工科数学分析（上）学习笔记

lamaper

2024 年 11 月 6 日

1　前置知识

1.1　常用数列求和

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

1.2　和差化积公式

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

1.3　积化和差公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[sin(\alpha+\beta) + sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$$

2 函数、极限与连续

2.1 常用定理与推论

2.1.1 一些简单的极限

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0(|q|<1)$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$

2.1.2 归并性

例如要证明$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$不存在，可以使用归并性证明。

证明如下：

令$f(x)=\sin x$，如果取$x_n=n\pi$（x_n单调增加趋于正无穷大），则有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x_n)=\lim_{x\to+\infty}\sin n\pi=0$$

然后又取$x_n=\frac{\pi}{2}+2n\pi$（x_n单调增加趋于正无穷大），则有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x_n)=\lim_{x\to+\infty}\sin(\frac{\pi}{2}+2n\pi)=1$$

所以$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$不存在。

2.1.3 一种证明极限的思路

要证明$f(x)$极限，则要证明$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$

那么设$f(x)=A+a(x)$，那么就要证明$\lim\limits_{x\to\infty}a(x)=0$

这是一种利用无穷小性质来证明极限的方法。

2.1.4 无穷小定理

- 有界函数与无穷小的乘积是无穷小
- 有限个无穷小的和是无穷小
- 有限个无穷小的乘积是无穷小

需要注意的的是，无穷小是变量，而不是一个很小的数。

显然的，若$f(x)$是无穷小，$\frac{1}{f(x)}$是无穷大，反之亦然。

2.1.5 夹逼定理

如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$，且$f(x)\le h(x)\le g(x)$，则$\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$

利用夹逼定理可以证明一些不好直接说明的极限，它常与无穷小定理一起使用，同时伴有数学归纳法。

2.1.6 两个重要极限和常用等价无穷小

两个重要极限实际上代表两种特殊的极限形式：

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$ ($\frac{0}{0}$ 类型)
- $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ (1^∞ 类型)

在求解极限时，所看到的式子进行分析，确定类型，然后朝向这两个重要极限进行转化。

重要极限也有一些扩展，如$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\ \ (a\ne 0)$.

当$x\to 0$时，有以下等价无穷小：

- $x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arctan x\sim\arcsin x$;
- $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$;
- $\ln(1+x)\sim e^x-1\sim x$;
- $(1+x)^a-1\sim ax$(a是非零常数);
- $\frac{a^x-1}{x}\sim\ln a$;

2.1.7 求极限策略

类型	操作	最终形式
$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$	直接计算	
$0\cdot\infty$	恒等变化	$\frac{0}{\frac{1}{\infty}}$或者$\frac{\infty}{\frac{1}{0}}$
$\infty-\infty$	通分	$\frac{\infty}{\infty}$或者$\frac{0}{0}$
∞^0或者0^0或者1^∞	朗博同构：$\lim u^v=e^{\lim(v\ln u)}$	$\frac{0}{\frac{1}{\infty}}$或者$\frac{\infty}{\frac{1}{0}}$

2.2 典型例题

2.2.1 利用数学归纳法证明

证明下列数列有极限且求出极限：

（1）$y_1=10, y_n+1=\sqrt{6+y_n}, (n=1,2,...)$;

（2）$y_1=\sqrt{2}, y_n+1=\sqrt{2y_n}, (n=1,2,...)$;

解：

（1）先证明y_n有界，再证明y_n单调，最后说明y_n有极限。

由表达式知道$y_n>0$，$y_1=10, y_2=\sqrt{6+10}=4, y_3=\sqrt{6+4}=\sqrt{10}$

观察猜测y_n应当不断减小，且减小趋势越来越小，所以y_n应当有下界且单调递减。

接下来先证明有界：

$y_1=10>3, y_2=4>3, y_3=\sqrt{10}>3$，从而猜测$y_n>3$,

由数学归纳法，假设$y_n>3$，则$y_n+1=\sqrt{6+y_n}>\sqrt{6+3}=3$,

从而证明了y_n有下界。

再证明y_n单调：

$y_{n+1}-y_n=\sqrt{6+y_n}-y_n=\frac{6+y_n-y_n^2}{\sqrt{6+y_n}+y_n}=\frac{(2+y_n)(3-y_n)}{\sqrt{6+y_n}+y_n}$

由于$y_n>3$，所以$y_{n+1}-y_n<0$，从而证明了y_n单调递减。

(技巧：面对根式相减，可以利用平方差公式构造恒正的分母，用无根号的分子来判断整个式子的正负)

最后求极限：

设$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$，则有$\lim\limits_{n\to\infty}y_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{6+y_n}=\sqrt{6+A}$

即$A=\sqrt{A+6}$，通过解方程可得$A=3$或$A=+2$，

但是由于$y_n>3>0$，所以舍去负根

所以$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=3$

解：

（2）仿照（1）的方法，先证明y_n有界，再证明y_n单调，最后说明y_n有极限。

$y_1=\sqrt{2}<2, y_2=\sqrt{2\sqrt{2}}<2$,猜测$y_n<2$，

由数学归纳法，则$y_{n+1}=\sqrt{2y_n}<\sqrt{2\cdot 2}=2$，

从而证明了y_n有上界。

再证明y_n单调：

$y_{n+1}-y_n=\sqrt{2y_n}-y_n=\frac{2y_n-y_n^2}{\sqrt{2y_n}+y_n}=\frac{y_n(2-y_n)}{\sqrt{2y_n}+y_n}$

由于$y_n<2$，所以$y_{n+1}-y_n>0$，从而证明了y_n单调递增。

最后求极限：

设$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$，则有$\lim\limits_{n\to\infty} y_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2y_n} = \sqrt{2A}$

即$A=\sqrt{2A}$，通过解方程可得$A=2$

2.2.2 已知极限值求参数

这类题通常需要到一个结论：

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x)g(x)=0\text{，若}\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty\text{，则}\lim_{x\to\infty} g(x)=0}$$

求出下列式子中α与β的值：

（1）若$\lim\limits_{x\to+\infty}(x\arctan x-\alpha x-\beta)=0;$

（2）若$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-\alpha x-\beta)=0;$

(1) **解：**

若$\lim\limits_{x\to+\infty}(x\arctan x-\alpha x-\beta)=0$, 则有$\lim\limits_{x\to+\infty} x(\arctan x-\alpha x-\frac{\beta}{x})=0.$

由于$\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$,所以$\lim\limits_{x\to+\infty}(\arctan x-\alpha x-\frac{\beta}{x})=0.$

由于$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\beta}{x}=0$, 所以$\alpha=\frac{\pi}{2}$.

接下来回代$\alpha=\frac{\pi}{2}$，则有$\lim\limits_{x\to+\infty}(x\arctan x-\frac{\pi}{2}x)=\beta$.

设$u=\arctan x, x=\tan u$，即求$\lim\limits_{u\to\frac{\pi}{2}}-\tan u(\frac{\pi}{2}-u)$. 为了方便可以再次换元$x=\frac{\pi}{2}-u$,即求$\lim\limits_{x\to 0}-x\tan(\frac{\pi}{2}-x)$. 即$\lim\limits_{x\to 0}-\frac{x}{\cot x}=\lim\limits_{x\to 0}-\frac{x}{\sin x}\cos x=-1.$

所以$\beta=-1$.

综上，$\alpha=\frac{\pi}{2},\beta=-1$.

(2) **解：** 若$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-\alpha x-\beta)=0$, 则有$\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}-\alpha-\frac{\beta}{x})=0.$

即$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}-\alpha-\frac{\beta}{x})=0$, 可以求得$\alpha=-1$.

回代$\alpha=-1$，则有$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}+x)=\beta$.

$\beta=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}+x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-x(\sqrt[3]{1+\frac{-1}{x^3}}-1)$,这里可以用等价无穷小$(1+x)^a-1\sim ax$替换，则原式变为$\lim\limits_{x\to+\infty} x\frac{1}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$

综上，$\alpha=-1,\beta=0$.

练习：

已知$\exists c>0$使得$\lim\limits_{x\to\infty}[(x^5+7x^4+2)^c-x]$存在且不为0，求$c$

解：

由题意知$\lim\limits_{x\to\infty}[(x^5+7x^4+2)^c-x]=A$，其中$A\neq 0.$

则原式变为$\lim\limits_{x\to\infty}x^{5c}[(1+\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5})-x^{1-5c}]=A.$

由于$\lim\limits_{x\to\infty}x^{5c}=+\infty$，所以$\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5})-x^{1-5c}]=0.$
（这一步在后面详细解释）

由于$\lim\limits_{x\to\infty}x^{1-5c}=0$，所以$1-5c=0$，即$c=\frac{1}{5}.$

接着回代$c=\frac{1}{5}$，则有$\lim\limits_{x\to\infty}[(x^5+7x^4+2)^{\frac{1}{5}}-x]=A.$

进行变换$\lim\limits_{x\to\infty}[(x^5+7x^4+2)^c-x]=\lim\limits_{x\to\infty}[x\cdot\sqrt[5]{1+\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5}}-1]$,利用$(1+x)^a-1\sim ax$替换则有$\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\frac{1}{5}\cdot(\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5})=\frac{7}{5}.$

不难发现，在这其中我们仍然用到了无穷小与无穷大转换的思想：

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}f(x)g(x)=C，若\lim_{x\to\infty}f(x)=+\infty，则\lim_{x\to\infty}g(x)=\frac{C}{\infty}=0}$$

因为$\frac{C}{\infty}$实际上是无穷小，所以此处极限就是0，与上文提到的题目解法相同。

2.2.3 利用夹逼定理证明极限

求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+...+\frac{1}{n^2+n\pi})$；

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{n^3+1}+\frac{4}{n^3+4})+...+\frac{n^2}{n^3+n^2}$；

(1) **解：**

观察知$\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{1}{n^2+n\pi}+\frac{1}{n^2+n\pi}+...+\frac{1}{n^2+n\pi})\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+...+\frac{1}{n^2+n\pi})\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+\pi}+...+\frac{1}{n^2+\pi})$;

不等式前一项$\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{1}{n^2+n\pi}+\frac{1}{n^2+n\pi}+...+\frac{1}{n^2+n\pi})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\pi}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n}}=1;$

不等式后一项$\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+\pi}+...+\frac{1}{n^2+\pi})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n^2}}=1;$

即$1\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+...+\frac{1}{n^2+n\pi})\leqslant 1$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+...+\frac{1}{n^2+n\pi})=1$

(2) **解：**

观察知$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{n^3+n^2}+\frac{4}{n^3+n^2}+...+\frac{n^2}{n^3+n^2})\leqslant\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{n^3+1}+\frac{4}{n^3+4}+...+\frac{n^2}{n^3+n^2})\leqslant\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{n^3+1}+\frac{4}{n^3+1}+...+\frac{n^2}{n^3+1})$；

即$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n^3+n^2}(\sum\limits_{i=1}^{n}i^2)\leqslant\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{n^3+1}+\frac{4}{n^3+4}+...+\frac{n^2}{n^3+n^2})\leqslant\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n^3+1}(\sum\limits_{i=1}^{n}i^2)$；

又$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n^3+n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{3}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n^3+1}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{3}$;

所以$\frac{1}{3} \leqslant \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{n^3+1}+\frac{4}{n^3+4}+...+\frac{n^2}{n^3+n^2}) \leqslant \frac{1}{3}$;

即$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{n^3+1}+\frac{4}{n^3+4}+...+\frac{n^2}{n^3+n^2}) = \frac{1}{3}$.

2.2.4 直接求极限

求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan 2x \tan(\frac{\pi}{4}-x)$;

(1) **解：** 首先需要注意的是，这个题$x \to \frac{\pi}{4}$而不是$x \to 0$，所以前面那么多的等价无穷小替换在这里没有办法使用。

如果足够敏锐，可以发现这是一个$\infty \cdot 0$的极限，我们可以通过变形使它可求。

这里使用另外的办法：

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan 2x \tan(\frac{\pi}{4}-x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \cdot \frac{1-\tan x}{1+\tan x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\tan x}{(1+\tan x)^2} = \frac{1}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$;

(2) **解：** 本题也是一个$\infty \cdot 0$的极限，首先通过换元法，把它变得正常一点：

$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2} = \lim\limits_{t\to 0} t \cdot \tan(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi x}{2}t) = \lim\limits_{t\to 0} t \cdot \frac{1}{\tan\frac{\pi}{2}t}$

然后便可以由等价无穷小替换直接算出结果：$\lim\limits_{t\to 0} t \cdot \frac{1}{\tan\frac{\pi}{2}t} = \frac{2}{\pi}$

(3) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+x^2+x^3+...+x^n-n}{x-1}$;

(3) **解：** 本题证明比较巧妙，主要是通过对n的妙用来解决题目：

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+x^2+x^3+...+x^n-n}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)+(x^2-1)+(x^3-1)+...+(x^n-1)}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1} 1+(x+1)+(x^2+x+1)+\cdots+(x^{n-1}+\cdots+1) = 1+2+3+4+\cdots+n = \frac{n(1+n)}{2}$

2.2.5 函数的连续性与间断点问题

(1) 若$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & (x<0) \\ 3x & (0<x<1) \\ e^{2ax}-e^{ax}+1 & (x \geqslant 1) \end{cases}$,在$x=1$处连续，求$a$的值.

(2) 设$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}} & (x<0) \\ b & (x=0) \\ \frac{1}{x}[\ln x - \ln(x^2+x)] & (x>0) \end{cases}$,证明$f(x)$在$x=0$处连续.

(1) 解:

(2) 解:

3 导数与微分

3.1 常用导数

函数	导数
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \tan x$	$y' = \sec^2 x$
$y = \cot x$	$y' = -\csc^2 x$
$y = \sec x$	$y' = \sec x \tan x$
$y = \csc x$	$y' = -\csc x \cot x$
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arctan x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
$y = \text{-1}\, x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$
$y = \operatorname{arcsec} x$	$y' = \frac{1}{\|x\|\sqrt{x^2-1}}$
$y = \operatorname{arsh} x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$y = \ln \|x\| x$	$y' = \frac{1}{x}$

特别地，$\operatorname{arsh} = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

3.2 导数的运算法则

3.2.1 反函数求导

若可导函数$y=f(x)$的反函数为$x=\Phi(y)$，则
$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$
或者有
$$\Phi(x)=\frac{1}{f'(x)}$$

3.2.2 参数方程求导

若$x=x(t),y=y(t)$均可导，则有
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$$
特别地，整理出参数方程二阶导计算公式：
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{d}{dx}(\frac{y'(t)}{x'(t)})=\frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3}$$

3.2.3 极坐标求导

一般将极坐标方程化为$\begin{cases}x=\rho(\theta)\cos\theta\\y=\rho(\theta)\sin\theta\end{cases}$,然后利用参数方程求导法则求导。

3.3 高阶导数

3.3.1 几个重要的高阶导数

- $y=x^m$，(m是正整数)，$y^{(n)}=\begin{cases}m(m-1)(m-2)...(m-n+1)x^{m-n} & n<m\\m! & n=m\\0 & n>m\end{cases}$
- $y=x^a$，(a不是正整数)，$y^{(n)}=a(a-1)(a-2)...(a-n+1)x^{a-n}$
- $y=e^x$，$y^{(n)}=e^x$
- $y=\sin x$，$y^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$
- $y=\cos x$，$y^{(n)}=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$
- $y=\ln x$，$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$
- $y=\frac{c}{ax+b}$，$y^{(n)}=c\frac{(-1)^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$

3.3.2 laibunic公式

若$u(x)=f(x)g(x)$，则有

$$u^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

可以类比二项式定理。

3.3.3 $f(0)=0$的妙用

在本章节中，常出现$x=0$处的导数问题，通常需要利用导数定义的变形来求解，当$f(0)=0$时：

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

3.4 微分

3.5 典型例题

3.5.1 利用定义计算导数

设$f(x)$可导，且导函数有界，$g(x)=f(x)\sin^2 x$，求$g''(0)$.

解：

由题意知$g'(x)=f'(x)\sin^2 x+f(x)\sin 2x$.

由于不知道$f''(x)$是否存在，故使用定义直接求$g''(0)$.

所以有：

$g''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)\sin^2 x+f(x)\sin 2x-f'(0)\sin^2 0-f(0)\sin 2\cdot 0}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)\sin^2 x+f(x)\sin 2x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)\sin^2 x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)\sin 2x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}f(x)\cdot x\cdot\frac{\sin^2 x}{x}+f(0)\lim\limits_{x\to 0}2\frac{\sin 2x}{2x}=0+2f(0)=2f(0)$

3.5.2 可导性证明与分段函数的导数

(1) 利用函数$f(x)$在$x=a$处可导，证明$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2f(a)-a^2f(x)}{x-a}=2af(a)-a^2f'(a)$;

(2) 设$f(x)=x|\sin x|, x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,求$f''(x)$;

(1) **解：**

(2) **解：**

3.5.3 隐函数求导及其二阶导

(1) $\sin y + xe^y = 0$,求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

(1) **解：**

3.5.4 参数方程和极坐标方程求导及其二阶导

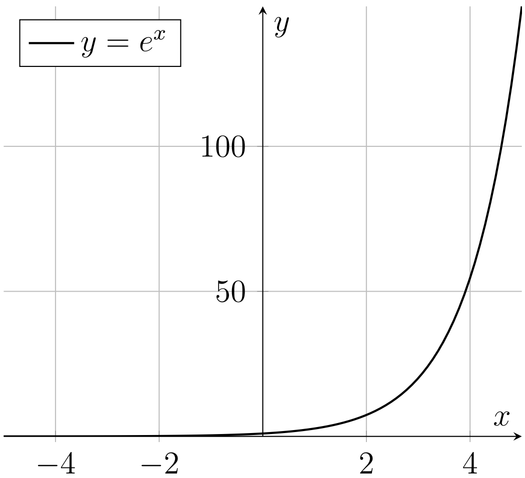
(1) $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + 3, \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$,求$\frac{dy}{dx}$.

(2) 求双扭线$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\theta$在$\theta = \frac{\pi}{12}$处的切线斜率.

(1) **解：**

(2) **解：**

3.5.5 带有极限的分段函数



在这部分，需要利用指数函数的极限性质来求解问题。不难发现，$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$。

(1) 设$f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{2n+1}+(a-1)x^n-1}{x^2n-ax^n-1}$ $(a \neq 0)$:

(i) 求$f(x)$；

(ii) 当$x \geqslant 0$时，若$f(x)$在连续，求a的值.

(2)设$f(x)=\frac{x^2e^{n(x+1)}+ax+b}{e^{n(x+1)+1}}$，试确定 a,b使得$f(x)$在处处可导，并 $f'(x)$.

(1) **解：**

(2) **解：**

4 微分中值定理与导数的应用

4.1 微分中值定理

4.1.1 罗尔定理

若函数$f(x)$满足：在$[a,b]$上连续；在(a,b)内可导；$f(a)=f(b)$；则在(a,b)内至少存在一个$\xi \in (a,b)$，使得$f'(\xi)=0$.

4.1.2 拉格朗日中值定理

如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间在(a,b)内可导，则至少存在一点$\xi \in (a,b)$,使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

4.1.3 柯西中值定理

如果函数$f(x)$与$g(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间在(a,b)内可导，并且在(a,b)内可 $g'(x)\neq 0$，则至少存在一点$\xi \in (a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

4.1.4 微分中值定理证明题

(1)设实数$a_0,a_1,\cdots,a_n$满足$a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$,证明:方程$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$在$(0,1)$至少有一个实根.

(1) **解：** 本题考察注意力。

注意到当我们设$F(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$时，$F(1)=0$.

同时$F'(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$就是我们要证明的函数.

所以由罗尔定理,对于$[0,1]$连续,$(0,1)$可导的$F(x)$,有$F(0)=F(1)$,则至少存在一

个$\xi \in (0,1)$使得$F'(\xi)=0$.

4.2 洛必达法则

洛必达法则用于求解不定式极限，主要适用于$\frac{0}{0}$和$\frac{\infty}{\infty}$两种类型的不定式。

定理： 设函数$f(x)$和$g(x)$在$x=a$的某邻域内可导，且$g'(x)\neq 0$，如果

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \text{或} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty,$$

则

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

例题：

- 例1：求$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$。

解： 直接应用洛必达法则：

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$$

- 例2：求$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}$。

解： 直接应用洛必达法则：

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

4.3 泰勒公式及其应用

4.3.1 泰勒公式

定理1：

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

其中$R_n(x) = o((x-a)^n)$称为皮亚诺余项.

定理2：

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

其中$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$称为拉格朗日型余项.

4.3.2 麦克劳林公式

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
- $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots + \frac{B_{2n}x^{2n-1}}{(2n)!} + o(x^{2n-1})$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$

4.4 函数的性质

4.4.1 函数的单调性

定理：

若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，则：

- 若$f'(x) > 0$，则$f(x)$在(a,b)上单调递增；
- 若$f'(x) < 0$，则$f(x)$在(a,b)上单调递减；
- 若$f'(x) = 0$，则$f(x)$在(a,b)上为常数函数.

4.4.2 函数的极值

定理：

若函数$f(x)$在x_0处可导，且$f'(x_0) = 0$，则：

- 若$f'(x)$在x_0两侧异号，则$f(x)$在x_0处取极值.
- 若$f'(x)$在x_0两侧同号，则$f(x)$在x_0处无极值.

极值的第一充分条件：

若函数$f(x)$在x_0处连续，在x_0的去心邻域δ内可导，且x_0是$f(x)$的驻点或不可导点，则：

- 当$x \in (x_0 - \delta, x_0)$时，$f'(x) > 0$; 当$x \in (x_0, x_0 + \delta)$时，$f'(x) < 0$;则$f(x)$在$x_0$处

取极大值.

- 当$x \in (x_0-\delta, x_0)$时，$f'(x) < 0$; 当$x \in (x_0, x_0+\delta)$时，$f'(x) > 0$;则$f(x)$在x_0处取极小值.
- 当$x \in (x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$时，$f'(x) > 0$或$f'(x) < 0$, 则$f(x)$在$x_0$处无极值.

极值的第二充分条件：

若函数$f(x)$在x_0处连续，在x_0的去心邻域δ内二阶可导，且$f'(x_0) = 0$，$f''(x_0) \neq 0$，则：

- 当$f''(x_0) > 0$时，$f(x)$在x_0处取极小值；
- 当$f''(x_0) < 0$时，$f(x)$在x_0处取极大值.

4.4.3 函数的凹凸性

凹凸性的定义：

若函数$f(x)$在(a,b)上连续，对于任意$x_0 \in (a,b)$,都有：

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

则称$f(x)$在(a,b)上凹函数；若函数$f(x)$在(a,b)上连续，对于任意$x_0 \in (a,b)$,都有：

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

则称$f(x)$在(a,b)上凸函数.

凹凸性的充分条件：

若函数$f(x)$在(a,b)上二阶可导，则：

- 若$f''(x) > 0$，则$f(x)$在(a,b)上凹函数；
- 若$f''(x) < 0$，则$f(x)$在(a,b)上凸函数.

定理：

若函数$f(x)$在(a,b)上连续，在(a,b)内二阶可导：

若对于(a,b)内任意两点x_1, x_2，有

$$f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

则称$f(x)$在(a,b)上凹函数；

若有

$$f(\frac{x_1+x_2}{2}) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

则称$f(x)$在(a,b)上凸函数.

在这里有扩展定理，即著名的 **Jensen不等式：**

若函数$f(x)$在(a,b)上连续，在(a,b)内二阶可导，且$f''(x)>0$，
则对于任意$x_1,x_2,\cdots,x_n\in(a,b)$，以及任意$n$个正数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，满足$\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，有

$$f(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i) < \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$$

同理，若$f''(x)<0$，则有

$$f(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i) > \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$$

还有一种易读的形式

对于任意凹函数，都有：

$$f(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}) > \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

对于任意凸函数，都有：

$$f(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

4.4.4 函数的拐点

拐点的定义：

若函数$f(x)$在x_0处连续，在x_0的去心邻域δ内二阶可导，且$f'(x_0)=0$，则：

- 当$f''(x_0)$在x_0两侧异号，则$f(x)$在x_0处取拐点.
- 当$f''(x_0)$在x_0两侧同号，则$f(x)$在x_0处无拐点.
- 当$f''(x_0)$在x_0两侧为零，则$f(x)$在x_0处可能有拐点，也可能无拐点.

4.4.5 函数的渐近线

垂直渐近线：

若函数$f(x)$在x_0处连续，在x_0的去心邻域δ内可导，且$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=\pm\infty$，则直线$x=x_0$称为$f(x)$的垂直渐近线.

水平渐近线：

若$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，则直线$y=A$称为$f(x)$的水平渐近线.

斜渐近线：

若$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$，则直线$y=ax+b$称为$f(x)$的斜渐近线.

4.5 曲线的曲率

曲率的定义：

设曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,y_0)$处可导，且$f'(x)$在x_0的某邻域内连续，且$f'(x)\neq 0$，则曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,y_0)$处的曲率为

$$K=\frac{|f''(x_0)|}{[1+(f'(x_0))^2]^{\frac{3}{2}}}$$

弧微分：

设曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,y_0)$处可导，且$f'(x)$在x_0的某邻域内连续，且$f'(x)\neq 0$，则曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,y_0)$处的弧微分为

$$ds=\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

曲率圆：

设曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,y_0)$处可导，且$f'(x)$在x_0的某邻域内连续，且$f'(x)\neq 0$，则曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,y_0)$处的曲率圆为

$$\begin{cases} x=x_0+\frac{1}{K}\cos\theta \\ y=y_0+\frac{1}{K}\sin\theta \end{cases}$$

其中θ为曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,y_0)$处的切线与x轴的夹角.
曲率半径为$R=\frac{1}{K}$.

曲率中心(ξ,η)为

$$\begin{cases}\xi = x_0 - \frac{f'(x_0)[1+(f'(x_0))^2]}{f'(x_0)} \\ \eta = y_0 + \frac{1+(f'(x_0))^2}{f''(x_0)}\end{cases}$$

4.6 典型题目

4.6.1 抽象函数的洛必达应用

1. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有二阶导数，且$f(0)=f'(0)=0$，

试求 $g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$ 的导数。

2.设$f(x)$在a邻域可导，且在a处二阶可导，求$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$

1. **解：** 当$x=0$时，$g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}$(洛必达法则)
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}.$