

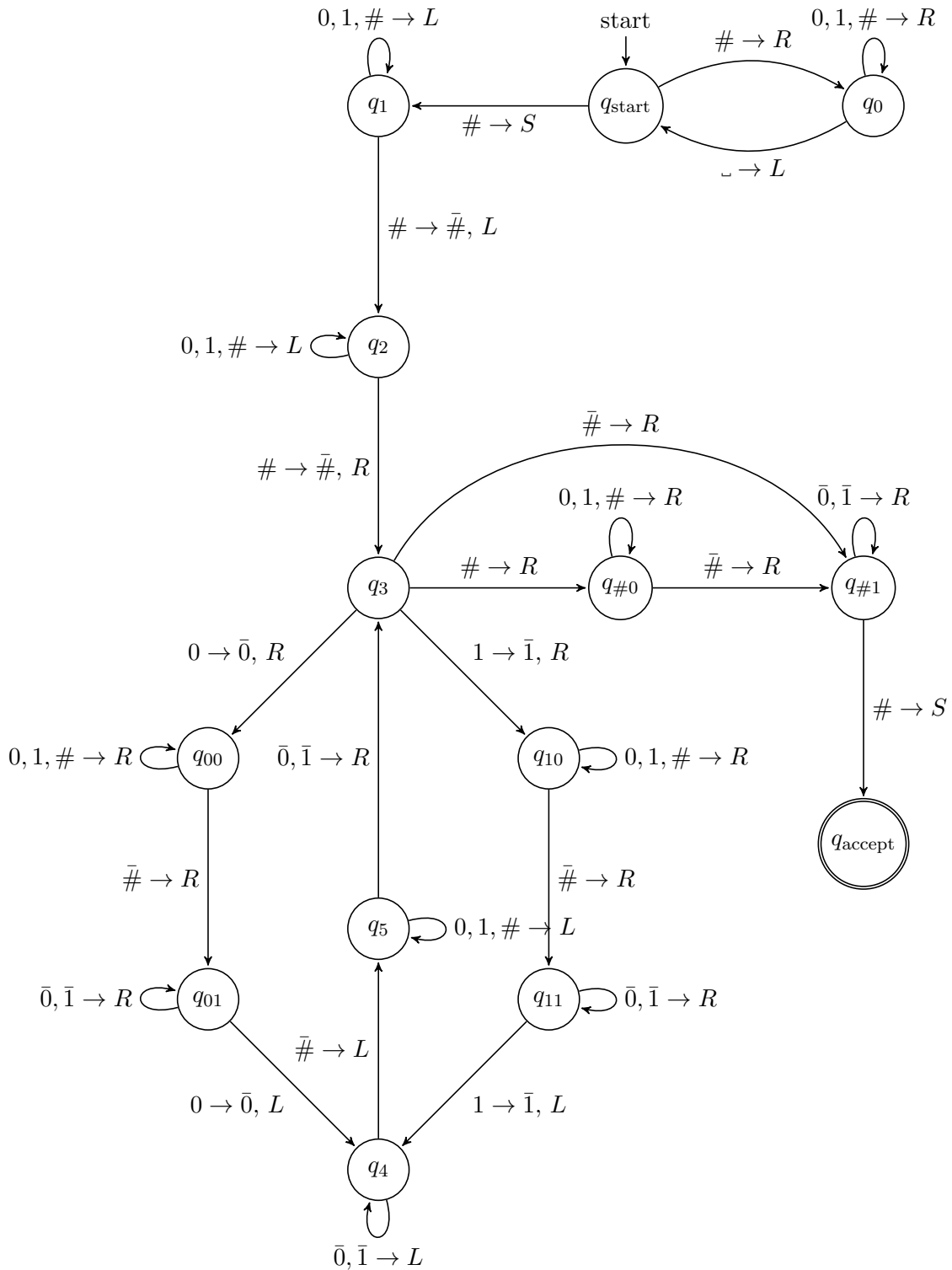
# 582206 Laskennan mallit, syksy 2012

## 9. harjoitusten malliratkaisut

Juhana Laurinharju ja Jani Rahkola

1. Esitä tilakaaviona epädeterministinen Turingin kone, joka tunnistaa aakkoston  $\{0, 1, \#\}$  kielen

$$\{\#w_1\#w_2\#\dots\#w_n\# \mid w_i \in \{0, 1\}^* \text{ kaikilla } i \text{ ja } w_i = w_j \text{ joillakin } i \neq j\}.$$



2. [Sipser Problem 3.9] Merkintä  $k$ -PDA tarkoittaa pinoautomaattia, jossa on käytettävänä  $k$  pinoa. Siis 0-PDA on NFA ja 1-PDA on tavallinen PDA. Osoita, että

- (a) 2-PDA pystyy tunnistamaan kieliä, joita 1-PDA ei pysty,
- (b) mutta minkä tahansa 3-PDA:n tunnistama kieli voidaan tunnistaa 2-PDA:lla.

*Vihje:* Simuloi Turingin koneen nauhaa kahdella pinolla. Esitä ratkaisun periaate pseudokoodilla tms. menemättä automaattiformalismin yksityiskohtiin.

3. [Sipser Exercise 3.14] *Jonoautomaatti* on muuten kuin pinoautomaatti, mutta pino on korvattu jonolla. Jonoon voidaan kohdistaa kahdenlaisia operaatioita:

- ENQUEUE( $a$ ) kirjoittaa merkin  $a$  jonon loppuun ja
- DEQUEUE poistaa jonon ensimmäisen merkin ja palauttaa sen arvonaan.

Pinoautomaatin tapaan syöte on luettavissa merkki kerrallaan. Sovitaan, että syötteessä on aina loppumerkinä (mutta ei muualla) tyhjämerkki  $\epsilon$ . Turingin koneen tapaan pinoautomaatti hyväksyy syötteen siirtymällä erilliseen hyväksyvään tilaan.

Osoita, että mikä tahansa Turing-tunnistettava kieli voidaan tunnistaa deterministisellä jonoautomaatilla. Perusteluksi riittää esittää sopivan tasoisen pseudokoodin, miten Turingin konetta voidaan simuloida jonoa käyttäen.

4. [Sipser Problem 3.15] Näytä että ratkeavien kielten joukko on suljettu seuraavien operaatioiden suhteen. Olkoon  $A$  ja  $B$  kieliä ja  $TM_A$  ja  $TM_B$  ne ratkaisevat Turingin koneet.

(a) Yhdiste

- Syötteellä  $w$ :
  1. Aja  $TM_A$  ja  $TM_B$  syötteellä  $w$ .
  2. Jos jompi kumpi Turingin koneista hyväksyy, hyväksy. Muuten hylkää.

(b) Ketjutus

- Syötteellä  $w$ :
  1. Jaa merkkijono  $w$  epädeterministisesti kahteen osaan  $w = w_1 w_2$ .
  2. Aja  $TM_A$  syötteellä  $w_1$  ja  $TM_B$  syötteellä  $w_2$ .
  3. Jos molemmat Turingin koneet hyväksyvät hyväksy. Muuten hylkää.

(c) Tähti

- Syötteellä  $w$ :
  1. Jaa merkkijono  $w$  epädeterministisesti  $n$  osaan  $w = w_1 \cdots w_n$ .
  2. Aja  $TM_A$  jokaisella osalla  $w_i, i \in \{1, \dots, n\}$ .
  3. Jos jokainen ajo hyväksyy, hyväksy. Muuten hylkää.

(d) Komplementti

- Syötteellä  $w$ :
  1. Aja  $TM_A$  syötteellä  $w$ .
  2. Jos ajo hyväksyy, hylkää, jos ajo hylkää, hyväksy.

(e) Leikkaus

- Syötteellä  $w$ :
  1. Aja  $TM_A$  ja  $TM_B$  syötteellä  $w$ .
  2. Jos molemmat Turingin koneista hyväksyvät, hyväksy. Muuten hylkää.

5. [Sipser Problem 3.16] Näytä että Turin-tunnistettavien kielten joukko on suljettu seuraavien operaatioiden suhteen.

Tunnistaminen eroaa näiden operaatioiden osalta vain yhdisteen tapauksessa.

(a) Yhdiste

- Syötteellä  $w$ :
  1. Aja  $TM_A$  ja  $TM_B$  syötteellä  $w$  siten, että molempia Turingin koneita suoritetaan yksi tilasiirtymä kerrallaan.
  2. Jos jompi kumpi Turingin koneista hyväksyy, hyväksy.

Toinen vaihtoehto on käyttää epädeterministisyyttä.

- Syötteellä  $w$ :
  1. Valitse epädeterministisesti toinen Turingin koneista  $TM_A$  ja  $TM_B$ . Aja valittua konetta syötteellä  $w$ .
  2. Jos ajettava Turingin kone hyväksyy, hyväksy.

(b) Ketjutus

- Syötteellä  $w$ :
  1. Jaa merkkijono  $w$  epädeterministisesti kahteen osaan  $w = w_1w_2$ .
  2. Aja  $TM_A$  syötteellä  $w_1$  ja  $TM_B$  syötteellä  $w_2$ .
  3. Jos molemmat Turingin koneet hyväksyvät, hyväksy.

(c) Tähti

- Syötteellä  $w$ :
  1. Jaa merkkijono  $w$  epädeterministisesti  $n$  osaan  $w = w_1 \cdots w_n$ .
  2. Aja  $TM_A$  jokaisella osalla  $w_i, i \in \{1, \dots, n\}$ .
  3. Jos jokainen ajo hyväksyy, hyväksy.

(d) Leikkaus

- Syötteellä  $w$ :
  1. Aja  $TM_A$  ja  $TM_B$  syötteellä  $w$ .
  2. Jos molemmat Turingin koneista hyväksyvät, hyväksy.