Pumppauslemmaopas

Juhana Laurinharju Jani Rahkola

10. lokakuuta 2012

Pumppauslemma

Jokaisella säännöllisellä kiellellä on seuraava *pumppauslemmana* tunnettu ominaisuus.

Määritelmä (pumppauslemma)**.** Olkoon A säännöllinen kieli. Tällöin A:lla on jokin pumppauspituus $p \in \mathbb{N}$, $p > 0$. Nyt kaikki vähintään p:n mittaiset merkkijonot $s \in A$, $|s| \geq p$ voidaan jakaa kolmeen osaan $s = xyz$ siten, että seuraavat kolme ehtoa ovat voimassa.

1. $xy^iz \in A$ jokaisella $i \in \mathbb{N}$, erityisesti myös kun $i = 0$.
2. $|y| > 0$, eli toistettava osa y ei saa olla tyhjä merkkijono ε.
3. $|xy| \leq p$

Otetaan tästä konkreettinen esimerkki. Kieli $A = L(a^*b^*)$ on säännöllinen ja sillä on täten jokin pumppauspituus p. Tämän kielen kohdalla eräs mahdollinen pumppauspituus on $p = 2$. Tarkastellaan jotain riittävän pitkää kielen A merkkijonoa. Valitaan $s = abb$. Nyt pumppauslemman nojalla löytyy *jokin* jako $s = xyz$, jolle yllä olevat kolme ehtoa pätevät.

Tarkastellaan merkkijonon s mahdollisia jakoja.

- Kokeillaan ensin seuraavaa jakoa:

$$\begin{aligned} x &= \varepsilon, \\ y &= ab \\ \text{ja } z &= b \end{aligned}$$

  Nyt ehdot 2 ja 3 ovat voimassa, mutta ensimmäinen ehto ei täyty, sillä esimerkiksi merkkijono $xyyz = ababb$ ei kuulu kieleen A.

- Ensimmäinen jako ei siis täyttänyt kaikkia pumppauslemman ehtoja. Pumppauslemma ei kuitenkaan takaa, että nämä ehdot täyttyisivät jokaisella jaolla. Ainoa tae on se, että löytyy jokin ehdot täyttävä jako. Tällainen on esimerkiksi seuraava jako:

$$\begin{aligned} x &= a, \\ y &= b \\ \text{ja } z &= b \end{aligned}$$

  Nyt $|xy| = 2 \leq p$, $|y| = 1 > 0$. Entä miltä näyttää merkkijono xy^iz? Tarkastellaan tätä ensin i:n arvoilla 0, 1 ja 2:

$$\begin{aligned} xy^0z &= xz = ab \in A \\ xy^1z &= xyz = abb \in A \\ xy^2z &= xyyz = abbb \in A \end{aligned}$$

  Ja yleisessä tapauksessa, kun $i \in \mathbb{N}$, niin

$$xy^iz = ab^ib = ab^{i+1} \in L(a^*b^*) = A$$

Tehtävä 1. Olkoon

$$A = L((ab)^*)$$

säännöllinen kieli. Tällä kielellä on pumppauspituus $p = 2$. Valitaan kielestä merkkijono

$$s = ababab$$

joka on pidempi kuin pumppauspituus $p = 2$. Anna kaikki merkkijonon s jaot $s = xyz$ jotka täyttävät pumppauslemman ehdot 2 ja 3, eli

$$|y| > 0 \text{ ja}$$
$$|xy| \leq p.$$

Tehtävä 2. Mitkä edellisen tehtävän jaoista $s = xyz$ toteuttavat pumppauslemman ensimmäisen ehdon? Ensimmäinen ehto on

$$xy^iz \in A \text{ kaikilla } i \in \mathbb{N}$$

eli keskikohtaa y voi toistaa.

Pumppauslemman käyttäminen

Pumppauslemma on hyödyllinen koska sillä voidaan näyttää *joitakin* kieliä epäsäännöllisiksi. Mutta kuinka tämä onnistuu työkalulla joka ei puhu mitään epäsäännöllisistä kielistä? Pumppauslemman jos-niin rakenteeseen piiloutuu kuitenkin myös väite epäsäännöllisyydestä. Seuraava lemma on nimittäin yhtäpitävä pumppauslemman kanssa.

Lemma. Olkoon A jokin kieli. Oletetaan lisäksi, että kaikilla luonnollisilla luvuilla $p > 0$ jotain kielen A merkkijonoa s, $|s| \geq p$ ei voida jakaa *millään tapaa* kolmeen osaan $s = xyz$ siten, että seuraavat ehdot olisivat voimassa:

1. $xy^iz \in A$ jokaisella $i \in \mathbb{N}$, erityisesti myös kun $i = 0$.
2. $|y| > 0$, eli toistettava osa y ei saa olla tyhjä merkkijono ε.
3. $|xy| \leq p$

Nyt kieli A on epäsäännöllinen.

Todistus. Olkoon A kieli jolla ei ole pumppauspituutta. Oletetaan vastoin väitettä, että A on säännöllinen. Nyt pumppauslemman nojalla kielellä A kuitenkin tulisi olla pumppauspituus. Siis A ei voi olla säännöllinen. □

Pumppauslemman avulla voidaan siis todistaa epäsäännöllisiksi vain sellaiset kielet joilla ei ole pumppauspituutta. Tulee kuitenkin muistaa, että joillain epäsäännöllisilläkin kielillä on olemassa pumppauspituus.

Käydään nyt läpi todistus erään jo tutun kielen epäsäännöllisyydelle. Olkoon kieli $A = \{0^n1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Osoitetaan tämän kielen epäsäännöllisyys yllä todistetun lemman avulla.

Väite. *Kieli* $A = \{0^n1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *on epäsäännöllinen.*

Todistus. Olkoon p positiivinen luonnollinen luku. Nyt merkkijono $s = 0^p 1^p$ kuuluu kieleen A ja sisältää vähintään p merkkiä. Haluamme osoittaa, että mikään merkkijonon s jako $s = xyz$ joka noudattaa lemman ehtoja 2 ja 3 ei voi noudattaa ehtoa 1.

Kaikki ehtojen 2 ja 3 mukaiset jaot voidaan kuvata seuraavasti

$$\begin{aligned} x &= 0^n \\ y &= 0^m \\ \text{ja } z &= 0^{p-(m+n)} 1^p \end{aligned}$$

missä $n, m \in \mathbb{N}$. Jotta y ei olisi tyhjä merkkijono, täytyy m:n olla positiivinen. Jotta merkkijonon xy pituus olisi korkeintaan p, tulee summan $n + m$ olla korkeintaan p. Tarkastellaan merkkijonoa, jossa osaa y esiintyy kaksi kertaa

$$\begin{aligned} xy^2z &= xyyz \\ &= 0^n 0^{2m} 0^{p-(m+n)} 1^p \\ &= 0^{n+2m+(p-(m+n))} 1^p \\ &= 0^{n+2m+p-m-n} 1^p \\ &= 0^{p+m} 1^p \end{aligned}$$

Koska m oli aidosti positiivinen luku, on merkkijonossa xy^2z enemmän nollia kuin ykkösiä, joten se ei kuulu kieleen A. Siis ehto 1 ei voi olla voimassa, ja täten lemman nojalla A on epäsäännöllinen. $\square$

Tehtävä 3. Osoita kieli $A = \{0^n 1^m \mid n, m \in \mathbb{N}, n < m\}$ epäsäännölliseksi lemman avulla.

Tehtävä 4. Osoita kieli $A = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ epäsäännölliseksi lemman avulla.