582206 Laskennan mallit, syksy 2012
1. Harjoitusten malliratkaisut

1. (a) $\emptyset \subseteq \emptyset$ sillä tyhjä joukko on jokaisen joukon osajoukko
   (b) $\emptyset \notin \emptyset$ sillä tyhjässä joukossa ei ole yhtään alkiota
   (c) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
   (d) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
   (e) $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b\}\}$
   (f) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{a, b\}\}$ sillä a ja b kuuluvat oikeinpuoleiseen joukkoon
   (g) $$\begin{aligned}\{a, b\} \not\subseteq \mathcal{P}(\{a, b, \{a, b\}\}) = \{&\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{\{a, b\}\},\\ &\{a, b\}, \{a, \{a, b\}\},\\ &\{b, \{a, b\}\}, \{a, b, \{a, b\}\}\}\end{aligned}$$
   (h) $\{\{a, b\}\} \in \mathcal{P}(\{a, b, \{a, b\}\})$
   (i) $\{a, b, \{a, b\}\} - \{a, b\} = \{\{a, b\}\} \neq \{a, b\}$

2. (a) $$\begin{aligned}(\{1, 3, 5\} \cup \{3, 1\}) \cap \{3, 5, 7\} &= \{1, 3, 5\} \cap \{3, 5, 7\}\\ &= \{3, 5\}\end{aligned}$$
   (b) $$\begin{aligned}\bigcup\{\{3\}, \{3, 5\}, \bigcap\{\{5, 7\}, \{7, 9\}\}\} &= \bigcup\{\{3\}, \{3, 5\}, \{5, 7\} \cap \{7, 9\}\}\\ &= \bigcup\{\{3\}, \{3, 5\}, \{7\}\}\\ &= \{3\} \cup \{3, 5\} \cup \{7\}\\ &= \{3, 5, 7\}\end{aligned}$$
   (c) $$\begin{aligned}(\{1, 2, 5\} - \{5, 7, 9\}) \cup (\{5, 7, 9\} - \{1, 2, 5\}) &= \{1, 2\} \cup \{7, 9\}\\ &= \{1, 2, 7, 9\}\end{aligned}$$
   (d) $\mathcal{P}(\{7, 8, 9\}) - \mathcal{P}(\{7, 9\}) = \{\{8\}, \{7, 8\}, \{8, 9\}, \{7, 8, 9\}\}$
   Tulosjoukkoon siis jäävät ne osajoukot joissa esiintyy 8.
   (e) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

3. (a) $$\begin{aligned}\{1\} \times \{1, 2\} \times \{1, 2, 3\} &= \{(1, 1), (1, 2)\} \times \{1, 2, 3\}\\ &= \{(1, 2, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3),\\ &\quad\ (1, 2, 1), (1, 2, 2), (1, 2, 3)\}\end{aligned}$$
   (b) $\emptyset \times \{1, 2\} = \emptyset$
   $(a, b) \in \emptyset \times \{1, 2\} \Rightarrow a \in \emptyset$ ja koska tyhjässä joukossa ei ole yhtään alkiota, on karteesinen tulo tyhjän joukon kanssa aina tyhjä joukko.
   (c) $$\begin{aligned}\mathcal{P}(\{1, 2\}) \times \{1, 2\} &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} \times \{1, 2\}\\ &= \{(\emptyset, 1), (\emptyset, 2), (\{1\}, 1), (\{1\}, 2),\\ &\quad\ (\{2\}, 1), (\{2\}, 2), (\{1, 2\}, 1), (\{1, 2\}, 2)\}\end{aligned}$$
   (d) $\mathcal{P}(\{\varepsilon\}) = \{\emptyset, \{\varepsilon\}\}$

4. Ovatko seuraavat väittämät tosia? Selitä miksi jos ovat tai eivät ole.

   (a)

   Väite. $\{\varepsilon\}^* = \{\varepsilon\}$

   Todistus. $$\begin{aligned}\{\varepsilon\}^* &= \{w_1 w_2 \ldots w_n \mid w_i \in \{\varepsilon\} \text{ kaikilla } i \in \{1, \ldots, n\}\}\\ &= \{w_1 w_2 \ldots w_n \mid w_i = \varepsilon \text{ kaikilla } i \in \{1, \ldots, n\}\}\\ &= \{\varepsilon^n \mid n \geq 1\}\\ &= \{\varepsilon\} \quad \square\end{aligned}$$

(b)

Väite. *Mielivaltaisella aakkostolla* Σ *ja millä tahansa kielellä* $L \subseteq \Sigma^*$, $(L^*)^* = L^*$.

Todistus.
$L^* \subseteq (L^*)^*$**:**
Olkoon $w \in L^*$. Nyt

$$w \in (L^*)^* = \{w_1 \dots w_n \mid n \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\} : w_i \in L^*\}$$

asettamalla $n = 1$ ja $w_1 = w$.
$(L^*)^* \subseteq L^*$**:**
Olkoon $w \in (L^*)^*$.
Tällöin $w = w_1 w_2 \dots w_n$ missä $w_i \in L^*$ jokaisella $i \in \{1, \dots, n\}$.
Olkoon $i \in \{1, \dots, n\}$.
Nyt $w_i = w_{i,1} w_{i,2} \dots w_{i,k_i}$ missä $w_{i,j} \in L$ joten

$$\begin{aligned} w &= w_1 w_2 \dots w_n \\ &= w_{1,1} \dots w_{1,k_1} \dots w_{n,k_n} \in L^* \end{aligned}$$

Nyt siis $w \in L^*$ ja siten $(L^*)^* \subseteq L^*$.
On siis osoitettu, että $L^* \subseteq (L^*)^*$ ja $(L^*)^* \subseteq L^*$, joten $(L^*)^* = L^*$. □

(c)

Väite. *Jos* $a \neq b$, *niin* $\{a, b\}^* = \{a\}^* \circ (\{b\} \circ \{a\}^*)^*$.

Todistus. Olkoon $w \in \{a, b\}^*$ ja merkitään $A = \{a\}^* \circ (\{b\} \circ \{a\}^*)^*$. Todistetaan, että $w \in A$ induktiolla merkkijonon pituuden $|w|$ suhteen.

Alkuaskel $|w| = 0$ eli $w = \varepsilon$. Nyt $\varepsilon = \varepsilon\varepsilon \in A$.

Induktioaskel Oletetaan, että $u \in A$ kun $|u| < |w|$.

- Jos $w = au$ jollain $u \in \{a, b\}^*$, niin induktio-oletuksen nojalla $u \in A$ ja $u = u_1 u_2$ missä $u_1 \in \{a\}^*$ ja $u_2 \in (\{b\} \circ \{a\}^*)^*$. Nyt $au_1 \in \{a\}^*$ ja siten $w = (au_1)u_2 \in A$.
- Jos taas $w = bu$ jollain $u \in \{a, b\}^*$, on $u = u_1 \dots u_n$.
  - Jos $u_i \neq b$ jokaisella $i \in \{1, \dots, n\}$, niin tällöin $u = a^n$, $bu \in (\{b\} \circ \{a\}^*)^*$ ja $w = \varepsilon(bu) \in A$.
  - Jos $u_i = b$ jollain $i \in \{1, \dots, n\}$, jaetaan

    $$u = u_1 \dots u_j u_{j+1} \dots u_n$$

    missä u_{j+1} on ensimmäinen b merkkijonossa u. Nyt

    $$bu_1 \dots u_j = ba^j \in (\{b\} \circ \{a\}^*)^*$$

    ja induktio-oletuksen nojalla $u_{j+1} \dots u_n \in A$. Nyt $u_{j+1} \dots u_n = v_1 v_2$ missä

    $$v_1 \in \{a\}^* \text{ ja } v_2 \in \{\{b\} \circ \{a\}^*\}^*.$$

    Tällöin $v_1 = a^k$ jollain $k \geq 1$. Kuitenkin $u_{j+1} = b$, joten $v_1 = \varepsilon$ ja $u_{j+1} \dots u_n = v_2 \in \{\{b\} \circ \{a\}^*\}^*$. Nyt

    $$\begin{gathered} bu_1 \dots u_j \in \{b\} \circ \{a\}^* \\ \text{ja } u_{j+1} \dots u_n \in \{\{b\} \circ \{a\}^*\}^* \end{gathered}$$

    joten $w = \varepsilon(bu) \in A$.

Olkoon sitten $w \in A$. Nyt $w = u_1 \dots u_n$ missä $u_i \in \{a, b\}$ kaikilla i. Siten $w \in \{a, b\}^*$. On siis osoitettu, että $\{a, b\}^* \subseteq A$ ja $A \subseteq \{a, b\}^*$ joten joukot ovat samat. $\square$

(d)

Väite. *Jos* Σ *on mielivaltainen aakkosto,* $\varepsilon \in L_1 \subseteq \Sigma^*$ *ja* $\varepsilon \in L_2 \subseteq \Sigma^*$, *niin* $(L_1 \circ \Sigma^* \circ L_2)^* = \Sigma^*$.

Todistus. Merkitään $L = (L_1 \circ \Sigma^* \circ L_2)^*$.

$L \subseteq \Sigma^*$:

Olkoon $w \in L$. Nyt $w = l_1 v l_2$ jollain $l_1 \in L_1$, $v \in \Sigma^*$ ja $l_2 \in L_2$ ja koska

$$l_1 \in L_1 \subseteq \Sigma^* \Rightarrow l_1 \in \Sigma^*$$
$$l_2 \in L_2 \subseteq \Sigma^* \Rightarrow l_2 \in \Sigma^*$$

niin $w = l_1 v l_2 \in \Sigma^* \circ \Sigma^* \circ \Sigma^* = \Sigma^*$. Siis $L \subseteq \Sigma^*$.

$\Sigma^* \subseteq L$:

Olkoon $w \in \Sigma^*$. Nyt $w = \varepsilon w \varepsilon$ ja koska $\varepsilon \in L_1$ ja $\varepsilon \in L_2$, niin $w \in L$. Siis $\Sigma^* \subseteq L$.

Koska $\Sigma^* \subseteq L$ ja $L \subseteq \Sigma^*$, niin $\Sigma^* = L = (L_1 \circ \Sigma^* \circ L_2)^*$. $\square$

(e)

Väite. *Kaikilla kielillä* L, $\emptyset \circ L = L \circ \emptyset = \emptyset$.

Todistus. Jos $uv \in \emptyset \circ L$, niin $u \in \emptyset$. Koska tyhjässä joukossa ei ole yhtään alkiota, niin myös $\emptyset \circ L$ on tyhjä joukko. Vastaavasti tapauksella $L \circ \emptyset$. Siis $\emptyset \circ L = L \circ \emptyset = \emptyset$. $\square$

5. Olkoon $\Sigma = \{a, b\}$. Esitä joitakin esimerkkejä merkkijonoista, jotka kuuluvat tai eivät kuulu alla määriteltyihin joukkoihin.

(a) $\{w \mid w = uu^R u \text{ jollakin } u \in \Sigma \circ \Sigma\}$

Joukkoon kuuluvat siis merkkijonot *aaaaaa*, *bbbbbb*, *abbaab* ja *baabba*.

(b) $\{w \mid ww = www\}$

Jos $ww = www$, niin $|ww| = |www|$ ja $2|w| = 3|w|$. Tämä pätee vain jos $|w| = 0$, joten $w = \varepsilon$. Joukkoon kuuluu siis vain tyhjä merkkijono.

(c) $\{w \mid uvw = wvu \text{ joillakin } u, v \in \Sigma^*\}$

Valitaan $u = v = \varepsilon$. Nyt $uvw = w = wvu$ kaikilla w. Joukkoon kuuluvat siis kaikki mahdolliset merkkijonot.

(d) $\{w \mid www = uu \text{ jollakin } u \in \Sigma^*\}$

Esimerkiksi ab kuuluu joukkoon, sillä $(ab)(ab)(ab) = (aba)(aba)$. Toisaalta $abbb$ ei kuulu määriteltyyn joukkoon, sillä

$$(abbb)(abbb)(abbb) = (abbbab)(bbabbb)$$

mutta

$$abbbab \neq bbabbb$$

Tämä esimerkki näyttää että kuuluvuusehdoksi ei riitä pituuden parillisuus.

6. Milloin yhtälö $L^+ = L^* - \{\varepsilon\}$ on tosi? Tässä $L^+ = \{l_1 l_2 \dots l_k \mid k \geq 1 \text{ ja } l_i \in L \text{ kaikilla } i\}$

Väite. *$L^+ = L^* - \{\varepsilon\}$ jos ja vain jos $\varepsilon \notin L$.*

Todistus. Jos $w \in L$, niin $w \in L^+$. Täten jos $\varepsilon \notin L^+$, niin $\varepsilon \notin L$. Jos $\varepsilon \notin L$, niin ei ole olemassa merkkijonoa $l_1 l_2 \dots l_k = \varepsilon$ missä $l_i \in L$ kaikilla i. Täten $\varepsilon \notin L^+$. Muistetaan lisäksi, että $L^* = L^+ \cup \{\varepsilon\}$. Nyt pätee

$$\begin{aligned} \varepsilon \notin L &\Leftrightarrow \varepsilon \notin L^+ \\ &\Leftrightarrow L^+ = L^+ - \{\varepsilon\} \\ &\Leftrightarrow L^+ = (L^+ \cup \{\varepsilon\}) - \{\varepsilon\} \\ &\Leftrightarrow L^+ = L^* - \{\varepsilon\} \end{aligned}$$

Siis $\varepsilon \notin L \Leftrightarrow L^+ = L^* - \{\varepsilon\}$. □

7. Etsi seuraavat ehdot täyttävät merkkijonot.

   (a) Kaksi erillaista viiden mittaista merkkijonoa, joilla täsmälleen samat alimerkkijonot lukuunottamatta sanoja itseään.

   Merkkijonoilla *ababa* ja *babab* on alimerkkijonot ε, *a*, *b*, *ab*, *ba*, *aba*, *bab*, *abab*, ja *baba*.

   (b) Merkkijono joka koostuu merkeistä *a* ja *b* eikä ole kahden palindromin ketjutus.

   abaabb on halutunlainen, sillä se ei itsessään ole palindromi, ja lisäksi $a(baabb)$, $(ab)aabb$, $aba(abb)$, $(abaa)bb$ ja $(abaab)b$ eivät ole kahden palindromin ketjutuksia.

   (c) Viiden merkin mittainen merkkijono joka sisältää kaikki mahdolliset aakkoston $\{a, b\}$ kahden mittaiset merkkijonot alimerkkijonoinaan.

   Kaikki kahden mittaiset merkkijonot aakkostosta $\{a, b\}$ ovat *aa*, *bb*, *ab* ja *ba*. Merkkijono *abbaa* sisältää nämä kaikki.