

亚像素角点的求法

July 26, 2014

1 问题

求出角点，下一步往往需要求亚像素点。即，从一个整数坐标，求出一个小数坐标。从科学上来讲，精度提高了。——“精确到了小数点后 X 位”。

如何求？本文基于《Learning OpenCV》一书第十章“Subpixel Corner”一节写就。

2 解答

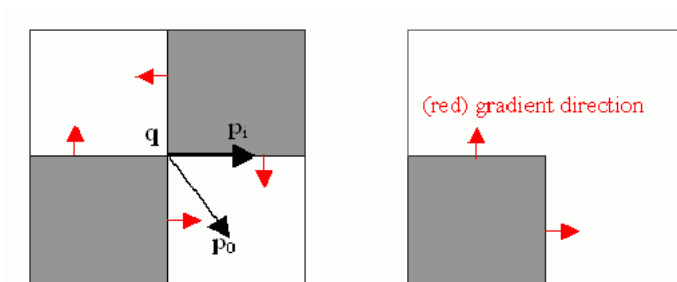
2.1 如何从整数算出小数？

图像本来都是像素点，用整数来表达坐标最自然。为什么会有小数坐标呢？这其实是引入数学手段，进行计算的结果。那是什么数学方法呢？最小二乘法。

2.2 如何构造方程

最小二乘法需要得到 $X\beta = y$ ，才有方程可解。在亚像素角点的求解中，列方程用到了“垂直向量，乘积为 0”这一性质。

那是哪两个向量相乘呢？看图：



- q ，即待求的亚像素点，很神秘，未知。
- p_i ，即 q 周围的点，属于群众，坐标是已知的 (自行选取)
- $(p_i - q)$ ，即是第一个向量
- p_i 处的灰度， G_i ，即是第二个向量

为什么 $G_i * (p_i - q) = 0$ ？考虑以下两种情况：

1. p_0 这种情况，位于一块白色区域，此时，梯度为 0
2. p_1 这种情况，位于边缘，即黑白相交处，此时，梯度不为 0，但是，与 $p_1 - q$ 相垂直！

所以，无论哪种情况，都会导致：

$$G_i * (p_i - q) = 0$$

2.3 转换到最小二乘法的矩阵形式

将上面的方程展开移项，得：

$$G_i * q = G_i * p_i$$

最小二乘法求解：

$$G_i^T G_i q = G_i^T G_i p_i \quad (1)$$

即：

$$q = (G_i^T G_i)^{-1} * (G_i^T G_i p_i) \quad (2)$$

2.4 从理论到代码的对应

理论是清晰的，我注重如何实现。源码在[这里](#)，达到与 OpenCV 接口同样的效果。

2.4.1 如何选取 p_i ?

初始的角点，整数坐标，设为 q_0 ，以 q_0 为中心，选取一个窗口。尺寸可自选，如 11， $(5 + 1 + 5) * (5 + 1 + 5)$ 。这个窗口中的每一点，构成了 p_i 。

2.4.2 如何计算梯度？

求梯度在图像处理里，用 Sobel 算子做卷积即可。对于 p_i 点有：

- G_i ，对每个点处的梯度， $\begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix}$
- G_i^T ，梯度的转置， $\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$
- $G_i^T * G_i$ ，即 $\begin{bmatrix} dx dx & dx dy \\ dx dy & dy dy \end{bmatrix}$

2.4.3 求和的处理

q 点只有一个， p_i 点却有多。所以，对于各点处的梯度，要求和。严格地来写，公式2是不正确的，因为少了求和符号，加上后：

$$q = \sum_{i=0}^N (G_i^T G_i)^{-1} * (G_i^T G_i p_i)$$

2.4.4 权重的引入

采用多点进行计算，本是为了更精确。但各点离中心距离不一，所以不可一视同仁，要引入权重，如高斯权重。假设 p_i 处权重为 ω_i ，上式进一步修正为：

$$q = \sum_{i=0}^N (G_i^T G_i \omega_i)^{-1} * (G_i^T G_i \omega_i p_i)$$

2.4.5 迭代与终止条件？

求解一次后，即可得到一个亚像素点 $q(q_x, q_y)$ 。如果以 q 为中心点，再次：

1. 选取窗口，得到新的一组 p_i
2. 对 p_i 求梯度
3. 用最小二乘法求解

即得到新的点， q_1 。

如此多迭代几次，会得出一系列亚像素点 q_2, q_3, \dots, q_n 。那什么时候终止呢？OpenCV 中的做法是：

- 指定迭代次数，比如，迭代 10 次后，不再进行计算，认为得到最优解。
- 指定结果精度，比如，设定 $\epsilon = 1.0e^{-6}$ ，如果 $q_n - q_{n-1} \leq \epsilon$ ，即认为 q_n 是最优解。

3 总结

- 亚像素角点是纯数学方法计算出来的。
- 计算手段是用最小二乘法。
- 最小二乘法的计算过程，相当于选村长的过程：
 - 从一点（原始角点）开始，选取周围有投票权的群众
 - 群众的选取规则：离所有人的距离方差最小
 - 选出的新村长（亚像素点）与在原村长周围，但不一样。
- 与 OpenCV 源码相比，文中简化了选取“群众” p_i 的过程。没有用插值法。