

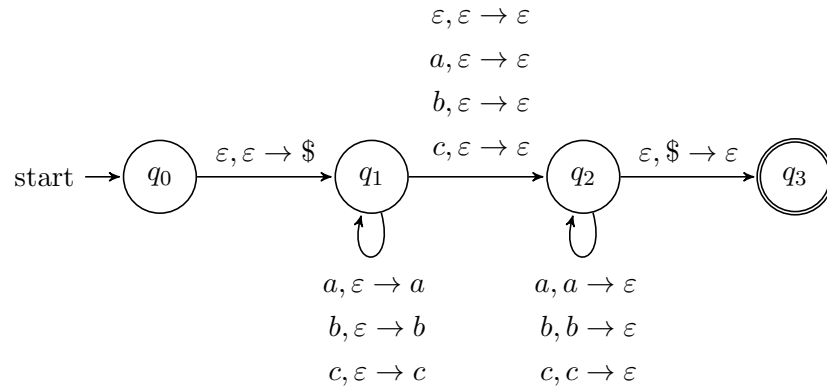
582206 Laskennan mallit, syksy 2012

7. harjoitusten malliratkaisut

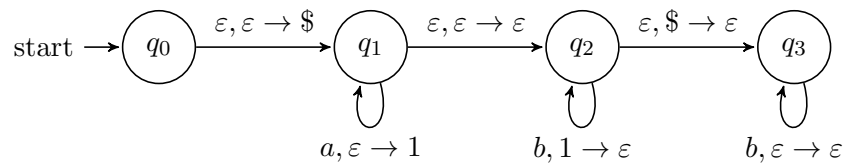
Juhana Laurinharju ja Jani Rahkola

1. Esitä pinoautomaatti seuraaville kielille.

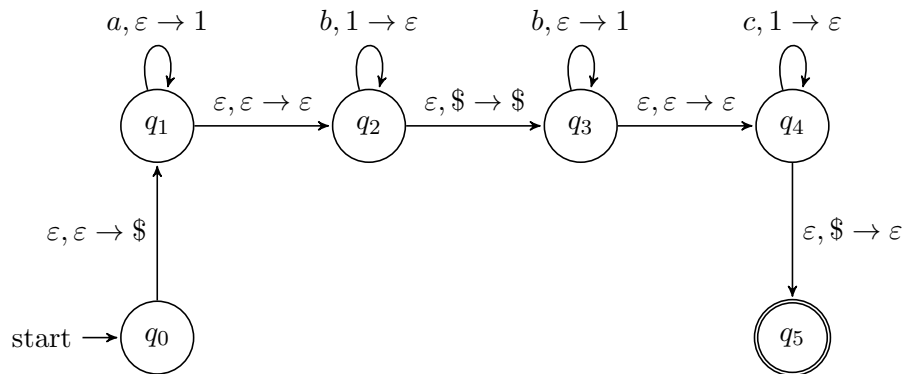
(a) Kaikki palindromit aakkostosta $\Sigma = \{a, b, c\}$.



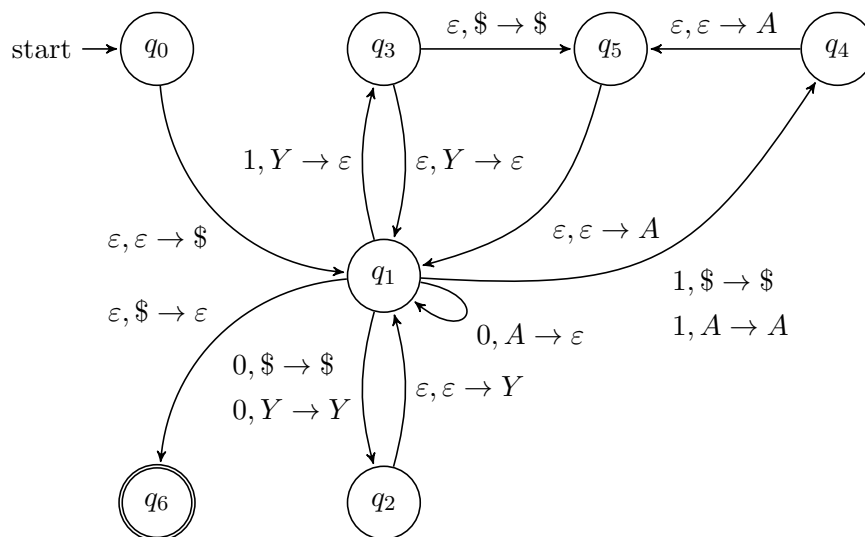
(b) $\{a^i b^j \mid 0 \leq i \leq j\}$ missä $\Sigma = \{a, b, c\}$



(c) $\{a^i b^j c^k \mid j = i + k\}$ missä $\Sigma = \{a, b, c\}$



(d) Kaikki aakkoston $\Sigma = \{0, 1\}$ merkkijonot joissa nollia on kaksi kertaa niin paljon kuin ykkösiä.



Automaatin ideana on pitää pinossa kirjaa siitä kuinka paljon nolla-merkkien määrässä on yli- tai alijäämää. Pinoon laitetaan A jos siirtymä kerryttää alijäämää ja Y jos se kerryttää ylijäämää. Vastaavasti pinosta poistetaan merkkejä aina tilaisuuden tullen, kun syötemerkin lukeminen tasoittaa nollien ja ykkösten suhdetta.

2. Tarkastellaan kielioppia

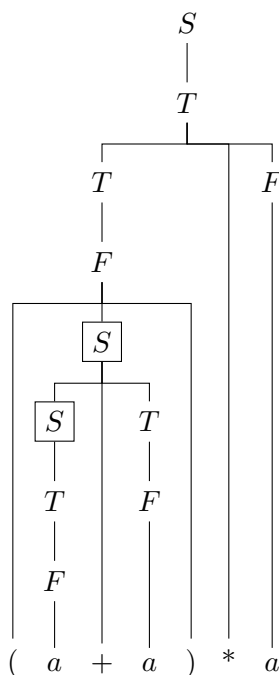
$$S \rightarrow S + T \mid T$$

$$T \rightarrow T * F \mid F$$

$$F \rightarrow (S) \mid a$$

Muodosta merkkijonon $s = (a + a) * a$ jäsenyspuu tämän kieliopin mukaisesti.

Etsi jäsenyspuusta jokin juuresta lehteen johtava polku, jolla sama muuttuja esiintyy kahdessa solmussa. Muodosta tämän perusteella toistuvuusominaisuuden todistuksen ideaa mukailen jokin merkkijonon s jako osiin $s = uvxyz$, joilla merkkijono $uv^i xy^i z$ kuuluu tarkasteltavaan kieleen kaikilla $i \in \mathbb{N}$.



Nyt puusta löytyy kuvan osoittamalla tavalla sama symboli S kahdessa eri paikassa saman juuresta lehteen johtavan polun varrella. Ylemmästä on johdettu merkkijono $a + a$ ja alemmasta

merkkijono a . Jos nyt alemman johdon korvaisi ylemmästä saadulla merkkijonolla, saataisiin merkkijono $a + a + a$. Valitaan siis toistettavat osat seuraavasti:

$$\begin{aligned} u &= (a \\ v &= +a \\ x &= \varepsilon \\ y &= \varepsilon \\ z &=) * a \end{aligned}$$

jolloin voidaan tuottaa kieliopin tunnistamia merkkijonoja toistolauseen mukaisesti. Tässä esimerkinä muutama ensimmäinen:

$$\begin{aligned} uxz &= (a) * a \\ uv^2xy^2z &= (a + a + a) * a \\ uv^3xy^3z &= (a + a + a + a) * a \end{aligned}$$

3. Olkoon A aakkoston $\{0, 1\}$ kieli, joka koostuu niistä merkkijonoista, joissa on sama määrä nollia ja ykkösiä. Tällä kielellä on kontekstiton kielioppi

$$S \rightarrow SS \mid 0S1 \mid 1S0 \mid \varepsilon$$

- (a) Kielen A eräs toistuvuuspituus on 4. Esitä kieleen A kuuluvalla merkkijonolle $s = 001101$ kaikki eri tavat jakaa se osiin $s = uvxyz$ toistuvuusominaisuuden ehdot toteuttavalla tavalla (lause 2.30; Sipser Theorem 2.34; tässä siis $p = 4$).

u	v	x	y	z
			0011	01
		0	01	101
	0		011	01
	0	0	1	101
	0	01	1	01
	00		11	01
	001		1	01
	0011			01
0			01	101
0			0110	1
0		01	10	1
0	0		1	101
0	0		110	1
0	0	1	1	01
0	01			101
0	01		10	1
0	01	1		01
0	01	10		1
0	011		0	1
0	0110			1
00		1	10	1
00		11	01	
00	1	1	0	1
001			10	1
001		1	01	
001	1		0	1
001	10			1
001	10	1		
0011			01	
0011	0		1	
0011	01			

Yhteensä 31 ehdot täyttävää jakoa.

(b) Onko kielellä A pienempiä toistuvuuspituuksia kuin 4? Perustele.

4. (a) Koostukoon aakkoston $\{a, b, c\}$ kieli A merkkijonoista, joissa on yhtä monta a -, b - ja c -merkkiä.

Väite. *Kieli A ei ole yhteydetön.*

Todistus. Oletetaan vastoin väitettä, että kieli A on yhteydetön. Nyt tehtävässä 7 todistetun nojalla leikkaus $A \cap L(a^*b^*c^*) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ on yhteydetön. Tämä on kuitenkin tunnetusti ristiriita. Siis kieli A ei ole yhteydetön. \square

- (b) Osoita, että kieli $\{0^n 1^n 0^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ei ole yhteydetön.

Väite. *Kieli $A = \{0^n 1^n 0^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ei ole yhteydetön.*

Todistus. Oletetaan vastoin väitettä, että kieli A on yhteydetön. Nyt pumppauslemman nojalla sillä on pumppauspituus p . Valitaan merkkijono $s = 0^p 1^p 0^p$. Nyt merkkijonon jakojen $s = uvxyz$ tulisi täyttää pumppauslemman ehdot.

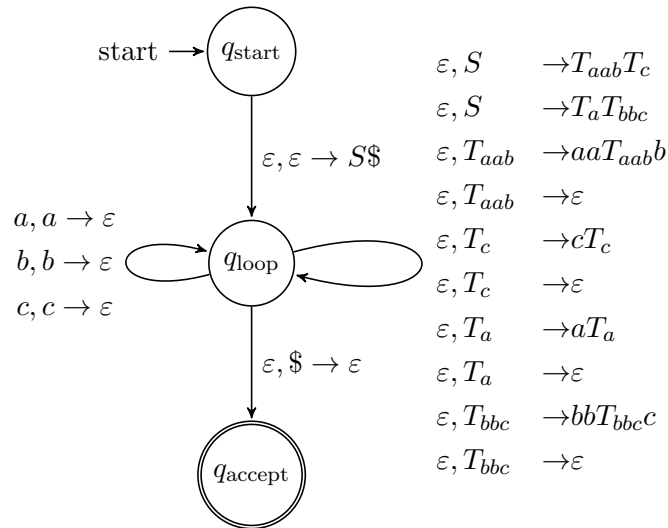
Merkkijonon s pituus on $4p$ ja koska osaan vxy ei saa tulla yli p :tä merkkiä, täytyy osiin u ja z jäädä yhteensä vähintään $3p$ merkkiä. Nyt siis joko osaan u jäävät ainakin kaikki merkkijonon p ensimmäistä nollaa, tai osaan z jäävät ainakin kaikki merkkijonon p viimeistä ykköistä.

Jos kieleen A kuuluvassa merkkijonossa on p kappaletta peräkkäisiä nollia tai p kappaletta peräkkäisiä ykkösiä, täytyy merkkijonon pituuden olla $4p$. Pumpauslemman mukaan merkkijonon $uv^0xy^0z = uxz$ tulisi kuulua kieleen A . Koska osat u ja z pitävät sisällään joko p nollaa tai p ykköstä, tulisi merkkijonon uxz pituuden olla edelleen $4p$ jotta se voisi kuulua kieleen A . Koska puuttuvat osat v ja y eivät kuitenkaan saaneet molemmat olla tyhjiä, täytyy merkkijonon uxz pituuden olla aidosti vähemmän kuin $4p$. Siis uxz ei kuulu kieleen A , mikä on ristiriita. Täten kieli A ei ole yhdeydetön. \square

5. Anna yhteydetön kielioppi, joka tuottaa kielen $\{a^ib^jc^k \mid i = 2j \text{ tai } j = 2k\}$. Muodosta apulauseen 2.21 mukaisesti kieliopistasi pinoautomaatti, joka tunnistaa saman kielen.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow T_{aab}T_c \mid T_aT_{bbc} \\ T_{aab} &\rightarrow aaT_{aab}b \mid \varepsilon \\ T_c &\rightarrow cT_c \mid \varepsilon \\ T_a &\rightarrow aT_a \mid \varepsilon \\ T_{bbc} &\rightarrow bbT_{bbc}c \mid \varepsilon \end{aligned}$$

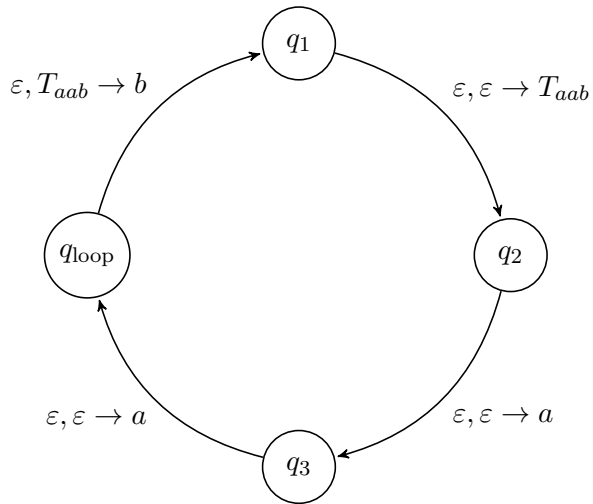
Jos automaateissa saisi laittaa monta aakkosta pinoon kerralla, näyttäisi automaatti seuraavalta:



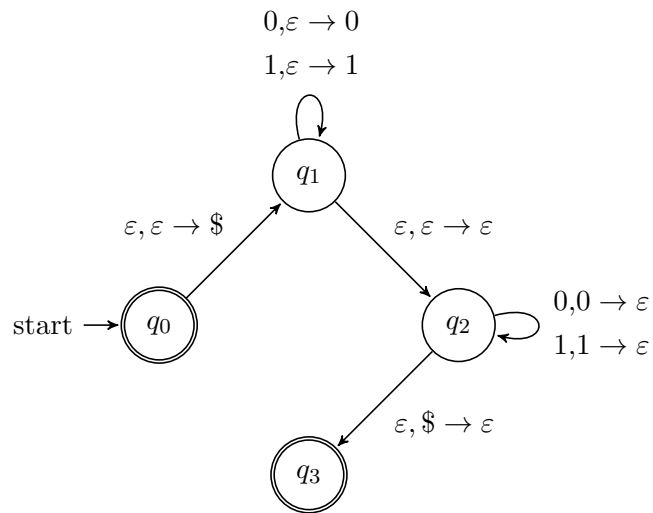
Jokainen sääntö, jossa pinoon lisätään monta symbolia kerralla voidaan avata silmukaksi. Esimerkiksi sääntö

$$\varepsilon, T_{aab} \rightarrow aaT_{aab}b$$

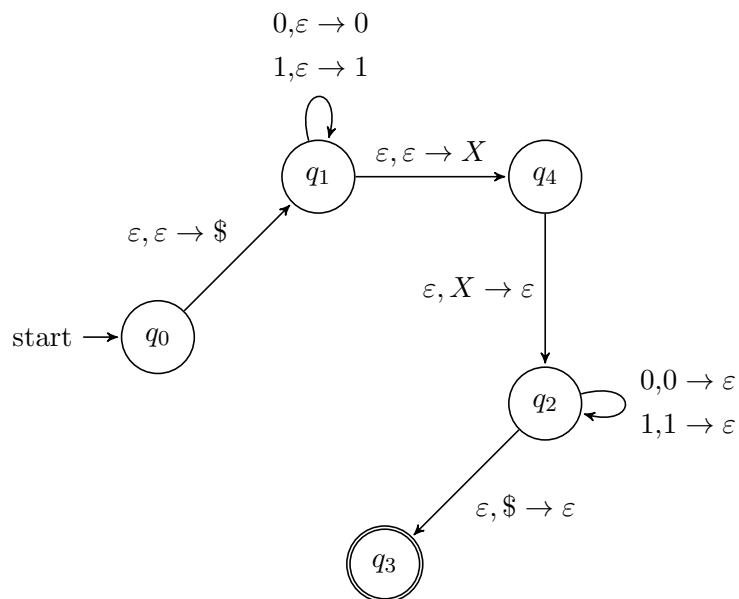
voidaan toteuttaa tavallisella pinokoneella seuraavasti:



6. Tee alla olevasta pinoautomaatista Apulauseen 2.27 mukaisesti kielioppi.



Mainittu apulause vaatii, että automaatissa on tasan yksi hyväksyvä tila, jokaisessa siirtymässä tulee joko laittaa pinoon jotain tai ottaa sieltä jotain, mutta ei molempia ja lisäksi pinon täytyy aina hyväksyvässä tilassa olla tyhjä. Muutetaan siis automaatti ensin tähän muotoon.



Nyt automaattiin voi soveltaa apulauseen menetelmää, jolloin saadaan seuraavat merkitykselliset säännöt:

$$\begin{aligned} A_{03} &\rightarrow \varepsilon A_{12} \varepsilon \\ A_{12} &\rightarrow 0A_{12}0 \mid 1A_{12}1 \mid \varepsilon A_{44} \varepsilon \\ A_{44} &\rightarrow \varepsilon \end{aligned}$$

Lisäksi menetelmää noudattamalla saa seuraavat säännöt, joita ei tässä tapauksessa satuta tarvitsemaan mihinkään:

$$\begin{aligned} A_{00} &\rightarrow \varepsilon \\ A_{11} &\rightarrow \varepsilon \\ A_{22} &\rightarrow \varepsilon \\ A_{33} &\rightarrow \varepsilon \\ A_{01} &\rightarrow A_{02}A_{21} \mid A_{03}A_{31} \mid A_{04}A_{41} \\ A_{02} &\rightarrow A_{01}A_{12} \mid A_{03}A_{32} \mid A_{04}A_{42} \\ A_{03} &\rightarrow A_{01}A_{13} \mid A_{02}A_{23} \mid A_{04}A_{43} \\ A_{04} &\rightarrow A_{01}A_{14} \mid A_{02}A_{24} \mid A_{03}A_{34} \\ A_{10} &\rightarrow A_{12}A_{20} \mid A_{13}A_{30} \mid A_{14}A_{40} \\ A_{12} &\rightarrow A_{10}A_{02} \mid A_{13}A_{32} \mid A_{14}A_{42} \\ A_{13} &\rightarrow A_{10}A_{03} \mid A_{12}A_{23} \mid A_{14}A_{43} \\ A_{14} &\rightarrow A_{10}A_{04} \mid A_{12}A_{24} \mid A_{13}A_{34} \\ A_{20} &\rightarrow A_{21}A_{10} \mid A_{23}A_{30} \mid A_{24}A_{40} \\ A_{21} &\rightarrow A_{20}A_{01} \mid A_{23}A_{31} \mid A_{24}A_{41} \\ A_{23} &\rightarrow A_{20}A_{03} \mid A_{21}A_{13} \mid A_{24}A_{43} \\ A_{24} &\rightarrow A_{20}A_{04} \mid A_{21}A_{14} \mid A_{23}A_{34} \\ A_{30} &\rightarrow A_{31}A_{10} \mid A_{32}A_{20} \mid A_{34}A_{40} \\ A_{31} &\rightarrow A_{30}A_{01} \mid A_{32}A_{21} \mid A_{34}A_{41} \\ A_{32} &\rightarrow A_{30}A_{02} \mid A_{31}A_{12} \mid A_{34}A_{42} \\ A_{34} &\rightarrow A_{30}A_{04} \mid A_{31}A_{14} \mid A_{32}A_{24} \\ A_{40} &\rightarrow A_{41}A_{10} \mid A_{42}A_{20} \mid A_{43}A_{30} \\ A_{41} &\rightarrow A_{40}A_{01} \mid A_{42}A_{21} \mid A_{43}A_{31} \\ A_{42} &\rightarrow A_{40}A_{02} \mid A_{41}A_{12} \mid A_{43}A_{32} \\ A_{43} &\rightarrow A_{40}A_{03} \mid A_{41}A_{13} \mid A_{42}A_{23} \end{aligned}$$

7. (a) Osoita, että jos A on yhteydetön ja B säännöllinen kieli, niin $A \cap B$ on yhteydetön.

Vihje: muodosta pinoautomaatin ja äärellisen automaatin leikkausautomaatti samaan tapaan kuin Jyrkin luentojen lauseessa 1.1 (luentomateriaalin sivut 48–50).

Olkoon A yhteydetön kieli ja $M_A = (Q_A, \Sigma, \Gamma, \delta_A, q_{A0}, F_A)$ automaatti joka tunnistaa kielen A . Olkoon B säännöllinen kieli ja $M_B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, q_{B0}, F_B)$ deterministinen automaatti joka tunnistaa kielen B .

Väite. *Kieli $A \cap B$ on säännöllinen.*

Todistus. Leikkauksen tunnistava automaatti luodaan samankaltaisella menetelmällä kuin säännöllisten kielten tapauksessa. Ero säännöllisten kielten tapaukseen on siirtymäfunktion $\delta_{A \cap B}$ määrittelyssä.

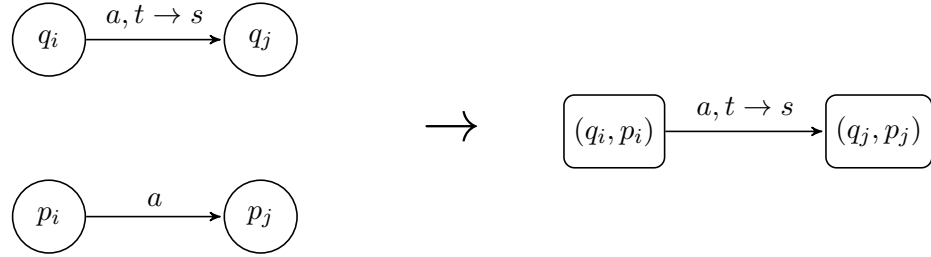
Muodostetaan siis automaatti

$$M_{A \cap B} = (Q_A \times Q_B, \Sigma, \Gamma, \delta_{A \cap B}, (q_{A0}, q_{B0}), F_A \times F_B)$$

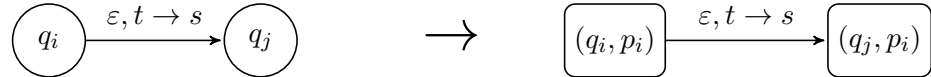
missä siirtymäfunktio $\delta_{A \cap B}$ on määritelty seuraavasti.

$$\delta_{A \cap B}((q_i, p_i), a, t) = \begin{cases} \{((q_j, p_i), s) \mid \delta_A(q_i, \varepsilon, t) = (q_j, s)\} & \text{kun } a = \varepsilon \\ \{((q_j, p_j), s) \mid \delta_B(q_i, a) = q_j \text{ ja } \delta_A(p_i, a, t) = (p_j, s)\} & \text{muulloin} \end{cases}$$

Kaikki uuden automaatin tilat ovat siis muotoa (q, p) missä $q \in Q_A$ ja $p \in Q_B$. Siirtymät noudattavat parin ensimmäisen alkion kohdalla automaatin M_A siirtymäfunktiota ja toisen alkion kohdalla automaatin M_B siirtymäfunktiota. Pinon käsittely noudattaa aina automaatin M_A siirtymäfunktiota, sillä automaatissa M_B ei ole pinoa.



Pinoautomaatti M_A on epädeterministinen, mutta M_B ei. Pinoautomaatin epädeterminististen siirtymien kohdalla uudessa automaatissa tilaparin jälkimmäinen alkio ei muutu. Ensimmäinen alkio noudattaa pinoautomaatin M_A siirtymäfunktiota.



Luotu automaatti $M_{A \cap B}$ hyväksyy merkkijonon w jos ja vain jos M_A ja M_B hyväksyvät merkkijonon w . Siis $M_{A \cap B}$ tunnistaa kielen $A \cap B$. \square

- (b) Tiedetään, että kieli L on yhteydetön ja R säännöllinen. Voidaanko tästä päätellä, että $L - R$ on yhteydetön? Entä $R - L$? Perustele.

Väite. *Olkoon L yhteydetön ja R säännöllinen kieli. Nyt $L - R$ on yhteydetön.*

Todistus. Joukko-opista tiedämme, että $L - R = L \cap \overline{R}$. Lisäksi tiedämme, että säännölliset kielet ovat suljettuja komplementin suhteen. Nyt siis edellisen kohdan nojalla $L \cap \overline{R}$ on yhteydetön, ja siten myös $L - R$ on yhteydetön. \square

Toinen suunta ei päde yleisesti. Koska yhteydettömät kielet eivät ole suljettuja komplementin suhteen, on olemassa yhteydetön kieli jonka komplementti ei ole yhteydetön. Olkoon L jokin tällainen kieli. Olkoon nyt $R = \Sigma^*$ joka tunnetusti säännöllinen. Nyt siis L on yhteydetön ja R säännöllinen, mutta $R - L = \Sigma^* - L = \overline{L}$ joka oletuksen mukaan ei ole yhteydetön.