Matematik av Arne Beurling och Torsten Carleman

-

I Föreläsningarna söker jag främst söker belysa innovativa bevismetoder som uppträder i Beurlings och Carlemans matematik. I ett nyskrivet manus som handlar om analytisk funktionsteori i en komplex variabel och dess tillämpningar ingår flera avsnitt som handlar om Beurlings och Carlemans arbeten där föredragen nedan kan ses som ett axplock av innehåll från mitt manus.

Jan-Erik Björk

1. Harmoniska mått. Uppskattningar av dessa och deras tillämpningar utgör ett centralt tema hos både Beurling och Carleman. Föredraget inleds med bevis av Carlemans olikhet för derivator hos funktioner som ger skarpa gränser för att konstruera avhuggningsfunktioner. Om $n \geq 2$ betecknar $\mathcal{F}_n$ alla n gånger kontinuerligt deriverbara funktioner f på intervallet $[0,1]$ som är ≥ 0, har medelvärdet $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$ samt är platt i ändpunkterna, dvs. f och alla derivator upp till ordning n försvinner då $x = 0$ och $x = 1$.

Sats. *För alla $n \geq 2$ och varje $f \in \mathcal{F}_n$ gäller olikheten*

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n} \frac{1}{||f^{\nu)}||_2} \leq \mathcal{C}$$

där $\{||f^{\nu)}||_2\}$ betecknar L^2-normer tagna över $[0,1]$ och $\mathcal{C}$ är en absolut konstant.

Beviset bygger på upskattningar av harmoniska mått sedan man tagit en lämplig komplex Laplace transform av funktioner i $\mathcal{F}_n$. Därefter beskrivs Beurlings konstruktion av extremallängder från hans doktorsavhandling och hur detta kan användas för att uppskatta olika harmoniska mått. Tillsammans med Carlemans precisa resultat om egenvärden hos lösningar till väremekvationen kan man nu analysera simultana sannolikhetsfördelningar för position och tid hos Brownska slumpvandringar i plana områden med hinder. Några exempel om detta ges i slutet av föredraget.

2. Icke linjära randvärdesproblem och Beurlings studier av fria randvärdesproblem. Boltzmann randvärdesproblem för ett område Ω i $\mathbf{R})^3$ och en given punkt $p_* \in \Omega$ är att finna en funktion u som är harmonisk i $\Omega \setminus \{p_*\}$ med Newtonsk pol i p_* och på randen uppfyller u:s inre normalderivata ekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial n_i}(p) = F(u(p), p)$$

Här är F definierad på $\mathbf{R}^+ \times \partial\Omega$. I en uppsats från 1920 visade Carleman att om F är kontinuerlig och ≥ 0 samt funktionen $s \mapsto F(s,p)$ är strängt växande för varje $p \in \partial\Omega$, så existerar en unik lösning u. Beviset bygger på en homotopi där alltmer icke-linjära randvärdesproblem löses, en metodik som efter Carlemans pionjärinsats brukas flitigt i studier av icke-linjära PDE ekvationer. Därefter beskrivs Beurling resultat av Helmholz' ekvationer med fria ränder uppträder där bevismetodiken är synnerligen lärorik och bygger på egenskaper hos subharmoniska funktioner. Sista delen av föredraget ägnas åt kvantmekanikens "svåra" ekvation som Schrödinger ställde upp i sin berömda artikel *xxx* från 1931 och som leder till ett intrikat icke-linjärt Cauchy problem. Vi beskriver Beurlings existensbevis i det två-dimensionella fallet som mig veterligt är det hittills bästa som gjorts eftersom mycket lite är känt i det 3-dimensionella fallet.

3. Pärlor från enskilda arbeten. Här ges bevis av några enskilda spektakulära resultat av Beurling och Carleman. Bland annat Beurlings ekvivalenta formulering av Riemanns hypotes om nollställen hos ζ-funktionen som är följande: Till varje reellt tal x bildas heltalsdelsen $[x]$ och man sätter $\rho(x) = x - [x]$. Då $M \geq 2$ och $c_1, \ldots,_M$ är en M-tupel av reella tal definieras en funktion på $\{0 < x < 1\}$ genom

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^{j=M} \rho(\frac{j}{Mx})$$

Sätt

$$b(M) = \min \int_0^1 (\phi(x) - 1)^2 \, dx \quad : \sum_{j=1}^{j=M} j \cdot c_j = 0$$

Man skall alltså minimera en kvadratisk form med bindande villkor som enligt Lagrange har entydig lösning och $b(M)$ är tillhörande Largrangeska multiplikator. Beurling visade 1956 att Riemanns hypotes är ekivalent med att talföljden $\{b(M)\}$ går mot noll då M växer ! Beviset bygger på analytiska funktionsteori i en komplex variabel.

Den centrumflyende centrifugalkraften.

Inledning. Alla har vi erfarenhet av centrifugalkrafter. Kör man en bil i hög hastighet in i en vägkurva vill den forstätta i tangentens riktning varför hjulens grepp i vägen måste vara bra samtidigt som man tvingar vrida på ratten. Många attraktioner på nöjesfält bygger på centrifugalkrafter och ett drastiskt exempel är att slunga en delvis vattenfylld hink över sitt eget huvudet med rask armrörelse. Isaac Newton gav i slutet av 1660-talet en matematik ekvation för att ange centrifugalkraftens styrka. Det paradoxala är att den uppträder hos kroppar som förflyttas med konstant fart men däremot ändrar sin rörelseriktning - precis som en bil tvingas till på en krokig väg i Småland medan hastighetsmätaren är konstant lika med 70 km/timme. Vi skall först redogöra för en härledning som gavs av Christian Huyghens i början av 1650-talet hos en cirkulär rörelsebana, Newton utvecklade satsen till godtycklig kroklinjig rörelsee med stöd av den matematiska analys som ingår i hans banbrytande läroböcker från mitten av 1660-talet. Deras innehåll på drygt 600 sidor täcker kursinnehållet upp till påbyggnandskurser inom nutida högskolematematik. Original texten på latin finns numera översatt så att Newtons samtliga verk är tillgängliga på engelska. En måhända personlig kommentar från min sida är att de bevis som förekomer i Newtons verk, liksom i Huyghen's långtgående studier av flytande kroppar och andra raffinerade problem i statik, ur "didaktisk synpunkt" är överlägsna det mesta som skriva i nutida läroböcker. Själv har jag i varje fall aldrig mött mer inspirerande och klarläggande framställningar än hos dessa två författare. Så det finns skäl att beskriva bevis av Huyghens och Newton.

Den studsande pucken·

Betrakta en plan cirkelskiva med radie R. Vi tänker oss att den är innesluten i en rink, dvs. längs skivans randcirkel finns en vertikal vägg. Om $N \geq 4$ är ett heltal kan vi skriva in en regelbunden N-hörning där vinkeln mellan två på varandra följande hörnpunkter är $\frac{2\pi}{N}$. Cirkelskivans plana botten antas vara glatt som en perfekt is. En puck skickas iväg längs en av N-hörningens sidor varefter den kommer att träffa rinken och efter studs fortsätta till nästa sida och så vidare. Utan friktion och luftmotstånd och helt elastiska stötar färdas pucken med konstant hastighetet v. Notera att varje sida hos N-hörningen har längden

$$\ell = 2 \cdot R \cdot \sin \frac{\pi}{N}$$

Se figur som visar detta ! För att fullborda ett varv skall pucken glida längs N sidor, dvs. hela transportsträckan är

$$S = 2 \cdot R \cdot N \cdot \sin \frac{\pi}{N}$$

Omloppstiden för ett varv blir

$$T = \frac{S}{v} = \frac{2 \cdot R \cdot N \cdot \sin \frac{\pi}{N}}{v} \tag{1}$$

Studskrafter. Varje gång pucken träffar ett hörn studsar den med sned infalls- och utfallvinkel. Stötkraften S ges av ekvationen

$$S = M \cdot v \cdot 2 \cdot \sin \frac{\pi}{N}$$

där M är puckens massa. Se figur som klarlägger detta där man utnyttjar att stötkraften är proportionell mot produkten av massa, hastighet och två gånger sinus för studsvinkeln. Faktorn 2 uppträder då studsen är elastisk.

Huyghens formel. Under ett varv sker N studsar varför den total studskraften blir

$$F = M \cdot v \cdot 2 \cdot \sin \frac{\pi}{N} \cdot N \implies \frac{F}{T} = M \cdot \frac{v^2}{R} \tag{*}$$

När N är stort sker många upprepade studsar under ett tidsinterval. varför Huyghens definierade den centrumflyende centrifugalkraften enligt formeln.

$$M \cdot \frac{v^2}{R} \tag{*}$$

Kommentar. Lagen om verkan och motverkan gör att rinken som blir utsatt för ideliga stötar av den envetna pucken, samtidigt hindras ju pucken från att lämns rinken i ett hörn för att fortsätta i tangentens riktning och bromsas upp av sand eller gräs utanför hockeyrinken. Kraften (*) är densamma som man känner av på en karusell där vi tänker oss en person placerad på ytterkanten av karusellen med avstånd R från centrat medan karusellen snurrar med konstant vinkelhastighet ϕ. I det fallet är personens hastighet $R \cdot \phi$ och den centrumflyende centrifugalkraften blir

$$M \cdot R \cdot \phi^2 \tag{**}$$

Den ökar alltså med personens vikt så om en stoppkloss hindrar att personen att flyga av fordras en motkraft bestämd av (**). .

Krökningsradier hos buktiga kurvor.

.

Här följer Newton mer avancerade kalkyl om centrifugalkraften hos en icke cirkulär rörelse. Betrakta en funktion

$$y = f(x)$$

där $f(x)$ är en växande och konvex funktion av x, dvs. derivatorna $f'(x)$ och $f''(x)$ är båda > 0. Då $x = 0$ antas att $f(0) = f'(0) = 0$. Ett exempel kunde vara $f(x) = ax + bx^2$ där a, b är två positiva konstanter. Precise som i fallet med en rink tänker vi oss sig en vertikal vägg längs kurvan som då blir en tvångskurva. Mer precist om en partikel, (tänk på en liten puck) skickas iväg från origo kommer den att glida längs kurvan och utan friktion tappar den aldrig fart. För att matematiskt beskriva detta införs en tidsvariabel t så att partikelns tidsberoende förflyttning ges av en funktion

$$t \mapsto (x(t), y(t)$$

där $y(t) = f(x(t))$ gäller för alla t. Partikelns fart i kvadrat blir enligt Pythagoras sats summan av de kvadratiska tidsderivatorna:

$$v^2 = \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)$$

där vi har infört beteckningarna:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} \quad : \quad \dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}$$

I varje tidsögonblick verkar tvångskurvan med en kraft $K(t)$ på partikeln som är riktad i normalen till kurvan. Den har allså komponenter i x- och y-led och figur visar att:

$$K_x(t) = -\frac{f'(x(t))}{\sqrt{1 + f'(x(t))^2}} \cdot K(x(t)) \quad : K_y(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x(t))^2}} \cdot K(x(t))$$

Obeservera minustecknet i uttrycket hos x-komponenten ! Antag för enkelhets skull att partikeln har enhetsmassa. Newtons kraftlag ger ekvationer hos andra ordningens tidsderivator:

$$\ddot{x} = -\frac{f'(x(t))}{\sqrt{1 + f'(x(t))^2}} \cdot K(x(t)) \tag{1}$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x(t))^2}} \cdot K(x(t)) \tag{2}$$

Vi har ytterligare en ekvation:

$$\dot{y} = \frac{d}{dt}(f(x(t)) = f'(x(t)) \cdot \dot{x} \tag{3}$$

som följer av regeln för sammansatt derivata. Notera att detta ger

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 2 \cdot (\ddot{x} \cdot \dot{x} + \ddot{y} \cdot \dot{y}) = \frac{2}{\sqrt{1 + f'(x(t))^2}} \cdot K(x(t)) \cdot (-f'(x(t)) \cdot \dot{x} + \dot{y}) = 0 \tag{4}$$

Det följer att $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ har försvinnande tidsderivata och alltså är en konstant. Detta brukar uttryckas med att den kinetiska energign bevaras. Låt oss derivera (3) ännu en gång vilket ger

$$\ddot{y} = f''(x(t)) \cdot \dot{x}^2 + f'(x(t)) \cdot \ddot{x} \tag{5}$$

Nu ges $\ddot{x}$ och $\ddot{y}$ av ekvationera (1-2) och insättning ger

$$\frac{1}{\sqrt{1+f'(x(t))^2}} \cdot K(x(t)) = f''(x(t)) \cdot \dot{x}^2 - f'(x(t) \cdot \frac{f'(x(t))}{\sqrt{1+f'(x(t))^2}} \cdot K(x(t))$$

Flytta över sista termen till vänster och efter division med $\sqrt{1+f'(x(t))^2}$ erhålles

$$\sqrt{1+f'(x(t))^2} \cdot K(x(t)) = f''(x(t)) \cdot \dot{x}^2 \implies$$

$$K(x(t)) = \frac{f''(x(t)}{\sqrt{1+f'(x(t))^2}} \cdot \dot{x}^2 \tag{6}$$

En sista kalkyl. Ekvationen (3) ger

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (1 + f'(x(t))^2) \cdot \dot{x}^2$$

Kombineras detta med (6) erhålles

$$K(x(t)) = \frac{f''(x(t)}{[1+f'(x(t))^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot v^2 \tag{*}$$

Kommentar. Ekvationen (*) bestämmer funktionen K som i allmännhet varierar med tiden och tillhörande kraftvektor får varierande riktningar. Faktorn framför v^2 visar sig ha en geometrisk tolkning som passar ihop med Huyghens formel för det cirkulära fallet. Mer precist, drag normalen från en punkt på tvångskurvan och på varje punkt p på normalen konstrueras cirkeln med centrum i p som tangerar tvångskurvan i normalens fotpunkt. Nu finns en unik punkt på normalen där tillhöranade cirkel tangerar kurvan med *maximal kontakt*. Avståndet mellan centrum för denna cirkel och fotpunkten kallas kurvans geometriska krökningsradie och betecknas med $\rho(x)$. En kalkyl i Carteiska koordinater visar likheten

$$\rho(x) = \frac{[1+f'(x(t))^2]^{\frac{3}{2}}}{f''(x(t))}$$

Slutsaten är att

$$K(x(t)) = \frac{v^2}{\rho(x(t))}$$

som alltså stämmer överens med Huyghens resultat vid cirkulär rörelse. Det var med kalkyler ovan som Newton ofta visade hur geometriska passar ihop med olika dynamiska förlopp och det är på så vis man bäst lär sig att förstå samband mellan algebra, geometri och analys.

Fallet med sträv tvångskurva.

Om det finns ett positivt tal μ som anger friktion mellan tvångskurvan och pucken förloras kinetiska energi som övergår i värme. Med stöd av Newtons uttryck för K-funktionen ovan kan man bestöämma hur puckens hastighet v avtar då tiden växer. Regeln är att friktionen i varje tidsögonblick minskar pucken hastighet v enligt ekvationen

$$\frac{dv}{dt} = -\mu \cdot K(x(t)) = -\mu \cdot \frac{f''(x(t)}{[1+f'(x(t))^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot v^2 \tag{1}$$

Den första likheten svarar mot att $K(x(t))$ är nortmaltrycket och friktionen är då $\mu \cdot K(x(t))$ som alltså bromsar upp puckens hastighet vilket uttrycks med andra ordnigens tidsderivata hos v.

Newtons smarta lösning. Ekvationen (1) är ett exempel på en icke-linjär andra ordningens differentialekvation. Likartade ekvationer uppträder i den celesta mekaniken när man studerar planetbanor i solsystemet. Newtons metod är att dela upp lösningen i två delar. Först betraktas v som en funktion av puckens x-koordinat. Vi skall alltså först söka funktionen $x \mapsto v(x)$. Här gäller enligt deriveringsregler:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \tag{2}$$

Ekvationen (1) kan nu skrivas som

$$\frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -\mu \cdot \frac{f''(x(t)}{[1 + f'(x(t))^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot v^2 \tag{3}$$

Vidare gäller enligt tidigare att:

$$v^2 = (1 + f'(x)^2) \cdot \dot{x}^2 \tag{4}$$

Vi ser då att (3) kan skrivas på formen

$$\frac{dv}{dx} = -\mu \cdot \frac{f''(x(t)}{[1 + f'(x(t))^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot \dot{x} \tag{5}$$

Användes (4) följer av ovan att

$$\frac{dv}{dx} = -\mu \cdot f''(x) \cdot v \tag{6}$$

Med andra ord, om vi skriver $v'(x) = \frac{dv}{dx}$ så erhålles första ordningens differentialekvation:

$$\frac{v'(x)}{v(x)} = -\mu \cdot f''(x) \tag{7}$$

Här är $f'(x)$ en primitiv funktion till $f''(x)$ och i vänsterledet står en logaritmisk derivata. Slutsatsen är att

$$v(x) = v_0 \cdot e^{-\mu \cdot \int_0^x f'(s) \cdot ds} \tag{*}$$

där v_0 är puckens initiala hastighet.

Kommentar. Ekvationen visar att v avtar med x men pucken stannar aldrig helt och hållet vilket förklaras av att friktionens bromsande kraft minskar då hastigheten minskar. I fallet då tvångskurvan är en cirkel så att $f''(x) = a$ är en konstant och alltså $f'(x) = ax$ då $x \geq 0$ erhålles

$$v(x) = v_0 \cdot e^{-\mu \cdot a \cdot x^2/2}$$

Tidsberoendet. Med hjälp av (*) kan det tidsberoende förloppet bestämmas där man exempelvis söker funktionen $t \mapsto x(t)$. Här användes att

$$v = \sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Med f given är högerledet i (*) en känd funktion av x som betecknas med $G(x)$ och då erhålles

$$\frac{dx}{dt} = \frac{G(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}$$

Med $T > 0$ bestäms nu $x(T)$ av ekvationen

$$T = \int_0^{x(T)} \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}}{G(x)}\, dx$$

I det anförda specialfallet är integranden ovan

$$\frac{1}{\sqrt{v_0}} \cdot \sqrt{1+a^2x^2} \cdot e^{\mu \cdot a \cdot x^2/2}$$

För att beräkna fuktionen $T \mapsto X(T)$ utnyttjasu dator som ger en numeriskt lösning. I äldre tider utfördes heroiska kalkyler av ekvationer som ovan, särskilt i astronomi. Tva svenska astronomer och matematiker sim utfört många avancerade kalkyler utan datorer är Hugo Gyldén som under 1880-talet var verksam vid Observatoret ovanför Sveavägen samt Anders Lindstedt som 1885 blev professor i teoeretiskt mekanik vid KTH och senare högskolans rektor. Förutom banbrytande forskning var det Lindstetds som för ett drygt sekel sedan lade grunden till modern ingenjörsutbildning i Sverige och hans namn finns som bekant på en väg framför KTH.

Planetbanor och satelliter.

Newtons universella gravitationslag är en hörnsten för naturvetenskaperna. Den lades fram i hands banbrytande arbete *Naturevetenskapernas matematiska principer* midsommmardagen 1687. Lagen säger att om två partiklar p_1, p_2 med massor m_1, m_2 befinner sig på inbördes avstånd r så verkar en kraft

(*) $$F = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

där F attraherar p_1 mot p_2 och vice versa. Vidare är γ en universell konstant, dvs. lika för alla masspartiklar. Konstantet γ är liten, uttryckt i newtonmeter ges den approximativt av

$$\gamma = 6,7 \cdot 10^{-10}$$

Det betyder exempelvis följande: Ett klot av tung metall med täthet 10 och radien 10 meter är nersänkt till hälften i markytan. Dess vikt i kilogram är alltså

$$M = \frac{4\pi \cdot 10^3}{3} \cdot 10 \cdot 10^3 \simeq 4 \cdot 10^7$$

där vi använde det grova värdet $\pi \simeq 3$. En nyfiken myra kryper försiktigt fram emot det nersänkta klotet och befinner sig i ett viss ögonblick på 1 meters avstånd från klotets cirkulära skärning med markytan. Enligt Newtons formel kommer nu myran att ytsättas för en kraft riktad mot klotets centrum som har storleken

$$\gamma \cdot \frac{m \cdot M}{11^2}$$

Notera att kraften är proportionell mot myrans vikt och tur är det för lättviktiga insekter. En krypande person med lite muskler och eventuell "bilring" som väger 100 kilo utsättes på en meters avstånd för kraften

$$\gamma \cdot \frac{100 \cdot 4 \cdot 10^7}{11^2}$$

där nämnaren är kvadraten på avståndet mellan åersonen och klotets centrum. med närmevärdet (*) erhålles approximativt litet grovt en dragningskraft

$$25 \cdot 10^{-3}$$

som alltså skall uttryckas i Newtonmeter att jämföras med g-kraften som är cirka 9,8 Newtonmeter. Även om kraften är liten är den alltså inte helt försumbar och fullt mätbar med känsliga instrument. Det var på så vis Cavendish i slutet av 1700-talet kunde "väga jorden" och få en medeltäthet pä cirka 6 kilo per liter. Eftersom alla föremål inklusive all luft oanför oss på markytan ger upphov till en gravitation kommer resultanten till sist att domineras av jordklotets samlade massa och riktas mot jordens centrum vilket hindrar oss från oslagbara rekord i exempelvis höjdhopp. Newton genomskådade att (*) även reglerar planeterna banor kring solen och jordklotets förmåga att hålla kvar månen i ett kretslopp. Som bekant kunde Newton också förklara sådana fenomen som tidvatten i världshaven, dvs. de orsakas av månens position relativt jorden som ändras helta tiden på grund av jordens rotation kring sin polaxel.

Anmärkning. Netwions gravtiationslag reviderades av Einstein som 1916 ställde upp en ny formel som färdas hos partiklar som fördas med stora hastigheter. Einsteins allmänna relativitetsteori betyder dock inte att Newtons lag är överspelad eftersom mer vardagliga förlopp med stor nogrannhet lyder (*). Här skall vi inte gå in på Einsteins ekvationer som fordrar en betydligt mer avancerad matematik. Låt oss nu beskriva hur Newton konfirmerade (*) med stöd av astronomiska observationer. Hans första test handlade om månen. På 1660-tlrt var astronomin tillräckligt utvecklad för att med god precision mäta avståndet mellan måne och jord. Här antas för enkelheten skull att avståndet är 60 jordradier där $R = 637 \cdot 10^4$ är jordens radie uttryckt i meter. Om vi tänker oss att månen cirkulerar kring jorden i en cirkulär bana måste två krafter ta ut varandra. Å enda sidan verkar den universella gravitationen med en kvarhållande kraft

$$\mathcal{G} = \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{60 \cdot 60 \cdot R^2}$$

där m är jordens mass och m är månens massa. Omv är månens hastighetet uuttrycket i meter per sekund har vi samtidigt den centrumflyende centrifugalkraften

$$\mathcal{C} = \frac{m \cdot v^2}{60 \cdot R}$$

Likheten $\mathcal{G} = \mathcal{C}$ ger efter förkortning med månens massa och den gemensamma nämnaren $60 \cdot R$:

$$(1) \qquad \gamma \cdot M = v^2 \cdot 60 \cdot R$$

Vänsterledet uttryckte Newton med sitt äpple ty den vardagliga g-kraften är ett specialfall av (*) vilket ger ekvationen

$$(2) \qquad \gamma \cdot \frac{M}{R^2} = g$$

För g gäller approximativt att $g = 9,8$ meter/sekundkvadrat som testas genom att mätta falltiden hos äpplen som fallet mot marken. Ekvationen (1) övergår då till

$$(3) \qquad g \cdot R = v^2 \cdot 60$$

Newton utförde nu - förmodligen med darr på pennan - den avgörande kalkylen som visar att (3) gäller med hyfsad nogrannhet och på så vis konfirmera (*). Approximativt är ett månvarv 28 dygn vilket gör att v uttryckt i meter per sekund bestäms av ekvationen:

$$(4) \qquad 28 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot v = 2\pi \cdot 60 \cdot R$$

Låt oss göra en grov uppskatting där $R \simeq 64 \cdot 10^5$ vilket ger

$$28 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot v \simeq 2\pi \cdot 60 \cdot 64 \cdot 10^5$$

Förkortning ger

$$v \simeq \frac{2\pi}{6} \cdot \frac{64 \cdot 10^4}{28 \cdot 24} = \frac{2\pi}{6} \cdot 10^4 \cdot \frac{2}{3 \cdot 7}$$

Ekvationen (3) med närmevärdet $g \simeq 10$ ger då

$$(*) \qquad 10 \cdot 64 \cdot 10^5 \simeq \frac{4\pi^2}{36} \cdot 10^8 \cdot \frac{4}{21^2} \cdot 60$$

Med miniräknare kollas att denna likhet gäller med hyfsad nogrannhet.

Kommentr. Naturligtvis genomförde Newton betydligt mer precisa kalkyler. Speciellt visade han varför den tidens kända astronomiska observationer av planeten Mars stämmer väl överens med (*). mer precist gäller att kroppar som kretsar sig i ett central kraftfält med solen som centrum har en ellips som rörelsebana. beviset för detta är synnerligen vackert. Betrakta alltså en planet med massa m som är utsatt för solens gravitation. det betyder att om r är planetens avstånd till solen i ett viss tidsögonblick så attraheras den med kraften

$$\gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

där m är solens massa. med solen placerad i origo använder vi polära koordinater och sätter

$$x = r\cos\theta \quad : \quad y = r\sin\theta$$

med t some tidsvariabel har planeten en hastighetsvektor

$$\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y})$$

där $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ är tidsderivata och samma för y. Accelerationsvektorn blir

$$\mathbf{a} = (\ddot{x}, \ddot{y})$$

Nu är gravitationskraften i varje tidsögonblick riktad i vektor mellan solen och planeten. Det betyder enligt Newtons kraftlag vektorn $\mathbf{a}$ är parallell med vektorn från solen. Med andra ord finns i varje tidsögonblick ett reellt tal s så att

$$\mathbf{a} = s \cdot (\cos\,\theta, \sin\theta)$$

Detta svarar mot att vektorn **a** är $\perp$ mot $(-\sin\theta, \cos\theta)$, dvs. att

$$-\sin\theta \cdot \ddot{x} + \cos\theta \cdot \ddot{y} = 0$$

Efter multilikation med r betyder detta att

$$-y\ddot{x} + x\ddot{y} = 0 \tag{1}$$

Keplers arealag. Notera först att

$$\frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}) = x\ddot{y} - y\ddot{x} \tag{2}$$

Enligt (1) försvinner högerledet vilket betuyder att vänsterledets tidsderivata är noll. Under planetens rörelse finn därför en konstant $\mathcal{K}$ sådan att

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \mathcal{K} \tag{3}$$

Låt oss nu ta tidsderivstor i de två polära ekvationerna. Vi använder nu det från (0) ovan vilket ger:

$$x\dot{y} = r\cos\theta \cdot (\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta \cdot \dot{\theta}) \quad : \; y\dot{x} = r\sin\theta \cdot (\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta \cdot \dot{\theta})$$

Tillsammans med trigonmetriska ettan ger detta ekvationen

$$x\dot{y} - y\dot{x} = r^2 \cdot \dot{\theta}$$

Det följer av (3) att man har

$$r^2 \cdot \dot{\theta} = \mathcal{K} \tag{*}$$

Denna ekvation uttrycker Keplers arealag från 1620 som säger att arean som bildas av området mellan två solradier vid olika tidpunkter är proportionell mot tiden för en sådan förflyttning. Läsaren bör illustrera detta med en figur !

Newtons ekvationer. Tillämpas kraftekvationen för planetens x-komponent erhålles

$$m \cdot \ddot{x} = -\gamma \cdot m \cdot Mr^2$$

Här kan vi dividera bort planetens massa och sätter $C = \gamma \cdot m$ så att

$$\ddot{x} = -\frac{C}{r^2}$$

Vi har också att

$$\dot{x} = \dot{r} \cdot \cos\theta - r\sin\theta \cdot \dot{\theta} = \dot{r} \cdot \cos\theta - \frac{\mathcal{K}}{r} \cdot \sin\theta$$

där sista likheten följer via Keplers arealag som ersätter $\dot{\theta}$ med $\frac{\mathcal{K}}{r^2}$. Ytterligare en derivering ger

$$\ddot{x} = \ddot{r} \cdot \cos\theta - \dot{r} \cdot \sin\theta \cdot \frac{\mathcal{K}}{r^2} + \frac{\mathcal{K}}{r^2} \cdot \dot{r} \cdot \sin\theta - \frac{\mathcal{K}}{r}\cos\theta \cdot \frac{\mathcal{K}}{r^2} = \ddot{r} \cdot \cos\theta - \frac{\mathcal{K}^2}{r^3}\cos\theta \tag{i}$$

Vi har också kraftekvationen

$$m \cdot \ddot{x} = -m \cdot \frac{C}{r^2} \cdot \cos\theta \tag{ii}$$

Tlllsammans ger (i-ii) efter förkortning med $\cos\theta$:

$$\ddot{r} - \frac{\mathcal{K}^2}{r^3} = -\frac{C}{r^2} \tag{iii}$$

Detta är en andra ordningens differentialekvation i r som funktion av t. Dess lösning är besvärlig så istället bestämmer Newtnon en ekvation $r = r(\theta)$ som beskriver planetens bana.

Övning. Vi har att $r(t) = r(\theta(t))$ som ger

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{\mathcal{K}}{r^2}$$

Vis att ytterligare en derivering ger ekvationen

(iv)
$$\ddot{r} = \frac{d^2r}{d\theta^2} \cdot \frac{\mathcal{K}^2}{r^4} - [\frac{dr}{d\theta}]^2 \cdot \frac{2\mathcal{K}^2}{r^5}$$

Från (iii) samt (iv) erhålles

(*)
$$\frac{d^2r}{d\theta^2} \cdot \frac{\mathcal{K}^2}{r^2} - [\frac{dr}{d\theta}]^2 \cdot \frac{2\mathcal{K}^2}{r^3} = \frac{\mathcal{K}^2}{r} - C$$

Newtons inversion. För att lösa (*) införs variabeln $u = \frac{1}{r}$. Då erhålles enligt deriveringsregler:

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{dr}{d\theta} \cdot r^{-2} \implies \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{d^2r}{d\theta^2} \cdot r^{-2} + 2 \cdot [\frac{dr}{d\theta}]^2 \cdot r^{-3}$$

Tillsammans med (*) följer att

(**)
$$\mathcal{K}^2 \cdot \frac{d^2u}{d\theta^2} = C - \mathcal{K}^2 \cdot u$$

Detta är en ”snäll” andra ordningens linjär differentialekvation. Notera att den kan skriva på formen

(***)
$$u''(\theta) + u(\theta) = \frac{C}{\mathcal{K}^2}$$

Det cirkulära fallet. Antag att planeten rör sig i en cirkulär bana där då $r(\theta) = R$ är konstant. Då blir $u''(\theta) = 0$ och (***) svarar mot ekvationen

(i)
$$\frac{1}{R} = \frac{C}{\mathcal{K}^2}$$

Vi påminner nu om att

$$\mathcal{K} = R^2 \cdot \dot{\theta}$$

Här är $\dot{\theta}$ en vinkelhastighet och planetens hastighet $v = R \cdot \dot{\theta}$ vilket ger

$$v = \frac{\mathcal{K}}{R}$$

Alltså svarar (i) mot ekvationen

$$\frac{1}{R} = \frac{C}{v^2R^2} \implies \frac{v^2}{R} = \frac{C}{R^2}$$

den sista likheten utrycker Huyghens formel eftersom $\frac{v^2}{R}$ är den centrumflyende centrifugalkraften medan $\frac{C}{R^2}$ svarar mot solens kvarhållande gravitation.

Att väga solen. Jordklotet rör sig nästan i en cirkulär bana kring solen. Låt oss anta att medelavståndet är R varvid man har ekvationen

$$v^2 = C \cdot R$$

Omloppstiden ör ett år och med 365 dagar erhålles jordklotets hastighet i meter per sekund:

$$365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot v = 2\pi \cdot R$$

det följer att

$$C = \frac{4\pi^2 \cdot R}{(365 \cdot 24 \cdot 3600)^2}$$

Vi påmninner om att

$$C = \gamma \cdot M$$

där M är solens massa som alltså¨ges av ekvationen

$$M = \gamma^{-1} \cdot \frac{4\pi^2 \cdot R}{(365 \cdot 24 \cdot 3600)^2}$$

varvid M anger solens vikt i kilo. Ovan uppträder mycket stora tal. Avståndet till solen är som bekant rätt stort eftersom det tar cirka 8 sekunder för ljus att färdas från sol till jord vilket betuyder att

$$R \simeq 8 \cdot 300000 \cdot 10^3 = 8 \cdot 3 \cdot 10^9$$

Efter förkortning med tio-potenser erhålles

$$M = \gamma^{-1} \cdot \frac{24 \cdot 4\pi^2 \cdot 10^5}{(365 \cdot 24 \cdot 36)^2}$$

Nu gäller också att

$$g \simeq \gamma \cdot \frac{m}{R_*^2} \implies \gamma^{-1} = \frac{m}{g \cdot R_*^2}$$

varvid m är jordklotets massa och R_* jordradien.

Om c_* är medelvärdet för jordens masstäthet blir

$$m = c_* \cdot 4\pi R_*^3/3$$

Då erhålles

$$g \simeq \gamma \cdot c_* \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot R_*$$

Det allmänna fallet. Differentialekvationen (***) har den allmänna lösningen

$$u(\theta) = A \cdot \cos(\theta + \theta_0) + C$$

där A och θ_0 är konstanter. En vridning i θ ändrar endast vinkelskalan så utan inskränkning kan vi anta att $\theta = 0$ och skulle $A < 0$ väljes $\theta = \pi$ så vi kan också anta att $A \geq 0$ och har ekvationen

$$u(\theta) = A \cdot \cos\theta + \frac{C}{\mathcal{K}^2}$$

Fallet $A = 0$ ger en cirkulär rörelse Nu antas att $A > 0$ varvid två fall kan uppträda. Om $A > \frac{C}{\mathcal{K}^2}$ får u ett nollställe vilket svarar mot att $r = u^{-1}$ blir $+\infty$. Detta inträffar för besökande kometer i solsystemet som alltså dyker upp för att seedan försvinna ut i stjärnornas "oändliga värld". Om $A < \frac{C}{\mathcal{K}^2}$ erhålles en periodisk funktion av θ och planeten stannar kvar i solststemet. Dess maximala avstånd r^* till solen svarar mot att minimera u och här gäller att

$$\frac{1}{r^*} = \frac{C}{\mathcal{K}^2} - A$$

Det minimala avståndet uppfyller ekvationen

$$\frac{1}{r_*} = \frac{C}{\mathcal{K}^2} + A$$

Kritisk hastighet. Vid tidpunkten $t = 0$ antas att planeten - eller kometen - befinner sig på avståndet R från solen och rör sig momentant med en hastighet v som är $\perp$ till solradien. Detta betyder att $v = R \cdot \dot{\theta}(0)$ vilket ger

$$\mathcal{K} = R \cdot v$$

Samtidigt gäller enligt (xx) att

$$\frac{1}{R} = A + \frac{C}{\mathcal{K}^2}$$

Det elliptiska fallet svarar enligt ovan mot att

$$\frac{1}{R} < \frac{2C}{\mathcal{K}^2} = \frac{2C}{R^2 \cdot v^2}$$

Slutsatsen är att vi erhåller en planetrörelse om och endast om

$$(*) \qquad v^2 < \frac{2C}{R}$$

Datorövning-

Cosinusteoremet och komplexa tal.

Låt Δ vara en triangel vars sidor har länderna a, b, c. Om α är vinkeln i hörnpunkten som står emot sidan a så gäller ekvationen

$$(*) \qquad \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Låt oss hörleda denna ekvation med hjälp avkomplexa tal. Utan inskränkning kan hörnet där α-vinkeln bildas vara origo och sidorna b och c representeras nu av två komplexa tal z och w. Detta ger $a^2 = |z - w|^2$, dvs. kvadraten hos absoluta beloppet hos det komplexa talet $z - w$. En observation är att i (*) man kan ändra skalan och ersätta z med rz och w med rw for varje reellt tal w. Vidare är den sökta likheten invariant under rotation. På så vis reduceras beviset till fallet när det komplexa talet $w = 1$ och med figur observeras att när $z = x + iy$ blir

$$\cos\alpha = \frac{x}{|z|}$$

Det återstår endast att visa likheten

$$(1) \qquad \frac{x}{|z|} = \frac{|z|^2 + 1 - |1 - z|^2}{2|z|}$$

Här försvinner $|z|$ och (1) följer av att

$$|z|^2 + 1 - |1 - z|^2 = x^2 + y^2 + 1 - (x - 1)^2 - y^2 = 2x$$

Omskriven cirkel. Låt Δ vara en triangel med hörnpunkter A, B, C. Då existerar en unik cirkel $\mathcal{C}$ som passerar genom de tre hörnpunkternan och dess radie R ges av formeln

$$(*) \qquad R = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

där α är en hörnvinkel och a längden hos motstående sida. Notera att sinusteoremet medför att högerledet är oberoende av vilket hörn som väljes i triangeln.

Bevis. Tag en cirkel med någon radie R och skriv in en triangel. Nu är a en korda i cirkeln och α en periferivinkel till denna korda. Vi påminner att medelpunktsvinkeln är dubbelt så stor, dvs. 2α. Drag höjden från cirkelns medelpunkt till kordan a. Figur visar två rätvinkliga trianglar och definitionen av sinusfunktionen ger

$$\sin\alpha = \frac{a}{2R}$$

varefter (*) följer.

Övning. Visa att medelpunktsvinkeln alltid är dubbelt så stor som en periferivinkel.

Konstruktion av omskriven cirkel . När en triangel Δ är given skall den den omskrivna cirkeln $\mathcal{C}$ konstureras.

Lösning. Låt A och B vara två av triangelns hörn. Orten för punkter med lika avstånd till A och B är linjen som ges av mittpunktsnormalen till sträckan mellan A och B. Man kan flytta origo och rotera planet och utan inskränkning anta att $A = (0, a)$ och $B = (0, -a)$ for något $a > 0$ vilket medför att den omskrivna cirkeln $\mathcal{C}$ har sin mittpunkt på x-axeln, d.vs. in en punkt $(x_*, 0)$. Om triangelns tredje hörn C har koordinater (x, y) gäller nu enligt Pytagoras sats:

$$x_*^2 + a^2 = (x_* - x)^2 + y^2 \implies 2xx_* = x^2 + y^2 - a^2$$

Notera att x kan vara både > 0 ewller < 0. med figurer och olika val av $(x.y)$ kan läsaren illustrera den omskrivna cirkeln och konfirmera ekvationen ovan.

Höjdernas skärningspunkt i en triangel

.

Betrakta en triangel Δ där alla vinklar är strikt mindre än 90 grader, dvs. de är spetsiga. Låt hörnen vara A, B, C. Höjdlinjen från A som är vinkelrät mot sidan BC stannar inne i triangeln. Beteckna denna linje med h_A. På samma vis bildas höjdlinjerna h_B och h_C.

Teorem. *De tre höjdlinjerna skär varandra i en punkt.*

Kommentar. Satsen har under drygt två årtusenden ingått i läroböcker i matematik. Bevisets konceptuella svårighetsgrad är fullt jämförbart stoff som ingår till och med fördjupningskurser i högskolematematik. Det är alltså ingen enkel uppgift att bevisa påståendet. En hjälp är förstås att rita olika Δ och "testa" utsagan genom att rita in höjderna och se att allt stämmer. Här går också en boskillnad mellan "obligatoriskt eller kursivt material" i matematikundervisning. Dessvärre finns en tendens att "proppa in" en massa olika formler i läroböcker utan att redovisa varför de gäller och låta examensuppgifter reduceras till att med stöd av utantill-läxor lösa uppgifter. I längden blir detta ohållbart. Utan bevis är det svårt att få överblick och framförallt inse samband mellan olika matematiska utsagor. Till detta kommer att det borde vara en utmaning och ge stimulans att förstå bevis av satser som den ovan nämnda. En tolvåring som fascinerades av satsen ovan var Albert Einstein . Hans syster Maja har beskrivit hur Albert som skolpojke brukade ägna all ledig tid under helgerna åt att tänka på olika upgifter i euklidisk geometri: *Knatten upplevde ett lyckorus de gånger han lyckats med att lösa ett geometriskt problem, helst på egen hand utan att i detalj följa lärobokens lösning.* I sin självbigorafi *Nekrolog* som Einstein skrev i 60-årsåldern beskriver han sina känslor när han lyckats förstå satsen ovan: *Som tolvåring upplevde jag ett under av helt annat slag än under mitt tidigare liv. I ett häfte om euklidisk plangeometri fanns utsagan att de tre höjderna i en triangel alltid skär varandra i en punkt - något som intet vis är en självklarhet men som ändå kan bevisas med sådan säkerhet att varje tvivel är uteslutet. Denna klarhet gjorde ett obeskrivligt intryck på mig.*

Att nu under 2000-talet söka "tävla med Einstein" för att göra nya upptäckter om naturens lagar torde vara rätt svårt - det räcker med att nämna den betydande roll Einstein spelat för att vi idag kan se TV från världens alla hörn och ringa vart som helst jorden med "nallar". En extra precision kommer från relativitetsteorin som behövs för att sända rymdfarkoster till Mars. I det perspektivet är det intressant att Einsteins tro till sin egen förmåga och vilja att studera vidare stimulerades av tidiga studier i euklidisk geometri.

Hur bevisas satsen. Läsaren kan försöka upptäcka ett eget bevis med fyndiga konstruktioner. En annan - måhända tråkigare men effektiv metod infördes av René Descartes på 1630-talet när han skapade den analytiska geometrin där koordinater införs för att med algebraiska ekvationer härleda geometriska satser. Så här visades satsen ovan av Descartes: Utan inskränkning kan vi anta att de tre hörnpunkterna är

$$A = (0,0) \quad : B = (1,0) \quad : C = (a,b)$$

där $0 < a < 1$ och $b > 0$. Som figur visar är vinklarna i denna triangel spetsiga för all sådana par av a och b. Nu uttnyttjade Descartes formel för linjer som är vinkelräta mot varandra. I vårt fall är punkterna på linjen som passerar $(1,0)$ och är vinkelrät mot sidan AB givna på formen

(i) $$x = 1 - bs \quad : y = as$$

där s genomlöper reella tal. Orten för linjen från AS som är vinkelrät till sträckan BC ges av

(ii) $$x = bt \quad : y = (1-a)t$$

I skärningspunkten p mellan höjderna h_A och h_B gäller nu ekvationerna:

$$1 - bs = bt \quad : as = (1-a)t$$

Här kan s elimeras för att bestämma t. Vi ser att

$$\frac{1-bt}{b} = \frac{(1-a)t}{a} = 0 \implies t = \frac{a}{b}$$

Slutsats. Enligt (i) är p:s x-koordinatat $bt = b \cdot \frac{a}{b} = a$. Men det betyder att C och P har samma x-koordinater så att linjen från C genom P är lodrät, dvs. den skär x -axeln i en rät vinkel vilket betyder att man dragit höjden h_C och satsen är bevisad.

En svårare uppgift.

Då Einstein 1896 som 17-åring avlade studentexampen var proven milt talat tuffa - det handlade ju också om att få inträdesbiljett till den tidens förnämsta tekniska högskolan i Zürich. Geometriprovet bestod av två uppgifter med med fyra timmars skrivtid. Det kan ju låta generöst men frågorna var inte så enkla. Ett exempel är följande : Låt Δ vara en triangel med hörn A, B, C och $\mathcal{C}$ den inskrivna cirkeln. Låt $1, \frac{1}{2}$ sant $\frac{1}{3}$ vara avstånden mellan cirkelns medelpunkt och de tre hörnpunkterna. Uppgiften är att bestämma cirkelns radie som betecknas med ρ.

Lösning. Cirkelns medelpunkt är skärningspunkten för bisektriserna Så om α, β, γ är hörnvinklarna följer enligt definition av sinus funktionen:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \rho \quad : \ \sin\frac{\beta}{2} = 2\rho \quad : \ \sin\frac{\gamma}{2} = 3\rho$$

För att lösa ut ρ i dessa tre ekvationer utnyttjade Einstein den trigonometriska formeln:

$$(*) \qquad \sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} + 2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma = 1$$

Efter insättning i de tre ekvationerna ovan följer att

$$12\rho^2 + 14\rho^2 = 1$$

Einstein angav lösningen med Cardanos formel samt genomförde en numeriskt kalkyl som angav närmevärdet med 3 demcimalers nogrannhet till $\rho = 0,243$.

Svår övning. Härled formeln (*).

Arkimedes tält

Ett vilsegånget gäng i ödemarken på säg fyra personer är utsatta för både mygg och regn framåt kvällen. Det enda skyddet är ett medhavt plastskynke som kan skydda både mot regn och mygg. Strax innnan skymmningen blivit alltför tät upptäcker skaran sju ganska oregelbundet placerade krokar som är väl förankrade i marken. De innesluter en area som vi tänker oss är fem kvadratmeter men den bildade sjuhörningen är inte särskilt regelbunden. Hursomhelst, här kan ett efterlängtat tält sättas upp ! En tämligen rak gren som är två meter lång bryts av från ett träd. Därefter uppstår palaver inom gruppen. Plastduken måste p g a myggen vara så tät att viss syrebrist torde uppstå. Tre av personerna som inte känner till Arkimedes volymformel funderar därför ”skarpt” på var trädgrenen skall sättas ner för att plastduken sedan ger ett tält med maximal volym. Den fjärde personen som vet bättre funderar på det relevanta problemet hur grenen bör placeras för att göra det så bekvämt som möjligt för fyra personer i tältet eftersom hänsyn måste tas till sluttande innervägg sedan plastduken spänts upp i de sju krokarna. Efter att ha tvingats förklara för de tre andra i gruppen att Arkimedes för drygt tvåtusen år sedan visat att diskussionen om inneslutet volym saknar relevans kunde alla enas om bästa placering av grenen. Antag att grenens spets hamnar en och en halv meter ovanför marken sedan en halv meter skjutis ner för att den står stadigt.

Teorem. *Den inneslutna volymen V beror inte var tältpinnen placerats och ges av formeln*

$$V = \frac{5 \cdot 1,5}{3} \quad \text{kubikmeter}$$

Lösning. För att visa denna volymformel genomförde den geniale grekiske matematikern Arkimedes följande tankegång: Parallellelt med markytan tänker man sig nya sjuhörningar med varierande höjd x ovanför marken där $0 < x < 1,5$. Varje sådan plan sjuhörning har en area betecknad med $A(x)$. Grenens spets befinner sig på avståndet $1,5 - x$ och lagen om skaländringar ger likheten

$$A(x) = 5 \cdot \frac{(1.5^2 - x)^2}{1.5^2}$$

Får ett stort positivt heltal väljes nu

$$x_k = 1.5 \cdot \frac{k}{N} \quad : 0 \leq k \leq N - 1$$

Om N är stort blir den innestänga volymen med stor nogrannhet lika med

$$\frac{1.5}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} 5 \cdot (1 - \frac{k}{N})^2$$

Volymformeln följer nu så snart vi har visat följande gränsvärdesformel:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} (1 - \frac{k}{N})^2 = \frac{1}{3}$$

Läsaren ser lätt att detta är ekvivalent med gränsvärdeslikheten

$$(*) \qquad \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N^3} \cdot \sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{1}{3}$$

För att visa (*) sätter vi

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} k^2$$

Arkimedes gjorde nu ansatsen

$$S_N = AN^3 + BN^2 + CN + D$$

där konstaterna A, B, C, D skall bestämmas. För detta utnyttjas att

$$(N + 1)^3 = N^3 + 3N^2 + 3N + 1$$

Eftersom $S_{N+1}S_N = (N + 1)^2 = N^2 + 2N + 1$ fäljer nu att

$$3AN^2 + 3AN + 1 + 2BN + B + C = N^2 + 2N + 1$$

Likheten skall gälla för all N vilket ger

$$A = \frac{1}{3} \quad : B = \frac{1}{2} \quad : C = -\frac{1}{2}$$

Alltså gäller

$$S_N = \frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} - \frac{N}{2} + D$$

konstanten D bestäms av att $S_1 = 1$ som ger $D = -\frac{1}{3}$. Av denna exakta formel hos talföljden $\{S_N\}$ inses lätt att gränsvärdesformeln (*) gäller.

Kommentar. Naturligtvis genomförde Arkimedes långt mer avancerade kalkyler, bl.a. för att beräkna båglängder hos krokiga linjer och även areor hos buktiga ytor. Volymformeln ovan utnyttjades av Isaac Newton för att härleda en rad fundamentala formler med anknytning till fysik. Efter omfattande fysikaliska och atronomiska försök och observationer som pågick i två årtionden publicerade Newton midsommardagen 1687 det för matematikvärldens viktigaste arbetet någonsin. Här ingår tre större volymer med titeln *Naturvetenskapernas matematiska principer*. Det är ingen överdrift att säga matematiken knappast torde ha den roll den får spela nuförtiden utan de pionjärinsatser som gjordes av ämnets två giganter, Arkimedes och Newton.

Lantmätaren och sinusfunktionen

Vi tänker oss ett slätt landskap och befinner oss i en punkt A. En träpinne är placerad i marken på ett känt avstånd från A, exempelvis en kilometer. Lite längre bort i terängen snett åt höger finns ett litet hus och uppgiften är att räkna ut avståndet mellan A och huset. Till hjälp har man en vinkelmätare som består av ett rör som kan siktas in mot det föremål man vill betrakta och dessutom kan röret vridas på ett stativ försett med en gradskiva. I punkten A kan lantmätaren mäta synvinkeln α mellan träpinnen och huset. Vi föreställer oss att träpinnen och huset befinner sig på andra sidan av en flod medan lantmätaren obehindrat kan förflytta sig vinkelrät mot siktlinjen mellan A och träpinnen på sin sida av floden. Avståndet L mellan A och huset bestäms nu på följande vis: Sedan α observerats förflyttar sig lantmätaren vinkelrät mot siktlinjen mellan trädpinnen och A och går en sträcka S fram till en punkt P där synvinkeln mellan P och huset är 90 grader.

Lösning. Det sökta avståndet L ges av formeln

$$L = \frac{S}{\sin\,\alpha}$$

Beviset av formeln följer enligt nedanstående figur som till att börja med visar att vinkeln α utnyttas för att erhålla likheten

$$\frac{\cos\,\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\lambda}{S} \tag{1}$$

Efter kvadrering erhålles

$$\lambda^2 = S^2 \cdot \frac{\cos^2\,\alpha}{\sin^2\,\alpha} \tag{2}$$

Pythagoras sats ger:

$$L^2 = S^2 + \lambda^2 = S^2(1 + \frac{\cos^2\,\alpha}{\sin^2\,\alpha})S^2 \cdot \frac{\cos^2\,\alpha}{\sin^2\alpha}\sin^2\alpha \tag{3}$$

Ttrigonmetriska ettan ger nu:

$$L^2 = \frac{S^2}{\sin^2\,\alpha} \tag{4}$$

Tar vi kvadratroten på båda sidor följer formeln (*).

En areaformel.

Ett område är inhägnat med stängsel som bildar en sluten styckvist linjär kurva vars hörn är stolpar på lite lagom avstånd som bär upp stängslet. Vår (begåvade !) lantmätare - på uppdrag av taxeringsmyndighet - besöker området men blir mött av skällande vakthundar och en illmarig ägare som hoppas att lantmätaren inte kan klara uppgiften att mäta det inhägnade områdets area, särskilt som stolparna är placerade lite hur som helst varför stängslet utgör en oregelbunden månghörning. Men ägaren har underskattat lantmätarens förmåga som utan att bry sig om ägarens grimaser inleder en rask promenad kring stängslet- vi kan tänka oss att det är 4 kilometer långt med en massa inskjutande och utskjutande hörn kring 113 utplacerade stolpar. Ägaren och hans hundar blir litet oroade när dom upptäcker att lantmätaren är utrustad med stegmätare samt stannar upp vid varje stolpe och noga kollar en medhavd gradskiva. Efter fullbordad promenad antecknar lantmätaren arean och delger taxeringsmyndighetens regler för skatt eftersom området omsluter X många kvadratmeter. Här kan tilläggas att en medhavd kalkylator underlättat lantmätarens kvicka uträkningar. Ägaren blir häpen eftersom lantmätarens siffra stämmer väl överens med hans egenhändigt uppmätta siffra som till skillnad från lantmätarens knappt timslånga promenad fordrat en dryg veckas sysselsättning med hjälp av en fyrkanting matta som ägaren släpat runt med för att succesivt täcka små bitar av inhägnaden, detta inspirerad av en ”areakalkyl” som varit beskrivet på datorns ”bloggnät”. Nu var detta ”matematisk recept” dessvärre amatörmässigt och berättade inte alls om den effektiva metod lantmätarenn använde sig av, dvs. en vacker area formel som härleddes av Pascal och Descartes på 1640-talet.

Areaformeln. Givet är en enkel sluten kurva Γ. Vi kan anta att första stolpen är i origo och nästa placerad i en punkt p_1 på positiva x-axeln. Sedan följer punkter $p_2, \ldots, p_N$ och sista linjestycket går från p_N till origo. Samtliga avstånd $\ell_k = |p_{k+1} - p_k|$ antas kända. Här är $p_0 = p_{N+1} = (0,0)$ Låt vidare $\{\alpha_k\{$ vara yttervinklarna mellan sträckorna. Se figur som visar att $0 < \alpha_k < \pi$ gäller för all $1 \leq k \leq N$. Lantmätaren noterat vinklarna $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ under promenaden. Låt $\{x_k\}$ beteckna x-koordinaterna i stolparna och sätt

$$A_k = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k \quad : 1 \leq k \leq N$$

Med dessa beteckningar ges aren hos det inneslutna området av:

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{k=N} x_k \sin\, A_k \cdot \ell_k + \frac{1}{2} \cdot \sum \cos A_k \sin\, A_k \cdot \ell_k^2$$

Lantmätaren har för sin kalkyl också beräknat x-koordinaterna som förutom att x_1 är lika med x-koordinaten hos p_1, ges av ekvationerna:

$$x_k = x_1 + \sum_{\nu=1}^{\nu=k-1} \cos A_\nu \cdot \ell_\nu \quad : 2 \leq k \leq N$$

Kalkyler före miniräknarnas tidsepok. Uträkningar i konkreta fall av (*) kunde utföras med Pascals additionsmaskin som utan problem kunde addera tusentals tresiffriga tal. Vi påminner om att Drottning Kristina 1650 köpte ett av de allra första exemplaren som kom att användas i Stockholm i flera årtionden för olika bokföringsändamål.

Anmärkning. Notera att kurvan inte behöver begränsa att konvext område. Det är instruktivt att testa formeln med några ”fantombilder”, t.ex. en 5-hörning som inte är konvex. Ett specialfall är fallet $N = 2$ då vi har en triangel. Med $P_1 = (1,0)$ på x-axeln och $P_2 = (a,b)$ för ett par $0 < a < 1$ och $b > 0$ är den vanliga areaformeln. $\frac{b}{2}$ medan (*) uttrycker arean som

$$\sin A_1 \cdot \ell_1 + a \sin A_2 \cdot \ell_2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=2} \cdot \cos A_k \sin A_k \cdot \ell_k^2$$

Här noteras att

$$\ell_1 = \sqrt{(a-1)^2 + b^2} \quad : \ell_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Formeln är förstås komplicerad jämfört med $\frac{b}{2}$ men poängen är att den ingår i en allmänn formel för godtyckliga månghörningar.

Om beviset av (*) Man kan visa formeln med rätt omständiga kombinatoriska metoder där området succesivt delas in i trianglar. Detta är dock artificiellt eftersom det inte existerar någon kanonisk metod för att triangulera området. Det eleganta beviset bygger på Arkimedes fundamentala studier av flytande kroppar varför (*) uttrycker en naturlag snarare än en ”knepig matematisk formel”. Mer precist tänker man sig en cylinderkropp där två sidor S_1 och S_2 är kopior av månghörningen och dess längd relativt stor jämfört med månghörningens inneslutna area. Med anpassad specifik vikt kommer cylindern att inta ett flytläge där dess specifika vikt är anpassad så att S_1 och S_2 båda befinner sig precis under vattenytan i vertikal position. Med stöd av original manuskript från Arkimedes tid som utgavs i Europa i slutet av 1500-talet, genomförde den holländske matematikern och fysikern Stevin i början av 1600-talet ett fullständigt bevis av Arkimedes flytlagar som implicerar (*). Hans banbrytande arbeten utgjorde en inspirationskälla för Descartes. Mer avancerad analys genomfördes av Huyghens på 1650-talet då han analyserade stabilitet hos flytande kroppar.

Exempel på nogranna vinkelmätningar.

Ett fenomen som uppmärksammades av astronomer i mitten av 1600-talet handlar om ljusets hastighet och ljusstrålars avböjning. En banbrytande insats gjordes av den danske astronomen och matematikern Römer i slutet av 1670-talet. Genom att mäta förmörkelsetider hos Jupiters måne Eo under ett halvt år samt genomföra en genial geometrisk kalkyl angav Römer ljushastighen till 240 000 km per sekund vilket ju är anmärkningsvärt nära det nutida värdet på cirka 300 000 km/sek. Newton tog stort intryck av Römers arbete och gav med stöd av sin universella gravitationslag en formel för ljusstrålars avböjning som passerar i närheten av solens gravitationsfält. Mer precist, om ξ är avböjningen mätt i radianer så att en grad är $\frac{\pi}{180}$ o.s.v. så följer av lagarna i Newtons mekanik att man har ekvationen

$$\xi = \gamma \cdot \frac{M}{R^2 \cdot \underline{c}^2}$$

där M är solens massa i kilo, R dess radie i meter, $\mathbf{c}$ ljushastigheten i meter per sekund och γ den universella gravitationskonstanten. Det dröjde ända till slutet av 1700-talet innan Cavendish i ett berömt försök kunde approximera γ och därmed väga jorden samt ge närmevärde på solens masstäthet. Resultatet är att en liter sol väger cirka ett halv kilo. Vidare är

$$\gamma \simeq 6,7 \cdot 10^{-8}$$

Under 1800-talet utgick dåtidens astronomer från att ξ ges av närmevärdet

$$\xi \simeq 6,7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{2\pi R^2}{3} \cdot \mathbf{c}^{-2}$$

Med $\mathbf{c} \simeq 3 \cdot 10^8$ i meter/sekund blir högerledet approximativt

$$\frac{6,7 \cdot 2\pi}{3 \cdot 9} \cdot \frac{R^2}{10^{24}}$$

Talet är litet men den stora nämnaren kompenseras hyfsat av solradien R som enligt ovan är tagen i meter. Från senare hälften av 1800-talet kunde astronomer mäta så små storheter som ljusavböjningar tack vare utvecklingen av kameror. Det fordras dock månförmörkelser för att kunna studera ljusavböjning i närheten av solen så tillfällen att göra observationer var - och är - relativt ringa. Euklidisk geometri och den klassiska mekanikens postulat sattes bara på prov utan fordrade en revidering när Einsten med stöd av nya fysikaliska postulat år 1916 härledde en ny formel där ξ är *dubbelt så stor* jämfört med det ξ-värde Newton angivit. Att Einsteins teori stämmer konfirmerades 1919 av engelska astronomer. Precis som i exempel hämtade från euklidisk geometri är förutsättningen för att förstå innebörden av Einsteins allmänna relativitetsteori att följa detaljer hans synnerligen eleganta matematiska härledningar. Ett första test på teorins giltighet gjorde Einstein redan 1916 när han visade att den revidering av Newtons ekvationer som uppträder i den allmänna relativitetsteorin förklarar den oregelbundna rörelsen hos planeten Merkuris som astronomer under nära ett sekel förgäves sökt förklara med närvaro av månar eller andra ännu icke upptäckta planeter i närheten av Merkuris. Einstein visade att man inte längre behövde söka efter "nålar i solsystemets höstack" eftersom Merkurius bana i relativitetsteorin lyder i princip samma lagar som alla "normala" planeter. Naturligtvis skall inte matematikens roll överdrivas i det här sammanhanget: Einsteins avgörande och djupa tankebanor som ledde fram till såväl den speciella som den allmänna relativietsteorin handlar om fysik. Men under en tjugoårig tankeprocess kring relativitet tjänstgjorde matematik som en god hjälpreda för honom. Låt oss också påimnna om att Enstein var en "veritable räknenisse". Hans första publikationer som han skrev 1900 som 20-åring innehåller omfattande kalkyler av korrelationskoefficienter från statiska data om kollodiala lösningar. Detta ledde seanre fram till hans berömda arebete från 1905 om Brownsk rörelse där lösningar till väremekvationer gjorde det möjligt att bestämma Avogrados tal och därmed implicit visa existenser av atomer innan detta påvisats experimentellt.