582206 Laskennan mallit, syksy 2012
6. harjoitusten malliratkaisut
Juhana Laurinharju ja Jani Rahkola

Säännölliset kielet

1. Osoita seuraavat kielet epäsäännöllisiksi käyttäen pumppauslemmaa (tai jollain muulla haluamallasi tavalla):

   (a)
   $$A = \{a^m b^n c^n \mid n, m \geq 1\}$$

   Ensinnäkin huomataan, että A on säännöllinen täsmälleen silloin, kun $A^{\mathcal{R}}$ on säännöllinen, sillä aikaisemmin ollaan laskuharjoituksissa näytetty, että säännölliset kielet ovat suljettu kääntämisen suhteen. Riittää siis näyttää kieli $A^{\mathcal{R}}$ epäsäännölliseksi, missä

   $$A^{\mathcal{R}} = \{c^n b^n a^m \mid n, m \geq 1\}.$$

   Tehdään vastaoletus. Oletetaan, että kieli $A^{\mathcal{R}}$ on säännöllinen. Tällöin sillä on jokin pumppauspituus p. Nyt voidaan valita merkkijono

   $$s = c^p b^p a \in A^{\mathcal{R}},$$

   jolla pätee $|s| \geq p$. Säännöllisten kielten pumppauslemman nojalla s voidaan nyt jakaa kolmeen osaan siten, että

   $$\begin{aligned} s &= xyz, \\ |xy| &\leq p \text{ ja} \\ |y| &> 0 \end{aligned}$$

   joten

   $$\begin{aligned} xy &= c^k && \text{jollain } k \leq p, \\ z &= c^{p-k} b^p a && \text{ja erityisesti} \\ y &= c^n && \text{jollain } n > 0. \end{aligned}$$

   Nyt pumppauslemman nojalla myös merkkijonon

   $$xz = c^{k-n} c^{p-k} b^p a = c^{p-n} b^p a$$

   tulisi kuulua kieleen $A^{\mathcal{R}}$. Nyt kuitenkin $n > 0$, joten

   $$xz = c^{p-n} b^p a \notin A.$$

   Tämä on ristiriidassa säännöllisten kielten pumppauslemman kanssa, joten kielellä $A^{\mathcal{R}}$ ei ole pumppausominaisuutta, eikä se siten voi olla säännöllinen, joten myöskään kieli A ei ole säännöllinen.

   (b) aakkoston $\{a, b, c\}$ palindromit

   (c) $\{0^n 1 0^n \mid n \in N\}$.

2. Mitkä seuraavista kielistä ovat säännöllisiä, mitkä eivät (kielillä A_1 ja A_2 aakkostona $\{0, 1\}$, muilla $\{\text{a}, \text{b}, \text{c}\}$):

   $$\begin{aligned} A_1 &= \{0^n 1^m 0^n \mid n, m \in N\} & A_2 &= \{0^n 0^n \mid n \in N\} \\ A_3 &= \left\{ww^{\mathcal{R}} \mid w \in \Sigma^*\right\} & A_4 &= \left\{wuw^{\mathcal{R}} \mid w, u \in \Sigma^+\right\}. \\ A_5 &= \left\{wxw^{\mathcal{R}} \mid w \in \Sigma^*, x \in \Sigma\right\} & A_6 &= \{\text{abca}^n\text{b}^n\text{c}^n \mid n \in N\} \end{aligned}$$

   Perustele. Voit käyttää hyväksi kaikkia tunnettuja säännöllisiä kieliä koskevia ominaisuuksia, etenkin edellisen tehtävän tuloksia.

Kontekstittomat kielet

3. Esitä kontekstittomat kieliopit, jotka tuottavat seuraaville aakkoston $\Sigma = \{0, 1\}$ kielille:
   (a) parittoman mittaiset merkkijonot
   (b) merkkijonot, joilla on osamerkkijono 111
   (c) merkkijonot, joissa on ainakin kaksi merkkiä ja joiden ensimmäinen ja viimeinen merkki ovat samat
   (d) parittoman mittaiset merkkijonot, joiden ensimmäinen ja keskimmäinen merkki ovat samat.

4. Esitä kontekstittomat kieliopit seuraaville kielille:
   (a) $01^* \cup 10^*$

$$\begin{aligned} S &\to 0T_1 \mid 1T_0 \\ T_1 &\to 1T_1 \mid \varepsilon \\ T_0 &\to 0T_0 \mid \varepsilon \end{aligned}$$

   (b) $\{0^n 1^m \mid m, n \in N \text{ ja } m \geq n\}$

$$\begin{aligned} S &\to T_{01}T_1 \\ T_{01} &\to 0T_{01}1 \mid \varepsilon \\ T_1 &\to 1T_1 \mid \varepsilon \end{aligned}$$

   (c) $\left\{0^n 1^k 0^m \mid m, n, k \in N \text{ ja } k = n + m\right\}$

$$\begin{aligned} S &\to T_{01}T_{10} \\ T_{01} &\to 0T_{01}1 \mid \varepsilon \\ T_{10} &\to 1T_{10}0 \mid \varepsilon \end{aligned}$$

   (d) $\{a^n b^m c^m \mid m, n \in N\}$

$$\begin{aligned} S &\to AT_{bc} \\ A &\to aA \mid \varepsilon \\ T_{bc} &\to bT_{bc}c \end{aligned}$$

   (e) aakkoston $\{0, 1\}$ merkkijonot, joissa on yhtä paljon nollia ja ykkösiä.

$$S \to 0S1S \mid 1S0S \mid \varepsilon$$

5. Täydennä Jyrkin luentojen lauseen 2.3 todistus (s. 140) osoittamalla, että kontekstiton kielten luokka on suljettu myös konkatenaation ja tähtioperaation suhteen. Esitä todistus samalla tarkkuustasolla kuin luentomuistiinpanoissa esitetty yhdisteen tapaus.

6. Voidaan osoittaa, että kieli $A = \{a^n b^n c^n \mid n \in N\}$ ei ole kontekstiton. (Tähän palataan myöhemmin kurssilla.) Käyttäen tätä tietoa hyväksi osoita, että kontekstiton kielten luokka ei ole suljettu leikkauksen suhteen. (*Vihje:* esitä A kahden kontekstittoman kielen leikkauksena.) Päättele edelleen, että kontekstittomien kielten luokka ei ole suljettu komplementoinnin suhteen.

7. Osoita, että seuraavien aakkoston $\{a, b, c\}$ kielten komplementit ovat kontekstittomia:
   (a) $A_1 = \{a^n b^n \mid n \in N\}$
   (b) $A_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \in N\}$

   Vihje: Voit tietysti yksinkertaisesti kirjoittaa kontekstittomat kieliopit komplementeille $\overline{A_1}$ ja $\overline{A_2}$. Voi kuitenkin olla helpompaa esittää $\overline{A_1}$ ja $\overline{A_2}$ yhdisteinä yksinkertaisemmista kielistä, jotka on suoraviivaisempaa nähdä kontekstittomiksi.