmällä kuin säännöllisten kielten tapauksessa. Ero säännöllisten kielten tapaukseen on siirtymäfunktion  $\delta_{A \cap B}$  määrittelyssä.

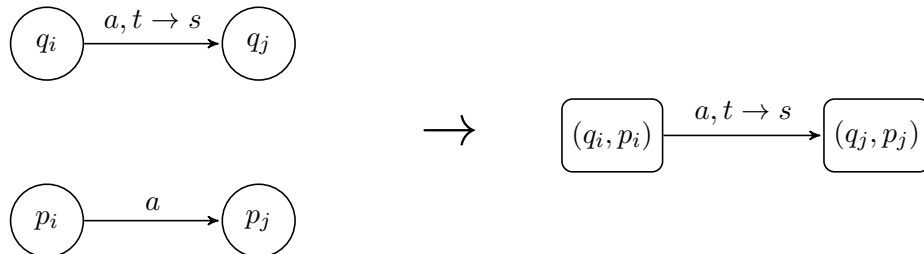
Muodostetaan siis automaatti

$$M_{A \cap B} = (Q_A \times Q_B, \Sigma, \Gamma, \delta_{A \cap B}, (q_{A0}, q_{B0}), F_A \times F_B)$$

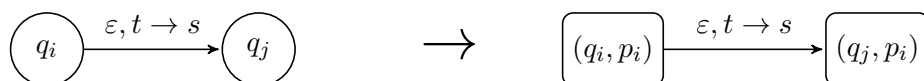
missä siirtymäfunktio  $\delta_{A \cap B}$  on määritelty seuraavasti.

$$\delta_{A \cap B}((q_i, p_i), a, t) = \begin{cases} \{((q_j, p_i), s) \mid \delta_A(q_i, \varepsilon, t) = (q_j, s)\} & \text{kun } a = \varepsilon \\ \{((q_j, p_j), s) \mid \delta_B(q_i, a) = q_j \text{ ja } \delta_A(p_i, a, t) = (p_j, s)\} & \text{muulloin} \end{cases}$$

Kaikki uuden automaatin tilat ovat siis muotoa  $(q, p)$  missä  $q \in Q_A$  ja  $p \in Q_B$ . Siirtymät noudattavat parin ensimmäisen alkion kohdalla automaatin  $M_A$  siirtymäfunktiota ja toisen alkion kohdalla automaatin  $M_B$  siirtymäfunktiota. Pinon käsittely noudattaa aina automaatin  $M_A$  siirtymäfunktiota, sillä automaatissa  $M_B$  ei ole pinoa.



Pinoautomaatti  $M_A$  on epädeterministinen, mutta  $M_B$  ei. Pinoautomaatin epädeterminististen siirtymien kohdalla uudessa automaatissa tilaparin jälkimmäinen alkio ei muutu. Ensimmäinen alkio noudattaa pinoautomaatin  $M_A$  siirtymäfunktiota.



Luotu automaatti  $M_{A \cap B}$  hyväksyy merkkijonon  $w$  jos ja vain jos  $M_A$  ja  $M_B$  hyväksyvät merkkijonon  $w$ . Siis  $M_{A \cap B}$  tunnistaa kielen  $A \cap B$ .  $\square$

- (b) Tiedetään, että kieli  $L$  on yhteydetön ja  $R$  säännöllinen. Voidaanko tästä päätellä, että  $L - R$  on yhteydetön? Entä  $R - L$ ? Perustele.

**Väite.** *Olkoon  $L$  yhteydetön ja  $R$  säännöllinen kieli. Nyt  $L - R$  on yhteydetön.*

*Todistus.* Joukko-opista tiedämme, että  $L - R = L \cap \overline{R}$ . Lisäksi tiedämme, että säännölliset kielet ovat suljettuja komplementin suhteen. Nyt siis edellisen kohdan nojalla  $L \cap \overline{R}$  on yhteydetön, ja siten myös  $L - R$  on yhteydetön.  $\square$

Toinen suunta ei päde yleisesti. Koska yhteydettömät kielet eivät ole suljettuja komplementin suhteen, on olemassa yhteydetön kieli jonka komplementti ei ole yhteydetön. Olkoon  $L$  jokin tällainen kieli. Olkoon nyt  $R = \Sigma^*$  joka tunnetusti säännöllinen. Nyt siis  $L$  on yhteydetön ja  $R$  säännöllinen, mutta  $R - L = \Sigma^* - L = \overline{L}$  joka oletuksen mukaan ei ole yhteydetön.