

582206 Laskennan mallit, syksy 2012

6. harjoitusten malliratkaisut

Juhana Laurinharju ja Jani Rahkola

Säännölliset kielet

1. Osoita seuraavat kielet epäsäännöllisiksi käyttäen pumppauslemmaa (tai jollain muulla halua-mallasi tavalla):

- (a) $\{a^m b^n c^n \mid n, m \geq 1\}$
- (b) aakkoston $\{a, b, c\}$ palindromit
- (c) $\{0^n 10^n \mid n \in N\}$.

2. Mitkä seuraavista kielistä ovat säännöllisiä, mitkä eivät (kielillä A_1 ja A_2 aakkostona $\{0, 1\}$, muilla $\{a, b, c\}$):

$$A_1 = \{0^n 1^m 0^n \mid n, m \in N\}$$

$$A_2 = \{0^n 0^n \mid n \in N\}$$

$$A_3 = \{ww^R \mid w \in \Sigma^*\}$$

$$A_4 = \{wuw^R \mid w, u \in \Sigma^+\}.$$

$$A_5 = \{wxw^R \mid w \in \Sigma^*, x \in \Sigma\}$$

$$A_6 = \{abca^n b^n c^n \mid n \in N\}$$

Perustele. Voit käyttää hyväksi kaikkia tunnettuja säännöllisiä kieliä koskevia ominaisuuksia, etenkin edellisen tehtävän tuloksia.

Kontekstittomat kielet

3. Esitä kontekstittomat kielipit, jotka tuottavat seuraaville aakkoston $\Sigma = \{0, 1\}$ kielille:

- (a) parittoman mittaiset merkkijonot
- (b) merkkijonot, joilla on osamerkkijono 111
- (c) merkkijonot, joissa on ainakin kaksi merkkiä ja joiden ensimmäinen ja viimeinen merkki ovat samat
- (d) parittoman mittaiset merkkijonot, joiden ensimmäinen ja keskimäinen merkki ovat samat.

4. Esitä kontekstittomat kielipit seuraaville kielille:

- (a) $01^* \cup 10^*$

$$S \rightarrow 0T_1 \mid 1T_0$$

$$T_1 \rightarrow 1T_1 \mid \varepsilon$$

$$T_0 \rightarrow 0T_0 \mid \varepsilon$$

- (b) $\{0^n 1^m \mid m, n \in N \text{ ja } m \geq n\}$

$$S \rightarrow T_{01}T_1$$

$$T_{01} \rightarrow 0T_{01}1 \mid \varepsilon$$

$$T_1 \rightarrow 1T_1 \mid \varepsilon$$

- (c) $\{0^n 1^k 0^m \mid m, n, k \in N \text{ ja } k = n + m\}$

$$S \rightarrow T_{01}T_{10}$$

$$T_{01} \rightarrow 0T_{01}1 \mid \varepsilon$$

$$T_{10} \rightarrow 1T_{10}0 \mid \varepsilon$$

$$(d) \{a^n b^m c^m \mid m, n \in N\}$$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AT_{bc} \\ A &\rightarrow aA \mid \varepsilon \\ T_{bc} &\rightarrow bT_{bc}c \end{aligned}$$

(e) aakkoston $\{0, 1\}$ merkkijonot, joissa on yhtä paljon nollia ja ykkösiä.

$$S \rightarrow 0S1S \mid 1S0S \mid \varepsilon$$

5. Täydennä Jyrkin luentojen lauseen 2.3 todistus (s. 140) osoittamalla, että kontekstiton kielten luokka on suljettu myös konkatenation ja tähtioperaation suhteen. Esitä todistus samalla tarkkuustasolla kuin luentomuistiinpanoissa esitetty yhdisteen tapaus.
6. Voidaan osoittaa, että kieli $A = \{a^n b^n c^n \mid n \in N\}$ ei ole kontekstiton. (Tähän palataan myöhemmin kurssilla.) Käyttäen tätä tietoa hyväksi osoita, että kontekstiton kielten luokka ei ole suljettu leikkauksen suhteen. (*Vihje*: esitä A kahden kontekstittoman kielen leikkauksena.) Päätele edelleen, että kontekstittomien kielten luokka ei ole suljettu komplementoinnin suhteen.
7. Osoita, että seuraavien aakkoston $\{a, b, c\}$ kielten komplementit ovat kontekstittomia:

$$(a) A_1 = \{a^n b^n \mid n \in N\}$$

$$(b) A_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \in N\}$$

Vihje: Voit tietysti yksinkertaisesti kirjoittaa kontekstittomat kieliopit komplementeille $\overline{A_1}$ ja $\overline{A_2}$. Voi kuitenkin olla helpompaa esittää $\overline{A_1}$ ja $\overline{A_2}$ yhdisteinä yksinkertaisemmista kielistä, jotka on suoraviivaisempaa nähdä kontekstittomiksi.