

582206 Laskennan mallit, syksy 2012

8. harjoitusten malliratkaisut

Juhana Laurinharju ja Jani Rahkola

Moninauhaisissa koneissa S -siirtymä eli siirtymä missä ei nauha päätä siirretä mihinkään on usein hyödyllinen. Koska tämä ominaisuus ei muuta Turing-koneen kielentunnistusominaisuuksia, voit vapaasti käyttää tätä ominaisuutta ratkaisuisasi.

1. Tehtävässä tarkastellaan Jyrkin luentojen sivuilla 230 ja 241 esitettyjä determinististä ja epädeterminististä Turingin konetta kielelle $\{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$. Koneiden kaavioesitykset on myös annettu seuraavalla sivulla.

- (a) Esitä Jyrkin luentojen sivun 230 deterministisen Turingin koneen laskenta (ts. tilanteiden jono) syötteellä 001001.

$q_0001001$	$abbAq_5AB$
aq_101001	$abbAAq_5B$
$a0q_11001$	$abbAABq_5$
$a01q_1001$	$abbAAq_6B$
$a010q_101$	$abbAq_9AX$
$a0100q_11$	$abbq_9AAX$
$a01001q_1$	abq_9bAAX
$a0100q_21$	$abXq_{10}AAX$
$a010q_30B$	$abXAq_8AX$
$a01q_400B$	$abXAAq_8X$
$a0q_1100B$	$abXAq_6AX$
aq_10100B	$abXq_7AXX$
$q_1a0100B$	abq_7XAXX
aq_00100B	aq_7bXAXX
abq_1100B	$aXq_{10}XAXX$
$ab1q_100B$	$aXXq_{10}AXX$
$ab10q_10B$	$aXXAq_8XX$
$ab100q_1B$	$aXXq_6AXX$
$ab10q_20B$	aXq_7XXXX
$ab1q_30AB$	aq_7XXXXX
abq_410AB	$q_7aXXXXX$
aq_4b10AB	$q_{10}XXXXXX$
abq_010AB	$Xq_{10}XXXXX$
$abbq_10AB$	$XXq_{10}XXXX$
$abb0q_1AB$	$XXXq_{10}XXX$
$abbq_20AB$	$XXXXq_{10}XX$
abq_2bAAB	$XXXXXq_{10}X$
$abbq_5AAB$	$XXXXXXq_{10}$

acc

- (b) Esitä Jyrkin luentojen sivun 241 epädeterministiselle Turingin koneelle yksi hyväksyvä ja yksi hylkäävä laskenta syötteellä 001001.

q_0	0	0	1	0	0	1	(1)
$\neg q_1$	0	1	0	0	1		(2)
$\neg 0q_1$	1	0	0	1			(3)
$\neg 0$	1	q_1	0	0	1		(4)
$\neg 0q_2$	1	X	0	1			(5)
$\neg q_2$	0	1	X	0	1		(6)
q_2	$\neg 0$	1	X	0	1		(7)
$\neg q_3$	0	1	X	0	1		(8)
$\neg \neg q_4$	1	X	0	1			(9)
$\neg \neg 1$	q_4	X	0	1			(10)
$\neg \neg 1$	X	q_5	0	1			(11)
$\neg \neg 1$	q_9	X	X	1			(12)
$\neg \neg q_9$	1	X	X	1			(13)
$\neg q_2$	$\neg 1$	X	X	1			(14)
$\neg \neg q_3$	1	X	X	1			(15)
$\neg \neg \neg$	q_7	X	X	1			(16)
$\neg \neg \neg$	X	q_8	X	1			(17)
$\neg \neg \neg$	X	X	q_8	1			(18)
$\neg \neg \neg$	X	q_9	X	X			(19)
$\neg \neg \neg$	q_9	X	X	X			(20)
$\neg \neg q_9$	\neg	X	X	X			(21)
$\neg \neg \neg q_{10}$	X	X	X				(22)
$\neg \neg \neg$	X	q_{10}	X	X			(23)
$\neg \neg \neg$	X	X	q_{10}	X			(24)
$\neg \neg \neg$	X	X	X	q_{10}			(25)
acc							(26)

$$q_0 \ 0 \ 01001 \quad (27)$$

$$\neg q_1 \ 01001 \quad (28)$$

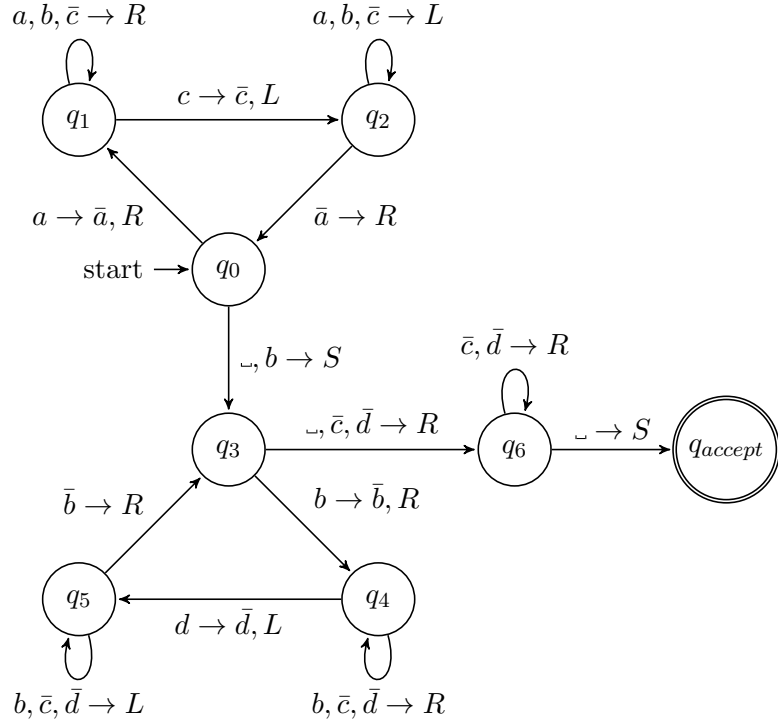
$$q_2 \ \neg \ X1001 \quad (29)$$

$$\neg q_3 \ X1001 \quad (30)$$

$$\neg Xq_{10}1001 \quad (31)$$

$$\text{reject} \quad (32)$$

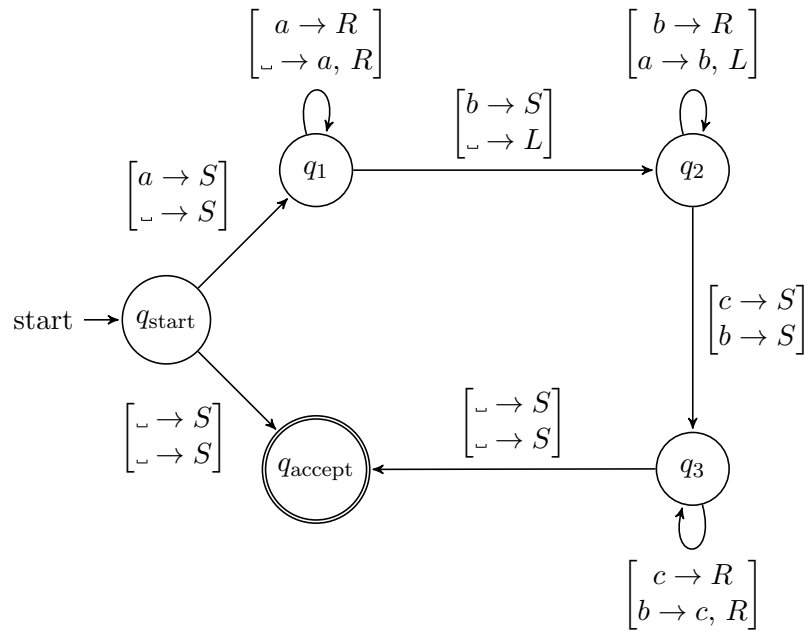
2. Esitä tilakaaviona kielen $\{a^i b^j c^i d^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ tunnistava deterministinen yksinauhainen Turingin kone.



Automaatti koostuu kolmesta osasta. Tilasta q_0 lähtevässä silmukassa tarkistetaan, että c merkkejä on vähintään yhtä monta kuin a merkkejä. Tilasta q_3 lähtevässä silmukassa puolestaan tarkistetaan, että d merkkejä on vähintään yhtä monta kuin b merkkejä. Tämä tehdään merkitsemällä käsitelty a -merkki (vastaavasti b -merkki) viivalla, etsimällä seuraava merkitsemätön c -merkki (vastaavasti d -merkki) ja merkitsemällä sekin. Jos näin tehtäessä c tai d merkit loppuivat kesken, siirytään virhetilaan (jota ei selvyiden vuoksi piirretty kuvaan).

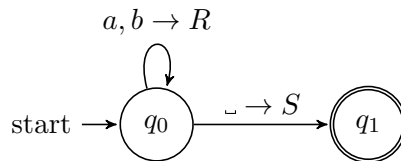
Lopuksi tarkistetaan, että yhtään c tai d merkkiä ei jäänyt merkkaamatta. Tämä tehdään aloittamalla viimeisestä b -merkkiä seuraavasta merkistä, ja sallimalla vain merkattuja c ja d merkkejä. Kun koko syöte on luettu, siirytään hyväksyvään tilaan.

3. Esitä tilakaaviona kaksinauhainen Turingin kone, joka tunnistaa kielen $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Sopiva tapa merkitä kaksinauhaisen koneen siirtymä $\delta(r, a_1, a_2) = (s, b_1, b_2, D_1, D_2)$ on esim.

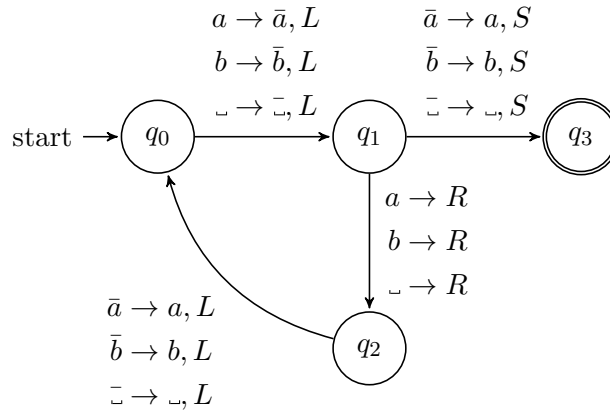


Idea tässä Turingin koneessa on seuraava:

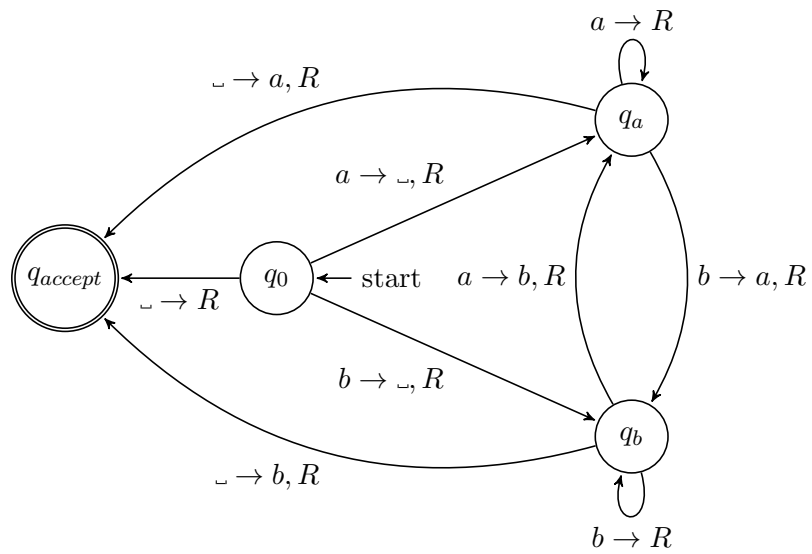
- 1) kopioi kaikki a -merkit toiselle nauhalle
 - 2) Jokaisen b -merkin kohdalla korvataan toisella nauhalla yksi a -merkki b -merkillä. Tämä tehdään toisella nauhalla lopusta alkuun päin.
 - 3) Jos toisella nauhalla on vielä a -merkkejä jäljellä, hylätään.
 - 4) Jokaisen c -merkin kohdalla korvataan toisen nauhan b -merkki c -merkillä. Nyt toisella nauhalla liikutaan taas alusta loppuun päin.
 - 5) Jos toisella nauhalla on nyt viimeinen b korvattu c :llä, niin hyväksytään. Muuten hylätään.
4. Merkkijono-operaatioita. Olkoon syöteaakkosto $\{a, b\}$
- (a) Esitä tilakaaviona Turing-kone, mikä siirtää lukupään nauhan loppuun eli syötteen oikealle puolelle.



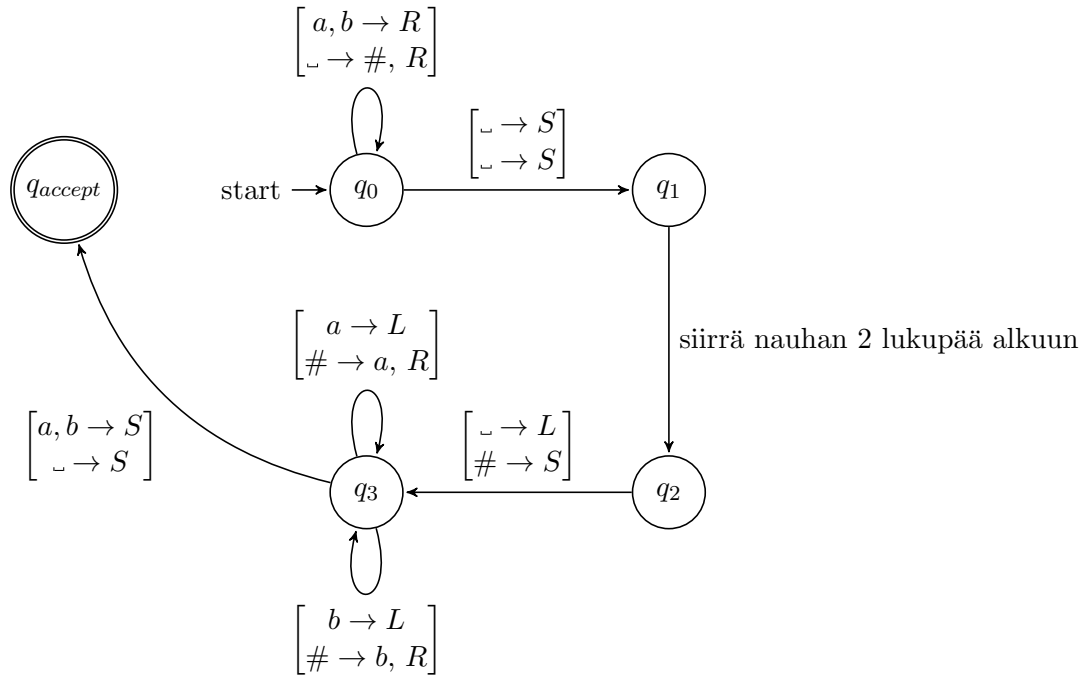
- (b) Esitä tilakaaviona Turing-kone, mikä siirtää lukupään nauhan alkuun eli vasempaan laitaan.



(c) Esitä tilakaaviona Turing-kone, mikä siirtää syötteesä yhdellä paikalla oikealle.



(d) Esitä tilakaaviona Turing-kone, mikä kääntää syötteesä toisin päin.



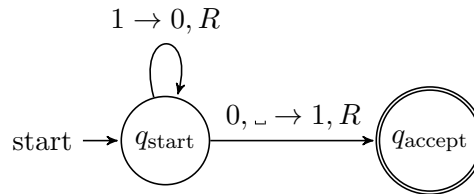
Aluksi siirrytään syötteen sisältävällä ensimmäisellä nauhalla syötteen jälkeiseen tyhjään merkkiin. Samalla kirjoitetaan toiselle nauhalle syötteen pituutta vastaava määrä # merkkejä. Seuraavaksi siirretään toisen nauhan lukupää nauhan alkuun ja tämän jälkeen kopioidaan syöte ensimmäiseltä nauhalta lopusta alkuun toiselle nauhalle. Tämä kääntää syötteen. Toiselle nauhalle kirjoitetut #-merkit kertovat milloin kopiointi lopetetaan.

5. Laskentoa Turing-koneella. Olkoon syöte aakkosto $\{0, 1\}$.

(a) Esitä tilakaaviona Turing-kone, mikä kasvattaa yhdellä syötteenään saamaansa binäärilukua.

Binäärilukua voi kasvattaa yhdellä seuraavasti:

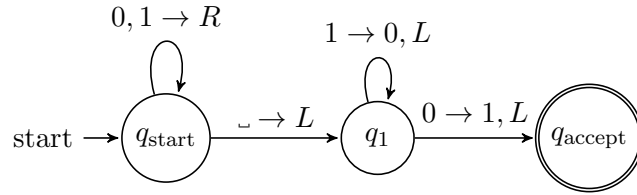
- 1) lähde liikkeelle vähiten merkitsevistä bitistä
 - 2) muuta jokainen matkalla vastaan tuleva ykkönen nolaksi
 - 3) muuta ensimmäinen nolla ykköseksi ja lopeta
- i. Oleta että binääriluvun vähiten merkitsevät bitit ovat nauhan alussa.



Automaatti noudattaa yllä kuvattua ideaa. Vähiten merkitsevät ykköset muutetaan nolliksi kunnes tulee vastaan nolla, joka muutetaan ykköseksi. Jos luvussa ei ole nollia, lisätään loppuun yksi ykkönen.

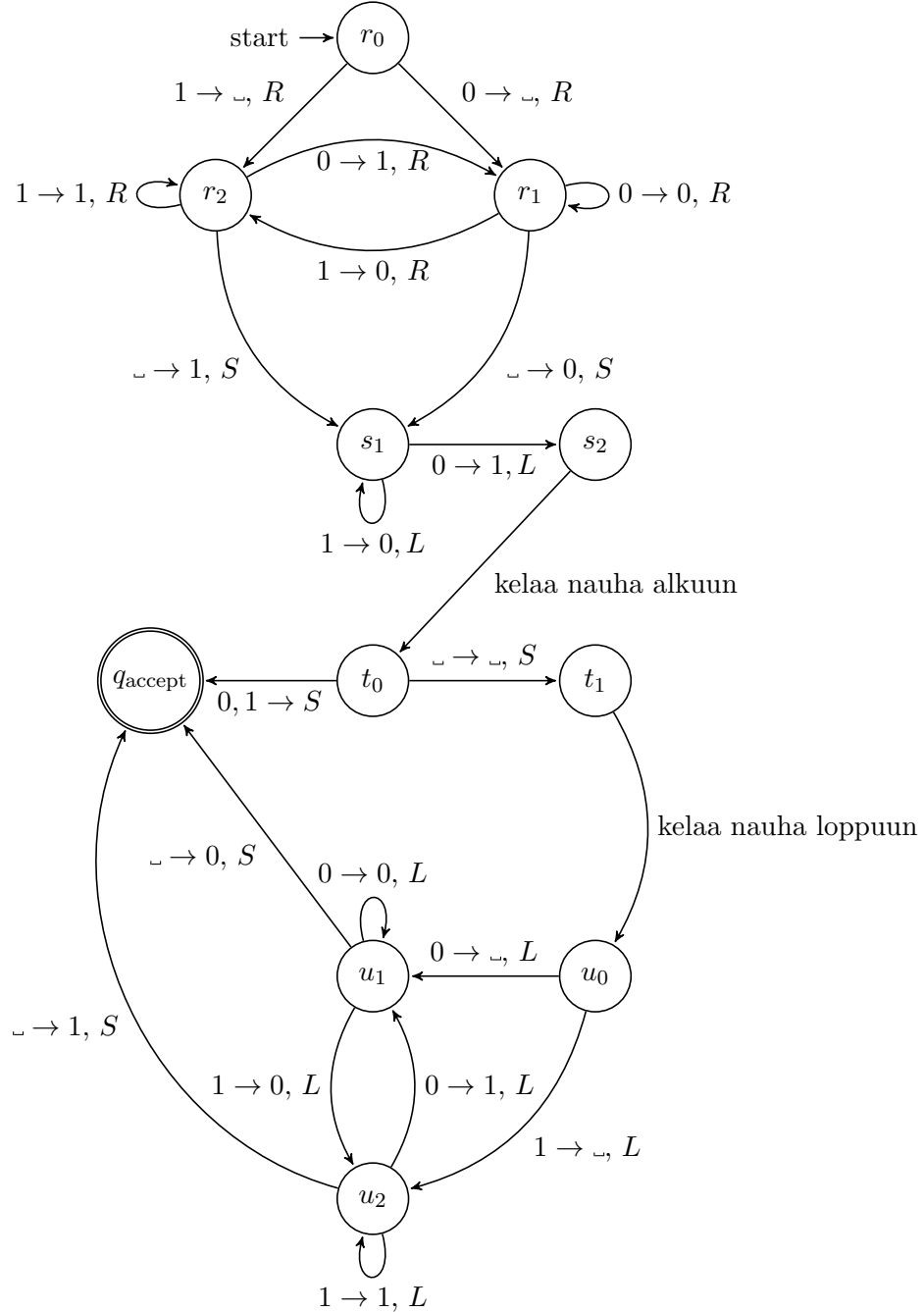
ii. Oleta että binääriluvun vähiten merkitsevät bitit ovat nauhan lopussa.

Ensimmäinen idea olisi kelata nauha loppuun ja toimia sen jälkeen kuten äsken, mutta päinvastaiseen suuntaan.



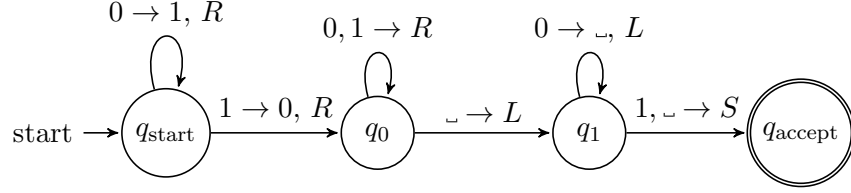
Tässä tulee kuitenkin ongelmaksi tapaus, jossa luvussa on pelkkiä ykkösiä, jolloin lukua pitäisi pidentää.

Korjataan Turingin konetta seuraavasti. Siirretään ensin kaikkia alkioita oikealle yhden askeleen verran ja jätetään nauhan alkuun tyhjä merkki. Tämän jälkeen voidaan toimia kuten äsken ja tarvittaessa siirtää lopuksi alkioita nauhalla yhden askeleen vasemmalle.



Lamatonttu toivottaa hyvää joulua. ☺

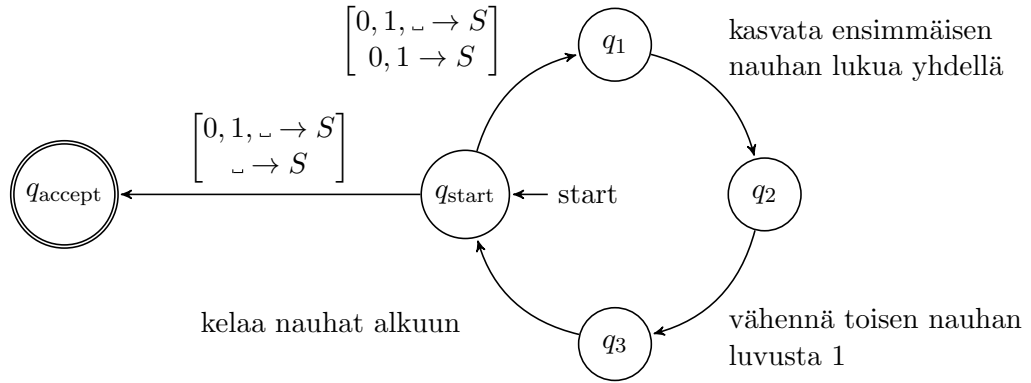
- (b) Esitä tilakaaviona Turing-kone, mikä vähentää yhdellä syötteenään saamaansa binäärilukua. Vähiten merkitsevä bitti vasemmalla.



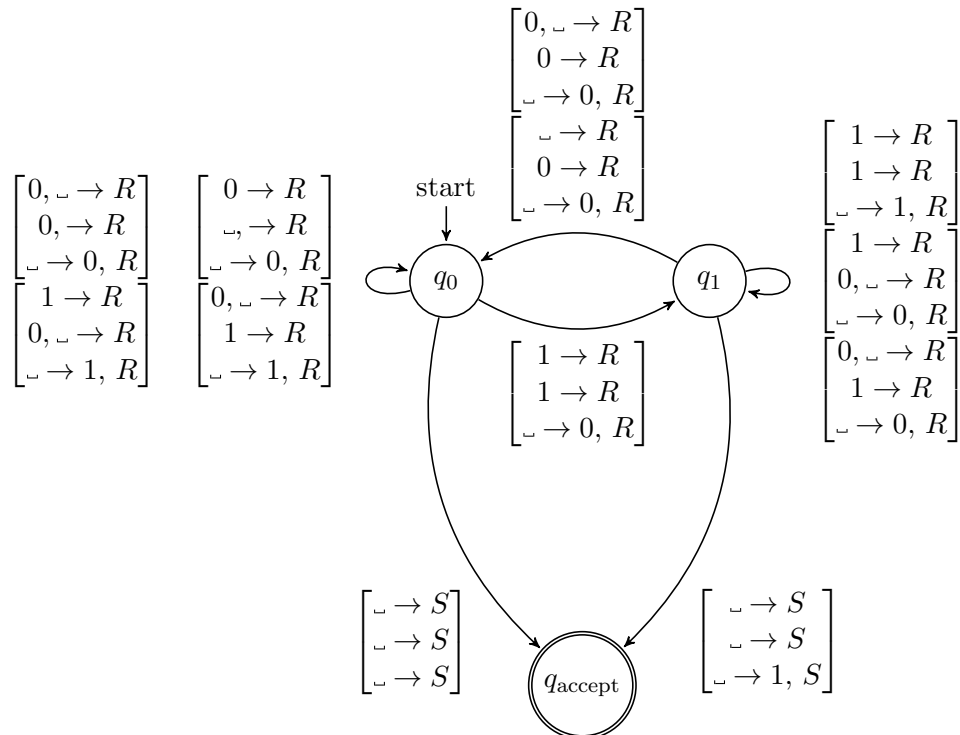
- (c) Esitä tilakaaviona kolminauhainen Turing-kone, mikä saa kahdella ensimmäisellä nauhalla yhden binääriluvun kullakin, ja joka laskee kolmannelle nauhalle syötelukujen summan.

Tehdään ensin a- ja b-kohtia käyttäen kaksinauhainen Turingin kone, joka laskee summan ensimmäiselle nauhalle. Idea on seuraava:

- 1) Jos toisella nauhalla on 0, lopeta. Muuten toista seuraavaa:
- 2) Vähennä toisen nauhan lukua yhdellä ja kasvata ensimmäisen nauhan lukua yhdellä.

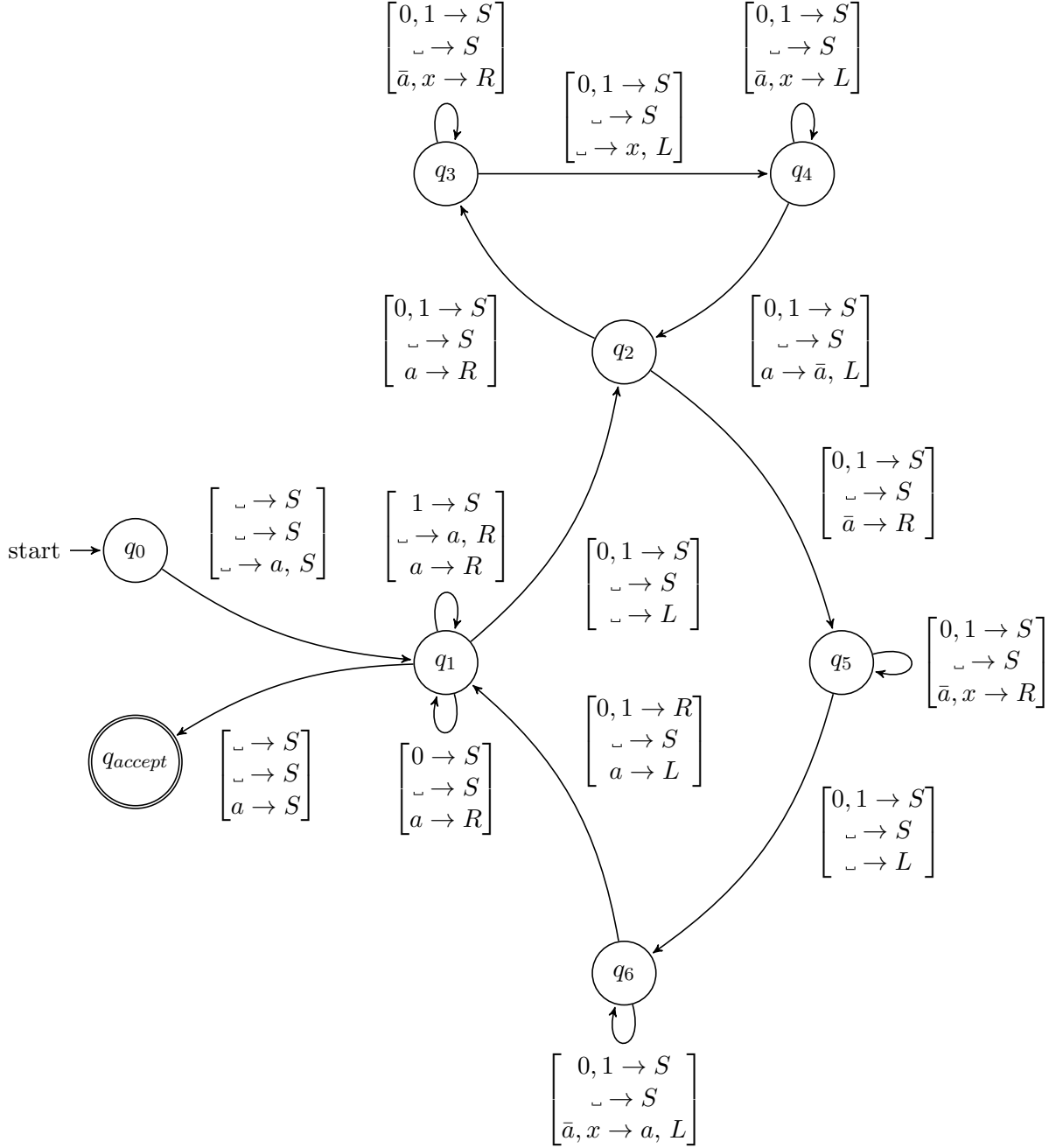


Vaihtoehtoisesti tämän voi tehdä kolmella nauhalla tavallisella allekainlaskumenetelmällä.



Tilassa q_1 summassa on ylivuotobittinä 1 ja tilassa q_0 ylivuotobittinä on 0.

6. Esitä tilakaaviona kolminauhainen Turing-kone, mikä saa yhdellä nauhalla syötteenä binääriluvun ja kirjoittaa toiselle nauhalle binäärilukua vastaavan määrän kirjainta a . Kolmatta nauhaa voit käyttää jos tarvitset.

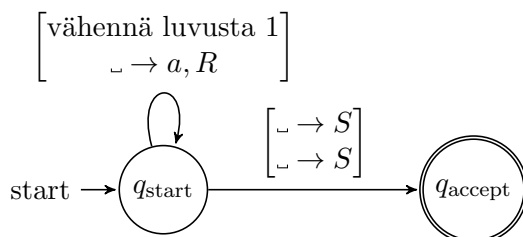


Tämä Turing-kone pitää nauhalla 3 kirjaa kulloinkin käsitellyssä olevaa bittiä vastaavasta kahden potenssista. Aluks nauhalla 3 on siis vain yksi a , ja jokaisen käsitellyn bitin jälkeen nauhan sisältö käydään kaksinkertaistamassa.

Nyt bittien käsittely on helppoa. Jos bitti on 1, kopioidaan nauhan 3 sisältö nauhalle 2 ja kaksinkertaistetaan nauhan 3 sisältö. Jos bitti on 0, ei kopioida mitään, mutta muistetaan kuitenkin käydä kaksinkertaistamassa nauhan 3 sisältö.

Nauhan 3 sisällön kaksinkertaistaminen tehdään niin, että merkitään jokainen jo kaksinkertaistettu a viivalla, ja kirjoitetaan uudet merkit aluksi merkkeinä x . Näin voidaan erottaa mitkä merkit ovat vanhoja, ja mitkä uusia. Lopuksi poistetaan kaikki merkinnät ja korvataan x merkit a merkeillä.

Toinen tapa ratkaista ongelma on käyttää aikaisemmin toteutettua yhdellä vähentämistä. Kirjoitetaan nauhalle 2 merkki a joka kerta kun vähennämme nauhan 1 lukua yhdellä. Tätä jatketaan kunnes nauhan 1 luku on vähentynyt nollaan.



Tehtävän 5, kohdan b Turing-kone teki yhdellä vähentämisen site, että nauha tyhjenee kun luku vähenee nollaan. Näin ollen voimme helposti tarkistaa milloin luku on nolla vain katsomalla onko nauha 1 tyhjä. Oletamme lisäksi, että syötteenä saadussa luvussa nollan ainut laillinen esitysmuoto on tyhjä nauha.

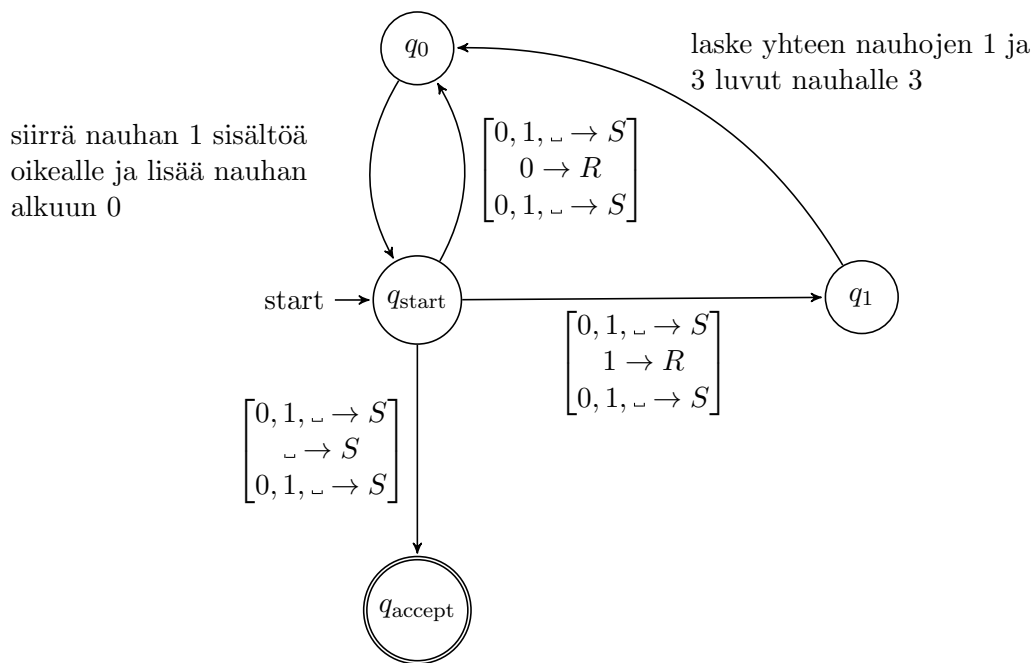
7. Esitä tilakaaviona kolminauhainen Turing-kone, mikä saa kahdella ensimmäisellä nauhalla yhden binääriluvun kullakin, ja joka laskee kolmannen nauhan avulla syötelukujen kertolaskun (onkohan tää liian vaikea...).

Muistutetaan ensin mieleen miten allekkain kertominen toimii. Kerrottavaa kerrotaan jokaisella kertojan numerolla. Saadut välitulokset taulukoidaan siten, että oikea reuna on tasattu sen numeron kohdalle jolla kerrottaessa tulos saatiin. Lopuksi välitulokset lasketaan yhteen.

$$\begin{array}{r}
 \\
 \\
 \hline
 \\
 \\
 \\
 \hline
 + \\
 \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

Huomataan, että yhteenlaskua voi suorittaa myös juoksevasti, siis laskemalla välituloksia yhteen sitä mukaan kun niitä lasketaan. Lisäksi yhdellä bitillä kertominen on helppoa: $1 \cdot a = a$ ja $0 \cdot a = 0$. Tärkein huomio on kuitenkin se, että oikeanlaisen tasauksen saa aikaan myös lisäämällä luvun alkuun nollia.

Oletetaan, että luvut ovat nauhoilla vähiten merkitsevä bitti vasemmassa reunassa, ja suoritetaan allekkain kertominen.



Automaatti käy läpi nauhalla 2 olevaa kertojaa bitti kerrallaan. Jos bitti on 1, lisään nauhan 1 sisältö nauhalla 3 pidettävään tulokseen. Jos bitti on 0, ei tehdä lisäystä. Siirrytään kertojassa seuraavaan bittiin. Tämän jälkeen käydään siirtämässä nauhalla 1 olevaa kerrottavaa yksi askel oikealle, ja lisätään luvun alkuun jääneeseen tyhjään paikkaan 0. Tämä vastaa allekkainkertomisessa seuraavan välituloksen tasaamista pykälää vasemmalle. Toistetaan edellä kuvattua kunnes kaikki kertojan bitit on käyty läpi.