582206 Laskennan mallit, syksy 2012
2. Harjoitusten malliratkaisut

Jani Rahkola ja Juhana Laurinharju

1. Olkoon kahden äärellisen automaatin M_1 ja M_2 tilat ja siirtymät seuraavat.

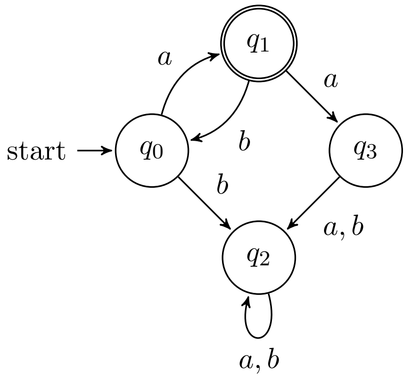
   (a) Mikä on kunkin automaatin aloitustila?

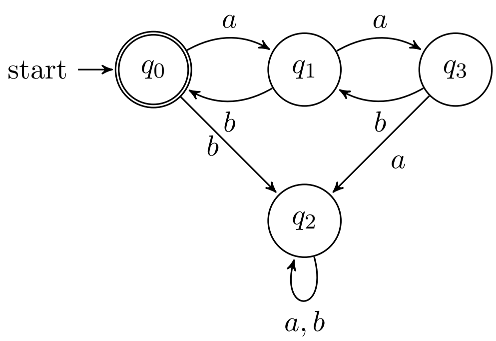
   (b) Mitkä ovat hyväksyviä tiloja?

   (c) Minkä tilajonon automaatit käyvät läpi syötteellä $aabb$?

   (d) Hyväksyvätkö automaatit syötteen $aabb$?

   (e) Hyväksyvätkö automaatit merkkijonon ε?



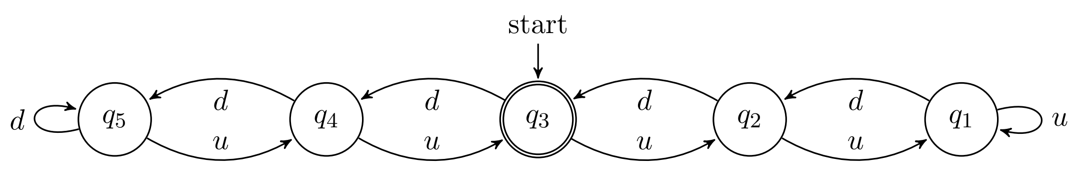


	M_1	M_2
(a)	q_0	q_0
(b)	$\{q_1\}$	$\{q_0\}$
(c)	$q_0q_1q_3q_2q_2$	$q_0q_1q_3q_1q_0$
(d)	ei	kyllä
(e)	ei	kyllä

2. Olkoon äärellisen automaatin M formaali kuvaus $(\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{u, d\}, \delta, q_3, \{q_3\})$ missä siirtymäfunktion määrittelee taulukko:

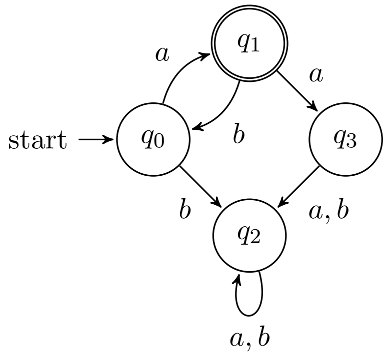
	u	d
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_3
q_3	q_2	q_4
q_4	q_3	q_5
q_5	q_4	q_5

   Piirrä automaatti M (tilat ja siirtymät).

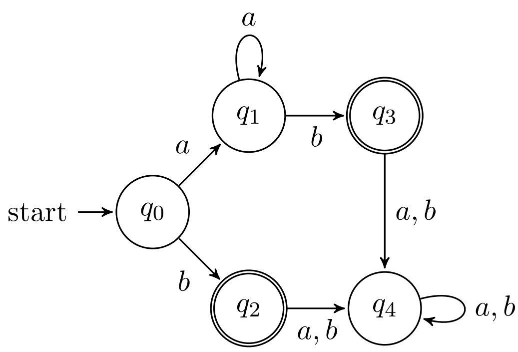


3. Minkälaisia merkkijonoja eli sanoja seuraavat äärelliset automaatit hyväksyvät?

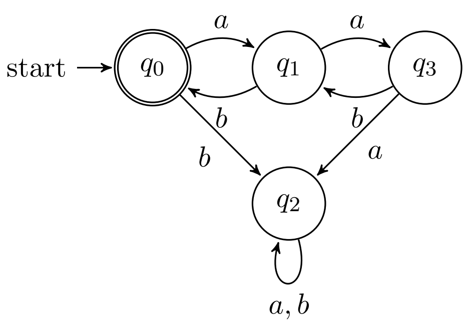
(a)



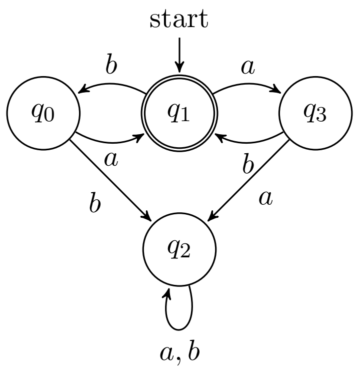
(b)



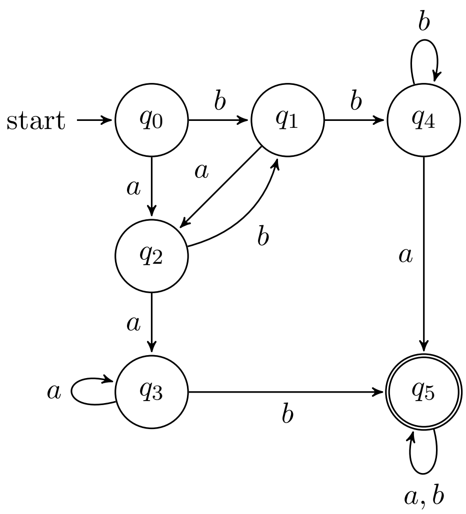
(c)



(d)



(e)



(a) $\{a\} \circ \{ba\}^* = a(ba)^*$

(b) $\{a\}^* \circ \{b\} = a^*b$

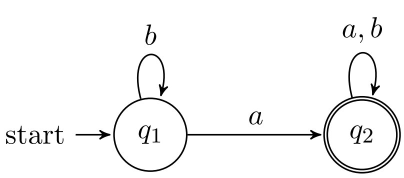
(c) $(\{a\} \circ \{ab\}^* \circ \{b\})^* = (a(ab)^*b)^*$

(d) $\{ab\}^* \cup \{ba\}^* = (ab)^*|(ba)^*$

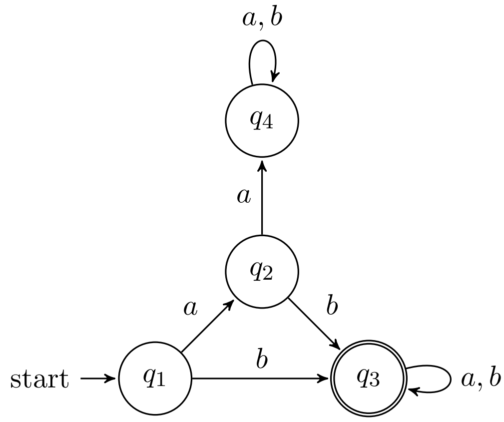
(e) $\{a,b\}^* \circ \{aab, bba\} \circ \{a,b\}^* = (a|b)^*(aab|bba)(a|b)^*$

4. Piirrä äärelliset automaatit tiloineen ja siirtymänuolineen seuraaville kielille.

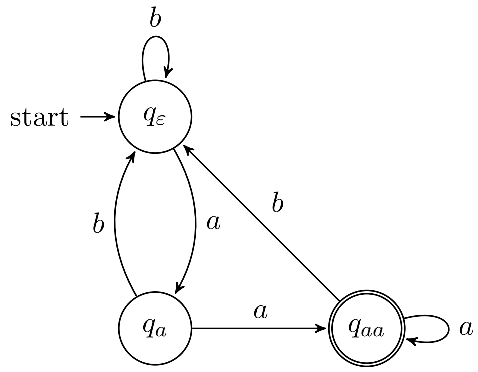
(a) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ sisältää ainakin yhden a:n$\}$



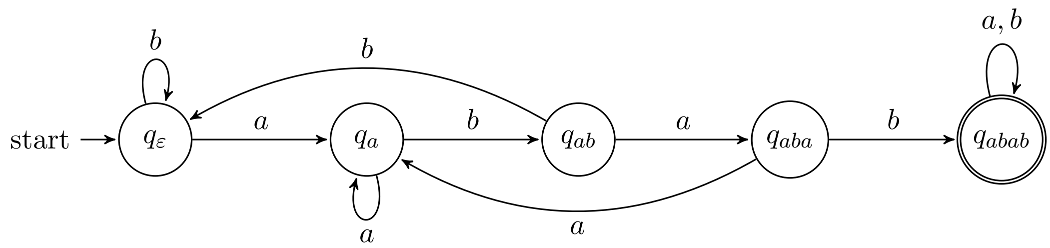
(b) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ alkaa b tai ab:llä$\}$



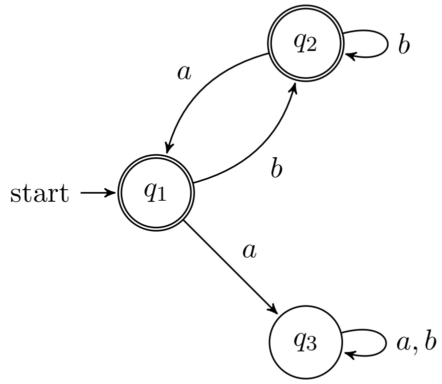
(c) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ loppuu aa:han$\}$
Suunnitellun automaatin olisi tarkoitus ”muistaa”, ollaanko nähty nolla, yksi vai ainakin kaksi a-merkkiä. Luodaan siis automaatille tilat jokaista kolmea vaihtoehtoa varten. Alkutilassa ei olla vielä nähty yhtään a:ta. Tilassa q_a ollaan nähty yksi a ja tilassa q_{aa} ollaan nähty ainakin kaksi a:ta.



(d) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ sisältää merkkijonon $abab$ $\}$



(e) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid$ jokaisen w:ssä olevan a:n edessa on $b\}$



5. Olkoon kielet A ja B säännöllisiä. Todista että joukkoerotus $A - B$ tuottaa säännöllisen kielen luentokalvojen yhdisteen esimerkin mukaisesti. Piirrä myös pieni esimerkki automaateista $L(M_1) = A$, $L(M_2) = B$ ja $L(M_{A-b}) = A - B$.

Koska A ja B ovat säännöllisiä, on olemassa äärelliset automaatit $M_A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, s_A, F_A)$ ja $M_B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, s_B, F_B)$ jotka tunnistavat kielet A ja B. Siis $L(M_A) = A$ ja $L(M_B) = B$.

Määritellään automaatti $M_{A-B} = (Q_{A-B}, \Sigma, \delta_{A-B}, s_{A-B}, F_{A-B})$ missä

$$\begin{aligned}
Q_{A-B} &= Q_A \times Q_B \\
\delta_{A-B}((q_A, q_B), a) &= (\delta_A(q_A, a), \delta_B(q_B, a)) \\
s_{A-B} &= (s_A, s_B) \\
F_{A-B} &= \{(q_A, q_B) \in Q_{A-B} \mid q_A \in F_A \text{ ja } q_B \notin F_B\} = F_A \times (Q_B - F_B)
\end{aligned}$$

FIXME: Motivaatio

Väite. *Yllä määritelty automaatti M_{A-B} tunnistaa kielen $A - B$. Siten kieli $A - B$ on säännöllinen.*

Todistus. Olkoon $w \in \Sigma^*$. Nyt

$$w = w_1 \dots w_n.$$

Määritellään tilajonot

$$\begin{aligned}
r &= r_1 \dots r_{n+1} \text{ ja} \\
p &= p_1 \dots p_{n+1}
\end{aligned}$$

joiden läpi automaatit M_A ja M_B kulkevat merkkijonon w aikana siten, että

$$\begin{aligned}
r_1 &= s_A & p_1 &= s_B \\
r_{i+1} &= \delta_A(r_i, w_i) & p_{i+1} &= \delta_B(p_i, w_i).
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
r_1 \arrow[r, bend left, "w_1"] & r_2 \arrow[r, bend left, "w_2"] & \cdots \arrow[r, bend left, "w_n"] & r_{n+1} & p_1 \arrow[r, bend left, "w_1"] & p_2 \arrow[r, bend left, "w_2"] & \cdots \arrow[r, bend left, "w_n"] & p_{n+1} \\
s_A & \delta_A(s_A, w_1) & & & s_B & \delta_B(s_B, w_1) & &
\end{tikzcd}$$

Automaatti M_A kulkee syötteellä w tilajonon r ja automaatti M_B tilajonon p läpi. Siis esimerkiksi automaatti M_A siirtyy merkillä w_i tilasta r_i tilaan r_{i+1}.

Määritellään myös vastaavasti jono

$$q = q_1 \dots q_{n+1}$$

jonka läpi automaatti M_{A-B} kulkee syötteellä w. Nyt siis

$$\begin{aligned}
q_1 &= s_{A-B} = (s_A, s_B) = (r_1, p_1) \\
q_{i+1} &= \delta_{A-B}(q_i, w_i).
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
q_1 \arrow[r, bend left, "w_1"] & q_2 \arrow[r, bend left, "w_2"] & \cdots \arrow[r, bend left, "w_n"] & q_{n+1} \\
s_{A-B} & \delta_{A-B}(s_{A-B}, w_1) & &
\end{tikzcd}$$

Intuitiivisesti näyttäisi siltä, että $q_i = (r_i, p_i)$, sillä

$$\begin{aligned}
q_1 &= (r_1, p_1) \\
q_2 &= \delta_{A-B}(q_1, w_1) \\
&= (\delta_A(r_1, w_1), \delta_B(p_1, w_1)) \\
&= (r_2, p_2) \\
\dots
\end{aligned}$$

Näytetään tämä todeksi induktiolla.

Väite. $q_i = (r_i, p_i)$ *tai* $n + 1 < i$

Todistus.

Alkuaskel määritelmän nojalla $q_1 = (r_1, p_1)$.

Induktioaskel

Induktio-oletus $i > n + 1$ tai $q_i = (r_1, p_i)$

Induktioaskeleen väite $i + 1 > n + 1$ tai $q_{i+1} = (r_{i+1}, p_{i+1})$

Induktioaskeleen todistus

Jos $i \geq n + 1$, niin $i + 1 > n + 1$. Tarkastellaan siis tapausta $i < n + 1$. Nyt

$$\begin{aligned}
q_{i+1} &= \delta_{A-B}(q_i, w_i) && q_{i+1}\text{:n määritelmä} \\
&= \delta_{A-B}((r_i, p_i), w_i) && \text{induktio-oletus} \\
&= (\delta_A(r_i, w_i), \delta_B(p_i, w_i)) && \delta_{A-B}\text{:n määritelmä} \\
&= (r_{i+1}, p_{i+1}) && r_{i+1}\text{:n ja } p_{i+1}\text{:n määritelmät.}
\end{aligned}$$

□

Automaatti M_{A-B} hyväksyy merkkijonon w jos ja vain jos $q_{n+1} \in F_{A-B}$. Näytetään nyt, että M_{A-B} hyväksyy merkkijonon w täsmälleen silloin kun w kuuluu kieleen $A - B$.

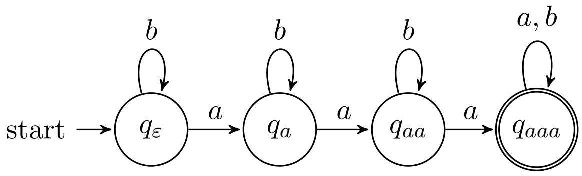
$$\begin{aligned}
q_{n+1} \in F_{A-B} &\Leftrightarrow (r_{n+1}, p_{n+1}) \in F_{A-B} \\
&\Leftrightarrow r_{n+1} \in F_A \text{ ja } p_{n+1} \notin F_B \\
&\Leftrightarrow w \in A \text{ ja } w \notin B \\
&\Leftrightarrow w \in A - B.
\end{aligned}$$

Siis kieli $A - B$ on säännöllinen. □

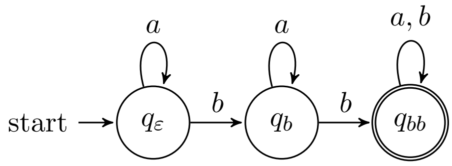
6. Seuraavat kielet koostettu yksinkertaisemmista kielistä säännöllisillä operaatioilla (kaikkia ei vielä todistettu tunnilla). Piirrä jokaisessa kohdassa ensin yksinkertaiset kielet tunnistavat automaatit tiloineen ja siirtymineen ja piirrä sen perusteella lopullinen automaatti (vrt. luentokalvojen yhdisteautomaatti). Kaikissa kohdissa $\Sigma = \{a, b\}$.

   (a) $\{w \mid w$ sisältää ainakin kolme a:ta ja ainakin kaksi b:tä$\}$

   Automaatti joka tunnistaa kielen, jossa jokainen merkkijono sisältää ainakin kolme a:ta.



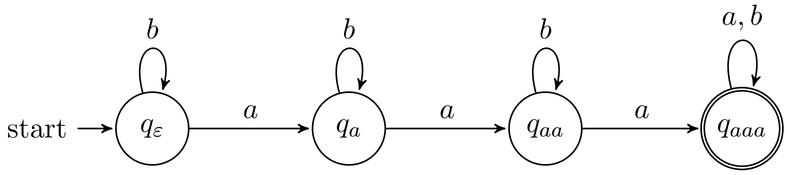
   Lisäksi toinen automaatti joka tunnistaa kielen, jossa jokainen merkkijono sisältää ainakin kaksi b:tä.

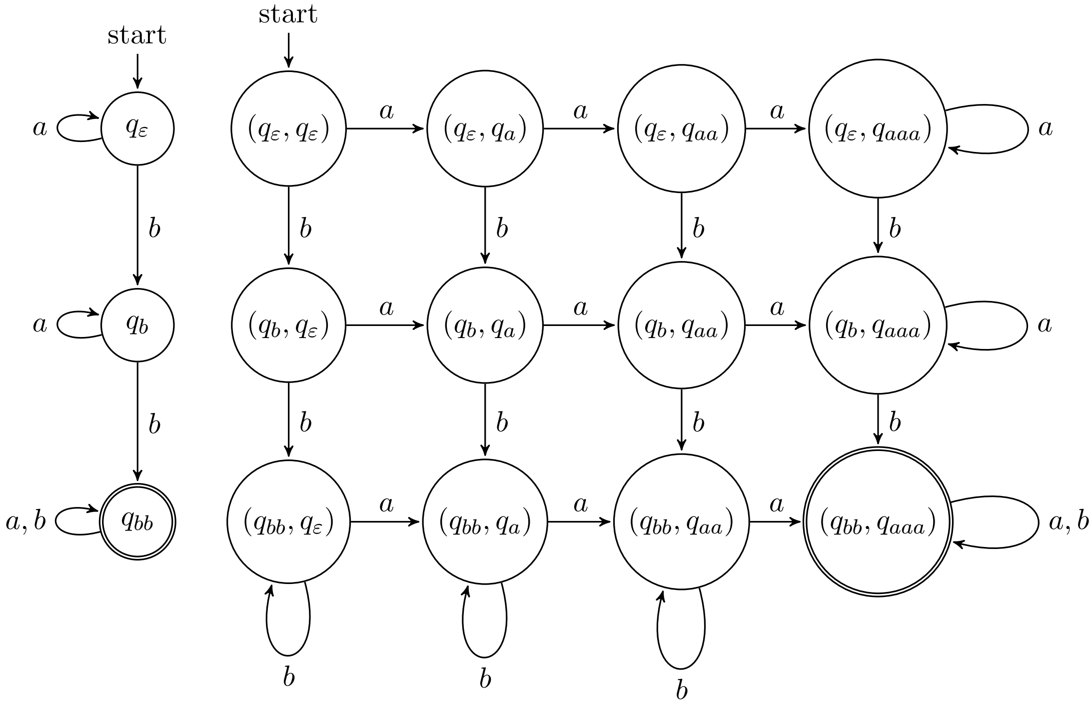


   Muodostetaan näistä automaateista leikkausautomaatti. Automaatti pitää samanaikaisesti kirjaa siitä, missä tilassa kumpikin automaatti tällä hetkellä menee ja hyväksyy silloin, kun kumpikin alkuperäisistä automaateista hyväksyy.

Leikkausautomaatin tilat ovat nyt siis jälleen pareja, mutta nyt hyväksyviä tiloja ovat vain sellaiset parit (q_a, q_b) missä q_a on ensimmäisen automaatin hyväksyvä tila ja q_b on toisen automaatin hyväksyvä tila.

Tilannetta voi havainnollistaa piirtämällä toisen alkuperäisistä automaateista vaakasuunnassa ja toisen pystysuunnassa. Leikkausautomaatin voi piirtää nyt hilaksi näiden viereen.





(b) $\{w \mid w$:n pituus on parillinen sisältäen parittoman määrän a:ta$\}$

(c) $\{w \mid w$:ssä olevin a-merkkien määrä ei ole kaksi$\}$

(d) $\{w \mid w$ ei sisällä alimerkkijonoja ab ja $ba\}$

(e) $\{w \mid w$ on mikä tahansa muu merkkijono kuin a tai $b\}$