

Projet Perso: Théorie moderne du portefeuille - Markowitz (1952).

"Comment des investisseurs rationnels utilisent la diversification afin d'optimiser leur portefeuille (collection d'actifs financiers) et quel devrait être le prix d'un actif étant donné son risque par rapport au risque moyen du marché."

Dans ce modèle :

- Un actif est une VA X_i possédant une espérance et une variance.
- Un portefeuille est une combinaison pondérée d'actifs (de X_i).
- Un portefeuille possède donc une variance et une espérance.

Idee de Markowitz: panacher un portefeuille avec du A et du B pour obtenir un couple "revenu/risque" moins bon, à coût égal que ce qu'auraient procuré des actions C.

→ Problème d'optimisation quadratique. ▲ pas de choix incohérents

Critiques :

- Déconnecté du marché financier (ex: Krach, ...) entraînant des risques. (Mandelbrot)
- Le critère proposé par Markowitz (Moyenne Variance) suppose que la répartition suit une d'ormale Mais ça sous estime les événements improbables.
- Utiliser un modèle de loi Normale est "Une Grande Escroquerie Intellectuelle", qui continue à être enseignée.

Hypothèses du modèle :

- Hypothèse d'efficience du marché : les prix et rendement des actifs reflètent de façon objective toutes les informations disponibles concernant un actif.
- Les investisseurs ont de l'aversion pour le risque (fct° concave - Cf cours TDJ)
"Ils ne seront prêts à prendre plus de risque QUE si la nouvelle combi assure un rendement plus élevé".
- A l'inverse, un investisseur qui souhaite améliorer la rentabilité de son portefeuille devra accepter de prendre plus de risques.
- L'équilibre risque/rendement jugé optimal dépend de la tolérance de l'investisseur au risque.

Modèle: la préférence de l'investisseur pour le couple risque/rendement est décrit par une fct° d'utilité quadratique.

Les evts fut° de marché sont supposées suivre une distribution symétrique de Pareto.

Ainsi, l'investisseur n'examine que deux paramètres :

- Le rendement attendu (IE de gain).

- La volatilité (Écart type σ)

▲ On ne tient pas compte de l'asymétrie de la distribution ou de la fortune initialement investie.

* Le rendement d'un portefeuille est une combinaison d'actifs pondérés par leurs poids w_i :

$$IE(R_p) = \sum_{i \in \Omega} w_i IE(R_i) \quad i \in [1, |\Omega|]$$

* La volatilité du portefeuille est une fct de corrélation entre les actifs qui le compose (i.e. non linéaire).

La variance d'un portefeuille est la somme des prod des poids w_i de chaque couple d'actifs par leur covariance σ_{ij} (on inclut donc les poids au carré i.e. σ_{ii} (ou σ_i^2) l'actif i). La covariance est souvent exprimée en terme de corrélation ρ_{ij} des rendements entre deux actifs où $\sigma_{ij} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$

Soit P un portefeuille :

$$\sigma_P^2 = \sum_{i \in [1, n]} \sum_{j \in [1, n]} w_i w_j \sigma_{ij} = \sum_{i \in [1, n]} \sum_{j \in [1, n]} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

La volatilité d'un portefeuille s'exprime comme :

$$\sigma_P = \sqrt{\sigma_P^2}$$

Cas particuliers :

$|P|=2$ (deux actifs) :

$$IE(R_p) = w_A IE(R_A) + (1-w_A) IE(R_B) = w_A IE(R_A) + w_B IE(R_B)$$

$$\text{et } \sigma_P^2 = w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2w_A w_B \sigma_{AB}$$

$|P|=3$: Calcul de la variance.

$$\sigma_P^2 = w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + w_C^2 \sigma_C^2 + 2w_A w_B \sigma_{AB} + 2w_B w_C \sigma_{BC} + 2w_A w_C \sigma_{AC}$$

Note: Généralisable avec la formule de la variance (cours de Statinf).

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j) \quad \text{avec}$$

on rappelle aussi Var sous la forme de KH :

$$\text{Var}(X) = IE(X^2) - (IE(X))^2$$

$$\text{cov}(X_i, X_j) =$$

$$IE(X_i - IE(X_i)) IE(X_j - IE(X_j))$$

Diversification : "Un investisseur peut réduire le risque de son portefeuille simplement en détenant des actifs qui ne soient pas ou peu positivement corrélés donc en diversifiant ses placements".

→ Permet d'obtenir une m^e espérance de gain en réduisant la volatilité du PF.

Lorsque le coef de corrélation entre deux actifs est ~~est~~ négatif, la variance est plus petite que la somme pondérée des deux variances :

$$\rho < 0 \Rightarrow \text{Var}(w_i X_i + w_j X_j) < w_i \text{Var}(X_i) + w_j \text{Var}(X_j). \text{ Convexité.}$$

Frontière d'efficience:

Un couple d'actifs, on peut le représenter dans un graphe risque/rendement. Pour chaque rendement, il existe un PF qui minimise le risque.

Pour chaque niveau de risque, il existe un PF qui maximise le rendement attendu. L'ensemble de ces portefeuilles est appelé frontière d'efficience (ou de Markovitz). Par construction, cette frontière est croissante.

La région au dessus de cette frontière ne peut être atteinte si on détient des actifs risqués. (les points en dessous sont dit sous optimaux et ne nous intéressent pas en tant qu'investisseur rationnel).

Actif sans risque:

Actif théorique qui rapporte le taux d'intérêt sans risque souvent associé aux emprunts d'état (ex: Obligation, ...). Cet actif possède une variance nulle et son rendement est donc connu à l'avance. Il n'est pas corrélé avec les autres actifs. En conséquence, associé à un autre actif avec risque, il modifie linéairement l'espérance de gain du PF et la variance.

Le PF devient donc :

$$\begin{aligned} E(R_p) &= (1 - w_A) E(R_f) + w_A E(R_A) = E(R_f) + w_A [E(R_A) - E(R_f)] \\ E(R_p) &= R_f + w_A (E(R_A) - R_f) \text{ car } R_f \text{ est une constante et } E(a) = a. \end{aligned}$$

$$\text{on rappelle : } E(X) = \sum_{x_i \in \Omega} x_i P(X = x_i)$$

⇒ L'espérance de rentabilité est constituée de $E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx$ si $X \in \mathcal{L}^1$ l'actif sans risque augmenté d'une prime de risque.

On introduit les matrices S^* et K^* pour résoudre le lagrangien et déterminer w^* .

Portefeuille de marché:

Un vrai investisseur avisé cherchera la plus grande diversification possible jusqu'à atteindre la frontière d'efficience. En l'absence de l'actif sans risque, la frontière a une forme d'hyperbole (resp parabole) quand on se place dans un repère $(0, \text{écart type, rendement})$ (resp $(\text{variance, espérance de rendement})$).

$(0, \text{écart type, espérance de gain}) \Rightarrow \text{hyperbole.}$

$(0, \text{variance, espérance de gain}) \Rightarrow \text{parabole.}$

L'introduction d'un actif sans risque modifie la frontière d'efficience, elle devient une droite dont l'ordonnée à l'origine est le taux sans risque et qui est tangente à la frontière d'efficience déterminée par l'analyse des actifs à risque.

Le point tangent constitue le portefeuille de marché, c'est le seul portefeuille efficient constitué d'actifs risqués. (Tous les autres portefeuilles sont des combinaisons de l'actif sans risque ET d'actifs risqués).

Droite de marché des capitaux

Le choix du portefeuille par l'investisseur se fait sur la droite (RPM). Cette droite est la droite du marché des capitaux (CML). Elle représente la rentabilité attendue en ordonnée et le risque en abscisse de l'ensemble des titres présents sur le marché. Si un titre est en dessous de cette droite, il est dit sous évalué, cela signifie qu'il rapporte plus que ce qui est attendu à un risque donné \rightarrow Il faut investir.

L'intersection avec la droite des ordonnées représente le taux de rentabilité attendu à un risque nul sur les marchés.

Évaluation des risques : Pour un actif donné, le risque se compose de :

- **Risques spécifiques** : (ou risques intrinsèques ou risques idiosyncratiques) sont indépendants des phénomènes qui affectent l'ensemble des titres. Ils résultent d'éléments particuliers qui affectent tel ou tel titre : Mauvaise gestion de l'entreprise, incident qui détruit les ateliers de prod ou encore invent révolutionnaire qui rend obsolète sa gamme principale de produits.
- **Risques systématiques (ou risques de marché)** est un risque de perte qui peut résulter de la fluctuation des prix des instruments financiers qui composent un portefeuille.

Le risque peut porter sur les actions, les taux d'intérêt, les taux de change, les cours de matière première, ... Par extension, c'est le risque d'activité économique de l'ensemble de l'économie, de la fiscalité, des taux d'intérêts, de l'inflation et aussi du sentiment de l'investisseur vis à vis de l'évolution future. Dans la théorie moderne du PF, ce risque est généralement mesuré par la volatilité du marché, une donnée statistique, laquelle toutefois ne peut pas totalement traduire toutes les incertitudes propres aux marchés et encore moins à l'économie générale.

Le risque de marché est exprimé par la prime de risque et par le coefficient β pour l'évolution du cours d'un actif en particulier par rapport au marché.

La prime de risque désigne un supplément de rendement exigé par un investisseur afin de compenser un niveau de risque supérieur à la moyenne. Ce phénomène est basé sur l'aversion au risque où les investisseurs tout comme les paieurs tendent à préférer un gain faible mais avec une probabilité élevée à un gain élevé mais assorti d'une proba plus faible.

Le coefficient β est le coefficient clé du modèle d'évaluation des actifs financiers. Il correspond à un rapport historique de la volatilité du prix d'un actif (ex: le prix d'une action) sur celle du prix de marché en général P (ex: indice boursier significatif).

Calcul de β : on pose

r_p : la rentabilité implicite du portefeuille

r_m : la rentabilité implicite du marché

$$\beta = \frac{\text{Cov}(r_p, r_m)}{\text{Var}(r_m)}$$

Rôle par rapport à la rentabilité

Le β est aussi le rapport entre la rentabilité de cet actif et celle du marché puisque la volatilité concerne les variations de cours qui sont un élément essentiel de rentabilité.

ex: si le β d'une action est de 0,8 son cours a varié en moyenne dans la période précédente de 0,8 % quand le marché variait de 1 %.

Rôle par rapport au risque

Le β est un indicateur de risque. Si l'évolution du marché est à la baisse l'action sera susceptible de baisser moins que le marché s'il est inférieur à 1 et plus que le marché s'il est supérieur à 1.

Il y a donc un lien entre la rentabilité et le risque: plus le cours est censé pouvoir progresser fortement qd le marché est haussier, plus il a de risque de baisser fortement qd il est baissier.

Limite de l'indicateur

- Supposons que les marchés financiers sont parfaits (sans coût de transaction) or en pratique, il existe des frais de courtage, aucun différentiel de taxe, un même taux d'intérêt, un même niveau de taux de prêts, d'emprunts pour tous les investisseurs (dans le temps, en fait de chaque investisseur et ne sont pas identiques) mais aussi que l'écart type des rendements passés est un indicateur de risque.

Modèle d'évaluation des actifs financiers. (MEDAF ou CAPM)

Ce modèle fournit une estimation du taux de rentabilité attendu par le marché pour un actif financier en fonction du risque systématique.

Le MEDAF explique la réalisation de l'équilibre du marché par l'offre et la demande pour chaque titre. Il permet de déterminer la rentabilité d'un actif. Il permet de déterminer la rentabilité d'un actif risqué par son risque systématique.

Les transactions cesseront lorsque les opérateurs auront un portefeuille identique.

La formule est une fonction :

- * de la mesure du risque systématique i.e. au risque non diversifiable noté β_{actif} (l'investisseur diversifiera son portefeuille directement sur le marché).
- * de la rentabilité espérée du marché $E(R_M)$.
- * du taux d'intérêt sans risque (généralement des emprunts d'état) noté R_f .

$$E(R_{actif}) = R_f + \beta_{actif} (E(R_M) - R_f)$$

où $(E(R_M) - R_f)$ représente la prime de risque i.e. le surplus de rentabilité exigé par les investisseurs lorsque ces derniers placent leurs argent sur le marché plutôt que dans un actif sans risque.

Le β_{actif} est la volatilité de la rentabilité de l'actif considéré rapporté à celle du marché

$$\beta_{actif} = \frac{\text{cov}(R_M, R_{actif})}{\text{var}(R_{actif})}$$

Le coefficient correspond à l'élasticité du cours du titre par rapport à l'indice boursier représentant le marché.

$$\beta_{actif} = \frac{\frac{\partial \sigma_{actif}}{\partial \sigma_M}}{\sigma_M}$$

où σ_M est le risque du marché (écart type de R_M)

σ_{actif} le risque de l'actif (écart type de la rentabilité attendue de l'actif)

Un actif représentant le marché aura $\beta_{actif} = 1$. Pour un actif sans risque on a alors $\beta_{actif} = 0$.

Hypothèses du MEDAF.

- ↳ Il n'y a pas de coût de transaction (pas de commission sur les transactions, ni de marge, ...).
- ↳ Un investisseur peut acheter ou vendre à découvert n'importe quelle action sans que cela n'ait d'incidence sur le prix de l'action.
- ↳ Il n'y a pas de taxes, la fiscalité est donc la même pour les plus values et les dividendes.
- ↳ Les investisseurs n'aiment pas le risque.
- ↳ Tous les investisseurs ont un PF de Markowitz ou ils ne considèrent chaque action que sous son aspect Moyenne/Variance.
- ↳ Les investisseurs contrôlent le risque par la diversification.
- ↳ Tous les actifs, y compris le capital humain, peuvent être achetés et vendus librement sur le marché.
- ↳ Les investisseurs peuvent emprunter ou prêter de l'argent au taux sans risque.

Droite de marché des capitaux - Représentation graphique du MEDAF

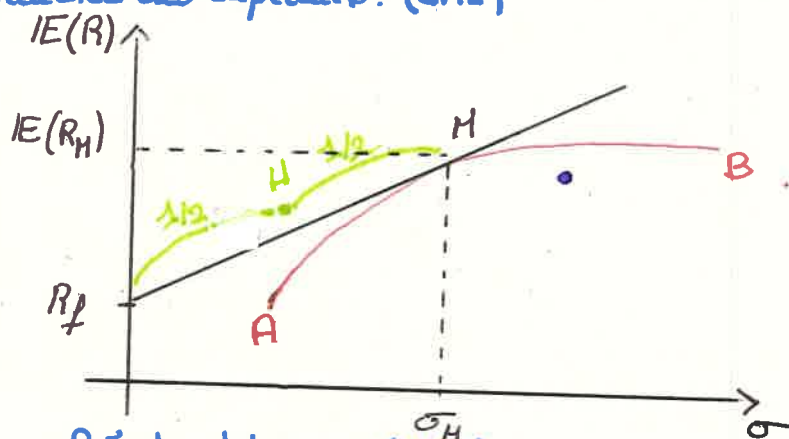
Un investisseur considère le rendement espéré $IE(R)$ et le risque σ (la variabilité représentée par l'écart type du PF).

Pour un risque donné, il préfère un PF qui a le rendement le plus élevé.

→ Approche de Markovitz: Calculer parmi tous les PF possibles ceux qui ont le rendement le plus élevé pour un risque fixé. A-B.

On obtient alors la frontière de Markovitz. Les portefeuilles se trouvent sur cette courbe qui est la mm pour tous les investisseurs (i.e. tous les investisseurs attendant un mm rendement au mm niveau de risque fixé).

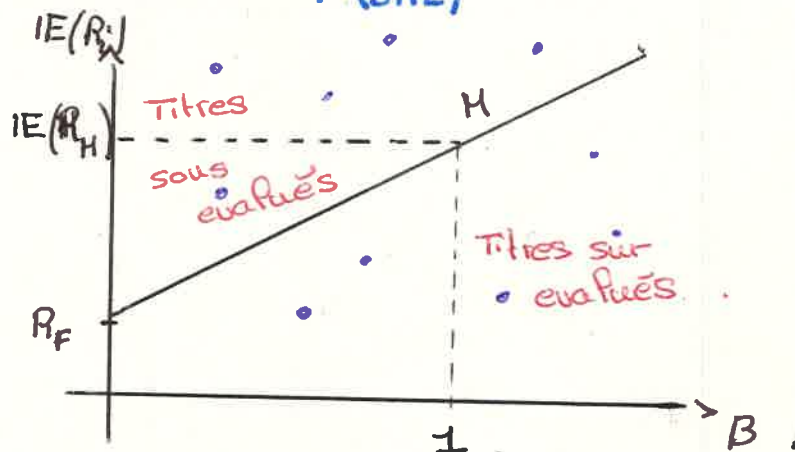
→ Droite de marché des capitaux. (CML)



CML
droite de marché
des capitaux
Capital Market Line

SML
droite de marché
des titres
Security Market Line.

→ Droite de marché des titres. (SML)



Soit R_f , le rendement du type sans risque. La CML part de R_f et est tangente à la courbe A-B. Un investisseur peut choisir tout PF sur la droite entre R_f et M. Tous les investisseurs doivent posséder le portefeuille du marché M dans des proportions plus ou moins grande. Par exemple, le portefeuille H comprend en part égale le titre sans risque et le portefeuille M.

Soit P , un PF composé du PF de marché M (dont le rendement R_M) dans la proportion w et du titre sans risque dans la proportion $(1-w)$, le rendement espéré est.

$$IE(R_P) = (1-w)R_f + w IE(R_M)$$

et sa variance $\sigma_P^2 = w^2 \sigma_H^2 \Leftrightarrow w^2 = \frac{\sigma_P^2}{\sigma_H^2} \Leftrightarrow w = \frac{\sigma_P}{\sigma_H}$ car on est sur R_f
on en déduit donc l'équation de la droite de marché des capitaux.

$$IE(R_P) = R_f + \frac{\sigma_P}{\sigma_H} (IE(R_M) - R_f)$$

→ Droite de marché des titres (SML)

Le risque du PF de marché est :

$$\sigma_M = \left[\sum_i^N \sum_j^N w_i w_j \sigma_{ij} \right]^{1/2}$$

où w_i (resp w_j) est la part du titre i (resp j) dans le PF du marché et N , le nb de Titres.

La covariance entre un titre i et le portefeuille de marché est

$$\sigma_{iM} = \sum_j w_j \sigma_{ij}$$

Risque du portefeuille de marché

$$\sigma_M = \sum_j w_j \sigma_{jM}$$

Prenons i un titre, Soient tous les PF Q composés du titre i dans proportions variables $x \in [0,1]$ ($x \in \mathbb{R}_+$) et le reste dans le PF de marché. Le rendement espéré de ces PF sera :

$$IE(R_Q) = x IE(R_i) + (1-x) IE(R_M)$$

et le risque

$$\sigma_Q = \left[x^2 \sigma_i^2 + (1-x)^2 \sigma_M^2 + 2x(1-x) \sigma_{iM} \right]^{1/2}$$

Ces PF se trouvent sur la ligne M-i. La pente de cette ligne est :

(*) Il convient d'utiliser la relation

$$\frac{d IE(R_Q)}{d \sigma_Q} = \frac{[IE(R_i) - IE(R_M)] [x^2 \sigma_i^2 + (1-x)^2 \sigma_M^2 + 2x(1-x) \sigma_{iM}]^{1/2}}{x \sigma_i^2 - (1-x) \sigma_M^2 + (1-2x) \sigma_{iM}}$$

$$\frac{d IE(R_Q)}{d \sigma_Q} = \frac{d IE(R_Q)}{d x} \times \frac{d x}{d \sigma_Q}$$

Lorsque $x=0$, $i=M$ et la pente est celle de la droite R_F-M , en utilisant cette relation et la SML, on obtient :

$$IE(R_i) = R_F + \left[\frac{IE(R_M) - R_F}{\sigma_M^2} \right] \sigma_{iM}$$

qui est la SML. Soit

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} = \frac{\rho_{iM} \sigma_i}{\sigma_M}$$

où ρ_{iM} est le coef de corrélation entre le titre i et le PF de marché. On peut écrire

$$IE(R_i) = R_F + \beta_i [IE(R_M) - R_F]$$

à l'équilibre, les rendements espérés de tous les titres doivent se trouver sur cette droite. Si le rendement est supérieur à l'équilibre (à la hausse), on dit que le titre est sous évalué. Au contraire, si le rendement est au dessous de la valeur d'équilibre le titre est sur évalué. On peut calculer la valeur α tq $\alpha = IE(R_i) - IE^*(R_i)$ où $IE^*(R_i)$ est la valeur d'équilibre du CAPM.

Le coefficient β est un indice du risque systématique. Le marché récompense uniquement ce risque. Si l'investisseur n'a pas diversifié son portefeuille, le risque supplémentaire n'est pas récompensé.

Une valeur de β supérieure à l'unité signifie que le rendement du titre varie plus fortement que celui du PF de marché.

Critiques : La plupart des hypothèses du MEDAF ne sont pas vérifiées en particulier les 2, 6, 9 :

- Toute transaction d'une certaine taille a un effet sur le prix d'une action.
- Peu d'investisseurs ont un PF de Markowitz (i.e. un portefeuille efficient qui présente un couple risque/rentabilité optimal pour un investisseur (atteindre le min de risque et un niveau de rendement anticipé (i.e. avec une variance min) ou pour un risque donné, la possibilité d'atteindre le maximum de rendement moyen escompté)).
- l'hypothèse 9 stipule que l'investisseur peut emprunter de l'argent sans aucune limite, ce qu'aucune banque n'autorise.

→ Retour sur l'évaluation des actifs financiers dans le modèle du PF moderne de Markowitz.

On suppose que les marchés financiers sont parfaits au sens des hypothèses de la concurrence. Il n'y a pas d'impôts, pas de barrières à l'entrée et une absence de coût de transaction. L'information est disponible gratuitement pour tous les agents. Les agents sont preneurs de prix et ils ont tout intérêt à combiner 2 actifs.

Selon le modèle, le rendement exigé sur un actif est fonction de son risque systématique.

$$IE(R_{\text{Actif}}) = R_F + \beta_{\text{actif}} [IE(R_M) - R_F]$$

Une fois ce rendement atteint, on obtient la valeur de l'actif en actualisant (application de taux à des flux financiers non directement comparables et portant sur des durées différentes afin de comparer ou combiner ces flux). Ses flux (de trésorerie permettent de construire directement les tableaux de trésorerie, contrairement à la capacité d'autofinancement ou le BFR qui sont constitués à partir de flux ne tenant pas compte des décaissements de trésorerie avec le taux de rendement exigé.

Droite de marché des titres (SML). R_p : le rdmt du PF, R_M : le rdmt du Marché

$$IE(R_p) = r + b_p [IE(R_M) - r] = r + q \cdot b_p$$

(pour un seul titre i : $IE(R_i) = r + [IE(R_M) - r] \times b_i = r + q \cdot b_i$).

$$b_p = \frac{\text{Cov}(R_p, R_M)}{\sigma^2(R_M)} = \frac{r(R_p, R_M) \times \sigma(R_p) \times \sigma(R_M)}{\sigma^2(R_M)} \quad \text{où } q: \text{Prime par unité de risque.}$$

r : l'actif non risqué

$$IE(R_p) = r_f + [IE(R_M) - r_f] \cdot b_p = r_f + q \cdot b_p$$

Concurrence pure et parfaite : hypothèses permettant de comprendre la détermination du prix sur le marché, le cpt de la firme ainsi que les mécanismes de fonctionnement des marchés. fondements de la théorie néoclassique. 5 hypothèses

- Abornicité du marché : il existe un gd nb d'agent économiques tant du côté de l'offre que du côté de la demande et... aucun d'entre eux ne dispose sur le marché d'une dimension ou d'une puissance suffisante pour exercer une action quelconque sur la production et sur le prix considéré
- Homogénéité du produit : toutes les entreprises produisent des produits et des services équivalents (que les acheteurs jugent identiques ou homogènes), ils n'ont pas de raison de préférer le produit d'une firme au produit d'une autre firme, le choix de l'acheteur n'est ainsi guidé que par le prix.
- Libre entrée sur le marché : quiconque veut s'adonner à une certaine production peut le faire sans restriction ni délai, pénétrer sur le marché et ainsi concurrencer ceux qui s'y trouvent déjà. Les firmes qui composent l'industrie ne peuvent opposer à l'arrivée de la concurrence.
- La parfaite transparence du marché ou information parfaite, suppose que les offreurs et les demandeurs soient parfaitement informés des caractéristiques des produits et des prix auxquels ils sont proposés. La parfaite connaissance de tous les facteurs significatifs du marché empêche ainsi que certains profitent d'une information particulière pour manipuler le marché.
- La libre circulation des facteurs de production : le capital et le travail doivent pouvoir se déplacer librement à la recherche de la meilleure opportunité de rémunération. Cela suppose que donc la libre circulation des capitaux dans le monde ainsi que l'ouverture des frontières aux flux migratoires.

⇒ Les 3 premières conditions définissent la concurrence pure, i.e. pure de l'élément de monopole.
Les 5 conditions définissent la concurrence "parfaite", ou pure et parfaite.
Toutes ces conditions sont absorbées de l'hypothèse que l'agent économique est rationnel.

Toute économie est un ensemble dont les éléments sont tous interdépendants. On passe donc de l'équilibre sur un marché à l'équilibre de l'ensemble de l'économie → L'économie générale
Le modèle de cet équilibre général ne prétend pas décrire la réalité. Il énonce les hypothèses nécessaires pour que le marché fonctionne parfaitement i.e. comme si une force conduisait des agents, régis par leur intérêt particulier, à réaliser, sans le rechercher, l'intérêt collectif.
Cela implique d'une part l'existence d'un commissaire priseur qui formule les offres et les demandes des agents qui centralise et confronte globalement. Cela suppose que les agents économiques soient rationnels, qu'il ne peuvent pas manipuler les prix ni procéder entre eux à des échanges directs. Ces hypothèses sont indispensables à la mise en équation du pb d'équilibre général confirmant que le modèle de concurrence parfaite ne se rapporte, ni de près, ni de loin, à la concurrence telle qu'on se la représente. Il décrit ainsi une économie décent (ralisée).
Le modèle offre des outils certains pour la recherche scientifique : la nature même des modèles scientifiques est de chercher à simplifier une réalité complexe. Ce modèle ne conçoit pas au fonctionnement réel d'un marché mais constitue une simplification permettant de tenir un discours globalement vrai sur le fonctionnement des marchés (idéa normatif).