

## 582206 Laskennan mallit, syksy 2012

### 1. Harjoitusten malliratkaisut

1. (a)  $\emptyset \subseteq \emptyset$  sillä tyhjä joukko on jokaisen joukon osajoukko  
 (b)  $\emptyset \notin \emptyset$  sillä tyhjässä joukossa ei ole yhtään alkia  
 (c)  $\emptyset \in \{\emptyset\}$   
 (d)  $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$   
 (e)  $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b\}\}$   
 (f)  $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{a, b\}\}$  sillä  $a$  ja  $b$  kuuluvat oikeinpuoleiseen joukkoon  
 (g)  $\{a, b\} \not\subseteq \mathcal{P}(\{a, b, \{a, b\}\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{\{a, b\}\},$   
 $\{a, b\}, \{a, \{a, b\}\},$   
 $\{b, \{a, b\}\}, \{a, b, \{a, b\}\}\}$   
 (h)  $\{\{a, b\}\} \in \mathcal{P}(\{a, b, \{a, b\}\})$   
 (i)  $\{a, b, \{a, b\}\} - \{a, b\} = \{\{a, b\}\} \neq \{a, b\}$
2. (a)  $(\{1, 3, 5\} \cup \{3, 1\}) \cap \{3, 5, 7\} = \{1, 3, 5\} \cap \{3, 5, 7\}$   
 $= \{3, 5\}$   
 (b)  $\bigcup \{\{3\}, \{3, 5\}, \bigcap \{\{5, 7\}, \{7, 9\}\}\} = \bigcup \{\{3\}, \{3, 5\}, \{5, 7\} \cap \{7, 9\}\}$   
 $= \bigcup \{\{3\}, \{3, 5\}, \{7\}\}$   
 $= \{3\} \cup \{3, 5\} \cup \{7\}$   
 $= \{3, 5, 7\}$   
 (c)  $(\{1, 2, 5\} - \{5, 7, 9\}) \cup (\{5, 7, 9\} - \{1, 2, 5\}) = \{1, 2\} \cup \{7, 9\}$   
 $= \{1, 2, 7, 9\}$   
 (d)  $\mathcal{P}(\{7, 8, 9\}) - \mathcal{P}(\{7, 9\}) = \{\{8\}, \{7, 8\}, \{8, 9\}, \{7, 8, 9\}\}$   
 Tulosjoukkoon siis jäävät ne osajoukot joissa esiintyy 8.  
 (e)  $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
3. (a)  $\{1\} \times \{1, 2\} \times \{1, 2, 3\} = \{(1, 1), (1, 2)\} \times \{1, 2, 3\}$   
 $= \{(1, 2, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3),$   
 $(1, 2, 1), (1, 2, 2), (1, 2, 3)\}$   
 (b)  $\emptyset \times \{1, 2\} = \emptyset$   $(a, b) \in \emptyset \times \{1, 2\} \Rightarrow a \in \emptyset$  ja koska tyhjässä joukossa ei ole yhtään alkia, on karteesinen tulo tyhjän joukon kanssa aina tyhjä joukko.  
 (c)  $\mathcal{P}(\{1, 2\}) \times \{1, 2\} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} \times \{1, 2\}$   
 $= \{(\emptyset, 1), (\emptyset, 2), (\{1\}, 1), (\{1\}, 2),$   
 $(\{2\}, 1), (\{2\}, 2), (\{1, 2\}, 1), (\{1, 2\}, 2)\}$   
 (d)  $\mathcal{P}(\{\varepsilon\}) = \{\emptyset, \{\varepsilon\}\}$

4. Ovatko seuraavat väittämät tosia? Selitä miksi jos ovat tai eivät ole.

(a)

**Väite.**  $\{\varepsilon\}^* = \{\varepsilon\}$

*Todistus.*  $\{\varepsilon\}^* = \{w_1 w_2 \dots w_n \mid w_i \in \{\varepsilon\} \text{ kaikilla } i \in \{1, \dots, n\}\}$   
 $= \{w_1 w_2 \dots w_n \mid w_i = \varepsilon \text{ kaikilla } i \in \{1, \dots, n\}\}$   
 $= \{\varepsilon^n \mid n \geq 1\}$   
 $= \{\varepsilon\} \quad \square$

(b)

**Väite.** Mielivaltaisella aakkostolla  $\Sigma$  ja millä tahansa kielellä  $L \subseteq \Sigma^*$ ,  $(L^*)^* = L^*$ .

*Todistus.*

$L^* \subseteq (L^*)^*$ :

Olkoon  $w \in L^*$ . Nyt

$$w \in (L^*)^* = \{w_1 \dots w_n \mid n \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\} : w_i \in L^*\}$$

asettamalla  $n = 1$  ja  $w_1 = w$ .

$(L^*)^* \subseteq L^*$ :

Olkoon  $w \in (L^*)^*$ .

Tällöin  $w = w_1 w_2 \dots w_n$  missä  $w_i \in L^*$  jokaisella  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Olkoon  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Nyt  $w_i = w_{i,1} w_{i,2} \dots w_{i,k_i}$  missä  $w_{i,j} \in L$  joten

$$\begin{aligned} w &= w_1 w_2 \dots w_n \\ &= w_{1,1} \dots w_{1,k_1} \dots w_{n,k_n} \in L^* \end{aligned}$$

Nyt siis  $w \in L^*$  ja siten  $(L^*)^* \subseteq L^*$ .

On siis osoitettu, että  $L^* \subseteq (L^*)^*$  ja  $(L^*)^* \subseteq L^*$ , joten  $(L^*)^* = L^*$ .  $\square$

(c)

**Väite.** Jos  $a \neq b$ , niin  $\{a, b\}^* = \{a\}^* \circ (\{b\} \circ \{a\}^*)^*$ .

*Todistus.* Olkoon  $w \in \{a, b\}^*$  ja merkitään  $A = \{a\}^* \circ (\{b\} \circ \{a\}^*)^*$ . Todistetaan, että  $w \in A$  induktiolla merkkijonon pituuden  $|w|$  suhteen.

**Alkuaskel**  $|w| = 0$  eli  $w = \varepsilon$ . Nyt  $\varepsilon = \varepsilon \varepsilon \in A$ .

**Induktioaskel** Oletetaan, että  $u \in A$  kun  $|u| < |w|$ .

- Jos  $w = au$  jollain  $u \in \{a, b\}^*$ , niin induktio-oletuksen nojalla  $u \in A$  ja  $u = u_1 u_2$  missä  $u_1 \in \{a\}^*$  ja  $u_2 \in (\{b\} \circ \{a\}^*)^*$ . Nyt  $au_1 \in \{a\}^*$  ja siten  $w = (au_1)u_2 \in A$ .
- Jos taas  $w = bu$  jollain  $u \in \{a, b\}^*$ , on  $u = u_1 \dots u_n$ .
  - Jos  $u_i \neq b$  jokaisella  $i \in \{1, \dots, n\}$ , niin tällöin  $u = a^n$ ,  $bu \in (\{b\} \circ \{a\}^*)^*$  ja  $w = \varepsilon(bu) \in A$ .
  - Jos  $u_i = b$  jollain  $i \in \{1, \dots, n\}$ , jaetaan

$$u = u_1 \dots u_j u_{j+1} \dots u_n$$

missä  $u_{j+1}$  on ensimmäinen  $b$  merkkijonossa  $u$ . Nyt

$$bu_1 \dots u_j = ba^j \in (\{b\} \circ \{a\}^*)^*$$

ja induktio-oletuksen nojalla

$$u_{j+1} \dots u_n \in A$$

Koska  $u_{j+1} = b$ , niin

$$u_{j+1} \dots u_n \in (\{b\} \circ \{a\}^*)^*$$

Nyt siis

$$u \in (\{b\} \circ \{a\}^*)^* \text{ ja } bu \in (\{b\} \circ \{a\}^*)^*$$

Joten  $w = \varepsilon(bu) \in A$ .

Olkoon sitten  $w \in A$ . Nyt  $w = u_1 \dots u_n$  missä  $u_i \in \{a, b\}$  kaikilla  $i$ . Siten  $w \in \{a, b\}^*$ . On siis osoitettu, että  $\{a, b\}^* \subseteq A$  ja  $A \subseteq \{a, b\}^*$  joten joukot ovat samat.  $\square$

(d)

**Väite.** Jos  $\Sigma$  on mielivaltainen aakkosto,  $\varepsilon \in L_1 \subseteq \Sigma^*$  ja  $\varepsilon \in L_2 \subseteq \Sigma^*$ , niin  $(L_1 \circ \Sigma^* \circ L_2)^* = \Sigma^*$ .

*Todistus.* Merkitään  $L = (L_1 \circ \Sigma^* \circ L_2)^*$ .

$L \subseteq \Sigma^*$ :

Olkoon  $w \in L$ . Nyt  $w = l_1 v l_2$  jollain  $l_1 \in L_1$ ,  $v \in \Sigma^*$  ja  $l_2 \in L_2$  ja koska

$$l_1 \in L_1 \subseteq \Sigma^* \Rightarrow l_1 \in \Sigma^*$$

$$l_2 \in L_2 \subseteq \Sigma^* \Rightarrow l_2 \in \Sigma^*$$

niin  $w = l_1 v l_2 \in \Sigma^* \circ \Sigma^* \circ \Sigma^* = \Sigma^*$ . Siis  $L \subseteq \Sigma^*$ .

$\Sigma^* \subseteq L$ :

Olkoon  $w \in \Sigma^*$ . Nyt  $w = \varepsilon w \varepsilon$  ja koska  $\varepsilon \in L_1$  ja  $\varepsilon \in L_2$ , niin  $w \in L$ . Siis  $\Sigma^* \subseteq L$ .

Koska  $\Sigma^* \subseteq L$  ja  $L \subseteq \Sigma^*$ , niin  $\Sigma^* = L = (L_1 \circ \Sigma^* \circ L_2)^*$ .  $\square$

(e)

**Väite.** Kaikilla kielillä  $L$ ,  $\emptyset \circ L = L \circ \emptyset = \emptyset$ .

*Todistus.* Jos  $uv \in \emptyset \circ L$ , niin  $u \in \emptyset$ . Koska tyhjässä joukossa ei ole yhtään alkioita, niin myös  $\emptyset \circ L$  on tyhjä joukko. Vastaavasti tapauksella  $L \circ \emptyset$ . Siis  $\emptyset \circ L = L \circ \emptyset = \emptyset$ .  $\square$

5. Olkoon  $\Sigma = \{a, b\}$ . Esitä joitakin esimerkkejä merkkijonoista, jotka kuuluvat tai eivät kuulu alla määriteltyihin joukkoihin.

(a)  $\{w \mid w = uu^R u \text{ jollakin } u \in \Sigma \circ \Sigma\}$

Joukkoon kuuluvat siis merkkijonot  $aaaaaa$ ,  $bbbbbb$ ,  $abbaab$  ja  $baabba$ .

(b)  $\{w \mid ww = www\}$

Jos  $ww = www$ , niin  $|ww| = |www|$  ja  $2|w| = 3|w|$ . Tämä pätee vain jos  $|w| = 0$ , joten  $w = \varepsilon$ . Joukkoon kuuluu siis vain tyhjä merkkijono.

(c)  $\{w \mid uvw = wvu \text{ joillakin } u, v \in \Sigma^*\}$

Valitaan  $u = v = \varepsilon$ . Nyt  $uvw = w = wvu$  kaikilla  $w$ . Joukkoon kuuluvat siis kaikki mahdolliset merkkijonot.

(d)  $\{w \mid www = uu \text{ jollakin } u \in \Sigma^*\}$

Esimerkiksi  $ab$  kuuluu joukkoon, sillä  $(ab)(ab)(ab) = (aba)(aba)$ . Toisaalta  $abbb$  ei kuulu määriteltyyn joukkoon, sillä

$$(abbb)(abbb)(abbb) = (abbbab)(bbabbb)$$

mutta

$$abbbab \neq bbabbb$$

Tämä esimerkki näyttää että kuuluvuusehdoksi ei riitä pituuden parillisuus.

6. Milloin yhtälö  $L^+ = L^* - \{\varepsilon\}$  on tosi? Tässä  $L^+ = \{l_1 l_2 \dots l_k \mid k \geq 1 \text{ ja } l_i \in L \text{ kaikilla } i\}$

**Väite.**  $L^+ = L^* - \{\varepsilon\}$  jos ja vain jos  $\varepsilon \notin L$ .

*Todistus.* Jos  $w \in L$ , niin  $w \in L^+$ . Täten jos  $\varepsilon \notin L^+$ , niin  $\varepsilon \notin L$ . Jos  $\varepsilon \notin L$ , niin ei ole olemassa merkkijonoa  $l_1 l_2 \dots l_k = \varepsilon$  missä  $l_i \in L$  kaikilla  $i$ . Täten  $\varepsilon \notin L^+$ . Muistetaan lisäksi, että  $L^* = L^+ \cup \{\varepsilon\}$ . Nyt pätee

$$\begin{aligned} \varepsilon \notin L &\Leftrightarrow \varepsilon \notin L^+ \\ &\Leftrightarrow L^+ = L^+ - \{\varepsilon\} \\ &\Leftrightarrow L^+ = (L^+ \cup \{\varepsilon\}) - \{\varepsilon\} \\ &\Leftrightarrow L^+ = L^* - \{\varepsilon\} \end{aligned}$$

Siis  $\varepsilon \notin L \Leftrightarrow L^+ = L^* - \{\varepsilon\}$ . □

7. Etsi seuraavat ehdot täyttävät merkkijonot.

- (a) Kaksi erillaista viiden mittaista merkkijonoa, joilla täsmälleen samat alimerkkijonot lukuunottamatta sanoja itseään.

Merkkijonoilla *ababa* ja *babab* on alimerkkijonot  $\varepsilon, a, b, ab, ba, aba, bab, abab$ , ja *baba*.

- (b) Merkkijono joka koostuu merkeistä  $a$  ja  $b$  eikä ole kahden palindromin ketjutus.  
*abaabb* on halutunlainen, sillä se ei itsessään ole palindromi, ja lisäksi *a(baabb)*, *(ab)aabb*, *aba(abb)*, *(abaa)bb* ja *(abaab)b* eivät ole kahden palindromin ketjutuksia.

- (c) Viiden merkin mittainen merkkijono joka sisältää kaikki mahdolliset aakkoston  $\{a, b\}$  kahden mittaiset merkkijonot alimerkkijonoinaan.

Kaikki kahden mittaiset merkkijonot aakkostosta  $\{a, b\}$  ovat *aa*, *bb*, *ab* ja *ba*. Merkkijono *abbaa* sisältää nämä kaikki.