Riemann Surface

李想

本结题报告主要包含讨论班上讨论过的一些内容，以及在 Donaldson 这本书 [1] 与 b 站印度理工那个视频 [2] 学到的一点东西。限于水平，这里只是对黎曼曲面比较基础内容做一个总结。

1 定义与例子

1.1 定义

黎曼面，实际上就是一维复流形，满足相容性条件。

- 所谓一维复流形 S，就是局部"长得像"$\mathbb{C}$ 的拓扑空间。严格来说，拓扑空间 S（一般设为第二可数与 Hausdorff 的）上每个点都有一个包含它的开集 U，使得 U 与 $\mathbb{C}$ 的某个开集 V 同胚。假如说该同胚映射是 ϕ 的话，(U, ϕ) 就被称为一个 chart。而当 U_α 构成了 S 的一个覆盖时，这些 charts $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ 就构成了一个 atlas。
- 所谓相容性条件，就是说转换函数 $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ 是全纯的。注意，定义域与像都在 $\mathbb{C}$ 中，所以这里全纯的含义是明白的。

对于两个黎曼曲面 S_1, S_2 以及它们之间的映射 $f : S_1 \to S_2$，说它是全纯的，意思是拉回到复平面间的映射（称为局部表示）是全纯的，详细写写就是：对于每个 $x \in S_1$，都存在包含 x 的一个开集 U_α 与 S_2 中包含 $f(x)$ 的一个开集 V_β，使得 $f(U_\alpha) \subseteq V_\beta$ 并且 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_\alpha) \to \psi(V_\beta)$ 是全纯映射，这里 (U_α, φ) 和 (V_β, ψ) 是两个 charts。进一步，如果 f 是双射且 f,f^{-1} 都是全纯映射，则说 f 是全纯同构，说黎曼面 S_1,S_2 等价。

从范畴论的角度来看，可以定义一个黎曼面范畴 **Rie**，里面的对象是黎曼面，态射是全纯映射。而全纯同构实际上就是 **Rie** 里面的同构，即我们想要的两个黎曼面等价的概念。一个重要的问题就是黎曼面在全纯同构下如何被分类，它被解决于单值化定理。对单值化定理的探索也是贯穿学习黎曼面的主线，其表述在本报告的后文给出。

1.2 例子

例子 1.1 (复平面). *$\mathbb{C}$ 是非常平凡的黎曼面，不赘述。*

例子 1.2 (黎曼球面). *黎曼球面有很多不同的看法，比如可以看成嵌入 $\mathbb{R}^3$ 中的球面 $\mathbb{S}^2$，用两个 chart 覆盖（分别盖住北极点和南极点）；或者 $\mathbb{C}$ 添一个无穷远点 ∞ 使其紧化，∞ 附近的邻域定义为 $|z| > C$；或者可以看成投影空间 $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C}^2 \backslash \{0\} / \sim$，其中等价关系 $\sim$ 定义为 $(z_1, z_2) \sim (z_1', z_2') \Leftrightarrow (z_1, z_2), (z_1', z_2')$ 复线性相关，拓扑赋予商拓扑。这些黎曼面都是等价的。*

例子 1.3 (柱面). 柱面的构造是复平面 $\mathbb{C}$ 模掉 $\mathbb{Z}$，这样基本区域就是一个条带，并且对边认为是等价的。把这对边粘起来就形成了圆柱。事实上，柱面等价于 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

例子 1.4 (环面). 环面的构造是复平面 $\mathbb{C}$ 模掉 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$，这样基本区域就是一个平行四边形，并且对边认为是等价的。先把一对边粘起来就是一个有限的圆柱，再把圆柱两个底面粘起来（相当于另一条对边）就形成了环面 $\mathbb{T}^2$。

由于椭圆函数是 $\mathbb{C}$ 上的双周期函数，所以它实际上可以看成是在平行四边形上定义的，并且对边上函数值是相等的。由于平行四边形对边粘起来就是环面，因此可以在环面上研究椭圆函数。

2 一些代数拓扑常识：覆盖

2.1 基本群

设 X 是拓扑空间。从闭区间 $[0,1]$ 映到 X 中的连续映射被称为 X 中的曲线（道路）。如果 X 中的两条曲线 γ_1,γ_2 起始点相同，并且能从一条曲线连续变化到另一条曲线，则说这两条曲线在 X 中是定端同伦的（严格写就是一个连续函数 $F:[0,1]\times[a,b]\to X$ 满足一定的条件）。实际上复变函数中的柯西定理就可以写成同伦形式的：设 f 在区域 $D\subseteq\mathbb{C}$ 内全纯，则 f 沿两条在 D 中定端同伦的曲线的积分相等。

可以发现定端同伦实际上是一个等价关系，因此可以考察每条曲线所在的等价类 $[\gamma]$。对两个等价类 $[\alpha],[\beta]$，可以定义运算 $\cdot$ 使得 $[\alpha]\cdot[\beta]=[\alpha*\beta]$，其中 $*$ 表示曲线 α,β 首尾连接形成的新曲线（因此要求 α 的终点是 β 的起点）。

对拓扑空间 X 中的某个点 $a\in X$，将所有起点终点位于 a 的闭合曲线的等价类组成的集合记成 $\pi_1(X,a)$，上面赋予刚才定义的运算 $\cdot$，并且要求单位元是点 a 处的常值曲线 $[a]$，曲线等价类的逆元是反方向的曲线所在的等价类。则 $\pi_1(X,a)$ 在运算 $\cdot$ 下组成一个群，称为 X 在 a 处的基本群。可以证明，如果 X 是道路连通的，那么基本群与 a 在哪无关，因此可以简记为 $\pi_1(X)$，称为 X 的基本群。由于单连通空间里任何曲线都可以收缩于一点，所以单连通空间的基本群是平凡的。

实际上，基本群是拓扑空间的不变量，也即两个同胚的道路连通的拓扑空间的基本群是同构的。因此基本群提供了一个分类连通黎曼曲面的视角。

下表列出了刚才举的四个黎曼曲面例子的基本群：

X	$\pi_1(X)$
$\mathbb{C},\mathbb{S}^2$	平凡群
$\mathbb{C}\setminus\{0\}$	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{T}^2$	$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

2.2 覆叠映射与万有覆盖空间

通过上表知柱面 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}\simeq\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 的基本群是 $\mathbb{Z}$，环面 $\mathbb{T}^2\simeq\mathbb{C}/\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 的基本群是 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$，似乎基本群与商群的构造有某种联系。这种联系由覆叠映射与万有覆盖空间所揭示。

对拓扑空间 P,Q，所谓覆叠映射 $F:P\to Q$，是指对 Q 中任一点 y，存在它的一个邻域 V 使得 $F^{-1}(V)$ 是 P 中若干无交开集 U_α 的并，且每个 $F|_{U_\alpha}$ 都是 $U_\alpha\to V$ 的同胚。此

时 P 称为覆盖空间。如果 U_α 只有有限个，则数量被称为覆叠映射的叶数。由代数拓扑的知识知道，proper（proper 是指紧集的原像还是紧集的映射）且局部同胚的映射是覆叠映射。举一个例子：从复平面到柱面就有一个自然的覆叠映射 $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\mathbb{Z} : z \mapsto [z]$.（想象柱面上的一个小邻域，它映回去就是复平面上无数个小邻域的并，这些小邻域彼此恰好差个平移）。

设 $p : P \to Q$ 是覆盖。假若 P 是单连通的，则称 p 是万有覆盖，P 称为万有覆盖空间。有万有覆盖空间的唯一性定理：任何 Q 的单连通覆盖空间都是同胚的。因此万有覆盖空间在同胚下是唯一的。“万有”的含义是指满足“万有覆盖能覆盖住所有覆盖”：即对万有覆盖 $\tilde{p} : \tilde{P} \to Q$ 与任何覆盖 $p : P \to Q$（其中覆盖空间 P 是连通的），都存在唯一的覆盖 $f : \tilde{P} \to P$ 使得如下交换图成立：

$$\begin{tikzcd} & \tilde{P} \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\tilde{p}"] \\ P \arrow[r, "p"'] & Q \end{tikzcd}$$

对于黎曼面而言，任何黎曼面都是其万有覆盖模掉其基本群。因此回忆之前柱面 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ 的例子，实际上这就意味着柱面的万有覆盖空间是 $\mathbb{C}$，由 $\mathbb{C}$ 模掉基本群 $\mathbb{Z}$ 给出。同理，环面 $\mathbb{T}^2$ 的万有覆盖空间也是 $\mathbb{C}$. 而对于单连通的黎曼曲面，其万有覆盖空间显然是自身。

2.3 分歧覆盖

现在再给出一个覆叠映射例子。设 k 是正整数，复平面上单位圆盘到自身的全纯映射 $f : z \mapsto z^k$ 在 $z \neq 0$ 附近是一一对应，而在 $z = 0$ 附近（去掉 0）是叶数为 k 的覆叠映射。

更一般地，有如下引理：如果 0 的邻域 $U \subseteq \mathbb{C}$ 内有一个全纯函数 f 满足 $f(0) = 0$，但不全为 0，那么存在唯一的 k 使得在更小的邻域 U' 内会有全纯函数 g 使得 $f = g^k$ 并且 $g'(0) \neq 0$。实际上这个 k 就是 f 在 0 处零点的阶数。应用到连通的黎曼面 X, Y 上，对于非常值全纯映射 $F : X \to Y$ 及 $x \in X$，将 F 拉回到 $\mathbb{C}$ 上的局部表示就可以应用刚才的引理，得出存在唯一的整数 k_x 使得找到 X 中 x 周围的 chart 与 Y 中 $f(x)$ 周围的 chart，使得 F 被恰好表示为 $z \mapsto z^{k_x}$。

由此可引入分歧覆盖的概念：设 $f : X \to Y$ 是拓扑空间的连续映射，如果对 $p \in X$，存在 p 的邻域使得 $f : U \setminus \{p\} \to f(U) \setminus \{f(p)\}$ 是有限叶数 k 的覆叠映射，则称 f 是分歧覆盖，称 p 覆盖 $f(p)$ k 次。根据刚才的讨论，黎曼面之间的非常值全纯映射就是覆叠映射，且每个 $x \in X$ 覆盖 $f(x)$ k_x 次。

回到黎曼面 X, Y 上的非常值 proper 全纯映射 $F : X \to Y$。设 $R \subseteq X$ 是满足 $k_x > 1$（相当于零点有重数了）的点 x 的集合，则因为非常值全纯函数导数不能全为 0，其零点具有孤立性，因此 R 是 X 中的离散子集。并且由 proper 映射把离散子集映到离散子集知 $F(R)$ 在 Y 中离散，并且对任何 $y \in Y$，其原像组成的集合 $f^{-1}(y)$ 是 X 的有限子集（因为 $f^{-1}(y)$ 是紧集）。这个集合 R 中的点被称为 F 的分歧点，其像集 $F(R)$ 中的点被称为 critical values。对 $y \in Y$，定义 $d(y) = \sum_{x \in F^{-1}(y)} k_x$，由于 $F^{-1}(y)$ 是有限集所以 d 是良定义的，它的意义是原像的个数（计重数）。可以证明 $d(y)$ 是局部常值的，因此在 Y 连通的条件下，$d(y)$ 就是常值函数，该不变量就被称为 F 的 degree。

运用 degree 的概念，甚至可以证明代数基本定理。设 $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是非常值多项式，利用球极投影转到 $\tilde{P} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$，这样定义域就是紧的，因此 $\tilde{P}$ 自动 proper。再由于映到的 $\mathbb{S}^2$ 是连通的，故 $\tilde{P}$ 的 degree 是常数，并且显然不为 0 （因为 $f^{-1}(\mathbb{S}^2) \neq \emptyset$）。所以每个点都有原像，故 $\tilde{P}$ 是满射，推出 P 是满射，特别地 $P(z) = 0$ 有根。

3 在黎曼面上做微积分

3.1 微分形式及其积分

为了能在黎曼面（一般地，在流形）上做微积分，我们需要精心定义微分形式、切空间、外微分、外积及微分形式的积分等各种概念，粗略地总结如下表：

0-形式 $f \in \Omega_S^0$	$f : S \to \mathbb{R}$，光滑
切空间 TS_p	S 在 p 处的局部线性化
余切空间 T^*S_p	TS_p 的对偶空间
余切丛 T^*S	$\bigcup_{p\in S} T^*S_p$
1-形式 $\alpha \in \Omega_S^1$	$\alpha : S \to T^*S$，光滑
0-形式的外微分 df	$d : \Omega_S^0 \to \Omega_S^1$
1-形式沿曲线 γ 的积分 $\int_\gamma \alpha$	$\int_0^1 \alpha_1 \frac{d\gamma_1}{dt} + \alpha_2 \frac{d\gamma_2}{dt}$
$\Lambda^2 E^*$	反对称双线性映射 $E \times E \to \mathbb{R}$ 的集合
外积 $\wedge$	$\wedge : E^* \times E^* \to \Lambda^2 E^*$
2-形式 $\rho \in \Omega_S^2$	$\rho : S \to \bigcup_{p\in S} \Lambda^2 T^*S_p$，光滑
1-形式的外微分 $d\alpha$	$d : \Omega_S^1 \to \Omega_S^2$
2-形式沿曲面 S 的积分 $\int_S \rho$	$\int_{\mathbb{R}^2} R(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$

下面补充一下上表没有讲清楚的细节：

- 切空间 TS_p：S 在点 p 处的切空间定义为曲线 $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to S$（$\gamma(0) = p$）的等价类，等价关系 $\sim$ 定义为 $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Leftrightarrow \gamma_1$ 与 γ_2 的局部表示在 p 处的一阶导数相等。

- 余切空间 T^*S_p：代数上可以直接定义为切空间的对偶空间。Donaldson 书上将 p 处的与切空间定义为 p 的邻域内光滑函数（0-形式）的等价类 $[df]_p$，等价关系 $\sim$ 定义为 $f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow f_1, f_2$ 的局部表示在 p 处的邻域内差为常数。如果选取局部坐标 x_1, x_2，那么 $[df]_p = \frac{\partial f}{\partial x_1}[dx_1]_p + \frac{\partial f}{\partial x_2}[dx_2]_p$，因此 $[dx_1]_p$ 与 $[dx_2]_p$ 构成了 T^*S_p 的一组基，即赋予了 T^*S_p 线性空间结构。由此可以证明 $T^*S_p \simeq \mathbf{Hom}(TS_p, \mathbb{R})$，即与代数上对偶空间那个定义是一样的。

- 1-形式 $\alpha \in \Omega_S^1$：由于 $[dx_1]_p$,$[dx_2]_p$ 构成了 T^*S_p 的一组基，所以存在 $\alpha_1(p)$, $\alpha_2(p)$ 使得 $\alpha(p) = \alpha_1(p)[dx_1]_p + \alpha_2(p)[dx_2]_p$. 现在让 p 在 S 上变动，则上式可以表示为 $\alpha = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2$ （其中 dx_i 定义为 $dx_i(p) = [dx_i]_p$, $i = 1, 2$）

- 0-形式的外微分 df：定义 $df(p) = [df]_p$. 它满足性质：$d(fg) = fdg + gdf$. 这个定义与刚才 dx_i 的定义是兼容的，并且在局部坐标下 $df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2$.

- 1-形式沿曲线 γ 的积分 $\int_\gamma \alpha$：局部坐标下可以写 $\alpha = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2$，代入曲线 γ 就给出了拉回映射 $\alpha_1 \frac{d\gamma_1}{dt} + \alpha_2 \frac{d\gamma_2}{dt}$，然后定义 1-形式 α 沿 γ 的积分是其拉回映射在 $[0, 1]$ 上的积分。

- 外积 $\wedge$：它需要满足 $(\alpha \wedge \beta)(e, f) = \alpha(e)\beta(f) - \beta(e)\alpha(f)$. 这可以看成一个行列式，因此自然满足反对称性质 $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$.

- 1-形式的外微分 $d\alpha$：在局部坐标下写出 $\alpha = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2$. 定义 $d(\alpha) = (\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2})$. 它满足性质：若 $f \in \Omega_S^0$ 且 $\alpha \in \Omega_S^1$，则 $d^2 f = 0$ 且 $d(f\alpha) = df \wedge \alpha + f d\alpha$.
- 2-形式沿曲面 S 的积分 $\int_S \rho$：如同刚才定义 1-形式的积分一样，在局部坐标下将 ρ 写成其拉回映射 $R(x_1, x_2)dx_1 dx_2$，然后定义 ρ 在 S 上的积分是 $R(x_1, x_2)dx_1 x_2$ 在 $\mathbb{R}^2$（的某一紧支集）上的（勒贝格）积分。转换局部坐标则拉回映射将会差一个雅可比行列式。

外微分算子 d 与边界 ∂ 事实上是有对应关系的。比如 $d^2 = 0$ 的含义，其实就对应于 $\partial^2 = 0$，即边界的边界为空。事实上，这层对应关系在积分中被 Stokes 定理所概括：$\int_{\partial S} \alpha = \int_S d\alpha$，即微分形式沿 S 边界的积分等于其外微分沿 S 的积分。

3.2 de Rham 上同调与 Poincare 引理

如果 $d\omega = 0$，则称微分形式 ω 是闭形式；如果存在微分形式 η 使得 $\omega = d\eta$，则称 ω 是恰当形式。设 $\omega \in \Omega_S^i$，则显见 ω 是闭形式当且仅当 $\omega \in \ker(d : \Omega_S^i \to \Omega_S^{i+1})$，$\omega$ 是恰当形式当且仅当 $\omega \in \mathrm{im}(d : \Omega_S^{i-1} \to \Omega_S^i)$。由于 $d^2 = 0$，所以所有恰当形式都是闭形式，故 $\mathrm{im}(d : \Omega_S^{i-1} \to \Omega_S^i) \subseteq \ker(d : \Omega_S^i \to \Omega_S^{i+1})$，因此可以考虑后者对前者的商群，这就引出了 de Rham 上同调群。

对 $i = 0, 1, 2$，定义黎曼面 S 的 i 次 de Rham 上同调群是

$$H^i(S) = \ker(d : \Omega_S^i \to \Omega_S^{i+1}) / \mathrm{im}(d : \Omega_S^{i-1} \to \Omega_S^i).$$

首先非常清楚，$H^0(\mathbb{C}) = \mathbb{R}$，因为 $H^0(\mathbb{C})$ 就是那些 d 以后是 0 的函数，即常函数。而 Poincare 引理告诉我们，当 $i = 1, 2$ 时，$H^1(\mathbb{C}) = 0$，也就是说，$\mathbb{C}$ 上的闭形式与恰当形式其实就是一回事。而这个结论对一般的黎曼曲面未必成立。比如，借助 Stokes 定理，我们可以计算 $\mathbb{C} \backslash \{0\}$ 的 1 次 de Rham 上同调群 $H^1(\mathbb{C} \backslash \{0\}) = \mathbb{R} \neq 0$.

4 单值化定理

最后陈述一下单值化定理，在 Donaldson 这本书的 10.1 节，作为报告的总结（具体的证明限于水平不包含在本报告之内）。它给出了黎曼曲面在全纯同构下的分类。

定理 4.1. 连通、单连通且非紧的黎曼面等价于 $\mathbb{C}$ 或上半平面 $\mathbb{H}$。

推论 4.1. 任何黎曼曲面都等价于以下之一：

- 黎曼球面 $\mathbb{S}^2$；
- $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}/\Lambda$，其中 Λ 是 *lattice*；
- $\mathbb{H}/\Gamma$，其中 Γ 是 $PSL(2, \mathbb{R})$ 的离散子群。

References

[1] S K Donaldson. *Riemann surfaces*. Oxford University Press, 2011.

[2] Night1611. *An Introduction to Riemann Surfaces and Algebraic Curve*. www.bilibili.com. URL: https://www.bilibili.com/video/BV14t4y1k7ua.