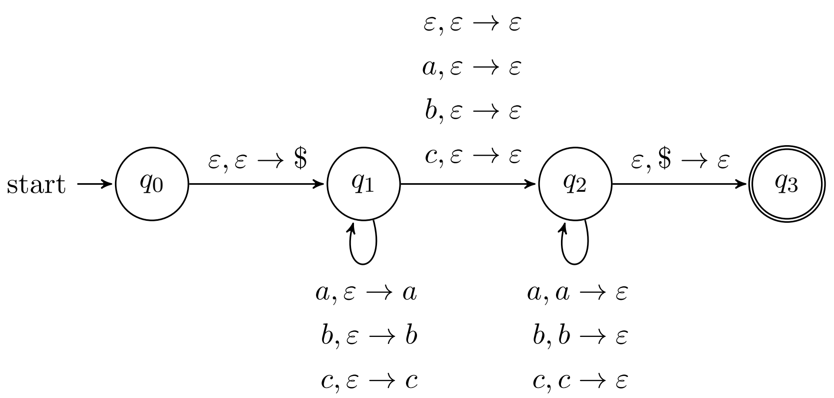
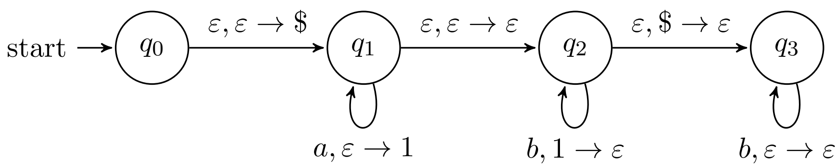
**582206 Laskennan mallit, syksy 2012**
7. harjoitusten malliratkaisut
Juhana Laurinharju ja Jani Rahkola

1. Esitä pinoautomaatti seuraaville kielille.

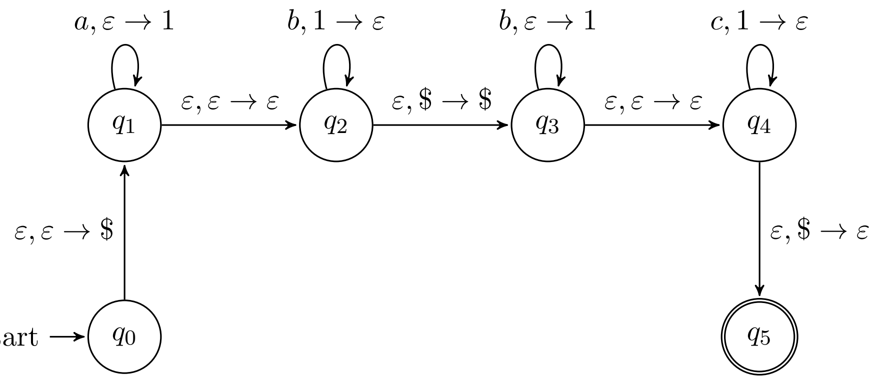
   (a) Kaikki palindromit aakkostosta $\Sigma = \{a, b, c\}$.




   (b) $\{a^i b^j \mid 0 \leq i \leq j\}$ missä $\Sigma = \{a, b, c\}$




   (c) $\{a^i b^j c^k \mid j = i + k\}$ missä $\Sigma = \{a, b, c\}$



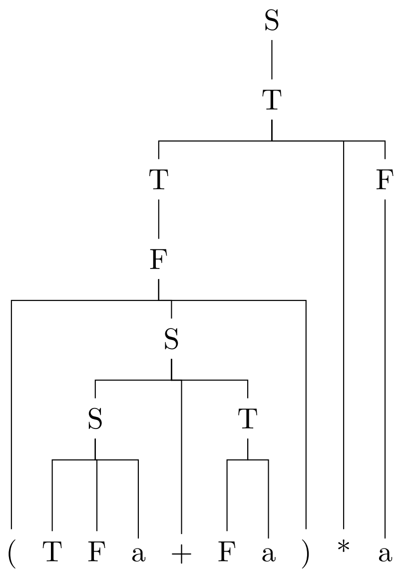

   (d) Kaikki aakkoston $\Sigma = \{0, 1\}$ merkkijonot joissa nollia on kaksi kertaa niin paljon kuin ykkösiä.

2. Tarkastellaan kielioppia

$$
\begin{aligned}
S &\to S + T \mid T \\
T &\to T * F \mid F \\
F &\to (S) \mid a
\end{aligned}
$$

   Muodosta merkkijonon $s = (a + a) * a$ jäsennyspuu tämän kieliopin mukaisesti.

   Etsi jäsennyspuusta jokin juuresta lehteen johtava polku, jolla sama muuttuja esiintyy kahdessa solmussa. Muodosta tämän perusteella toistuvuusominaisuuden todistuksen ideaa mukaillen jokin merkkijonon $s$ jako osiin $s = uvxyz$, joilla merkkijono $uv^ixy^iz$ kuuluu tarkasteltavaan kieleen kaikilla $i \in N$.




3. Olkoon $A$ aakkoston $\{0, 1\}$ kieli, joka koostuu niistä merkkijonoista, joissa on sama määrä nollia ja ykkösiä. Tällä kielellä on kontekstiton kielioppi

$$S \to SS \mid 0S1 \mid 1S0 \mid \varepsilon$$

   (a) Kielen $A$ eräs toistuvuuspituus on 4. Esitä kieleen $A$ kuuluvalle merkkijonolle $s = 001101$ kaikki eri tavat jakaa se osiin $s = uvxyz$ toistuvuusominaisuuden ehdot toteuttavalla tavalla (lause 2.30; Sipser Theorem 2.34; tässä siis $p = 4$).

| $u$ | $v$ | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | 0011 | 01 |
| | | 0 | 01 | 101 |
| | 0 | | 011 | 01 |
| | 0 | 0 | 1 | 101 |
| | 0 | 01 | 1 | 01 |
| | 00 | | 11 | 01 |
| | 001 | | 1 | 01 |
| | 0011 | | | 01 |
| 0 | | | 01 | 101 |
| 0 | | | 0110 | 1 |
| 0 | | 01 | 10 | 1 |
| 0 | 0 | | 1 | 101 |
| 0 | 0 | | 110 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 01 |
| 0 | 01 | | | 101 |
| 0 | 01 | | 10 | 1 |
| 0 | 01 | 1 | | 01 |
| 0 | 01 | 10 | | 1 |
| 0 | 011 | | 0 | 1 |
| 0 | 0110 | | | 1 |
| 00 | | 1 | 10 | 1 |
| 00 | | 11 | 01 | |
| 00 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 001 | | | 10 | 1 |
| 001 | | 1 | 01 | |
| 001 | 1 | | 0 | 1 |
| 001 | 10 | | | 1 |
| 001 | 10 | 1 | | |
| 0011 | | | 01 | |
| 0011 | 0 | | 1 | |
| 0011 | 01 | | | |

Yhteensä 31 ehdot täyttävää jakoa.

(b) Onko kielellä $A$ pienempiä toistuvuuspituuksia kuin 4? Perustele.

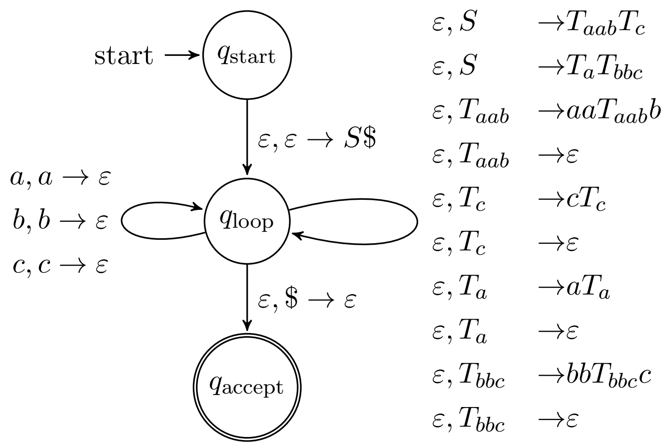
4. (a) Koostukoon aakkoston $\{a, b, c\}$ kieli $A$ merkkijonoista, joissa on yhtä monta $a$-, $b$- ja $c$-merkkiä. Osoita, että $A$ ei ole yhteydetön.

   (b) Osoita, että kieli $\{0^n1^n0^n1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ei ole yhteydetön.

5. Anna yhteydetön kielioppi, joka tuottaa kielen $\left\{a^ib^jc^k \mid i = 2j \text{ tai } j = 2k\right\}$. Muodosta apulauseen 2.21 mukaisesti kieliopistasi pinoautomaatti, joka tunnistaa saman kielen.

$$
\begin{aligned}
S &\to T_{aab}T_c \mid T_aT_{bbc} \\
T_{aab} &\to aaT_{aab}b \mid \varepsilon \\
T_c &\to cT_c \mid \varepsilon \\
T_a &\to aT_a \mid \varepsilon \\
T_{bbc} &\to bbT_{bbc}c \mid \varepsilon
\end{aligned}
$$

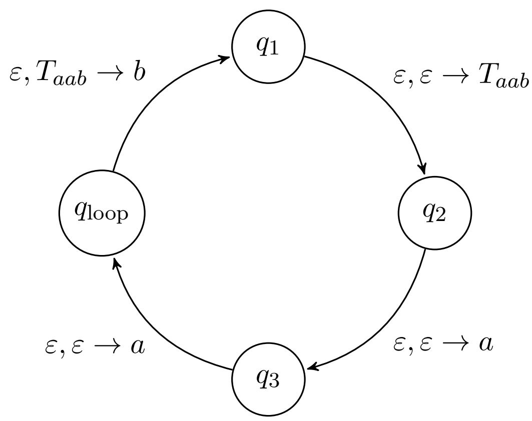
Jos automaateissa saisi laittaa monta aakkosta pinoon kerralla, näyttäisi automaatti seuraavalta:



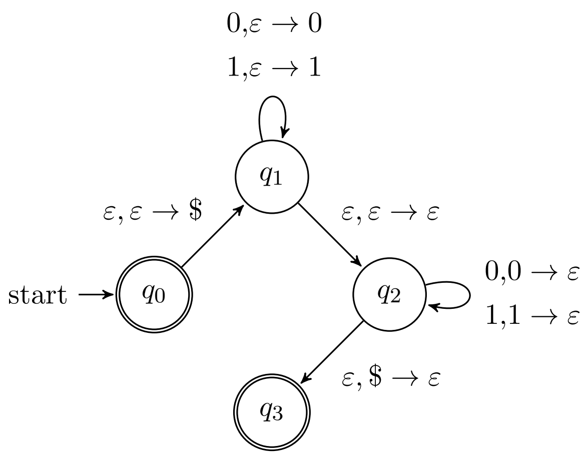

Jokainen sääntö, jossa pinoon lisätään monta symbolia kerralla voidaan avata silmukaksi. Esimerkiksi sääntö

$$\varepsilon, T_{aab} \to aaT_{aab}b$$

voidaan toteuttaa tavallisella pinokoneella seuraavasti:




6. Tee alla olevasta pinoautomaatista Apulauseen 2.27 mukaisesti kielioppi.




7. (a) Osoita, että jos $A$ on yhteydetön ja $B$ säännöllinen kieli, niin $A \cap B$ on yhteydetön.

   *Vihje:* muodosta pinoautomaatin ja äärellisen automaatin leikkausautomaatti samaan tapaan kuin Jyrkin luentojen lauseessa 1.1 (luentomateriaalin sivut 48–50).

   Olkoon $A$ yhteydetön kieli ja $M_A = (Q_A, \Sigma, \Gamma, \delta_A, q_{A0}, F_A)$ automaatti joka tunnistaa kielen $A$. Olkoon $B$ säännöllinen kieli ja $M_B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, q_{B0}, F_B)$ deterministinen automaatti joka tunnistaa kielen $B$.

**Väite.** *Kieli $A \cap B$ on säännöllinen.*

*Todistus.* Leikkauksen tunnistava automaatti luodaan samankaltaisella menetelmällä kuin säännöllisten kielten tapauksessa. Ero säännöllisten kielten tapaukseen on siirtymäfunktion $\delta_{A\cap B}$ määrrittelyssä.

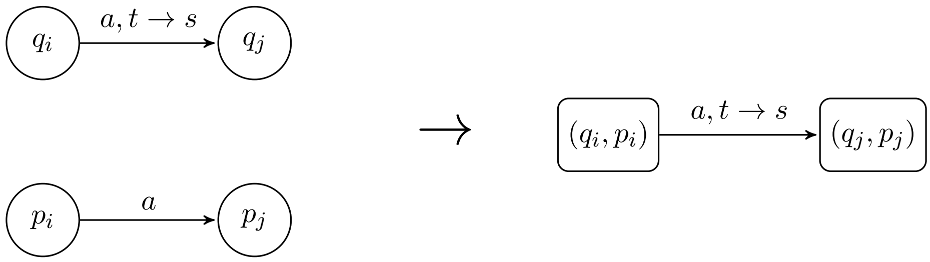
Muodostetaan siis automaatti

$$M_{A\cap B} = (Q_A \times Q_B,\ \Sigma,\ \Gamma,\ \delta_{A\cap B},\ (q_{A0}, q_{B0}),\ F_A \times F_B)$$

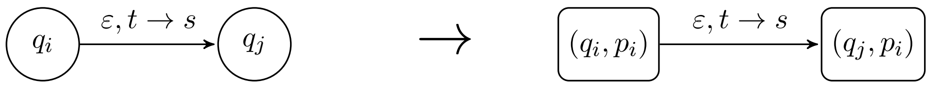
missä siirtymäfunktio $\delta_{A\cap B}$ on määritelty seuraavasti.

$$\delta_{A\cap B}((q_i,p_i),a,t) = \begin{cases} \{((q_j,p_i),s) \mid \delta_A(q_i,\varepsilon,t) = (q_j,s)\} & \text{kun } a = \varepsilon \\ \{((q_j,p_j),s) \mid \delta_B(q_i,a) = q_j \text{ ja } \delta_A(p_i,a,t) = (p_j,s)\} & \text{muulloin} \end{cases}$$

Kaikki uuden automaatin tilat ovat siis muotoa $(q,p)$ missä $q \in Q_A$ ja $p \in Q_B$. Siirtymät noudattavat parin ensimmäisen alkion kohdalla automaatin $M_A$ siirtymäfunktiota ja toisen alkion kohdalla automaatin $M_B$ siirtymäfunktiota. Pinon käsittely noudattaa aina automaatin $M_A$ siirtymäfunktiota, sillä automaatissa $M_B$ ei ole pinoa.




Pinoautomaatti $M_A$ on epädeterministinen, mutta $M_B$ ei. Pinoautomaatin epädeterminististen siirtymien kohdalla uudessa automaatissa tilaparin jälkimmäinen alkio ei muutu. Ensimmäinen alkio noudattaa pinoautomaatin $M_A$ siirtymäfunktiota.




Luotu automaatti $M_{A\cap B}$ hyväksyy merkkijonon $w$ jos ja vain jos $M_A$ ja $M_B$ hyväksyvät merkkijonon $w$. Siis $M_{A\cap B}$ tunnistaa kielen $A \cap B$. □

(b) Tiedetään, että kieli $L$ on yhteydetön ja $R$ säännöllinen. Voidaanko tästä päätellä, että $L - R$ on yhteydetön? Entä $R - L$? Perustele.

**Väite.** *Olkoon $L$ yhteydetön ja $R$ säännöllinen kieli. Nyt $L - R$ on yhteydetön.*

*Todistus.* Joukko-opista tiedämme, että $L - R = L \cap \overline{R}$. Lisäksi tiedämme, että säännölliset kielet ovat suljettuja komplementin suhteen. Nyt siis edellisen kohdan nojalla $L \cap \overline{R}$ on yhteydetön, ja siten myös $L - R$ on yhteydetön. □

Toinen suunta ei päde yleisesti. Koska yhteydettömät kielet eivät ole suljettuja komplementin suhteen, on olemassa yhteydetön kieli jonka komplementti ei ole yhteydetön. Olkoon $L$ jokin tällainen kieli. Olkoon nyt $R = \Sigma^*$ joka tunnetusti säännöllinen. Nyt siis $L$ on yhteydetön ja $R$ säännöllinen, mutta $R - L = \Sigma^* - L = \overline{L}$ joka oletuksen mukaan ei ole yhteydetön.