

582206 Laskennan mallit, syksy 2012

6. harjoitusten malliratkaisut

Juhana Laurinharju ja Jani Rahkola

Säännölliset kielet

1. Osoita seuraavat kielet epäsäännöllisiksi käyttäen pumppauslemmaa (tai jollain muulla halua-mallasi tavalla):

- (a) $\{a^m b^n c^n \mid n, m \geq 1\}$
- (b) aakkoston $\{a, b, c\}$ palindromit
- (c) $\{0^n 10^n \mid n \in N\}$.

2. Mitkä seuraavista kielistä ovat säännöllisiä, mitkä eivät (kielillä A_1 ja A_2 aakkostona $\{0, 1\}$, muilla $\{a, b, c\}$):

$$\begin{aligned} A_1 &= \{0^n 1^m 0^n \mid n, m \in N\} & A_2 &= \{0^n 0^n \mid n \in N\} \\ A_3 &= \{ww^R \mid w \in \Sigma^*\} & A_4 &= \{wuw^R \mid w, u \in \Sigma^+\} \\ A_5 &= \{wxw^R \mid w \in \Sigma^*, x \in \Sigma\} & A_6 &= \{abca^n b^n c^n \mid n \in N\} \end{aligned}$$

Perustele. Voit käyttää hyväksi kaikkia tunnettuja säännöllisiä kieliä koskevia ominaisuuksia, etenkin edellisen tehtävän tuloksia.

Kontekstittomat kielet

3. Esitä kontekstittomat kieliovit, jotka tuottavat seuraavat aakkoston $\Sigma = \{0, 1\}$ kielet:

- (a) parittoman mittaiset merkkijonot

$$\begin{aligned} S &\rightarrow MT \\ T &\rightarrow MMT \mid \varepsilon \\ M &\rightarrow 0 \mid 1 \end{aligned}$$

- (b) merkkijonot, joilla on osamerkkijono 111

$$\begin{aligned} S &\rightarrow H111H \\ H &\rightarrow MH \mid \varepsilon \\ M &\rightarrow 0 \mid 1 \end{aligned}$$

- (c) merkkijonot, joissa on ainakin kaksi merkkiä ja joiden ensimmäinen ja viimeinen merkki ovat samat

$$\begin{aligned} S &\rightarrow 1H1 \mid 0H0 \\ H &\rightarrow MH \mid \varepsilon \\ M &\rightarrow 0 \mid 1 \end{aligned}$$

- (d) parittoman mittaiset merkkijonot, joiden ensimmäinen ja keskimäinen merkki ovat samat.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow 1T_1M \mid 0T_0M \\ T_1 &\rightarrow MT_1M \mid 1 \\ T_0 &\rightarrow MT_0M \mid 0 \\ M &\rightarrow 0 \mid 1 \end{aligned}$$

4. Esitä kontekstittomat kieliovit seuraaville kielille:

- (a) $01^* \cup 10^*$
- (b) $\{0^n 1^m \mid m, n \in N \text{ ja } m \geq n\}$
- (c) $\{0^n 1^k 0^m \mid m, n, k \in N \text{ ja } k = n + m\}$
- (d) $\{a^n b^m c^m \mid m, n \in N\}$
- (e) aakkoston $\{0, 1\}$ merkkijonot, joissa on yhtä paljon nollia ja ykkösiä.

5. Täydennä Jyrkin luentojen lauseen 2.3 todistus (s. 140) osoittamalla, että kontekstiton kielten luokka on suljettu myös konkatenation ja tähtioperaation suhteen. Esitä todistus samalla tarkkuustasolla kuin luentomuistiinpanoissa esitetty yhdisteen tapaus.

Olkoon A ja B aakkoston Σ yhteydettömiä kieliä ja $A = L(G_A)$ ja $B = L(G_B)$ kielioppeilla $G_A = (V_A, \Sigma, R_A, S_A)$ ja $G_B = (V_B, \Sigma, R_B, S_B)$. Oletetaan $V_A \cap V_B = \emptyset$.

Väite. *Kieli $A \circ B$ on yhteydetön.*

Todistus. Luodaan uusi kielioppi, jossa on uusi lähtösymboli $S \notin V_A \cup V_B$, ja sääntö $S \rightarrow S_A S_B$ jolla tästä uudesta lähtösymbolista voi tuottaa alkuperäisten kielten lähtösymbolien katenaation.

$$\begin{aligned} G_{A \circ B} &= (V_{A \circ B}, \Sigma, R_{A \circ B}, S) \\ V_{A \circ B} &= V_A \cup V_B \cup \{S\} \\ R_{A \circ B} &= R_A \cup R_B \cup \{S \rightarrow S_A S_B\} \end{aligned}$$

□

Väite. *Kieli A^* on yhteydetön.*

Todistus. Luodaan uusi kielioppi, jossa on uusi lähtösymboli $S \notin V_A \cup V_B$, ja sääntö $S \rightarrow S_A S \mid \varepsilon$ joka mahdollistaa A :n merkkijonojen toistamisen.

$$\begin{aligned} G_{A^*} &= (V_{A^*}, \Sigma, R_{A^*}, S) \\ V_{A^*} &= V_A \cup \{S\} \\ R_{A^*} &= R_A \cup \{S \rightarrow S_A S \mid \varepsilon\} \end{aligned}$$

□

6. Voidaan osoittaa, että kieli $A = \{a^n b^n c^n \mid n \in N\}$ ei ole kontekstiton. (Tähän palataan myöhemmin kurssilla.) Käyttäen tätä tietoa hyväksi osoita, että kontekstiton kielten luokka ei ole suljettu leikkauksen suhteen. (*Vihje:* esitä A kahden kontekstittoman kielen leikkauksena.) Päätele edelleen, että kontekstittomien kielten luokka ei ole suljettu komplementoinnin suhteen.

7. Osoita, että seuraavien aakkoston $\{a, b, c\}$ kielten komplementit ovat kontekstittomia:

- (a) $A_1 = \{a^n b^n \mid n \in N\}$
- (b) $A_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \in N\}$

Vihje: Voit tietysti yksinkertaisesti kirjoittaa kontekstittomat kieliopit komplementeille $\overline{A_1}$ ja $\overline{A_2}$. Voi kuitenkin olla helpompaa esittää $\overline{A_1}$ ja $\overline{A_2}$ yhdisteinä yksinkertaisemmista kielistä, jotka on suoraviivaisempaa nähdä kontekstittomiksi.