Exemple : Analyse d'un PF, soient A et B, deux actions.

Rappel : On suppose que $X, Y \in \mathcal{L}^2$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \Omega} x P(X=x).$$

$$Var(X) = \sum_{x \in \Omega} P(X=x)\left[x - \mathbb{E}(X)\right]^2$$

$$\mathbb{E}(aX) = a\,\mathbb{E}(X)$$

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

$$Var(aX+b) = a^2 Var(X).$$

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$ ou $$Cov(X,Y) = \sum_{\substack{x \in \Omega \\ y \in \Omega}} (x - \mathbb{E}(X)) \times (y - \mathbb{E}(Y)) \times (P(X \cap Y)).$$

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$ avec $\sigma(X) = Var(X)^{1/2}$

si $X \not\perp Y$ alors $Var(X \cap Y) = Var(X) + Var(Y) + 2cov(X,Y)$

Situations Possible	Proba	Rendement de A	Rendement de B
1	20 %	5 %	50 %
2	30 %	10 %	30 %
3	30 %	15 %	10 %
4	20 %	20 %	-10 %
Rendement espéré	→	12,5 %	20 %

↑ "Obtenu en calculant la moyenne pondérée de chaque actions"

$$R_A = \frac{1}{4}(5+10+15+20) = 12,5 \quad R_B = \frac{1}{4}(50\% + 30\% + 10\% - 10\%) = 20\%$$

Etape 1 : Calcule du risque de chaque action, de manière independante
→ Calcule de la variance
L'ecart type equivaut au risque.

$$Var(A) = 0,2(0,05-0,125) + 0,3(0,1-0,125) + 0,3(0,15-0,125) + 0,2(0,2-0,125).$$

$$Var(A) = 0,00263$$

$$\sigma(A) = \sqrt{Var(A)} = 5,12\%.$$

$$Var(B) = 0,042.$$

$$\sigma(B) = 20,49\%$$

Etape 2 : Création d'un PF contenant A et B. On suppose que ce PF est composé de 50 % de A et 50 % de B. On pose $Z = 50\%A + 50\%B$.

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(0,5A + 0,5B) = 0,5\,\mathbb{E}(A) + 0,5\,\mathbb{E}(B) = 0,5 \times 0,125 + 0,5 \times 0,2$$

$$\mathbb{E}(Z) = 16,25\%$$

On calcule maintenant la covariance entre tous les actifs du PF. La cov permet d'évaluer la variation simultan

$$Cov(Z) = 0,2(0,05-0,125)(0,5-0,2) + 0,3(0,1-0,125)(0,3-0,2) + 0,3(0,15-0,125)(0,1-0,2) + 0,2(0,2-0,125)(-0,1-0,2)$$

$Cov(Z) = -0{,}0105$.

Calcule du risque du PF.

$Var(Z) = Var(0{,}5X + 0{,}5Y) = 0{,}5^2 Var(X) + 0{,}5^2 Var(Y) + 2(0{,}5 \times 0{,}5 \times Cov(X,Y))$

$Cov(X,Y) = -0{,}0105$.

$Var(Z) = 0{,}00591$.

$\sigma(Z) = 7{,}69\,\%$

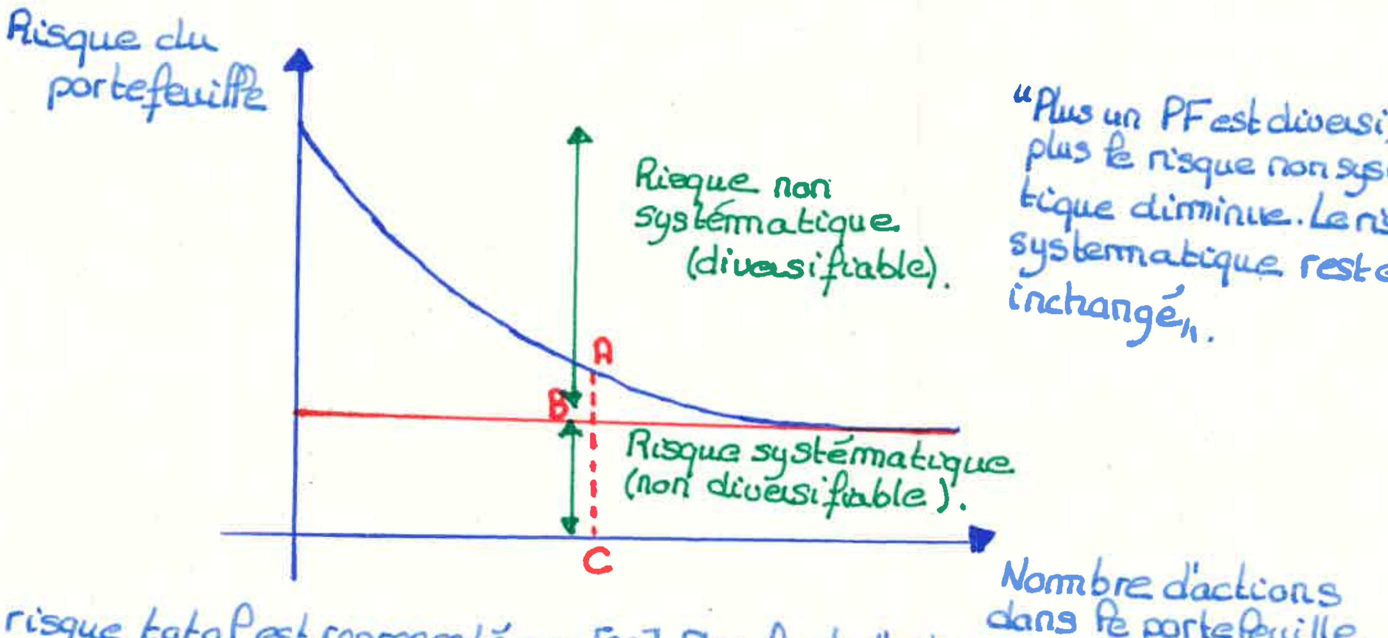
L'association de deux actions A et B permet d'obtenir un rendement esperé de 16,25% pour un niveau de risque de 7,69%.
Ce qui optimise les deux actions de base qui proposaient un risque 5,12% (resp 20,49%) associé à un rendement esperé de 12,5% (resp 20%) pour l'action A (resp B).

→ Risques systématiques et non systématiques

La diversification de PF ne permet pas de reduire tout le risque. Il existe deux risques

- Le risque systématique.
- Le risque non systématique

Un PF bien diversifié permet de réduire le risque non systématique mais la diversification ne permet pas de réduire le risque systematique qui correspond au risque du marché.



"Plus un PF est diversifié plus le risque non systematique diminue. Le risque systematique reste inchangé".

Le risque total est representé par [AC], Plus le nb d'action augmente, plus le risque non systématique [AB] est faible. [BC] representant le risque systematique ne reduit pas via le processus de diversificat°.

→ Un investisseur, une fois le principe de diversification assimilé, doit comprendre que m̃ si la diversification permet de baisser le risque, cette dernière doit être optimisé de façon à la rendre efficente.

Def: le rendement correspond au retour financier ou retour sur investissement obtenu par rapport à l'investissement precedemment effectué et s'exprime en %

Il permet d'évaluer la performance d'un investissement. On a pls type de rendement :

- Le rendement des actions qui est aléatoire après l'investissement.
- Le rendement des obligations qui dépend de la fluctuation des cours.
- d'autres mode de rendement (Livret epargne, bon du trésor, ...).

On calcule le rendement R tq :

$$R = \frac{\text{revenu versé}}{\text{Montant de l'investissement}}.$$

Def : Efficience du marché (Fama, 1950~60)

"Lorsqu'un marché est suffisamment développé et que les informations
sur ce dernier sont connues par tous les acteurs, ces derniers étant supposé
rationnels, reagissent presque instantanément et de façon correcte"

→ Cette théorie induit que si le marché est efficient, alors aucun investis-
seur ne peut réussir à obtenir un profit anormal sur le marché pour un certain
niveau de risque donné. Sur le long terme, "battre le marché" est donc impossible
Le prix d'un actif est donc égal à sa valeur théorique. La surévaluation ou sous
évaluation d'actif est donc impossible.

On distingue 3 types d'efficiences, classées en fonction de la capacité des agents
à se procurer les informations sur le marché :

- faible efficience (weak form).

La seule variable expliquant le cours actuel ou futur d'un actif est l'historique
des cours de cette actions. On ne peut donc pas utiliser le passé des performances
d'une action pour prevoir son futur. L'analyse chartiste devient donc inutile pour
tirer un profit. Si l'ensemble des informations passées est déjà pris en compte par
le prix actuel d'un actif, il est alors inutile de les reutiliser pour etablir des previsions
sur sa variation future.

- efficience semi-forte (semi-strong form).

Toute l'information publique (fusion, annonce de dividendes, licenciements, resultats annu
els, ...) est incorporée dans l'ensemble des informations. On peut valider l'hypothèse
de semi efficience quand le prix d'un actif fluctue instantanément à l'annonce d'une
information publique. Dans ce type de marché, il est inutile de faire des previsions
se basant sur des informations déjà publiées, m̂ recemment, puisque ces dernières
sont déjà prises en compte dans le prix de l'actif.

- efficience forte (strong form).

En plus du fait que l'ensemble des informations des deux autres formes sont incorporées
dans le prix d'un actif (info publique + performances passées), toutes les informations
privées sont connues par l'ensemble des acteurs et donc également incorporées
dans les prix d'actifs. Le delit d'initié devient donc impossible. Avec une forme
forte d'efficience, il n'est pas possible de realiser des profits car il est impossible
de prevoir les cours futurs.

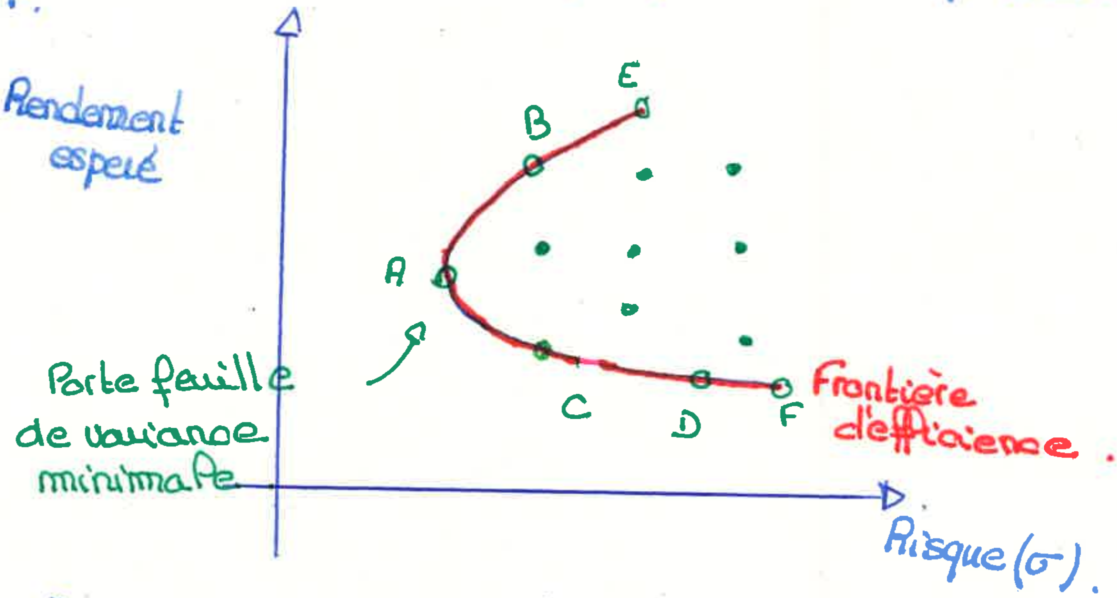
"Efficient = Le prix reflète totalement et constamment toute l'info dispo"

Postulats de la théorie de Markowitz : Théorisation de la diversification optimale du PF boursier

- L'investissement a lieu sur une période unique (ex 6 mois, 1 an, ...).
- Il n'y a pas de coûts de transaction.
- Les préférences de l'investisseur prennent en compte le risque ET le rendement espéré
- Les marchés sont efficients
- Les investisseurs ont une aversion au risque.

Ce modèle est basé sur le couple (IE/Var) pour la gestion du PF. La théorie ne prend en compte que le rendement et le risque donné par l'écart type. La théorie pousse l'investisseur à déterminer le meilleur rendement espéré pour un certain niveau de risque donné sur un ensemble d'actifs déterminés ou le plus faible niveau de risque possible pour un rendement donné.

→ En théorie, si on prend deux actifs afin de constituer un PF, une multitude de différents portefeuilles s'offrent à nous par le simple fait de varier la part de chaque actifs dans le PF.



Portefeuilles efficients en gestion de portefeuille :

Le schéma représente l'ensemble des PF disponibles pour un nb x d'actifs. L'investisseur doit choisir son portefeuille parmi ceux compris sur la ligne A-E qui forme la frontière d'efficience de Markowitz, les autres étant dominés par ces derniers, ie sont moins efficients. Par exemple, le PF B présente le même risque σ que celui de C mais possède un rendement espéré plus élevé. On dit qu'il domine C. Le PF A représente le PF boursier avec le risque le plus faible.

→ Le portefeuille efficient est celui avec le plus faible risque pour un certain niveau de rendement espéré.

Le PF A représente le PF avec le minimum de variance, calculé à partir de la variance de chaque actif puis la covariance de chacun des actifs entre eux.

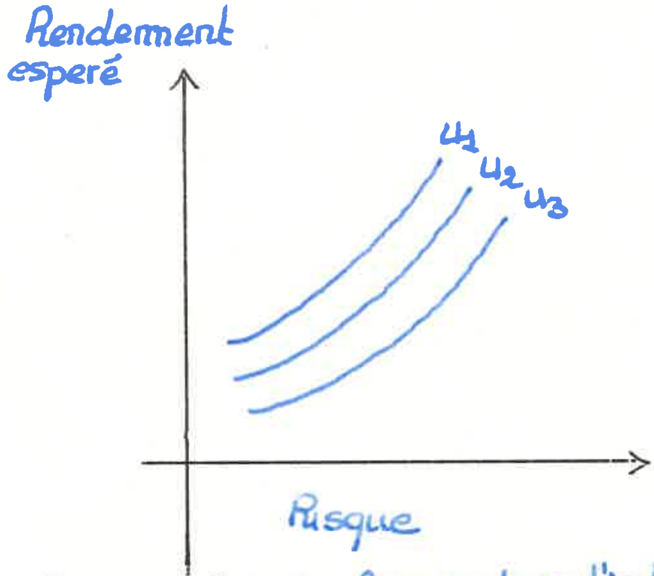
Comment sélectionner un PF selon ses préférences :

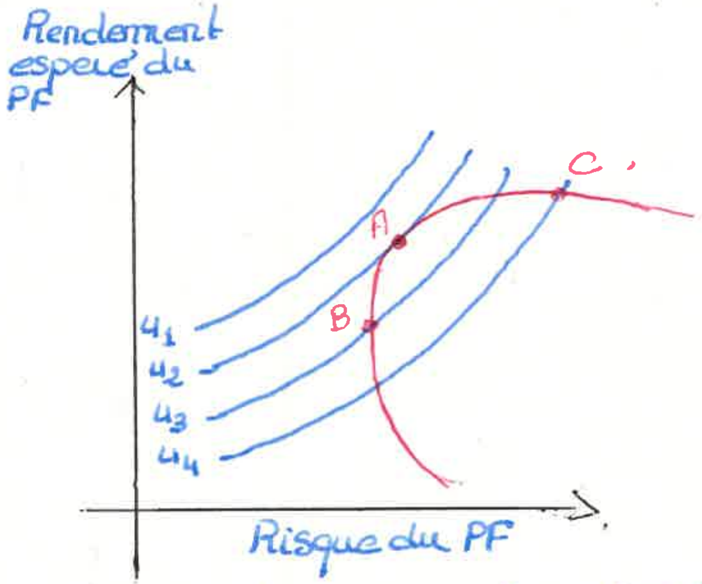
Le modèle de Markowitz ne définit pas un unique PF optimal mais génère une frontière efficiente comprenant l'ensemble des PF optimaux. C'est à l'investisseur de choisir SON PF optimal.

En finance, on suppose que l'investisseur que l'investisseur à une aversion au risque, plus les possibilités de pertes sont élevées, moins l'investisseur acceptera un investissement dit équitable. Plus la desutilité (possibilité d'insatisfaction) est grande, moins l'utilité d'un possible gain est grande.

→ Courbes d'indifferences.

On utilise les courbes d'indifferences, associées à la frontière d'efficience afin de selectionner un PF adapté à notre utilité. Les courbes d'indifferences représentent les niveaux de risques acceptables pour un investisseurs pour un certain rendement esperé.





Ce schema represente les courbes d'indifferences. La forme de ces courbes dependent de l'aversion au risque de l'investisseur. La courbe d'indifférence supeiieure est t/s préférable a celle inferieure. En effet, plus la courbe est eloignée de l'axe horizontal, plus l'utilite est élevée.

→ Plus le coefficient directeur d'une courbe est grand, plus l'aversion au risque de l'investisseur est grande.

Ce schéma represente les courbes d'indifference qui reflètent les préferences d'un investisseur et la frontière efficiente qui représente les possibilités du PF boursier. Le pt A represente le PF efficient qui est présent sur la droite d'utilité u_2 et sur la frontière efficiente. La courbe u_1 presentant la plus grande utilite ne peut pas être atteinte. Les courbes u_3 et u_4 proposent le m niveau de risque que u_2 mais pour un rendement moins élevé.

Le portefeuille A est donc le plus adapté à l'acceptation du risque de l'investisseur representée par les courbes d'indifference. Un investisseur de profil très prudent choisira le PF B car il repond à son utilité et il reste sur la frontière d'efficience avec un faible niveau de risque. Un profil aggressif privilégiera le portefeuille C car il offre un plus grand rendement esperé, en restant sur la frontiere d'efficience avec un fort niveau de risque.

→ Presentation de la theorie du marché des capitaux

La theorie du marché des capitaux (CMT) est une extension de la theorie moderne du PF de markowitz. Elle emet des hypothèses sur le comportement des investisseurs là ou la théorie moderne du PF définit comment les investisseurs devraient agir.

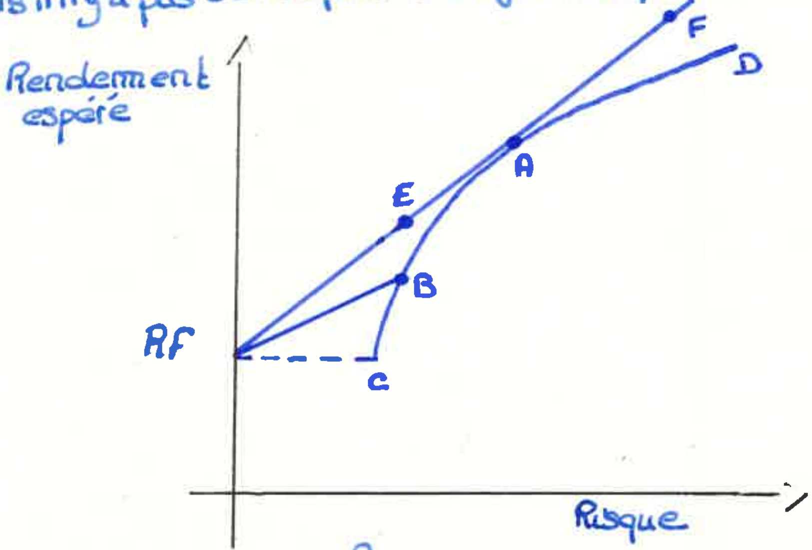
Le MEDAF introduit par Sharpe en 1964 est une mise en application de la theorie du marché des capitaux.
Ce modèle qui évalue le risque d'un actif.

Postulats de la théorie du marché des capitaux.

- Tous les investisseurs peuvent emprunter et prêter aux taux sans risque.
- Tous les investisseurs utilisent la théorie du PF moderne étant les m̄ données de calcul ils attribuent la m̄ variance et le m̄ rendement espéré pour tous les actifs. Pour un nb donné d'actif, les investisseurs ayant les m̄ informations ont une frontière efficiente identique.
- Les investisseurs se positionnent sur la m̄ période de temps unique.
- Il n'y a pas de coût de transaction.
- Il n'y a pas de taxe sur les plus-values.
- Il n'y a pas d'inflation
- Aucun acteur ne peut influencer le marché par une prise de position sur ce dernier
- Les marchés sont à l'équilibre

Ces hypothèses peuvent paraître irréalistes au premier abord mais l'importance réside plus dans la qualité de la description de la réalité grâce à ce modèle, plutôt que la réalité des hypothèses effe m̄.
L'influence de ces hypothèses sur la qualité finale de l'information apportée par ce modèle est trop faible pour pouvoir dénigrer ce dernier. Les coûts de transaction sont trop faibles pour vraiment influencer l'information apportée par le modèle. L'inflation peut être partiellement anticipée sur une période donnée et n'est plus un facteur majeur.

Le taux sans risque?
L'une des hypothèse de la théorie du marché des capitaux est que tous les investisseurs peuvent emprunter à un taux sans risque. C'est l'introduction de ces actifs sans risques qui permettent de développer cette théorie en partant de la théorie moderne du PF.
Ce taux sans risque est une valeur nominale et non une valeur réelle. Un actif au taux sans risque peut être défini comme un actif au rendement espéré certains possédant une variance de rendement nulle. Cet actif a une covariance égale à 0 avec n'importe quel actif possédant un niveau de risque réel.
Pour mettre en pratique cette théorie, les investisseurs utilisent généralement les oblig^{o} d'Etat, pour lesquels il n'y a pas de risque de défaut et qui ont un rendement connu à l'avance.



Prêter et emprunter à un taux sans risque?
Partons de la frontière définie par l'arc CD. Cette frontière définit les possibilités de PF constitués d'actions risquées sans emprunter ni prêter. Nous avons ajouté le taux sans risque RF. Il existe maintenant de nouvelles possibilités de combinaisons d'actifs sans risques (ou peu risqués) et d'actifs risqués en traçant la droite (RF, A), tangente à la frontière d'efficience.

→ Possibilités de prêt au taux sans risque :

En combinant des actifs risqués à des actifs sans risque, on peut voir que des nouvelles possibilités de PF sont accessibles. Le PF E, constitué de peu d'actifs risqués et d'actifs risqués domine le PF B (constitué uniquement d'actifs risqués) qui est situé sur la frontière efficiente. Tous les PF situés en dessous de la tangente (RF-A) sont dominés par ceux qui se trouvent sur la tangente.

On parle de prêt car les PF qui s'y trouvent sont constitués d'obligations d'état peu risquées où l'investisseur se retrouve prêteur lorsqu'il les possède.

→ Possibilités d'emprunts.

L'investisseur a la possibilité d'emprunter des fonds pour pouvoir augmenter sa capacité d'investissement ce qui permet d'augmenter les possibilités de constitution de PF.

Un investisseur peut en effet augmenter ses possibilités de gain en investissant plus de fond que ce sa capacité personnelle lui permet. Une solution est l'achat à effet de levier. La théorie veut également que l'investisseur puisse emprunter au taux sans risque.

Le segment [AF] représente les nouvelles possibilités que l'investisseur possède pour constituer son PF grâce à l'utilisation de l'emprunt. Les PF situés sur [AF] répondent à des profils d'investisseurs aggresifs, tandis que ceux situé sur [RF,A] sont des profils plus prudents.

Note : l'effet de levier est un terme général pour designer tout type de technique destinée à multiplier les profits et les pertes (ex : endettement, achats d'actifs à long terme et produits dérivés, ...).

- Levier comptable : le rapport entre les capitaux moins le dettes et les capitaux

  ex : avec 100€ de capitaux propres (CP

  * Achat de 100€ de petrole. Le capital est de 100€ pas de dette. le levier comptable est de 1 sur 1. Valeur theorique de 100€, pas de dettes et 100€ de CP. La volatilité est egale à celle du Petrole.
    → Levier economique de 1 sur 1.
  * Emprunter 100€ et acheter 200€ de Petrole. Les capitaux sont de 200€ Les dettes de 100€ donc le levier comptable est de 2 pour 1. La valeur theorique est de 200, les CP sont de 100 donc le levier theorique est de 2 pour 1. La volatilité est double des capitaux propres (de celle d'une situation sans levier avec les m̅ capitaux), le levier economique est de 1 pour 2
  * Achat de 100€ de petrole brut, emprunt de 100€ d'essence et vente des 2prd pour 100€. On a 100€ en cash, 100€ de petrole brut et on doit 100€ de petrole. Les capitaux sont de 200, les dettes de 100, le levier comptable est de 2 pour 1. La valeur Th est de 200 de capitaux + 100€ de valeur Th de dettes avec 100€ de CP, le levier theorique est de 3 pour 1. La volatilité de la situation peut être la moitié de celle de l'investissement sans levier avec les m̅ capitaux, comme les prix de l'essence et du petrôle sont corrélé, le levier economique serait de 0,5 pour 1.

- Le calcule de la rentabilité financière est donné par la formule suivante

$$R_{fi} = \frac{R_E - I_{mp} - iD_F}{F_p} = R_{Eco} + (R_{Eco} - i)\frac{D_F}{F_p} \quad \text{où } R_{Eco} = \frac{R_E - I_{mp}}{F_p + D_F}$$

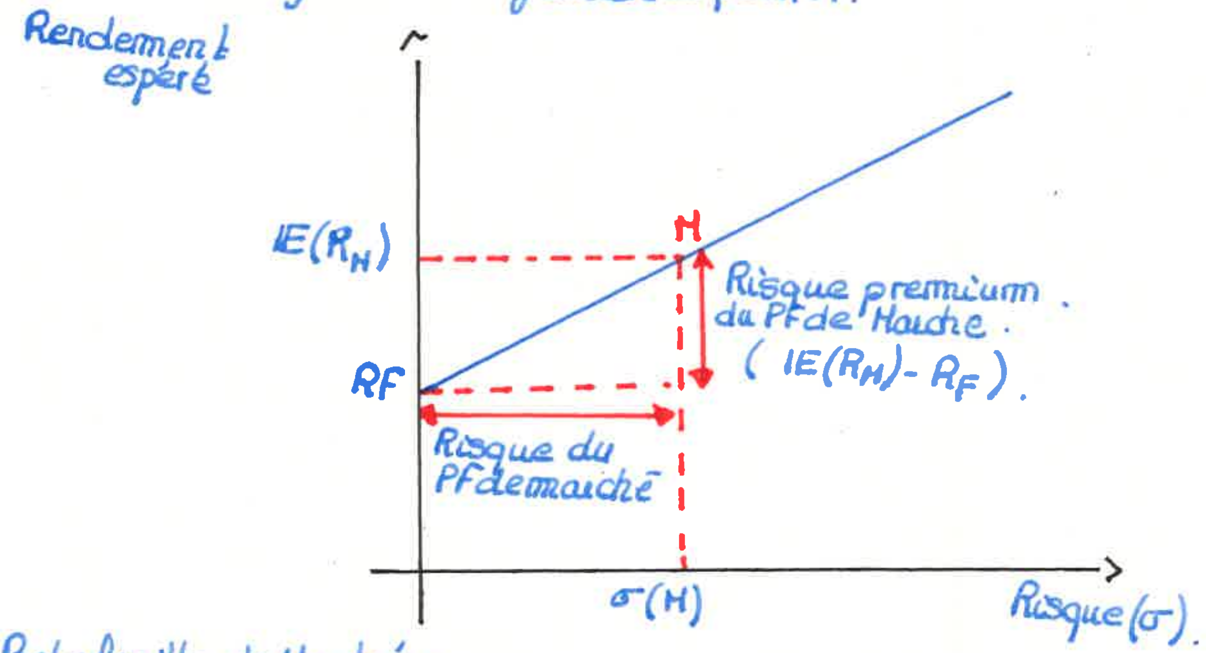
avec

R_{fi} : la rentabilité financiere
R_{eco} : la rentabilité economique
i : le taux d'interêt
D_F : la dette financiere
F_p : les Kptaux Propres.
R_E : le resultat d'exploitat
I_{mp} : les impôts
$\frac{D_F}{F_p}$: levier financier.
$R_{eco} - i$: levier d'exploitat°

→ Droite de marché des capitaux (CML)

La droite RF-A-F est appelée droite de marché des capitaux. Un investisseur doit choisir un des PF situé sur cette droite puisque ces derniers dominent tous les autres disponibles. Le choix du PF se fait alors en fonction de la tolérance au risque de l'investisseur. La droite du marché des capitaux met en évidence le point d'équilibre entre le rendement espéré et le risque pour un PF efficient.

Note : La droite de marché des capitaux sans la frontière d'efficience (dominée par cette droite) est tangente à cette frontière au point M.



→ Portefeuille de Marché :

Le pt M représente un PF uniquement constitué d'actifs risqués financés à 100 % par l'investisseur nommé Market Portefolio. C'est le portefeuille optimal d'actifs risqués. En théorie, le PF de marché est constitué de tous les actifs risqués du monde entier mais en pratique, la diversification dans des pd étrangers est conseillée. Comme il est constitué de tous les actifs existants, sa diversification est totale et son risque est uniquement constitué du risque systématique.

L'ensemble des PF situés sur la CML sont constitué du PM de Marché M et d'actifs sans risque ou ... d'achats sur marge (a effet de levier).

Le risque premium correspond au risque supplémentaire pris par l'investisseur qui attend alors un rendement plus élevé pour récompenser sa prise de risque.

Calcul du coef dir de la CML.

$$\alpha = \frac{\mathbb{E}(R_M) - R_F}{\sigma(M)}.$$

α correspond au prix du risque sur le marché pour les PF efficients. Il indique le rendement espéré supplémentaire accordé pour chaque pourcentage de risque supp que prend l'investisseur.

ex : si $\alpha = 0{,}3$, cela indique que le marché demande ce rendement supp pour chaq pourcent de risque supp pris.

→ Equation de la CML : Soit p, un PF qcq situé sur la CML, l'espérance de rendement se calcul :

$$\mathbb{E}(R_p) = R_f + \frac{\mathbb{E}(R_M) - R_F}{\sigma(M)} \times \sigma(p).$$

taux sans risque — risque du PF

Cette equation ne s'applique qu'aux PF efficients mais afin de se rapprocher de la réalité, une nouvelle equation peut être définie Vactif a.

$$IE(R_a) = R_F + IE(R_M) - \frac{R_F}{Var(H)\cancel{cov(a,M)}} \times cov(a,M).$$

Barrer l'inutile

Note : Le risque d'un actif peut être mesuré par sa cov avec le PF de marché.

➔ Une mesure standardisée du risque systematique est define par le coefficient β.

Le coef β est une mesure relative du risque non diversifiable d'un actif par rapport au PF de marché de l'ensemble des actifs. β met en relation la cov d'un actif avec le PF de marché et la variance du PF de marché.

➔ Coefficient β

Le coefficient β est une mesure standardisée du risque systematique qui correspond au risque ne pouvant pas être reduit via la diversification. β est une mesure relative du risque d'une action par rapport au portefeuille optimal du marché theorique.

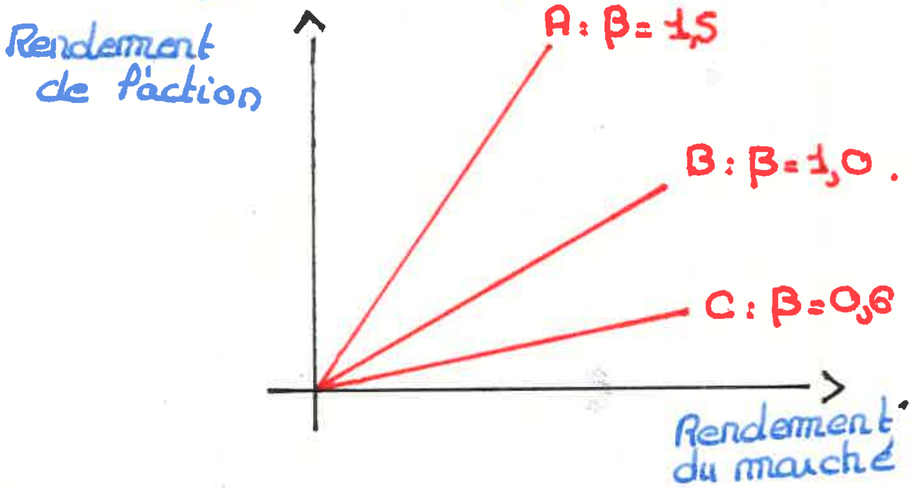
β met en evidence la covariance entre une action et le Market Portfolio par rapport à la variance de ce m̃ Market PF. Le β est une mesure de volatilité d'une action par rapport au marché.

Le β ne peut pas être compris comme le risque d'une action mais comme une mesure du risque systématique d'une action.

Calcul de β :

$$\beta = \frac{Cov(\text{action}, \text{Market PF})}{Var(\text{Market PF})}.$$

Graphiquement, un β different se traduit par un coefficient directeur. Cela relève une sensibilité par rapport au marché.



Un mouvement de 1 % du retour du marché entraine en moyenne un mvt de 1% de l'action B qui a un β égal à 1.

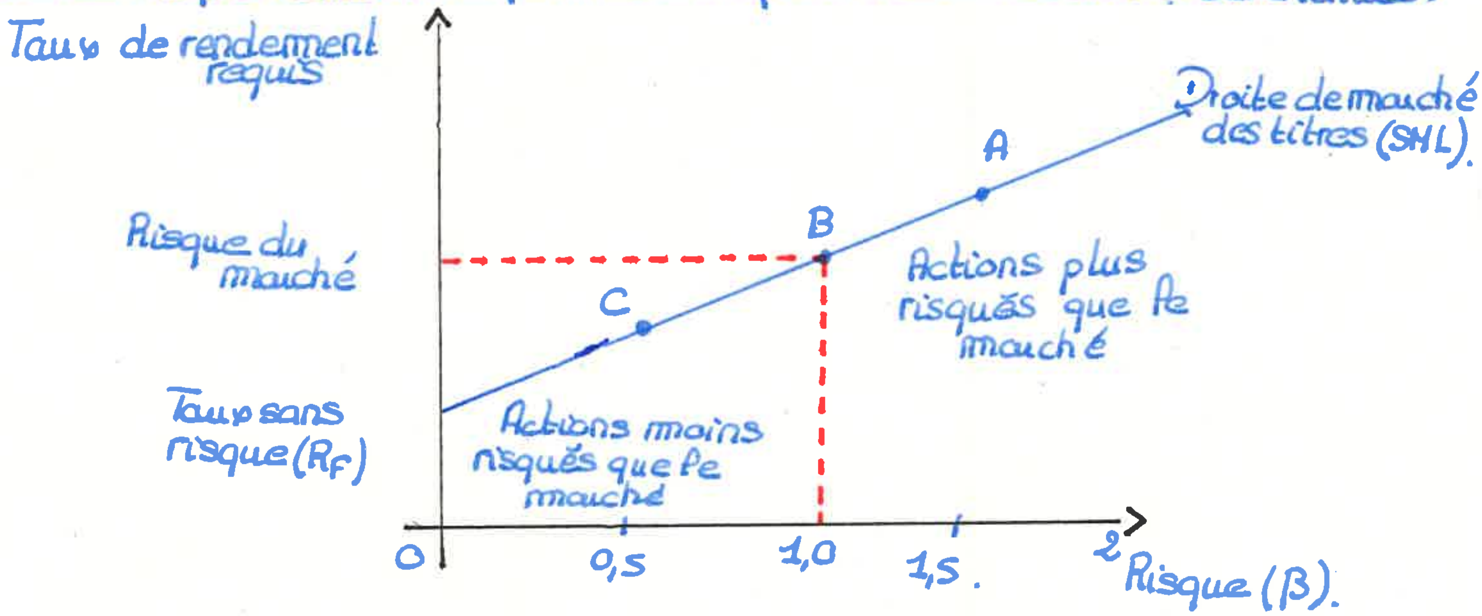
Pour l'action A avec un β = 1,5, les mvt de cette action seront 1,5 fois plus volatiles que ceux du marché comme à la baisse et à la hausse.

Pour l'action C avec un β = 0,6, les mvt de cette action auront une volatilite égale en moyenne à 60% de celle du marché à la hausse comme à la baisse.

→ MEDAF et droite de marché des titres.

Le MEDAF est une théorie portant sur la relation entre le risque et le retour d'un actif. Cette théorie met en évidence que le risque premium d'un actif est égal à son β fois le risque du marché.

La relation entre le MEDAF et β s'établit à travers la droite de marché des titres (SML). Cette droite permet d'établir le retour requis minimum d'une action qu'un investisseur attend pour un certain niveau de risque. C'est en fait le rendement espéré pour son niveau de risque. Cette droite permet de repérer les titres sous ou sur évalués.



Le MEDAF standardise et associe le retour espéré d'une action ou d'un PF pour un niveau de risque associé. Puisque chaque PF doit atteindre un niveau de diversification optimal l'investisseur doit ensuite choisir ses actions en fct° du β des actions, étant donné que β mesure le risque qui ne peut pas être diversifié.

→ Market Risk Premium :

Le MEDAF divise le risque du marché en deux risques :

- Le risk free : taux sans risque (eg : Emprunt d'état).
- Le market Risk premium : Différence entre le retour espéré d'une action et le taux sans risque.

$$\mathbb{E}(R_M) = \text{Market Risk Premium} + \text{Taux sans Risque}$$

Le rendement espéré du PF de marché est la somme du taux sans risque et du risque premium. Le risque premium correspond au rendement supplémentaire espéré par l'investisseur en compensation du risque supplementaire par rapport au taux sans risque.

Il faut maintenant utiliser le β pour trouver une valeur relative d'un actif par rapport au marché :

$$K(R_a) = \beta_a \left[\mathbb{E}(R_M) - R_F\right] + R_F$$

Retour requis d'une action : a

β associé à l'action a

Retour espéré du Market PF. (Portefeuille optimal du marché théorique.

Taux sans risque.

: le β de l'entreprise X est de 1,2. Le taux sans risque est de 0,5 et le retour espéré est de 12 %. On a donc :

$$* \ \beta_X = 1{,}2 \qquad * \ R_F = 0{,}5 \ \text{ et } \ \mathbb{E}(R_M) = 0{,}12$$

On peut donc écrire : $\mathbb{E}(X) = \frac{0{,}5}{100} + 1{,}2\left(0{,}12 - \frac{0{,}5}{100}\right) = 0{,}143 \approx 14{,}3\ \%$

Le retour espéré de l'action X pour son niveau de volatilité (de risque) est donc de 14,3 %