582206 Laskennan mallit, syksy 2012
6. harjoitusten malliratkaisut
Juhana Laurinharju ja Jani Rahkola

Säännölliset kielet

1. Osoita seuraavat kielet epäsäännöllisiksi käyttäen pumppauslemmaa (tai jollain muulla haluamallasi tavalla):

   (a) $\{a^m b^n c^n \mid n, m \geq 1\}$

   (b) aakkoston $\{a, b, c\}$ palindromit

   (c) $\{0^n 1 0^n \mid n \in N\}$.

2. Mitkä seuraavista kielistä ovat säännöllisiä, mitkä eivät (kielillä A_1 ja A_2 aakkostona $\{0, 1\}$, muilla $\{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}$):

$$A_1 = \{0^n 1^m 0^n \mid n, m \in N\} \qquad A_2 = \{0^n 0^n \mid n \in N\}$$
$$A_3 = \left\{ww^{\mathcal{R}} \mid w \in \Sigma^*\right\} \qquad A_4 = \left\{wuw^{\mathcal{R}} \mid w, u \in \Sigma^+\right\}.$$
$$A_5 = \left\{wxw^{\mathcal{R}} \mid w \in \Sigma^*, x \in \Sigma\right\} \qquad A_6 = \{\mathrm{abca}^n \mathrm{b}^n \mathrm{c}^n \mid n \in N\}$$

   Perustele. Voit käyttää hyväksi kaikkia tunnettuja säännöllisiä kieliä koskevia ominaisuuksia, etenkin edellisen tehtävän tuloksia.

Kontekstittomat kielet

3. Esitä kontekstittomat kieliopit, jotka tuottavat seuraavat aakkoston $\Sigma = \{0, 1\}$ kielet:

   (a) parittoman mittaiset merkkijonot

$$\begin{aligned} S &\to MT \\ T &\to MMT \mid \varepsilon \\ M &\to 0 \mid 1 \end{aligned}$$

   (b) merkkijonot, joilla on osamerkkijono 111

$$\begin{aligned} S &\to H111H \\ H &\to MH \mid \varepsilon \\ M &\to 0 \mid 1 \end{aligned}$$

   (c) merkkijonot, joissa on ainakin kaksi merkkiä ja joiden ensimmäinen ja viimeinen merkki ovat samat

$$\begin{aligned} S &\to 1H1 \mid 0H0 \\ H &\to MH \mid \varepsilon \\ M &\to 0 \mid 1 \end{aligned}$$

   (d) parittoman mittaiset merkkijonot, joiden ensimmäinen ja keskimmäinen merkki ovat samat.

$$\begin{aligned} S &\to 1T_1M \mid 0T_0M \\ T_1 &\to MT_1M \mid 1 \\ T_0 &\to MT_0M \mid 0 \\ M &\to 0 \mid 1 \end{aligned}$$

4. Esitä kontekstittomat kieliopit seuraaville kielille:

(a) $01^* \cup 10^*$

(b) $\{0^n 1^m \mid m, n \in N \text{ ja } m \geq n\}$

(c) $\{0^n 1^k 0^m \mid m, n, k \in N \text{ ja } k = n + m\}$

(d) $\{a^n b^m c^m \mid m, n \in N\}$

(e) aakkoston $\{0, 1\}$ merkkijonot, joissa on yhtä paljon nollia ja ykkösiä.

5. Täydennä Jyrkin luentojen lauseen 2.3 todistus (s. 140) osoittamalla, että kontekstiton kielten luokka on suljettu myös konkatenaation ja tähtioperaation suhteen. Esitä todistus samalla tarkkuustasolla kuin luentomuistiinpanoissa esitetty yhdisteen tapaus.

   Olkoon A ja B aakkoston Σ yhteydettömiä kieliä ja $A = L(G_A)$ ja $B = L(G_B)$ kieliopeilla $G_A = (V_A, \Sigma, R_A, S_A)$ ja $G_B = (V_B, \Sigma, R_B, S_B)$. Oletetaan $V_A \cap V_B = \emptyset$.

   Väite. *Kieli $A \circ B$ on yhteydetön.*

   Todistus. Luodaan uusi kielioppi, jossa on uusi lähtösymboli $S \notin V_A \cup V_B$, ja sääntö $S \to S_A S_B$ jolla tästä uudesta lähtösymbolista voi tuottaa alkuperäisten kielten lähtösymbolien katenaation.

$$
\begin{aligned}
G_{A \circ B} &= (V_{A \circ B}, \Sigma, R_{A \circ B}, S) \\
V_{A \circ B} &= V_A \cup V_B \cup \{S\} \\
R_{A \circ B} &= R_A \cup R_B \cup \{S \to S_A S_B\}
\end{aligned}
$$

□

   Väite. *Kieli A^* on yhteydetön.*

   Todistus. Luodaan uusi kielioppi, jossa on uusi lähtösymboli $S \notin V_A \cup V_B$, ja sääntö $S \to S_A S \mid \varepsilon$ joka mahdollistaa A:n merkkijonojen toistamisen.

$$
\begin{aligned}
G_{A^*} &= (V_{A^*}, \Sigma, R_{A^*}, S) \\
V_{A^*} &= V_A \cup \{S\} \\
R_{A^*} &= R_A \cup \{S \to S_A S \mid \varepsilon\}
\end{aligned}
$$

□

6. Voidaan osoittaa, että kieli $A = \{a^n b^n c^n \mid n \in N\}$ ei ole kontekstiton. (Tähän palataan myöhemmin kurssilla.) Käyttäen tätä tietoa hyväksi osoita, että kontekstiton kielten luokka ei ole suljettu leikkauksen suhteen. (*Vihje:* esitä A kahden kontekstittoman kielen leikkauksena.) Päättele edelleen, että kontekstittomien kielten luokka ei ole suljettu komplementoinnin suhteen.

   Väite. *Yhteydettömien kielten luokka ei ole suljettu leikkauksen suhteen.*

   Todistus. Tehtävässä 3 osoitimme antamalla kieliopin, että kieli $A = \{a^n b^m c^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ on yhteydetön. Vastaavasti voidaan osoittaa yhteydettömäksi kieli $B = \{a^n b^n c^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$. Kieli A on siis merkkijonot joissa b ja c merkkejä on yhtämonta. Vastaavasti kieli B on merkkijonot joissa a ja b merkkejä on yhtämonta. Nyt leikkauskieli $A \cap B = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ josta tiedämmä ettei se ole yhteydetön. Siispä yhteydettömien kielten luokka ei ole suljettu leikkauksen suhteen. □

   Väite. *Yhteydettömien kielten luokka ei ole suljettu komplementin suhteen.*

   Todistus. Oletetaan vastoin, että yhteydettömät kielet ovat suljettu komplementin suhteen. Olkoon nyt A ja B yhteydettömiä kieliä. Tällöin

$$
\begin{aligned}
A \cup B \text{ yhteydetön } &\Rightarrow \overline{(A \cup B)} \text{ yhteydetön} \\
&\Rightarrow \overline{A} \cap \overline{B} \text{ yhteydetön} \\
&\Rightarrow A \cap B \text{ yhteydetön}
\end{aligned}
$$

   mikä on ristiriita edellä osoitetun kanssa. Siispä yhteydettömien kielten luokka ei voi olla suljettu komplementin suhteen. □

7. Osoita, että seuraavien aakkoston $\{a, b, c\}$ kielten komplementit ovat kontekstittomia:

   (a) $A_1 = \{a^n b^n \mid n \in N\}$

   (b) $A_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \in N\}$

   Vihje: Voit tietysti yksinkertaisesti kirjoittaa kontekstittomat kieliopit komplementeille $\overline{A_1}$ ja $\overline{A_2}$. Voi kuitenkin olla helpompaa esittää $\overline{A_1}$ ja $\overline{A_2}$ yhdisteinä yksinkertaisemmista kielistä, jotka on suoraviivaisempaa nähdä kontekstittomiksi.