582206 Laskennan mallit, syksy 2012
2. Harjoitusten malliratkaisut
Jani Rahkola ja Juhana Laurinharju

1. Olkoon kahden äärellisen automaatin M_1 ja M_2 tilat ja siirtymät seuraavat.

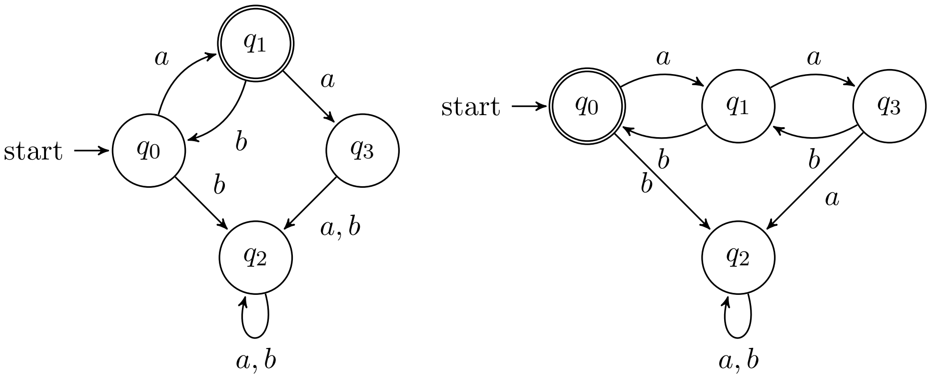
   (a) Mikä on kunkin automaatin aloitustila?

   (b) Mitkä ovat hyväksyviä tiloja?

   (c) Minkä tilajonon automaatit käyvät läpi syötteellä $aabb$?

   (d) Hyväksyvätkö automaatit syötteen $aabb$?

   (e) Hyväksyvätkö automaatit merkkijonon ε?

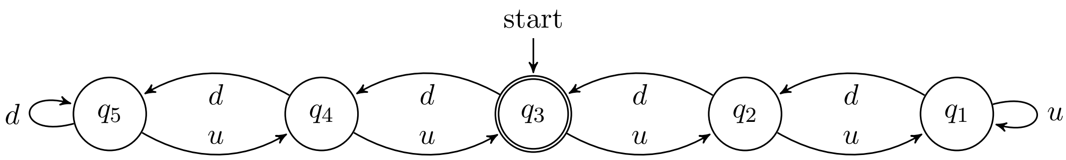


	M_1	M_2
(a)	q_0	q_0
(b)	$\{q_1\}$	$\{q_0\}$
(c)	$q_0q_1q_3q_2q_2$	$q_0q_1q_3q_1q_0$
(d)	ei	kyllä
(e)	ei	kyllä

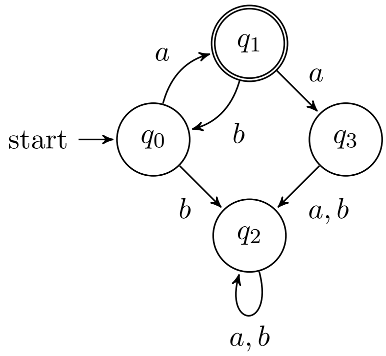
2. Olkoon äärellisen automaatin M formaali kuvaus $(\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{u, d\}, \delta, q_3, \{q_3\})$ missä siirtymäfunktion määrittelee taulukko:

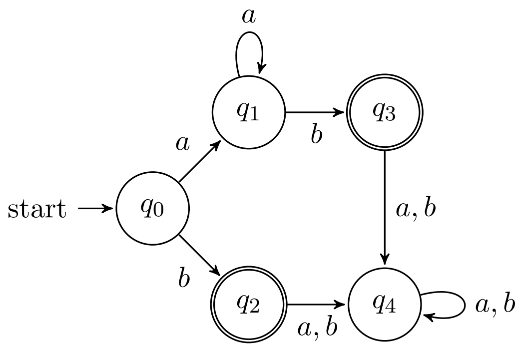
	u	d
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_3
q_3	q_2	q_4
q_4	q_3	q_5
q_5	q_4	q_5

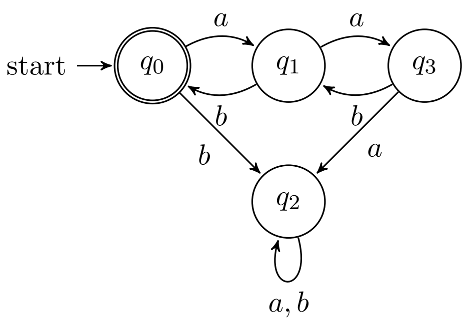
   Piirrä automaatti M (tilat ja siirtymät).

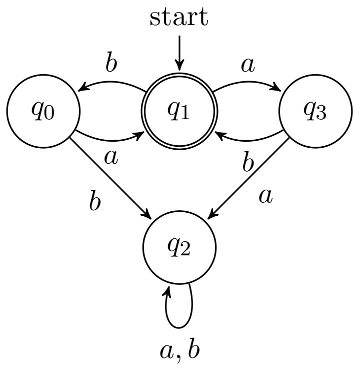


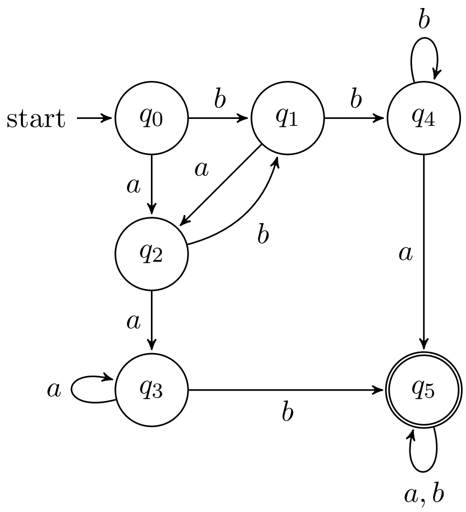
3. Minkälaisia merkkijonoja eli sanoja seuraavat äärelliset automaatit hyväksyvät?

(a) 

(b) 

(c) 

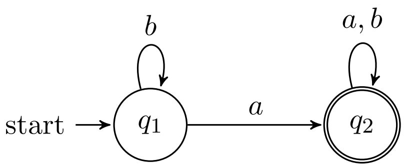
(d) 

(e) 

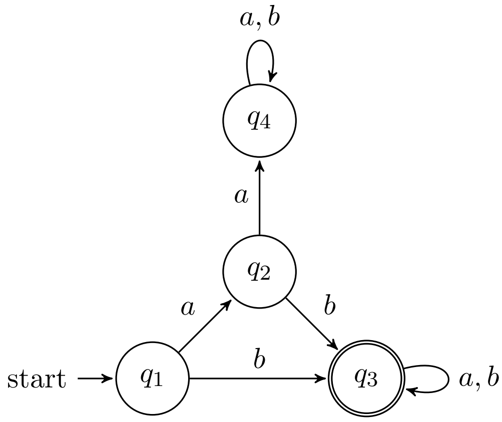
(a) $\{a\} \circ \{ba\}^* = a(ba)^*$
(b) $\{a\}^* \circ \{b\} = a^*b$
(c) $(\{a\} \circ \{ab\}^* \circ \{b\})^* = (a(ab)^*b)^*$
(d) $\{ab\}^* \cup \{ba\}^* = (ab)^*|(ba)^*$
(e) $\{a, b\}^* \circ \{aab, bba\} \circ \{a, b\}^* = (a|b)^*(aab|bba)(a|b)^*$

4. Piirrä äärelliset automaatit tiloineen ja siirtymänuolineen seuraaville kielille.

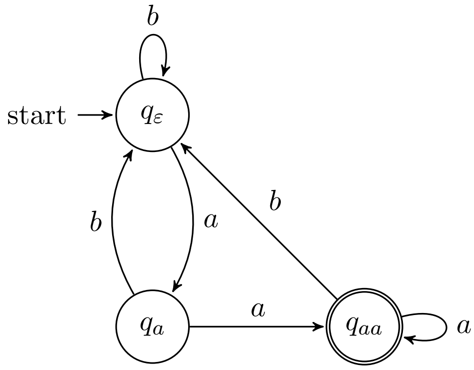
   (a) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ sisältää ainakin yhden } a\text{:n}\}$



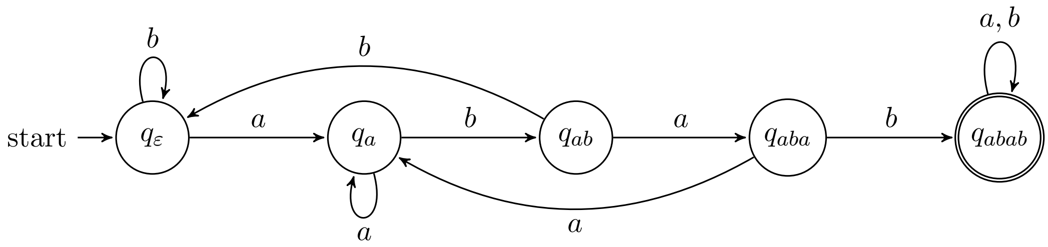
   (b) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ alkaa } b \text{ tai } ab\text{:llä}\}$



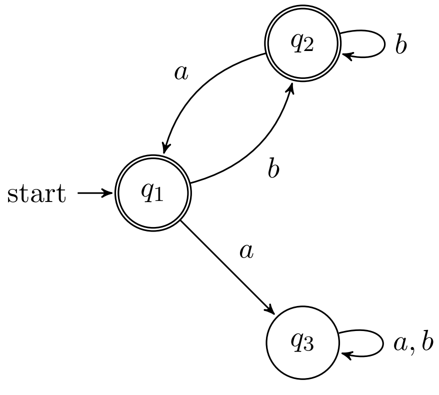
(c) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ loppuu } aa\text{:han}\}$
Suunnitellun automaatin olisi tarkoitus "muistaa", ollaanko nähty nolla, yksi vai ainakin kaksi a-merkkiä. Luodaan siis automaatille tilat jokaista kolmea vaihtoehtoa varten. Alkutilassa ei olla vielä nähty yhtään a:ta. Tilassa q_a ollaan nähty yksi a ja tilassa q_{aa} ollaan nähty ainakin kaksi a:ta.



(d) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ sisältää merkkijonon } abab\ \}$



(e) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \text{jokaisen } w\text{:ssä olevan } a\text{:n edessa on } b\}$



5. Olkoon kielet A ja B säännöllisiä. Todista että joukkoerotus $A - B$ tuottaa säännöllisen kielen luentokalvojen yhdisteen esimerkin mukaisesti. Piirrä myös pieni esimerkki automaateista $L(M_1) = A$, $L(M_2) = B$ ja $L(M_{A-b}) = A - B$.

   Koska A ja B ovat säännöllisiä, on olemassa äärelliset automaatit $M_A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, s_A, F_A)$ ja $M_B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, s_B, F_B)$ jotka tunnistavat kielet A ja B. Siis $L(M_A) = A$ ja $L(M_B) = B$.

Määritellään automaatti $M_{A-B} = (Q_{A-B}, \Sigma, \delta_{A-B}, s_{A-B}, F_{A-B})$ missä

$$\begin{aligned} Q_{A-B} &= Q_A \times Q_B \\ \delta_{A-B}((q_A, q_B), a) &= (\delta_A(q_A, a), \delta_B(q_B, a)) \\ s_{A-B} &= (s_A, s_B) \\ F_{A-B} &= \{(q_A, q_B) \in Q_{A-B} \mid q_A \in F_A \text{ ja } q_B \notin F_B\} = F_A \times (Q_B - F_B) \end{aligned}$$

FIXME: Motivaatio

Väite. *Yllä määritelty automaatti M_{A-B} tunnistaa kielen $A - B$. Siten kieli $A - B$ on säännöllinen.*

Todistus. Olkoon $w \in \Sigma^*$. Nyt

$$w = w_1 \ldots w_n.$$

Määritellään tilajonot

$$\begin{aligned} r &= r_1 \ldots r_{n+1} \text{ ja} \\ p &= p_1 \ldots p_{n+1} \end{aligned}$$

joiden läpi automaatit M_A ja M_B kulkevat merkkijonon w aikana siten, että

$$\begin{aligned} r_1 &= s_A & p_1 &= s_B \\ r_{i+1} &= \delta_A(r_i, w_i) & p_{i+1} &= \delta_B(p_i, w_i). \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} r_1 & \xrightarrow{w_1} & r_2 & \xrightarrow{w_2} & \cdots & \xrightarrow{w_n} & r_{n+1} \\ s_A & & \delta_A(s_A, w_1) & & & & \end{array} \quad \begin{array}{ccccccc} p_1 & \xrightarrow{w_1} & p_2 & \xrightarrow{w_2} & \cdots & \xrightarrow{w_n} & p_{n+1} \\ s_B & & \delta_B(s_B, w_1) & & & & \end{array}$$

Automaatti M_A kulkee syötteellä w tilajonon r ja automaatti M_B tilajonon p läpi. Siis esimerkiksi automaatti M_A siirtyy merkillä w_i tilasta r_i tilaan r_{i+1}.

Määritellään myös vastaavasti jono

$$q = q_1 \ldots q_{n+1}$$

jonka läpi automaatti M_{A-B} kulkee syötteellä w. Nyt siis

$$\begin{aligned} q_1 &= s_{A-B} = (s_A, s_B) = (r_1, p_1) \\ q_{i+1} &= \delta_{A-B}(q_i, w_i). \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} q_1 & \xrightarrow{w_1} & q_2 & \xrightarrow{w_2} & \cdots & \xrightarrow{w_n} & q_{n+1} \\ s_{A-B} & & \delta_{A-B}(s_{A-B}, w_1) & & & & \end{array}$$

Intuitiivisesti näyttäisi siltä, että $q_i = (r_i, p_i)$, sillä

$$\begin{aligned} q_1 &= (r_1, p_1) \\ q_2 &= \delta_{A-B}(q_1, w_1) \\ &= (\delta_A(r_1, w_1), \delta_B(p_1, w_1) \\ &= (r_2, p_2) \\ &\ldots \end{aligned}$$

Näytetään tämä todeksi induktiolla.

Väite. $q_i = (r_i, p_i)$ *tai* $n + 1 < i$

Todistus.

Alkuaskel määritelmän nojalla $q_1 = (r_1, p_1)$.

Induktioaskel

Induktio-oletus $i > n + 1$ tai $q_i = (r_1, p_i)$

Induktioaskeleen väite $i + 1 > n + 1$ tai $q_{i+1} = (r_{i+1}, p_{i+1})$

Induktioaskeleen todistus

Jos $i \geq n + 1$, niin $i + 1 > n + 1$. Tarkastellaan siis tapausta $i < n + 1$. Nyt

$$\begin{aligned}
q_{i+1} &= \delta_{A-B}(q_i, w_i) && q_{i+1}\text{:n määritelmä} \\
&= \delta_{A-B}((r_i, p_i), w_i) && \text{induktio-oletus} \\
&= (\delta_A(r_i, w_i), \delta_B(p_i, w_i)) && \delta_{A-B}\text{:n määritelmä} \\
&= (r_{i+1}, p_{i+1}) && r_{i+1}\text{:n ja } p_{i+1}\text{:n määritelmät.}
\end{aligned}$$

□

Automaatti M_{A-B} hyväksyy merkkijonon w jos ja vain jos $q_{n+1} \in F_{A-B}$. Näytetään nyt, että M_{A-B} hyväksyy merkkijonon w täsmälleen silloin kun w kuuluu kieleen $A - B$.

$$\begin{aligned}
q_{n+1} \in F_{A-B} &\Leftrightarrow (r_{n+1}, p_{n+1}) \in F_{A-B} \\
&\Leftrightarrow r_{n+1} \in F_A \text{ ja } p_{n+1} \notin F_B \\
&\Leftrightarrow w \in A \text{ ja } w \notin B \\
&\Leftrightarrow w \in A - B.
\end{aligned}$$

Siis kieli $A - B$ on säännöllinen. □