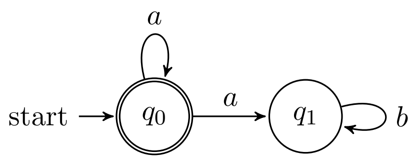
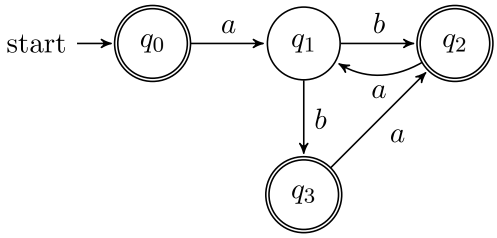
582206 Laskennan mallit, syksy 2012
3. harjoitusten malliratkaisut
Juhana Laurinharju ja Jani Rahkola

1. 27cmOlkoon N_1 ja N_2 epädeterministiset automaatit jotka on kuvattu oikealla. Tunnistavatko automaatit seuraavat sanat?
   (a) a
   (b) aa
   (c) aab
   (d) ε
   (e) ab
   (f) $abab$
   (g) aba
   (h) $abaa$

N_1 :

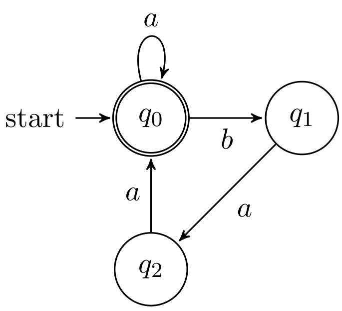


N_2 :

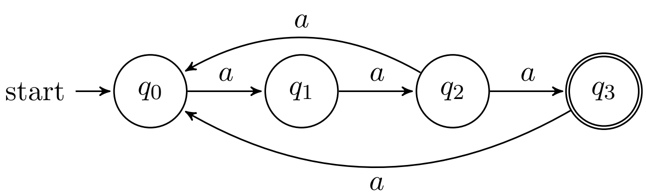


2. Minkälaisia sanoja seuraavat äärelliset epädeterministiset automaatit hyväksyvät?

   (a)



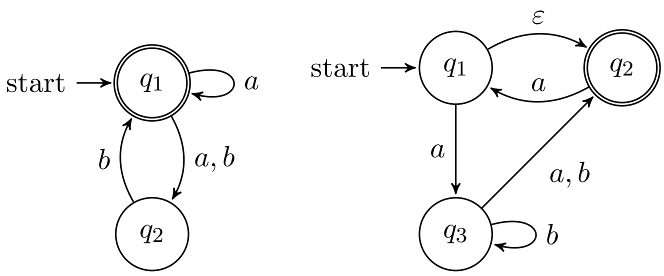
   (b)



3. Piirrä epädeterministiset automaatit tiloineen ja siirtymänuolineen seuraaville kielille.
   (a) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ sisältää korkeintaan kaksi } a\text{:ta}\}$
   (b) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ sisältää parillisen määrän alimerkkijonoa } ab\}$
   (c) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w\text{:n ensimmäinen ja viimeinen kirjain ovat samat}\}$

4. Merkkinon $w = w_1 w_2 \dots w_n$ *käänteismerkkijono* on $w^{\mathcal{R}} = w_n w_{n-1} \dots w_1$. Olkoon kielen A *käänteiskieli* $A^{\mathcal{R}} = \left\{ w^{\mathcal{R}} \mid w \in A \right\}$. Näytä että jos A on säännöllinen niin myös $A^{\mathcal{R}}$ on säännöllinen (vihje: käytä epädeterministisyyttä apuna). Tee myös pienet esimerkit.

5. Muunna seuraavat epädeterministiset automaatit deterministisiksi käyttämällä lauseen 1.39 todistusta apuna.



6. Olkoon M **deterministinen** automaatti, missä on n tilaan, ja $L(M) = A$. (vihje ajattele syklejä)

   (a)

   Väite. *Todista että $A \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists w \in A$ mille $|w| < n$.*

   Todistus.

   “$\Leftarrow$”

   Koska on olemassa $w \in A$, ei A ole tyhjä.

   “$\Rightarrow$”

   Lähdetään osoittamaan väitettä seuraavasti:

   - Otetaan merkkijono $w \in A, w = w_1 w_2 \dots w_k$
   - Tarkastellaan tilajonoa $\bar{q} = q_1 q_2 \dots q_{k+1}$ jonka läpi automaatti M kulkee merkkijonolla w.
   - Poistetaan tilajonosta $\bar{q}$ kaikki mahdollisesti löytyvät silmukat.
   - Edellisen kohdan tuloksena saatua tilajonoa vastaa jokin merkkijono $u \in A$ jolla on haluttu ominaisuus.

   Koska $A \neq \emptyset$, niin löytyy $w \in A, w = w_1 w_2 \dots w_k$, ja olkoon $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$. Määritellään tilajono $\bar{q} = q_1 q_2 \dots q_{k+1}$ missä $q_1 = s$ ja $q_{i+1} = \delta(q_i, w_i)$.

   $$\begin{array}{ccccc} q_1 & \xrightarrow{w_1} & q_2 & \xrightarrow{w_2} \cdots \xrightarrow{w_n} & q_{n+1} \\ s & & \delta(s, u_1) & & \end{array}$$

   i. Jos $|w| < n$, niin u on etsitty merkkijono.
   ii. Jos $|w| \geq n$, niin lokeroperiaatteen nojalla löytyy $q_i = q_j$ jollain $i, j \in \{1 \dots n\}$, $i < j$. Siis tilajonosta $\bar{q}$ löytyy silmukka.
   FIXME kuva silmukasta
   Erityisesti

   $$\begin{aligned} & \delta(q_{i-1}, w_{i-1}) = q_i && = q_j \\ \text{ja} \quad & \delta(q_i, u_j) && = \delta(q_j, u_j) = q_{j+1} \end{aligned}$$

   Tällöin merkkijono

   $$v = w_1 \dots w_{i-1} w_j \dots w_k$$

   kulkee tilajonon

   $$\bar{p} = q_1 \dots q_i q_{j+1} \dots q_{k+1}$$

   läpi. Koska tilajonoissa $\bar{q}$ ja $\bar{p}$ on sama viimeinen tila $q_{k+1} \in F$, hyväksyy automaatti M myös merkkijonon v. Lisäksi $|v| \leq |u| - 1$, eli merkkinono lyhenee ainakin yhden merkin verran. Toistamalla tätä menetelmää korkeintaan $(k-n)+1$ kertaa, löydetään automaatin M hyväksymä merkkijono u, jolla merkkijono lyhenee ainakin $(k-n)+1$ merkin verran.

$$\begin{aligned} |u| &\le |u| - ((k-n)+1) \\ &= k - k + n - 1 \\ &= n - 1 \\ &< n \end{aligned}$$

Siis $|u| < n$ ja täten merkkijono u toteuttaa halutun ehdon.

□

(b)

Väite. *Todista että A on ääretön jos ja vain jos $\exists w \in A$ mille $n \le |w| < 2n$*

Todistus.

"$\Leftarrow$"

Idea:

- Olkoon $w = w_1 \dots w_k \in A$ jokin ehdon täyttävä merkkijono.
- Nyt erityisesti $|w| \ge n$.
- Muodostetaan jälleen merkkijonolla w automaatin läpikäymä tilajono $\bar{q} = q_1 \dots q_{k+1}$ missä $k+1 \ge n$.
- Nyt erityisesti $k > n$, joten tilajonossa on silmukka.
- Näin löydettyä silmukkaa toistamalla saadaan aina toinen toistaan pidempiä merkkijonoja jotka kuuluvat kieleen.

Olkoon $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ja $w \in A$ jolla $n \le |w| < 2n$. Nyt

$$w = w_1 w_2 \dots w_k \text{ missä } n \le k < 2n.$$

Määritellään automaatin M merkkijonolla w läpikäymä tilajono $\bar{q}$,

$$\bar{q} = q_1 q_2 \dots q_{k+1}, \text{ missä } q_1 = s \text{ ja } q_{i+1} = \delta(q_i, w_i).$$

Lokeroperiaatteen nojalla nyt löytyy sellaiset $i, j \in \{1 \dots n\}, i < j$, joilla $q_i = q_j$. Tilajonossa $\bar{q}$ on siis silmukka. Määritellään nyt merkkijonon w osamerkkijonot

$$\begin{aligned} a &= w_1 \dots w_{i-1} \\ b &= w_i \dots w_{j-1} \\ c &= w_j \dots w_k. \end{aligned}$$

Nyt $w = abc$ ja

$$\begin{aligned} \delta^*(q_1, a) &= q_i \\ \delta^*(q_j, b) &= q_j = q_i \\ \delta^*(q_j, c) &= q_{k+1}. \end{aligned}$$

Nyt näyttäisi siltä, että voimme toistaa merkkijonoa b miten monta kertaa haluamme, ja saamme aina jonkin automaatin M hyväksymän, ja siten kieleen A kuuluvan merkkijonon. Automaatti M hyväksyy merkkijonon $ab^m c$, missä merkkijonoa b on siis toistettu m kertaa, jos $\delta^*(s, ab^m c) \in F$. Nyt

$$\begin{aligned} \delta^*(s, ab^m c) &= \delta^*(\delta^*(s, a), b^m c) \\ &= \delta^*(q_i, b^m c) \\ &= \delta^*(\delta^*(q_i, b^m), c) \end{aligned}$$

Tiedetään, että

$$\delta^*(q_j, c) = q_{k+1}.$$

Nyt jos

$$\delta^*(q_i, b^m) = q_j$$

niin

$$\delta^*(q_1, ab^m c) = q_{k+1} \in F.$$

Enää tarvitsee siis näyttää, että kaikilla $m \in \mathbb{N}$ pätee $\delta^*(q_i, b^m) = q_j$. Todistetaan tämä induktiolla.

Väite. *Kaikilla $m \in \mathbb{N}$ pätee $\delta^*(q_i, b^m) = q_j$.*

Todistus.

Alkuaskel: $m = 1$ Tilajonon määritelmän nojalla $\delta^*(q_i, b^1) = q_j$.

Induktioaskel

Induktio-oletus $\delta^*(q_i, b^m) = q_j$

Induktioaskeleen väite $\delta^*(q_i, b^{m+1}) = q_j$

Induktioaskeleen todistus

$$\begin{aligned}
\delta^*(q_i, b^{m+1}) &= \delta^*(q_i, bb^m) \\
&= \delta^*(\delta^*(q_i, b), b^m) && \delta^*\text{:n määritelmä} \\
&= \delta^*(q_j, b^m) && \text{alkuaskel} \\
&= \delta^*(q_i, b^m) && q_i = q_j \\
&= q_j && \text{induktio-oletus}
\end{aligned}$$

□

Nyt kaikilla $m \in \mathbb{N}$ pätee

$$\begin{aligned}
\delta^*(q_1, ab^m c) &= \delta^*(\delta^*(q_1, a), b^m c) && \delta^*\text{:n määritelmä} \\
&= \delta^*(q_i, b^m c) && a\text{:n määritelmä} \\
&= \delta^*(\delta^*(q_i, b^m), c) && \delta^*\text{:n määritelmä} \\
&= \delta^*(q_j, c) && \text{äskeinen induktiotoditus} \\
&= q_{k+1} \in F && c\text{:n ja } \bar{q}\text{:n määritelmät}
\end{aligned}$$

"$\Rightarrow$"

Olkoon $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ja A automaatin M tunnistama ääretön säännöllinen kieli. Koska korkeintaan n:n mittaisia merkkijonoja on vain äärellinen määrä, löytyy merkkijono $w \in A$ jolla $|w| \geq n$. Nyt $w = w_1 \dots w_k$ jollain $k \geq n$.

Jos $k < 2n$, w on haettu merkkijono. Voidaan siis tarkastella tapausta, missä $k \geq 2n$.

Olkoon $q_1 \dots q_{k+1}$ tilajono, jonka automaatti M käy läpi syötteellä w. Lokeroperiaatteen nojalla löytyy ainakin yksi (i, j) pari, missä $i, j \in 1 \dots n$ ja $i < j$. Valitaan näistä (i, j) pareista sellainen, jolla erotus $j - i$ on pienin. Erityisesti tilajonosta löytyy nyt sykli $q_i \dots q_j$ missä $q_i = q_j$.

Merkkijono w voidaan nyt jakaa kolmeen osaan. Sykliä edeltävään, sykliin ja sykliä seuraavaan osaan seuraavasti:

$$w = \underbrace{(w_1 \dots w_{i-1})}_{\text{alkuosa}} \underbrace{(w_i \dots w_{j-1})}_{\text{silmukka}} \underbrace{(w_j \dots w_k)}_{\text{loppuosa}}$$

a) kohdan nojalla merkkijonosta $w_1 \ldots w_{i-1}$ voidaan muodostaa merkkijono a, jolla

$$|a| < n \text{ ja } \delta^*(q_1, a) = q_i.$$

Vastaavasti voidaan muodostaa merkkijono c, jolla

$$|c| < n \text{ ja } \delta^*(q_j, c) = q_{k+1}.$$

Lisäksi voidaan määritellä valittua lyhintä silmukkaa vastaava merkkijono $b = w_i \ldots w_{j-1}$. Nyt $|b| \leq n$, sillä jos $|b| > n$, niin

$$\begin{aligned} |q_i \ldots q_{j-1}| &= j - (i-1) \\ &= j - i + 1 \\ &= |b| > n \end{aligned}$$

joten lokeroperiaatteen nojalla on olemassa $i', j' \in \{1 \ldots n\}$ joilla $i' < j'$ ja $q_{i'} = q_{j'}$. Nyt $j' - i' < j - i$ mikä on ristiriita parin (i, j) valinnan kanssa.
Nyt merkkijono $ab^kc \in A$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Haluaisimme lisäksi, että $n \leq |ab^kc| < 2n$ jollain $k \in \mathbb{N}$. Tulisi siis päteä, että

$$\begin{array}{rcl|l} n \leq & |ab^kc| & < 2n & |b^k| = k|b| \\ \Leftrightarrow \quad n \leq & k|b| + |ac| & < 2n & -|ac| \\ \Leftrightarrow n - |ac| \leq & k|b| & < 2n - |ac| & \div |b| \\ \Leftrightarrow \quad \frac{n-|ac|}{|b|} \leq & k & < \frac{2n-|c|}{|b|} & \end{array}$$

Koskaa pätee, että

$$\frac{n - |ac|}{|b|} \leq \left\lceil \frac{n - |ac|}{|b|} \right\rceil$$

ja

$$\begin{aligned} \left\lceil \frac{n - |ac|}{|b|} \right\rceil &< \frac{n - |ac|}{|b|} + 1 \\ &= \frac{n - |ac| + |b|}{|b|} \\ &\leq \frac{n - |ac| + n}{|b|} \\ &= \frac{2n - |ac|}{|b|} \end{aligned}$$

niin voidaan valita $k = \left\lceil \frac{n-|ac|}{|b|} \right\rceil$. Nyt siis $ab^kc \in A$ ja $n \leq ab^kc < 2n$ kuten haluttiin.

$\square$