

Pumppauslemmaopas

Juhana Laurinharju

Jani Rahkola

10. lokakuuta 2012

Pumppauslemma

Jokaisella säännöllisellä kielellä on seuraava *pumppauslemma* tunnettu ominaisuus.

Määritelmä (pumppauslemma). Olkoon A säännöllinen kieli. Tällöin A :lla on jokin pumppauspituus $p \in \mathbb{N}$, $p > 0$. Nyt kaikki tätä pidemmät merkkijonot $s \in A$, $|s| \geq p$ voidaan jakaa kolmeen osaan $s = xyz$ siten, että seuraavat kolme ehtoa ovat voimassa.

1. $xy^iz \in A$ jokaisella $i \in \mathbb{N}$, erityisesti myös kun $i = 0$.
2. $|y| > 0$, eli toistettava osa y ei saa olla tyhjä merkkijono ε .
3. $|xy| \leq p$

Otetaan tästä konkreettinen esimerkki. Kieli $A = L(a^*b^*)$ on säännöllinen ja sillä on täten jokin pumppauspituus p . Tämän kielen kohdalla eräs mahdollinen pumppauspituus on $p = 2$. Tarkastellaan jotain riittävän pitkää kielen A merkkijonoa. Valitaan $s = abbb$. Nyt pumppauslemman nojalla löytyy *jokin* jako $s = xyz$, jolle yllä olevat kolme ehtoa pätevät.

Tarkastellaan merkkijonon s mahdollisia jakoja.

- Kokeillaan ensin seuraavaa jakoa:

$$\begin{aligned}x &= \varepsilon, \\y &= ab \\ \text{ja } z &= b\end{aligned}$$

Nyt ehdot 2 ja 3 ovat voimassa, mutta ensimmäinen ehto ei täyty, sillä esimerkiksi merkkijono $xyyz = ababb$ ei kuulu kieleen A .

- Ensimmäinen jako ei siis täyttänyt kaikkia pumppauslemman ehtoja. Pumppauslemma ei kuitenkaan takaa, että nämä ehdot täyttyisivät jokaisella jaolla. Ainoa tae on se, että löytyy jokin ehdot täyttävä jako. Tällainen on esimerkiksi seuraava jako:

$$\begin{aligned}x &= a, \\y &= b \\ \text{ja } z &= b\end{aligned}$$

Nyt $|xy| = 2 \leq p$, $|y| = 1 > 0$. Entä miltä näyttää merkkijono xy^iz ? Tarkastellaan tätä ensin i :n arvoilla 0, 1 ja 2:

$$\begin{aligned}xy^0z &= xz = ab \in A \\xy^1z &= xyz = abb \in A \\xy^2z &= xyyz = abbb \in A\end{aligned}$$

Ja yleisessä tapauksessa, kun $i \in \mathbb{N}$, niin

$$xy^iz = ab^ib = ab^{i+1} \in L(a^*b^*) = A$$

Tehtävä 1. Olkoon

$$A = L((ab)^*)$$

säännöllinen kieli. Tällä kielellä on pumppauspituus $p = 2$. Valitaan kielestä merkkijono

$$s = ababab$$

joka on pidempi kuin pumppauspituus $p = 2$. Anna kaikki merkkijonon s jaot $s = xyz$ jotka täyttävät pumppauslemman ehdot 2 ja 3, eli

$$|y| > 0 \text{ ja}$$

$$|xy| \leq p.$$

Tehtävä 2. Mitkä edellisen tehtävän jaoista $s = xyz$ toteuttavat pumppauslemman ensimmäisen ehdon? Ensimmäinen ehto on

$$xy^iz \in A$$

eli keskikohtaa y voi toistaa.

Pumppauslemman käyttäminen

Pumppauslemma on hyödyllinen koska sillä voidaan näyttää *joitakin* kieliä epäsäännöllisiksi. Eräs tällainen kieli on jo tuttu ja epäsäännölliseksi osoitettu $A = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ Osoitetaan tämän kielen epäsäännöllisyys pumppauslemman avulla.

Väite. *Kieli $A = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ on epäsäännöllinen.*

Todistus. asd

□