实变函数笔记

李想 (网名：赛森 Lambda-CDM)

编译日期 2021 年 5 月 15 日

目录

前言

本文档是对参考文献的学习笔记。

预备知识：只需数学分析基础，建议回顾 Riemann 积分以及 $\mathbb{R}^n$ 中的开闭集等知识。

如果读者追求学习速度，第一次阅读时可以先跳过以下章节：

1.4, 1.5, 2.2.2, 2.3, 3.3.3

本文档同步发布于：

- Github https://github.com/lambdacdm/-Math-Playground
- 知乎 https://zhuanlan.zhihu.com/p/342820320

第一章 Lebesgue 测度

1.1 动机：定义长度

我们想给 $\mathbb{R}$ 的子集定义长度的概念。在最一开始，需要回顾一下关于开集、闭集、开区间、闭区间的一些知识。

定义 1.1.

- 如果两个闭区间的内部是无交的，则称这两个闭区间几乎无交 (Stein)[1]
- 定义有限个有界开区间的并集为初等开集，有限个有界闭区间的并集为初等闭集 (Rudin) [2]
- 定义可数个开集的交集为 G_δ 集，可数个闭集的并集为 F_σ 集。

关于 $\mathbb{R}$ 上的开集，有如下结论：

引理 1.1 (开集的结构性定理 (Stein, Chapter 1, Theorem 1.3)[1]).

任何开集 $A \subseteq \mathbb{R}$ 均可唯一地写成可数个无交的开区间的并。

引理 1.2 (开集的另一结构性定理 (Stein, Chapter 1, Theorem 1.4)[1]).

任何开集 $A \subseteq \mathbb{R}$ 均可写成可数个几乎无交的有界闭区间的并。

这样看起来区间的功能其实非常强大，强大到足以表示开集。因此我们先来定义开区间的长度：

定义 1.2 (开区间的长度).

- 如果开区间 (a, b) 是有界的，其长度定义为 $\operatorname{length}((a,b)) = b - a$
- 如果开区间 I 是无界的，其长度定义为 $\operatorname{length}(I) = +\infty$

有了开区间的辅助，现在可以对任何 $A \subseteq \mathbb{R}$ 定义“长度”的概念了。

定义 1.3 (外测度).

$A \subseteq \mathbb{R}$ 的外测度定义为

$$|A| := \inf\left(\sum_{i=1}^{\infty} \text{length}(I_i)\right)$$

其中 inf 取遍所有满足 $\bigcup I_i \supseteq A$ 的开区间序列 I_i

用实数系的完备性公理/定理可以证明：

引理 1.3 (外测度兼容长度).

$|[a,b]| = |(a,b)| = \text{length}\left((a,b)\right)$
特别地 $|\emptyset| = 0$

这表明外测度的定义是兼容开区间长度定义的。

此外，可以证明

引理 1.4 (外测度的单调性).

如果 $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$，那么 $|A| \le |B|$

引理 1.5 (外测度的次可加性).

设 $A_i \subseteq \mathbb{R}$，则

$$\left|\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right| \le \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|$$

单调性和次可加性符合我们对长度的直觉。

由外测度的定义和次可加性立刻得到

引理 1.6 (外测度的半正则性).

设 $A \subseteq \mathbb{R}$。对任何 $\varepsilon > 0$，存在开集 $G \supseteq A$，使得 $|G| \le |A| + \varepsilon$
（若 $|A| < +\infty$，可以要求 $|G| < |A| + \varepsilon$）

我们希望进一步把次可加性加强为（无交的）可加性。可以证明如下引理：

引理 1.7 (弱化版本的可加性 (GTM 282, 2.62, 2.63) [3]).

如果 $\mathbb{R}$ 的子集 A 和 B 无交，且 B 是开集或闭集，那么 $|A \cup B| = |A| + |B|$

看起来外测度似乎已经能满足我们对长度的定义。可惜外测度并不满足一般情况下的可列可加性（甚至有限可加性也不满足）。

引理 1.8 (外测度没有可加性 (GTM 282, 2.18) [3]).

如果选择公理成立，那么存在无交的 $A \subseteq \mathbb{R}$ 和 $B \subseteq \mathbb{R}$，使得 $|A \cup B| \ne |A| + |B|$

事实上，下面的引理表明我们无法构造出适用于 $\mathbb{R}$ 中所有子集的完美的长度的定义。

引理 1.9 (不存在 $\mathbb{R}$ 上完美的长度的定义 (GTM 282, 2.22)[3]).

如果选择公理成立，则不存在满足如下条件的映射 μ：

(1) μ 是 $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ 的映射

(2) 对任何开区间 I，$\mu(I) = \text{length}(I)$

(3) 对任何无交的集合序列 $A_1, A_2, \cdots$，有 $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$

(4) 平移不变，即 $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall A \subseteq \mathbb{R}$, $\mu(t + A) = \mu(A)$

之前定义的外测度满足 (1)(2)(4)，但很可惜不满足 (3)。(在选择公理成立的前提下，可以构造两个无交的集合 A, B 使得 $|A \cup B| \neq |A| + |B|$) 然而 (3) 是可列可加性，对于长度的描述是至关重要的。因此我们要对外测度做一些修改，使得 (3) 成立，但这样就不得不放弃其他三条性质中的至少一条了。而 (2)(4) 也是长度明显应该具有的性质，因此我们不得不放弃 (1)。事实上，定义域 $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 过于强了，我们其实并不需要给每个 $\mathbb{R}$ 中的子集指定长度，只需要对一部分子集指定长度（毕竟长得乱七八糟的点集也没有必要非得赋予长度）。

因此，下面的工作就是寻找 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$，使得外测度限制在 $\mathcal{S}$ 上满足可列可加性 (3)。这构成了定义**测度**的动机。

1.2 测度空间

上一节所讲的 $\mathbb{R}$ 上的外测度可以推广到一般的空间 X 上去：

定义 1.4 (抽象的外测度).

设 μ^* 是 $\mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ 的映射，满足：

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) μ^* 满足单调性，即如果 $A_1 \subseteq A_2$，那么 $\mu^*(A_1) \le \mu^*(A_2)$

(iii) μ^* 满足次可加性，即如果 $A_1, A_2, \cdots$ 是 X 的子集序列，那么

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

则称 μ^* 是 X 上的**外测度**。

命题 1.1.

由定义 1.3 所定义的外测度确实是 $\mathbb{R}$ 上的外测度。

证明. 由引理 1.3，1.4，1.5 即得。 □

单单上面陈列的条件还不够，我们需要可列可加性。由上一节的讨论，我们需要找一个 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 使得外测度限制在其上满足可列可加性。我们先思考一下可以定义“长度”的集族 $\mathcal{S}$ 应该满足哪些性质。一般地，在空间 X 上下面性质应该是必要的：

定义 1.5 ($\sigma-$ 代数).

如果 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 满足下述条件：

- $\emptyset \in \mathcal{S}$
- $A \in \mathcal{S} \Rightarrow X \backslash A \in \mathcal{S}$
- $A_i \in \mathcal{S} \Rightarrow \bigcup A_i \in \mathcal{S}$

则称 $\mathcal{S}$ 为 X 上的 $\sigma-$ **代数**。

$\sigma-$ 代数就是我们想要的可定义长度的集合（可测集）的基石。

定义 1.6 (可测空间、测度与测度空间).

如果 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 是 X 上的 $\sigma-$ 代数，则称 $(X,\mathcal{S})$ 是**可测空间**，称 $\mathcal{S}$ 中的集合是 $\mathcal{S}-$ 可测的。

进一步，如果映射 $\mu : \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ 满足 $\mu(\emptyset) = 0$ 且满足可列可加性（即对任何无交的集合序列 $A_i \in S$ 有 $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$），则称 μ 是 $(X,\mathcal{S})$ 上的**测度**，称 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 是**测度空间**。

通过这个定义可以发现，上一节所定义的“外测度”确实不是测度。

命题 1.2.

由定义 1.3 所定义的外测度不是 $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ 上的测度。

证明. 由引理 1.8，外测度不满足可列可加性。 □

以后如不加说明，**“外测度”** 均是指由定义 1.3 所定义的外测度。

定义 1.7 (子可测空间、子测度空间).

设 $(X, \mathcal{S})$ 是可测空间。如果 $E \subseteq X$ 并且 $(E, \mathcal{S} \cap \mathcal{P}(E))$ 是可测空间，则称 $(E, \mathcal{S} \cap \mathcal{P}(E))$ 是 $(X, \mathcal{S})$ 的**子可测空间**。
设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是测度空间。如果 $E \subseteq X$ 并且 $(E, \mathcal{S} \cap \mathcal{P}(E), \mu|_{\mathcal{S} \cap \mathcal{P}(E)})$ 是测度空间，则称 $(E, \mathcal{S} \cap \mathcal{P}(E), \mu|_{\mathcal{S} \cap \mathcal{P}(E)})$ 是 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 的**子测度空间**。

命题 1.3.

设 $(X, \mathcal{S})$ 是可测空间，并且 $E \subseteq X$。则 $(E, \mathcal{S} \cap \mathcal{P}(E))$ 是 $(X, \mathcal{S})$ 的子可测空间，等价于：$E \in \mathcal{S}$.
设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是测度空间，并且 $E \subseteq X$。则 $(E, \mathcal{S} \cap \mathcal{P}(E), \mu|_{\mathcal{S} \cap \mathcal{P}(E)})$ 是 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 的子测度空间，等价于：$E \in \mathcal{S}$.

证明. 这里只证明子测度空间的那一部分。

$(\Rightarrow)$: 如果 $(E, \mathcal{S} \cap \mathcal{P}(E), \mu|_{\mathcal{S} \cap \mathcal{P}(E)})$ 是 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 的子测度空间，则 $E \in \mathcal{S} \cap \mathcal{P}(E) \subseteq \mathcal{S}$
$(\Leftarrow)$: 如果 $E \in \mathcal{S}$，则有：

- $\emptyset \in \mathcal{S} \cap \mathcal{P}(E)$
- 若 $A \in \mathcal{S} \cap \mathcal{P}(E)$，则 $E \backslash A \in \mathcal{S} \cap \mathcal{P}(E)$ （因为 $\mathcal{S}$，$\mathcal{P}(E)$ 皆对补集封闭）
- 若 $A_i \in \mathcal{S} \cap \mathcal{P}(E)$，则 $\bigcup A_i \in \mathcal{S} \cap \mathcal{P}(E)$（因为 $\mathcal{S}$，$\mathcal{P}(E)$ 皆对可列并封闭）

因此 $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}(E)$ 是 E 上的 $\sigma-$ 代数。故 $(E, \mathcal{S} \cap \mathcal{P}(E))$ 是可测空间。

进一步，由于 μ 满足可列可加性，则其限制 $\mu|_{\mathcal{S} \cap \mathcal{P}(E)}$ 当然也满足可列可加性，故它是 $(E, \mathcal{S} \cap \mathcal{P}(E))$ 上的测度。因此 $(E, \mathcal{S} \cap \mathcal{P}(E), \mu|_{\mathcal{S} \cap \mathcal{P}(E)})$ 是 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 的子测度空间。 □

在寻找具体的 $\mathcal{S}$ 之前，先讨论测度具有的性质：

命题 1.4 (测度的单调性).

设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是测度空间，$A, B \in \mathcal{S}$. 若 $A \subseteq B$，则 $\mu(A) \leq \mu(B)$

命题 1.5 (测度的次可加性).

设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是测度空间，$A_i \in \mathcal{S}$. 则

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

命题 1.6 (测度的连续性).

设 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 是测度空间，集合序列 $A_i \in \mathcal{S}$

- 如果 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$，则 $\mu(\bigcup A_i) = \lim_{i\to\infty}\mu(A_i)$
- 如果 $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$，则 $\mu(\bigcap A_i) = \lim_{i\to\infty}\mu(A_i)$

上面这些性质确实是测度应该具有的性质，而且连续性使得我们可以对可测集进行“逼近”，这是后续内容的核心想法。

为了具体构造出可测空间 $(\mathbb{R},\mathcal{S})$，我们需要给 $\mathcal{S}$ 添加一些具体的元素。例如，所有的开区间应该可以定义长度（即兼容 length）。故要求所有开区间都要在 $\mathcal{S}$ 中。$\sigma-$ 代数又会要求开区间的可列并都要在 $\mathcal{S}$ 中，根据引理 1.1 ，$\mathbb{R}$ 中所有的开集都会在 $\mathcal{S}$ 中。满足这个条件的最小的 $\sigma-$ 代数 $\mathcal{S}$ 被称为 Borel $\sigma-$ 代数。在一般的空间 X 中，有如下的定义：

定义 1.8 (Borel 集).

设 X 是拓扑空间[a]。包含 X 中所有开集的最小的 $\sigma-$ 代数 $\mathcal{S}$ 被定义为 X 上的 Borel $\sigma-$ 代数，其中的元素称为 X 上的 Borel 集。

$\mathbb{R}$ 上的 Borel $\sigma-$ 代数记作 $\mathcal{B}$。

[a]如果读者不熟悉拓扑空间的概念，可以把它理解成在上面定义了开集。如 $\mathbb{R}$ 是拓扑空间，因为 $\mathbb{R}$ 上定义了开集。

根据 $\sigma-$ 代数的定义，$\mathcal{B}$ 也会同时包含所有 $\mathbb{R}$ 中的闭集、G_δ 集与 F_σ 集。这样常见的集合都在 $\mathcal{B}$ 中。

现在 $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ 是可测空间，后续将证明外测度的确是 $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ 上的测度，这个测度被称为 **Borel 测度**。这样看起来就已经完全解决了长度的定义问题。事实上我们可以做的更好：我们能构造出一个比 $\mathcal{B}$ 更大的 $\sigma-$ 代数 $\mathcal{L}$，使得外测度在 $(\mathbb{R},\mathcal{L})$ 上是测度，这个测度被称为 **Lebesgue 测度**。下一节将会对 Borel 与 Lebesgue 测度进行细致的讨论。

1.3 Borel 与 Lebesgue 测度

本文定义两个测度：

- Borel 测度
- Lebesgue 测度

1.3.1 Borel 测度

下面的定义可能稍显生硬，我们在后面再阐述背后的动机。

定义 1.9 (Lebesgue 可测集).

如果集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ 满足：对任何 $\varepsilon > 0$，存在闭集 $F \subseteq A$，使得 $|A \backslash F| < \varepsilon$，则称 A 是 Lebesgue 可测集。记 $\mathcal{L}$ 是所有 Lebesgue 可测集构成的集族。

由这个定义，可以证明如下结论：

命题 1.7.

$\mathcal{L}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 $\sigma-$ 代数。

证明.（这个证明有点长，在此先略过，日后补充） □

命题 1.8.

$\mathcal{L}$ 包含所有的开集，进一步包含所有的 Borel 集，即 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}$

证明. 由 $\mathcal{L}$ 的构造知 $\mathcal{L}$ 包含所有的闭集（取 F 等于闭集本身）。由命题 1.7，$\mathcal{L}$ 是 $\sigma-$ 代数，由对补封闭知包含所有的开集。而 Borel $\sigma-$ 代数是最小的包含所有开集的 $\sigma-$ 代数，因此 $\mathcal{L}$ 包含所有的 Borel 集。 □

引理 1.10 (GTM 282, 2.66[3]).

如果 $\mathbb{R}$ 的子集 A 和 B 无交，且 B 是 Borel 集，那么 $|A \cup B| = |A| + |B|$

证明. 只需证明 $|A \cup B| \geq |A| + |B|$ （另一边是次可加性）。

由命题 1.8，B 是 Lebesgue 可测集，故对任何 $\varepsilon > 0$，存在闭集 $F \subseteq A$ 使 $|B \backslash F| < \varepsilon$。故

$$
\begin{aligned}
&|A \cup B| \geq |A \cup F| && (\text{引理 } 1.4) \\
=&|A| + |F| && (\text{引理 } 1.7) \\
=&|A| + |B| - |B \backslash F| && (\text{注意到} B = (B \backslash F) \cup F\text{，然后用引理 } 1.7) \\
\geq&|A| + |B| - \varepsilon
\end{aligned}
$$

让 ε 任意小就推出 $|A \cup B| \geq |A| + |B|$ □

有了上述引理的准备，就能证明外测度确实是 $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ 上的测度。

定理 1.1 (Borel 测度 (GTM 282, 2.68)[3]).

外测度限制在 $\mathcal{B}$ 上是 $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ 上的测度。(称这个测度为 **Borel 测度**)

证明. 只需证外测度限制在 $\mathcal{B}$ 上满足可列可加性。

设 $B_1, B_2, \cdots$ 是无交的 Borel 集序列。由引理 1.10 并归纳可知外测度限制在 $\mathcal{B}$ 上满足有限可加性。故对于任何 $n \in \mathbb{Z}^+$ 有

$$\sum_{i=1}^{n} |B_i| = |\bigcup_{i=1}^{n} B_i| \leq |\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i|$$

令 $n \to \infty$ 知

$$\sum_{i=1}^{\infty} |B_i| \leq |\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i|$$

不等号的另一个方向由次可加性给出。因此可列可加性得证。 □

1.3.2 Lebesgue 测度

我们借助 Lebesgue 可测集，成功证明了外测度确实是 $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ 上的测度。但是不要急忙拆掉 $\mathcal{L}$ 这个“脚手架”。事实上，根据命题 1.7 和 1.8，我们发现 $\mathcal{L}$ 是比 $\mathcal{B}$ 更大的 $\sigma-$ 代数。倘若外测度在 $(\mathbb{R},\mathcal{L})$ 上也是测度的话，那毫无疑问这将给出更强有力的测度。

在讨论 $(\mathbb{R},\mathcal{L})$ 之前，先给出 Lebesgue 可测的若干等价条件。

定理 1.2 (Lebesgue 可测集的内侧逼近 (GTM 282,2.71) [3]).

下列条件等价：

(1) $A \in \mathcal{L}$（即对任何 $\varepsilon > 0$，存在闭集 $F \subseteq A$，使得 $|A \backslash F| < \varepsilon$）

(2) 存在 F_σ 集 $F \subseteq A$ 使得 $|A \backslash F| = 0$

(3) 存在 Borel 集 $B \subseteq A$ 使得 $|A \backslash B| = 0$

值得一提的是，上述 (3) 是 GTM 282 对 Lebesgue 可测集的定义 (GTM 282, 2.70[3])

证明.（未完待续） □

现在可以证明外测度确实是 $(\mathbb{R},\mathcal{L})$ 上的测度。

定理 1.3 (Lebesgue 测度 (GTM 282, 2.72)[3]).

外测度限制在 $\mathcal{L}$ 上是 $(\mathbb{R},\mathcal{L})$ 上的测度。(称这个测度为 **Lebesgue 测度**)

证明. 只需证明外测度限制在 $\mathcal{L}$ 上满足可列可加性。

设 $A_n \in \mathcal{L}$ 是无交的 Lebesgue 可测集序列。根据定理 1.2，存在 Borel 集 $B_n \subseteq A_n$ 使得 $|A_n \backslash B_n| = 0$. 再由无交并 $A_n = (A_n \backslash B_n) \cup B_n$ 及引理 1.10 知 $|A_n| = |A_n \backslash B_n| + |B_n| = |B_n|$. 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| = |\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n| \leq |\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|$$

这意味着可列可加性 $\sum |A_n| = \bigcup A_n$ 成立。 □

1.4　Lebesgue 可测集的逼近

本节描述两种逼近 Lebesgue 可测集的方式。

- 内外逼近
- 初等逼近

1.4.1　内外逼近

现在说明之前定义的 Lebesgue 可测集的直观意义。回想定义是：对于任何 $\varepsilon > 0$，存在闭集 $F \subseteq A$ 使得 $|A \backslash F| < \varepsilon$，这就说明了 Lebesgue 可测集是可以被内部的闭集所逼近的，并且 $|A \backslash F|$ 衡量了逼近过程中的误差。

定理 1.2 进一步说明了，Lebesgue 可测集几乎就是内部的 F_σ 集，或是内部的 Borel 集（差别只是外测度为 0 的集合）。这些均反映了 Lebesgue 可测集可以从内侧逼近的事实。

下面给出了对偶的定理，描述了 Lebesgue 可测集是如何从外侧被逼近的。

定理 1.4 (Lebesgue 可测集的外侧逼近 (GTM 282,2.71) [3]).

下列条件等价：

(1) $A \in \mathcal{L}$

(2) 对任何 $\varepsilon > 0$，存在开集 $G \supseteq A$，使得 $|G \backslash A| < \varepsilon$

(3) 存在 G_δ 集 $G \supseteq A$ 使得 $|G \backslash A| = 0$

(4) 存在 Borel 集 $B \supseteq A$ 使得 $|B \backslash A| = 0$

值得一提的是，上述 (2) 是 Stein 对 Lebesgue 可测集的定义 (Stein[1])

证明.（未完待续） □

当然，Lebesgue 可测集亦可以同时被内外侧逼近。这就是下面的正则性定理。

定理 1.5 (Lebesgue 测度的正则性定理).

$A \in \mathcal{L}$ 等价于：对任何 $\varepsilon > 0$，存在闭集 $F \subseteq A$ 与开集 $G \supseteq A$ 使得 $|G \backslash F| < \varepsilon$

证明. $(\Rightarrow)$: 设 $A \in \mathcal{L}$，则存在闭集 $F \subseteq A$ 使得 $|A \backslash F| < \frac{\varepsilon}{2}$ 且由定理 1.4 知存在开集 $G \supseteq A$ 使得 $|G \backslash A| < \frac{\varepsilon}{2}$。注意到 $G \backslash F = (G \backslash A) \cup (A \backslash F)$，故 $|G \backslash F| \leq |G \backslash A| + |A \backslash F| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$(\Leftarrow)$: 注意到 $A \backslash F \subseteq G \backslash F$，故 $|A \backslash F| \leq |G \backslash F| < \varepsilon$. 由定义 1.9，$A \in \mathcal{L}$ □

下面介绍一般测度空间上正则性的概念。

定义 1.10 (正则性).

设 X 是拓扑空间，$(X,\mathcal{S},\mu)$ 是测度空间。如果对任何 $A\in\mathcal{S}$，满足：

- $\mu(A)=\inf\left\{\mu(G):G\in\mathcal{S},G\supseteq A\text{是开集}\right\}$
- $\mu(A)=\sup\left\{\mu(F):F\in\mathcal{S},F\subseteq A\text{是闭集}\right\}$

则称测度 μ 是**正则**的。

引理 1.11.

设 X 是拓扑空间，$(X,\mathcal{S},\mu)$ 是测度空间。如果对于任何 $A\in\mathcal{S}$ 和 $\varepsilon>0$，都存在闭集 $F\in\mathcal{S}$ 与开集 $G\in\mathcal{S}$，使得 $F\subseteq A\subseteq G$ 并且 $\mu(G)-\varepsilon\leq\mu(A)\leq\mu(F)+\varepsilon$，那么测度 μ 是正则的。

证明. 若 $\mu(A)<+\infty$，由单调性知 $\mu(F)\leq\mu(A)\leq\mu(G)$，再由 $\mu(G)-\varepsilon\leq\mu(A)\leq\mu(F)+\varepsilon$ 及上下确界的定义知测度 μ 是正则的。

若 $\mu(A)=+\infty$，则满足 $G\supseteq A$ 的 G 恒有 $\mu(G)=+\infty$，故

$$\inf\left\{\mu(G):G\in\mathcal{S},G\supseteq A\text{是开集}\right\}=+\infty=\mu(A)$$

再由存在 F 使 $\mu(A)\leq\mu(F)+\varepsilon$ 知存在 F 使 $\mu(F)=+\infty$，故

$$\sup\left\{\mu(F):F\in\mathcal{S},F\subseteq A\text{是闭集}\right\}=+\infty=\mu(A)$$

故测度 μ 是正则的。 □

下面我们回到 $\mathbb{R}$ 中，验证 Lebesgue 测度是正则的。

命题 1.9.

若 $A\in\mathcal{L}$，则对任何 $\varepsilon>0$，存在闭集 $F\subseteq A$ 使得 $|A|\leq|F|+\varepsilon$.

证明. 设 $A\in\mathcal{L}$。对任何 $\varepsilon>0$，由定义 1.9 知存在闭集 $F\subseteq A$ 使得 $|A\backslash F|<\varepsilon$。注意到 $F\in\mathcal{L}$ 以及 $A\backslash F\in\mathcal{L}$。由无交并 $A=F\cup(A\backslash F)$ 知 $|A|=|F|+|A\backslash F|\leq|F|+\varepsilon$ □

定理 1.6.

Lebesgue 测度是正则的。

证明. 左半边 $|G|-\varepsilon\leq|A|$ 由引理 1.6 成立，右半边 $|A|\leq|F|+\varepsilon$ 由命题 1.9 成立。 □

这里提醒一下，引理 1.11 与命题 1.9 的逆命题均是不对的，在测度为无穷的时候会出现问题。可以证明，当 $\mu(A)<+\infty$（$|A|<+\infty$）时两个引理的逆是正确的。

1.4.2 初等逼近

下面将要介绍的初等逼近，从某种角度而言，是比之前所说的内外逼近更简单的方式。毕竟之前用的逼近集合都是开集、闭集，甚至是 G_δ 集、F_σ 集这样复杂的集合，而初等逼近

用的只是初等开集、初等闭集这样简单的集合（回忆初等闭集是指有限个有界闭区间的并，初等开集类似）。事实上，Lebesgue 可测集完全可以只用初等集合就可以描述出来。

当然，为了换得简单的集合，付出的代价就是，不能像之前一样单纯从内侧或单纯从外侧逼近了。也就是说在逼近的过程中，初等闭（开）集可能时而在集合 A 内侧，时而在集合 A 外侧，甚至既不在内侧也不在外侧。这样就不能像之前一样简单地用 $|A\backslash F|$ 或 $|G\backslash A|$ 来度量误差了。这就要使用如下的对称差的工具：

定义 1.11.

设 $A \subseteq \mathbb{R}$. 如果对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在初等闭集 F 使得 $|A\Delta F| < \varepsilon$ [a]，则称 A 可被初等闭集逼近。同理定义可被初等开集逼近的概念。

[a] Δ 表示对称差：对集合 A, B，其对称差定义为 $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$

想象一下，如果 $|A\Delta F|$ 非常小，那么集合 A“几乎”就是集合 F 了，因此对称差的外测度 $|A\Delta F|$ 是合适的反映两个集合差别的度量。

定理 1.7 (有限 Lebesgue 可测集的初等逼近)**.**

下列条件等价：

(1) $|A| < +\infty$ 且 $A \in \mathcal{L}$

(2) A 可被初等闭集逼近

(3) A 可被初等开集逼近

证明. (1) $\Rightarrow$ (2) :（这一方向的证明来自 Stein, Chapter 1, Theorem 3.4(iv)[1]）

由引理 1.6 知，对于任何 $\varepsilon > 0$，存在开集 $G \supseteq A$ 使得 $|G| < |A| + \frac{\varepsilon}{2} < +\infty$. 由引理 1.2，存在可数个几乎无交的有界闭区间 F_i 使得 $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$. 有

$$\sum_{i=1}^{\infty} |F_i| = \left|\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right| = |G| < +\infty$$

(其中第一个等号 $\sum |F_i| = |\bigcup F_i|$ 是因为，每个 $F_i = E_i \cup G_i$，其中 E_i 是闭区间 F_i 的两个端点，G_i 是闭区间 F_i 的内部。故 $\bigcup F_i = E' \cup G'$，其中 $E' = \bigcup E_i$，$G' = \bigcup G_i$。注意到 E', G' 是无交的，并且 G' 是开集。由引理 1.7，$|\bigcup F_i| = |E'| + |G'|$。由于 E' 是可数集故 $|E'| = 0$，并且由于 G_i 无交故 $|G'| = |\bigcup G_i| = \sum |G_i|$，因此 $|\bigcup F_i| = \sum |G_i| = \sum |F_i|$)

故无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} |F_i| < +\infty$ 收敛，所以存在 $N \in \mathbb{Z}^+$，使得余项

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} |F_i| < \frac{\varepsilon}{2}$$

令 $F = \bigcup_{i=1}^{N} F_i$，则 F 是初等闭集，当然也会有 $F \in \mathcal{L}$. 又 $A \in \mathcal{L}$，故 $A\backslash F \in \mathcal{L}$ 且 $F\backslash A \in \mathcal{L}$，故 $|A\Delta F| = |(A\backslash F) \cup (F\backslash A)| = |A\backslash F| + |F\backslash A|$. 同时由开集 $G \in \mathcal{L}$ 知 $G\backslash A \in \mathcal{L}$，再结合 $G \supseteq A$ 及 $|G| < +\infty$ 就知道 $|G\backslash A| = |G| - |A|$. 故

$$\begin{aligned} |A\Delta F| &= |A\backslash F| + |F\backslash A| \leq |G\backslash F| + |G\backslash A| \\ &= \left|\bigcup_{i=N+1}^{\infty} F_i\right| + (|G| - |A|) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

这就表明 A 可被初等闭集逼近。

(2) $\Rightarrow$ (3) : 如果 F 是初等闭集，则可以由它生成对应的初等开集 G，方法是：把 F 写成有限个有界闭区间的并集，并将每个闭区间端点去掉，就变成有限个有界开区间的并集，也即初等开集 G。注意到生成后 F 与 G 至多差有限个点，即：存在有限点集 E，使得 $F=G\cup E$，此时 $E=F\Delta G$ 且 $|E|=0$。由集合恒等式

$$A\Delta G\subseteq(A\Delta F)\cup(F\Delta G)=(A\Delta F)\cup E$$

因此由次可加性，$|A\Delta G|\leq|A\Delta F|$，故 $|A\Delta F|<\varepsilon$ 蕴含 $|A\Delta G|<\varepsilon$。这表明可被被初等闭集逼近蕴含可被初等开集逼近。

(3) $\Rightarrow$ (1) : 先证 $A\in\mathcal{L}$. 因 A 可被初等开集逼近，所以对于任何 $\varepsilon>0$，存在初等开集 G_1 使得 $|A\Delta G_1|<\varepsilon$. 由引理 1.6，存在开集 $G_2\supseteq A\Delta G_1$ 使得 $|G_2|\leq|A\Delta G_1|+\varepsilon<2\varepsilon$. 令 $G=G_1\cup G_2$，则 G 是开集，并且有

$$G=G_1\cup G_2\supseteq G_1\cup(A\Delta G_1)\supseteq G_1\cup(A\backslash G_1)=G_1\cup A\supseteq A$$

$$G\backslash A=(G_1\cup G_2)\backslash A=(G_1\backslash A)\cup(G_2\backslash A)\subseteq(A\Delta G_1)\cup G_2\subseteq G_2$$

故由单调性，$|G\backslash A|\leq|G_2|<2\varepsilon$. 由定理 1.4，$A\in\mathcal{L}$。

再证 $|A|<+\infty$。事实上，给定 $\varepsilon>0$，由条件存在初等开集 G 使 $|A\Delta G|<+\varepsilon$. 又因为初等开集是有限个有界开区间的并集，故 $|G|<+\infty$. 再结合

$$A\subseteq A\cup G=(A\backslash G)\cup G\subseteq(A\Delta G)\cup G$$

知 $|A|\leq|A\Delta G|+|G|\leq\varepsilon+|G|<+\infty$ □

下面把结论推广到任意的 $A\in\mathcal{L}$ 上去，而不只是 $|A|<+\infty$ 的情况。

命题 1.10.

$A\in\mathcal{L}$，等价于：A 是可数个具有有限外测度的 Lebesgue 可测集的并。

证明. ($\Rightarrow$) : 令 $A_n=A\cap(-n,n)$，则 $A_n\in\mathcal{L}$。又 $|A_n|\leq 2n<+\infty$，结合 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 的事实就完成了这一方向证明。

($\Leftarrow$) : 由 $\mathcal{L}$ 是 $\sigma-$ 代数的事实立即得到到。 □

以后称具有有限外测度的 Lebesgue 可测集为**“有限 Lebesgue 可测集”**。

定理 1.8 (Lebesgue 可测集的初等逼近).

下列条件等价：

(1) $A\in\mathcal{L}$

(2) A 是可数个可被初等闭集逼近的集合的并

(3) A 是可数个可被初等开集逼近的集合的并

值得一提的是，这是 Rudin 对 Lebesgue 可测集的定义 (Rudin, 11.9[2])

证明. 由定理 1.7 与命题 1.8 即得。 □

1.5　Lebesgue 测度的完备性

本节研究 Lebesgue 测度的完备性，从以下两个方面：

- 完备测度
- 完备化

1.5.1　完备测度

首先考虑一个简单的命题。

命题 1.11.

外测度为 0 的集合都在 $\mathcal{L}$ 中。

证明. 设 $E \subseteq \mathbb{R}$ 满足 $|E| = 0$。在定义 1.9 中令 $F = \emptyset$ 就知道 $E \in \mathcal{L}$ □

定义 1.12 (完备测度).

设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是测度空间。若 $E \in \mathcal{S}$ 使 $\mu(E) = 0$，则称 E 为 $\mu-$ **零测集**。
若 $\mu-$ 零测集的子集仍在 $\mathcal{S}$ 中，则称测度 μ 是**完备**的。

从这个定义我们能立马发现，外测度为 0 的集与 Lebesgue-零测集其实是一回事（以后简成为“**零测集**”）。

下面我们来论证 Lebesgue 测度是完备的。实际上这是非常显然的事实，见下文命题 1.10 的证法一。但是，看待这个问题有另一种角度。从抽象的层面来讲，Lebesgue 可测等价于下面要给出的 Caratheodory 可测，而 Caratheodory 可测会自动诱导出完备的测度。

现在给出一般空间中 Caratheodory 可测的定义：

定义 1.13 (Caratheodory 可测).

设 μ^* 是 X 上的外测度（回忆定义 1.4）。
如果 $A \subseteq X$ 满足下述条件（被称为 **Caratheodory 条件**）：

$$\forall T \subseteq X,\ \ \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \backslash A) = \mu^*(T)$$

则称 A 是 **Caratheodory** μ^*- **可测**的。

这个条件有非常强的几何直观：A 是 Caratheodory 可测的，等价于随便一个 T 的外测度都可以用 A 衡量：把 T 与 A 重叠部分的外测度跟 T 去掉 A 的部分的外测度相加。

引理 1.12 (Caratheodory 定理 (Stein, Chapter 6, Theorem 1.1) [1]).

设 μ^* 是 X 上的外测度，记 $\mathcal{S}$ 是由所有 Caratheodory μ^*- 可测的集合构成的集族，则 $\mathcal{S}$ 是 $\sigma-$ 代数，且 $\mu^*|_{\mathcal{S}}$ 是 $(X, \mathcal{S})$ 上的完备测度（称为 X 上由外测度 μ^* 诱导的 Caratheodory 测度）。

证明.（未完待续） □

现在回到 $\mathbb{R}$ 中。下面的定理表明，在 $\mathbb{R}$ 上 Caratheodory 可测等价于 Lebesgue 可测。

定理 1.9 (Caratheodory 条件).

下列条件等价：

(1) $A \in \mathcal{L}$

(2) $\forall T \subseteq \mathbb{R},\ |T \cap A| + |T \backslash A| = |T|$

(3) $\forall n \in \mathbb{Z}^+,\ |(-n,n) \cap A| + |(-n,n) \backslash A| = 2n$

证明. (1) $\Rightarrow$ (2) : 根据引理 1.6，对任何 $\varepsilon > 0$，存在开集 $G \supseteq T$ 使得 $|G| \le |T| + \varepsilon$。由于 G,A 皆 Lebesgue 可测集，故 $G \cap A$,$G \backslash A$ 亦可测，并注意到二者无交。因此

$$|T \cap A| + |T \backslash A| \le |G \cap A| + |G \backslash A| = |(G \cap A) \cup (G \backslash A)| = |G| \le |T| + \varepsilon$$

由于该式对任意 $\varepsilon > 0$ 成立，故 $|T \cap A| + |T \backslash A| \le |T|$。此外由 $T = (T \cap A) \cup (T \backslash A)$ 以及外测度的次可加性知 $|T| \le |T \cap A| + |T \backslash A|$。因此 (2) 得证。

(2) $\Rightarrow$ (3) : 显然。

(3) $\Rightarrow$ (1) : 先假设 A 有界，则会有某个 $n \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $A \subseteq (-n,n)$。根据引理 1.6，对任何 $\varepsilon > 0$，存在开集 $G' \supseteq A$ 使得 $|G'| < |A| + \varepsilon$。令 $G = G' \cap (-n,n)$，则 G 也是开集，$G \supseteq A$，并且 $|G| \le |G'| < |A| + \varepsilon$。因此，

$$\begin{aligned}|G| + |(-n,n) \backslash A| &< |A| + \varepsilon + |(-n,n) \backslash A| = |(-n,n) \cap A| + |(-n,n) \backslash A| + \varepsilon \\ &= 2n + \varepsilon = |(-n,n)| + \varepsilon = |G \cup ((-n,n) \backslash G)| + \varepsilon \\ &\le |G| + |(-n,n) \backslash G| + \varepsilon\end{aligned}$$

故 $|(-n,n) \backslash A| - |(-n,n) \backslash G| < \varepsilon$。由于 $(-n,n) \backslash A = ((-n,n) \backslash G) \cup (G \backslash A)$ 是无交并，并且 $(-n,n) \backslash G$ 是 Borel 集，由引理 1.10，$|(-n,n) \backslash A| = |(-n,n) \backslash G| + |G \backslash A|$。故

$$|G \backslash A| = |(-n,n) \backslash A| - |(-n,n) \backslash G| < \varepsilon$$

这就证明了 $A \in \mathcal{L}$。

现在考虑一般的情形。设 $A_n = A \cap (-n,n)$，则 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，$(-n,n) \cap A_n = (-n,n) \cap A$，并且 $(-n,n) \backslash A_n = (-n,n) \backslash A$。故

$$|(-n,n) \cap A_n| + |(-n,n) \backslash A_n| = |(-n,n) \cap A| + |(-n,n) \backslash A| = 2n$$

由刚才有界集的情形知 $A_n \in \mathcal{L}$。于是 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$。 □

利用 Caratheodory 条件这个工具，可以立即得到 Lebesgue 测度的完备性：

定理 1.10.

Lebesgue 测度是完备的。

证明.【证法一】设 E 是零测集，则 $|E| = 0$。设 M 是 E 的子集。则有外测度的单调性知 $|M| \le |E| = 0$，故 $|M| = 0$。由命题 1.11 知 $M \in \mathcal{L}$。故 Lebesgue 测度是完备的。

【证法二】由定理 1.9 知 Lebesgue 测度就是 $\mathbb{R}$ 上由外测度诱导的 Caratheodory 测度，再由引理 1.12 知它是完备的。 □

1.5.2 完备化

下面的定理给出了 Lebesgue 可测集的一个分解。

定理 1.11 (Lebesgue 可测集的结构).

下列条件等价：

(1) $A \in \mathcal{L}$

(2) 存在 Borel 集 B 与零测集 E 使得 $A = B \cup E$

(3) 存在 Borel 集 B 与零测集 E 使得 $A = B\Delta E$

证明. $(1) \Rightarrow (2)$: 由定理 1.2，存在 Borel 集 $B \subseteq A$ 使得 $|A\backslash B| = 0$。令 $E = A\backslash B$ 即得。

$(2) \Rightarrow (1)$: 由命题 1.8 与 1.11 知 $B \in \mathcal{L}$ 且 $E \in \mathcal{L}$。再由命题 1.7 知 $A = B \cup E \in \mathcal{L}$

$(1) \Rightarrow (3)$: 请读者模仿 $(1) \Rightarrow (2)$ 的论证自己证明。

$(3) \Rightarrow (1)$: 请读者模仿 $(2) \Rightarrow (1)$ 的论证自己证明。 □

我们已经知道，$\mathcal{L}$ 包含所有的开集与零测集。事实上，$\mathcal{L}$ 正是满足这个条件的最小的 $\sigma-$ 代数。

定理 1.12.

$\mathcal{L}$ 是最小的包含所有开集与零测集的 $\sigma-$ 代数。

证明. 包含性由命题 1.8 与 1.11 给出。对于最小性，我们只需证明：对于任何包含所有开集与零测集的 $\sigma-$ 代数 $\mathcal{S}$，都有 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{S}$. 事实上，由定理 1.11，任何 Lebesgue 可测集 $A \in \mathcal{L}$ 都有 $A = B \cup E$，其中 B 是 Borel 集且 E 是零测集。故由 $\mathcal{S}$ 的构造知 $B \in \mathcal{S}$ 且 $E \in \mathcal{S}$，再由 $\mathcal{S}$ 是 $\sigma-$ 代数知 $A = B \cup E \in \mathcal{S}$。这就证明了 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{S}$ □

在进行下面的内容之前，我们先回顾一下之前定义 Borel 测度与 Lebesgue 测度的过程。我们先是把所有开集纳入到 $\sigma-$ 代数中，从而定义出 Borel $\sigma-$ 代数，再进一步证明了外测度确实是其上的测度。后来我们定义了 Lebesgue 可测集，发现 $\mathcal{L}$ 是更大的 $\sigma-$ 代数并且还能让外测度成为其上的测度。我们不禁在想，这个过程能不能继续扩大下去？如果能找到比 $\mathcal{L}$ 更大的，还能维持外测度成为测度，那岂不是更强的结果？但下面的引理表明，这是不可能的。某种程度上来说，$\mathcal{L}$ 已是最好的结果。

引理 1.13.

如果 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 满足：

(1) $\mathcal{S}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 $\sigma-$ 代数

(2) 外测度限制在 $\mathcal{S}$ 上是 $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ 上的测度

(3) $\mathcal{S}$ 包含所有开集

那么 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{L}$

证明. 由 (1)(3) 知 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{S}$，故只需证 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{L}$。任取 $A \in \mathcal{S}$。下证 $A \in \mathcal{L}$。

先考虑 $|A|<+\infty$ 的情形。对任何 $\varepsilon>0$，由引理 1.6，存在开集 $G\supseteq A$ 使得 $|G|<|A|+\varepsilon<+\infty$. 由 (3) 知 $G\in\mathcal{S}$，再由 (1) 知 $G\backslash A\in\mathcal{S}$。由无交并 $G=(G\backslash A)\cup A$ 以及 (2) 知 $|G|=|G\backslash A|+|A|$. 故 $|G\backslash A|=|G|-|A|<\varepsilon$. 由定理 1.2 知 $A\in\mathcal{L}$

下面再考虑 $|A|=+\infty$ 的情形。对于任何 $n\in\mathbb{Z}^+$，由 (3) 知开区间 $(-n,n)\in\mathcal{S}$。令 $A_n=A\cap(-n,n)$。由 (1) 知 $A_n\in\mathcal{S}$。同时有 $|A_n|\leq 2n<+\infty$。根据刚才有限情形的讨论知道 $A_n\in\mathcal{L}$。再注意到 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，因此 $A\in\mathcal{L}$. □

从定理 1.12 看到，$\mathcal{L}$ 是某种程度上的最小的 $\sigma-$ 代数，而又从引理 1.13 看到，$\mathcal{L}$ 是另一种意义上最大的 $\sigma-$ 代数。把二者的条件一结合，就能唯一地确定 $\mathcal{L}$ 了。

定理 1.13 ($\mathcal{L}$ 的万有性质).

存在唯一的 $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 满足：

(1) $\mathcal{S}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 $\sigma-$ 代数

(2) 外测度限制在 $\mathcal{S}$ 上是 $(\mathbb{R},\mathcal{S})$ 上的测度

(3) $\mathcal{S}$ 包含所有开集

(4) $\mathcal{S}$ 包含所有零测集

事实上，这唯一的 $\mathcal{S}$ 就是 $\mathcal{L}$。这个定理表明，**包含所有开集，并且外测度限制在其上是完备测度的 $\sigma-$ 代数，只能是** $\mathcal{L}$。以下是证明：

证明. 对于存在性，只需注意到 $\mathcal{L}$ 满足如上所有四个条件。

对于唯一性，只需证明所有满足这四个条件的 $\mathcal{S}$ 只能是 $\mathcal{L}$。由 (1)(3)(4) 及定理 1.12 知 $\mathcal{L}\subseteq\mathcal{S}$。再由 (1)(2)(3) 及引理 1.13 知 $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{L}$. 因此 $\mathcal{S}=\mathcal{L}$ □

不同书给出的 Lebesgue 可测集的定义各不相同。不过从上面这个定理可以看到，给出若干抽象的性质后，就能唯一确定出 $\mathcal{L}$。从而不同的定义只是提供了满足这些抽象性质的 $\mathcal{L}$ 的不同模型而已（本文的定义 1.9 也只是其中一个模型）。

从这个定理我们还能看到，如果从 Borel 测度出发，将测度进行“扩张”，使得扩张后的测度满足完备性的话，那么这个扩张存在且唯一（就是 Lebesgue 测度）。从这个层面来讲，Lebesgue 测度是 Borel 测度的“完备化”。下面我们从最一般的角度来描述完备化。

引理 1.14 (Folland, 1.9 Theorem).

设 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 是测度空间，$\mathcal{N}$ 是所有 $\mu-$ 零测度集构成的集族。则存在唯一的测度空间 $(X,\tilde{\mathcal{S}},\tilde{\mu})$，满足

$$\tilde{\mathcal{S}}:=\{A\cup M: A\in\mathcal{S}\text{ 且 }\exists N\in\mathcal{N}, M\subseteq N\}$$

并且 $\tilde{\mu}:\tilde{\mathcal{S}}\to[0,+\infty]$ 使得 $\tilde{\mu}$ 是 $(X,\tilde{\mathcal{S}})$ 上的完备测度且 $\tilde{\mu}|_{\mathcal{S}}=\mu$。

证明.（未完待续） □

定义 1.14 (完备化).

设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是测度空间，由引理 1.14 给出的 $(X, \tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\mu})$ 中，称 $\tilde{\mu}$ 是 μ 的**完备化**，$\tilde{\mathcal{S}}$ 是 $\mathcal{S}$ 对于 μ 的**完备化**。

给出完备化的定义以后，我们现在来验证 Lebesgue 测度是 Borel 测度的完备化。

命题 1.12.

E 是零测集等价于：存在 Borel-零测集 N 使得 $E \subseteq N$

证明. $(\Rightarrow)$: 设 $E \in \mathcal{L}$ 是零测集。由定理 1.2，存在 Borel 集 $N \supseteq E$ 使得 $|N \backslash E| = 0$。故

$$|N| = |E \cup (N \backslash E)| \le |E| + |N \backslash E| = 0 \quad \Rightarrow \quad |N| = 0$$

$(\Leftarrow)$: 由单调性 $|E| \le |N| = 0 \Rightarrow |E| = 0$ □

定理 1.14.

Lebesgue 测度是 Borel 测度的完备化。
$\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{B}$ 对于 Borel 测度的完备化。

证明. 设 $\mathcal{N}$ 是所有 Borel-零测度集构成的集族。由定理 1.11 与命题 1.12 知

$$\mathcal{L} = \{B \cup E : B \in \mathcal{B} \text{ 且 } \exists N \in \mathcal{N}, E \subseteq N\}$$

由定义 1.14 以及 Lebesgue 测度的完备性即得。 □

第二章　可测函数

2.1　可测函数

定义 2.1 (扩充实数集与扩充 Borel 集).

定义 $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ 为**扩充实数集**。
设 $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. 如果 $A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}$，则称 A 是**扩充 Borel 集**。
所有扩充 Borel 集构成的集族记作 $\overline{\mathcal{B}}$

引理 2.1.

$\overline{\mathcal{B}}$ 是 $\overline{\mathbb{R}}$ 上最小的包含所有开集以及 $\{-\infty\}, \{+\infty\}$ 的 $\sigma-$ 代数。

证明. 容易看出，$A \in \overline{\mathcal{B}}$ 等价于 A 是如下四种形式的一种：

$$B \qquad B \cup \{-\infty\} \qquad B \cup \{+\infty\} \qquad B \cup \{-\infty, +\infty\}$$

其中 $B \in \mathcal{B}$.

由于 $\emptyset$ 是上述第一种形式，故 $\emptyset \in \overline{\mathcal{B}}$。此外，若 A 是上述四种形式的一种，则由 $\mathcal{B}$ 是 $\sigma-$ 代数知 $\overline{\mathbb{R}} \backslash A$ 也将是上述四种形式的一种。类似地，由 $\mathcal{B}$ 是 $\sigma-$ 代数知上述四种形式的集合的可列并也会是上述四种形式中的一种。因此 $\overline{\mathcal{B}}$ 是 $\overline{\mathbb{R}}$ 上的 $\sigma-$ 代数。

设 $\mathcal{S}$ 是任一包含所有开集以及 $\{-\infty\}, \{+\infty\}$ 的 $\sigma-$ 代数。则由 $\mathcal{B}$ 的定义知 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{S}$. 再由 $\mathcal{S}$ 是 $\sigma-$ 代数知上述四种形式的集合都应在 $\mathcal{S}$ 中。这就表明 $\overline{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{S}$. 最小性得证。 □

定义 2.2 (可测函数).

设 $(X, \mathcal{S})$ 是可测空间。如果函数 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ 满足：

$$\forall B \in \overline{\mathcal{B}},\ f^{-1}(B) \in \mathcal{S}$$

则称 f 是 $\mathcal{S}-$ **可测函数**。

注意，定义可测函数时，并不需要测度，只需要可测空间。

如果函数 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ 的值域是 $\mathbb{R}$ 的子集，则说 f 是有限值函数，它也可以被看成是 $X \to \mathbb{R}$ 的函数。显见，有限值 $\mathcal{S}-$ 可测函数满足：Borel 集的原像在 $\mathcal{S}$ 中。

命题 2.1.

设 $(X,\mathcal{S})$ 是可测空间，$E\in\mathcal{S}$。如果 $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 是 $\mathcal{S}-$ 可测函数，则 $f|_E$ 是对应于子可测空间 $(E,\mathcal{S}\cap\mathcal{P}(E))$ 上的 $\mathcal{S}\cap\mathcal{P}(E)-$ 可测函数。

引理 2.2.

设 $(X,\mathcal{S})$ 是可测空间，$f:X\to Y$ 是函数。则

$$\mathcal{T}=\left\{A\subseteq Y:f^{-1}(A)\in\mathcal{S}\right\}$$

是 Y 上的 $\sigma-$ 代数。

命题 2.2.

设 $(X,\mathcal{S})$ 是可测空间，$f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 是函数。则下列条件等价：

(1) f 是 $\mathcal{S}-$ 可测函数（即 $\forall B\in\overline{\mathcal{B}}$，$f^{-1}(B)\in\mathcal{S}$）

(2) 对任何开集 $G\subseteq\mathbb{R}$ 有 $f^{-1}(G)\in\mathcal{S}$，且 $f^{-1}(\{-\infty\})\in\mathcal{S},f^{-1}(\{+\infty\})\in\mathcal{S}$

(3) 对任何闭集 $F\subseteq\mathbb{R}$ 有 $f^{-1}(F)\in\mathcal{S}$，且 $f^{-1}(\{-\infty\})\in\mathcal{S},f^{-1}(\{+\infty\})\in\mathcal{S}$

(4) $\forall a\in\mathbb{R}$，$f^{-1}((a,+\infty])\in\mathcal{S}$

(5) $\forall a\in\mathbb{R}$，$f^{-1}([a,+\infty])\in\mathcal{S}$

(6) $\forall a\in\mathbb{R}$，$f^{-1}([-\infty,a))\in\mathcal{S}$

(7) $\forall a\in\mathbb{R}$，$f^{-1}([-\infty,a])\in\mathcal{S}$

命题 2.3.

设 $(X,\mathcal{S})$ 是可测空间，$f_1,f_2,\cdots$ 是 $\mathcal{S}-$ 可测函数序列。则下列函数均 $\mathcal{S}-$ 可测：

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}^+}f_n(x)\qquad\inf_{n\in\mathbb{Z}^+}f_n(x)\qquad\limsup_{n\to\infty}f_n(x)\qquad\liminf_{n\to\infty}f_n(x)$$

命题 2.4.

设 $(X,\mathcal{S})$ 是可测空间。
若 $\mathcal{S}-$ 可测函数序列 $f_1,f_2,\cdots$ 点态收敛于函数 f，则 f 是 $\mathcal{S}-$ 可测函数。

定义 2.3.

设 X 是拓扑空间，$\mathcal{S}$ 是 X 上的 Borel $\sigma-$ 代数。
如果 $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 是 $\mathcal{S}-$ 可测函数，则称 f 是 X 上的 Borel 可测函数。

命题 2.5.

设 X 是拓扑空间。如果 $f:X\to\mathbb{R}$ 连续，那么 f 是 X 上的 Borel 可测函数。

证明. 因为 f 是连续函数，所以 $\mathbb{R}$ 中开集的原像是 X 中的开集，故也会是 X 中的 Borel 集。由命题 2.2 的 (1)(2) 等价知 f 是 X 上的 Borel 可测函数。

（注意，命题 2.2 (2) 中的 $f^{-1}(\{\pm\infty\}) \in \mathcal{S}$ 平凡成立，因为条件中的 f 是有限值的） □

命题 2.6.

设 $(X,\mathcal{S})$ 是可测空间，$f : X \to \mathbb{R}$ 是有限值 $\mathcal{S}-$ 可测函数，$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 Borel 可测函数，则 $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ 是有限值 $\mathcal{S}-$ 可测函数。

证明. 首先 $g \circ f$ 是有限值的，因为是两个有限值函数的复合。

由于 g 是 $\mathbb{R}$ 上的 Borel 可测函数，故 $\mathbb{R}$ 中 Borel 集在 g 下的原像还是 $\mathbb{R}$ 中的 Borel 集。再由 f 是有限值 $\mathcal{S}-$ 可测函数知 $\mathbb{R}$ 中的 Borel 集在 f 下的原像在 $\mathcal{S}$ 中。因此，$\mathbb{R}$ 中的 Borel 集在 $g \circ f$ 下的原像在 $\mathcal{S}$ 中，故 $g \circ f$ 是有限值 $\mathcal{S}-$ 可测函数。 □

定义 2.4.

对于函数 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$，定义 $f^+ = \max(f, 0)$，$f^- = \max(-f, 0)$

命题 2.7.

设 $(X,\mathcal{S})$ 是可测空间。

(1) 如果 f 是 $\mathcal{S}-$ 可测函数，则下列函数都是 $\mathcal{S}-$ 可测函数：

$$-f \qquad \frac{f}{2} \qquad |f| \qquad f^2$$

(2) 如果 f, g 是 $\mathcal{S}-$ 可测函数，则下列函数都是 $\mathcal{S}-$ 可测函数：

$$\max(f, g) \qquad \min(f, g) \qquad f^+ \qquad f^-$$

(3) 如果 f, g 是有限值 $\mathcal{S}-$ 可测函数，则下列函数都是有限值 $\mathcal{S}-$ 可测函数：

$$f + g \qquad f - g \qquad fg$$

2.2　简单函数与阶梯函数

本节我们用简单函数与阶梯函数逼近可测函数。

- 简单函数
- 阶梯函数

2.2.1　简单函数

定义 2.5 (特征函数).

设 $E \subseteq X$. 定义 E 的特征函数 $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ 为:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

定义 2.6 (简单函数).

值域是有限集的函数称为简单函数。

命题 2.8.

设 $(X, \mathcal{S})$ 是可测空间。如果 $f : X \to \mathbb{R}$ 是简单函数，设 $f(X) = \{c_1, \cdots, c_n\}$（其中 $c_1, \cdots, c_n$ 是有限个互异的实数），则 $E_i = f^{-1}(\{c_i\})$ 构成了 X 的分划，且

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}$$

此外，f 是 $\mathcal{S}-$ 可测等价于每个 χ_{E_i} 都是 $\mathcal{S}-$ 可测。

定理 2.1 (简单函数逼近 (GTM 282, 2.89)[3]).

设可测空间 $(X, \mathcal{S})$ 及函数 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. 则存在 $X \to \mathbb{R}$ 的函数序列 $f_1, f_2, \cdots$ 满足:

(1) 每个 f_k 是简单函数

(2) f_k 点态收敛于 f

(3) $\forall k \in \mathbb{Z}^+$, $\forall x \in X$, $|f_k(x)| \le |f_{k+1}(x)| \le |f(x)|$

(4) 如果 f 是 $\mathcal{S}-$ 可测函数，则每个 f_k 都是 $\mathcal{S}-$ 可测的

(5) 如果 f 是有界函数，则 f_k 一致收敛于 f

证明. 对于任何 $k \in \mathbb{Z}^+$ 以及 $y \in (-k, k)$，一定存在唯一的 $m \in \mathbb{Z}$ 使得 $y \in [\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k})$。记区间两端点 $\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}$ 中绝对值较小的那个为 p，由此构造函数 φ_k 如下:

$$\varphi_k : (-k, k) \to \mathbb{R}, \ y \mapsto p$$

形象地说，$\varphi_k(y)$ 是所有比 y 绝对值小 [1] 的以 2^k 为分母的有理数中最接近 y 的那个。

[1] 这里“小”有可能包含了相等的情况，读者理解意思就行。

从上述构造显见，如果 $y \in (-k, k)$，那么 $|\varphi_k(y) - y| \le \frac{1}{2^k}$ 并且 $|\varphi_k(y)| \le |y|$.

现在对任何 $k \in \mathbb{Z}$，定义函数 $f_k : X \to \mathbb{R}$ 为：

$$f_k(x) = \begin{cases} \varphi_k(f(x)) & \text{if } f(x) \in (-k, k) \\ k & \text{if } f(x) \in [k, +\infty] \\ -k & \text{if } f(x) \in [-\infty, -k] \end{cases}$$

下面我们逐一验证 f_k 满足诸性质。

(1) 每个 f_k 至多取 $2k2^k + 2$ 个值，因此是简单函数。

(2) 对任何 $x \in X$：

假若 $f(x)$ 是有限值的，只要 k 充分大就会使 $f(x) \in [-k, k]$，由性质 $|\varphi_k(y) - y| \le \frac{1}{2^k}$ 可得 $|f_k(x) - f(x)| \le \frac{1}{2^k}$。这意味着 $f_k(x) \to f(x)$ $(k \to \infty)$；

假若 $f(x) = +\infty$，则 $f_k(x) = k \to +\infty$ $(k \to \infty)$；

假若 $f(x) = -\infty$，则 $f_k(x) = -k \to -\infty$ $(k \to \infty)$。

(3) 由性质 $|\varphi_k(y)| \le |y|$ 不难看出 $|f_k(x)| \le |f(x)|$。此外由构造明显有 $|f_k(x)| \le |f_{k+1}(x)|$。

(4) 因为 f 是 $\mathcal{S}-$ 可测函数，故对所有 k 和 m 都有 $f^{-1}([\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k})) \in \mathcal{S}$, $f^{-1}([k, +\infty]) \in \mathcal{S}$, $f^{-1}([-\infty, -k]) \in \mathcal{S}$。而注意 f_k 恰是在 $f^{-1}([\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}))$, $f^{-1}([k, +\infty])$, $f^{-1}([-\infty, -k])$ 上的特征函数的线性组合，因此都是 $\mathcal{S}-$ 可测的。

(5) 因为 f 有界，所以 $|f| \le M$。对任意 $k > M$，所有 $x \in X$ 都满足 $f(x) \in (-k, k)$，由性质 $|\varphi_k(y) - y| \le \frac{1}{2^k}$ 知 $\sup_{x \in X} |f_k(x) - f(x)| \le \frac{1}{2^k}$。这表明 f_k 一致收敛于 f。

□

2.2.2 阶梯函数

定义 2.7 (阶梯函数).

形如 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{I_i}$$

的函数被称为**阶梯函数**，其中 $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$，$I_1, \cdots, I_n$ 是 n 个区间，且构成了 $\mathbb{R}$ 的分划。

引理 2.3.

对任何有限 Lebesgue 可测集 $A \subseteq \mathbb{R}$，对任何 $\varepsilon > 0$，存在外测度小于 ε 的集合 E 与阶梯函数 ψ，使得对任何 $x \in \mathbb{R} \backslash E$，都有 $\psi(x) = \chi_A(x)$

证明. 由定理 1.7，对于任何 $\varepsilon > 0$，存在有限个有界闭区间 $F_1, \cdots, F_n$ （可以选择使其无交），使得它们的并 $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ 能够逼近 A，即 $|A \Delta F| < \varepsilon$. 记

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} \chi_{F_i} = \chi_F$$

则 ψ 是阶梯函数，并且

$$\{x : \psi(x) \neq \chi_A(x)\} = A\Delta F$$

于是取 $E = A\Delta F$，就会有 $|E| < \varepsilon$，并且对于任何 $x \in \mathbb{R}\backslash E$ 都有 $\psi(x) = \chi_A(x)$ □

定理 2.2 (阶梯函数逼近 (Stein, Chapter 1, Theorem 4.3) [1]).

如果 $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ 是 Lebesgue 可测函数，则存在零测集 E 与阶梯函数序列 $f_1, f_2, \cdots$ 使得 f_k 在 $\mathbb{R}\backslash E$ 上点态收敛于 f.

证明. 由定理 2.1 知存在 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的 Lebesgue 可测函数序列 $g_1, g_2, \cdots$ 使得 g_k 点态收敛于 f. 由命题 2.8，可设 $g_k = \sum_{i=1}^{n_k} c_{ki}\chi_{A_{ki}}$，其中 A_{ki} 是 Lebesgue 可测集，且 $\{A_{ki}\}_{i=1}^{n_k}$ 构成 $\mathbb{R}$ 的分划。

记 $B_{ki} = A_{ki} \cap (-k, k)$，则 B_{ki} 是有限 Lebesgue 可测集。由引理 2.3，存在外测度小于 $n_k^{-1}2^{-k}$ 的集合 E_{ki} 与阶梯函数 ψ_{ki}，使得对任何 $x \in \mathbb{R}\backslash E_{ki}$ 都有 $\psi_{ki}(x) = \chi_{B_{ki}}(x)$，即对任何 $x \in (\mathbb{R}\backslash E_{ki}) \cap (-k, k)$ 都有 $\psi_{ki}(x) = \chi_{A_{ki}}(x)$. 记

$$f_k = \sum_{i=1}^{n_k} c_{ki}\psi_{ki} \qquad E_k = \bigcup_{i=1}^{n_k} E_{ki}$$

则 $|E_k| \leq 2^{-k}$，f_k 仍为阶梯函数，且对任何 $x \in (\mathbb{R}\backslash E_k) \cap (-k, k)$ 都有 $f_k(x) = g_k(x)$.

记

$$E = \bigcap_{K=1}^{\infty} \bigcup_{k=K+1}^{\infty} E_k$$

此时对任何 K，都有 $|E| \leq |\bigcup_{k=K+1}^{\infty} E_k| \leq \sum_{k=K+1}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-K}$，从而 $|E| = 0$。

此外，可以看出

$$\mathbb{R}\backslash E = \bigcup_{K=1}^{\infty} \bigcap_{k=K+1}^{\infty} (\mathbb{R}\backslash E_k) = \bigcup_{K=1}^{\infty} \bigcap_{k=K+1}^{\infty} ((\mathbb{R}\backslash E_k) \cap (-k, k))$$

这意味着，对任何 $x \in \mathbb{R}\backslash E$，存在 $K \in \mathbb{Z}^+$，使得对于任何 $k > K$，都有 $x \in (\mathbb{R}\backslash E_k) \cap (-k, k)$，此时 $f_k(x) = g_k(x)$，故 $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x) = f(x)$. 这就证明了阶梯函数序列 f_k 在 $x \in \mathbb{R}\backslash E$ 上点态收敛于 f。 □

2.3　Littlewood 三原则

Littlewood 曾经总结了关于测度理论的三个原则：

- 第一原则：任何可测集都几乎是有限个区间的交。
- 第二原则：任何可测函数都几乎是连续的。
- 第三原则：任何点态收敛的函数序列都几乎一致收敛。

其中第一原则就是定理 1.7（以后再用到此定理时，将会被直接说成是 Littlewood 第一原则）。本文介绍后两个原则。

2.3.1　第三原则：Egorov 定理

定理 2.3 (Egorov 定理 (GTM 282, 2.85) [3]).

设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是测度空间，并且 $\mu(X) < +\infty$. 设 $f_1, f_2, \cdots$ 是 $X \to \mathbb{R}$ 的 $\mathcal{S}-$ 可测函数序列，并且点态收敛于 $f : X \to \mathbb{R}$. 则对于任何 $\varepsilon > 0$，存在 $E \in \mathcal{S}$，使得 $\mu(X \backslash E) < \varepsilon$ 并且在 E 上 f_k 一致收敛于 f.

2.3.2　第二原则：Luzin 定理

定理 2.4 (Luzin 定理 (Stein, Chapter 1, Theorem 4.5) [1]).

设 $E \subseteq \mathbb{R}$ 是 Lebesgue 可测集，$f : E \to \mathbb{R}$ 是 Lebesgue 可测函数。则对于任何 $\varepsilon > 0$，存在闭集 $F \subseteq E$，使得 $|E \backslash F| < \varepsilon$ 且 $f|_F$ 连续。

证明. 我们先证 $|E| < +\infty$ 的情况。

由定理 2.2，存在 $S \subseteq E$ 与阶梯函数序列 f_n，使得 $|E \backslash S| = 0$ 且在 S 上 $f_n \to f$。对每个 n，由于 f_n 是阶梯函数，故只有有限个间断点。取区间 E_n 把间断点包住并且让 $|E_n| < 2^{-n}$，就会使 $f_n|_{E \backslash E_n}$ 连续。

注意 S 是 Lebesgue 可测集且 $|S| < +\infty$，由 Egorov 定理（2.3），对任何 $\varepsilon > 0$，存在 Lebesgue 可测集 $A \subseteq S$ 使得 $|S \backslash A| < \frac{\varepsilon}{3}$ 并且在 A 上 f_n 一致收敛于 f。由于 $\sum 2^{-n}$ 级数收敛，所以余项 $\sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n}$ 趋于 0。现在选取 N 使得 $\sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} < \frac{\varepsilon}{3}$，令

$$F' = A \backslash \bigcup_{n=N+1}^{\infty} E_n \subseteq A$$

则 $|A \backslash F'| < \frac{\varepsilon}{3}$，并且当 $n > N$ 时，$f_n|_{F'}$ 连续。再由 f_n 在 F' 上一致收敛于 f，知 $f|_{F'}$ 连续。注意到 F' 是 Lebesgue 可测集，故存在闭集 $F \subseteq F'$ 使得 $|F' \backslash F| < \frac{\varepsilon}{3}$.

这样，我们就找到了闭集 $F \subseteq E$，使得

$$|E \backslash F| \leq |E \backslash S| + |S \backslash A| + |A \backslash F'| + |F' \backslash F| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

并且 $f|_F$ 连续。

下面再证 $|E| = +\infty$ 的情况。

设 $I_1, I_2, I_3, I_4, \cdots = [0, 1), [-1, 0), [1, 2), [-2, -1), \cdots$，则 I_k 构成了 $\mathbb{R}$ 的分划，并且 $E_k = E \cap I_k$ 是有限 Lebesgue 可测集。则根据刚才有限的情况，对每个 k，对任何 $\varepsilon > 0$，

存在闭集 $F_k \subseteq E_k$ 使得 $|E_k \backslash F_k| < 2^{-k}\varepsilon$ 且 $f|_{F_k}$ 连续. 令 $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \subseteq E$，则 $f|_F$ 连续，$|E \backslash F| < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\varepsilon = \varepsilon$，并且 F 是闭集（这是因为，对任何 F 中的收敛数列，充分大时必落入某个 I_k，从而必落入某个 F_k。再由于 F_k 是闭集，知道极限在 $F_k \subseteq F$ 中） $\square$

第三章　Lebesgue 积分

3.1　Lebesgue 积分的定义

我们分三步定义 Lebesgue 积分：

- 非负可测简单函数
- 非负可测函数
- 可测函数

下面表达式中，如果出现 $0 \times \infty$, $\infty \times 0$，则约定为 0.

3.1.1　非负可测简单函数的积分

定义 3.1 (非负可测简单函数的积分).

设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是测度空间，$f : X \to [0, +\infty]$ 是 $\mathcal{S}-$ 可测简单函数，即可写成

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}$$

其中 $c_i \geq 0$ 互异，$E_i \in \mathcal{S}$ 构成了 X 的分划。
定义 f 对 μ 的积分 $I(f)$ 为

$$I(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E_i)$$

引理 3.1.

设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是测度空间，$f, g : X \to [0, +\infty]$ 是 $\mathcal{S}-$ 可测简单函数。
若 $f \leq g$，则 $I(f) \leq I(g)$

证明. 设 $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}$，$g = \sum_{j=1}^{m} d_j \chi_{F_j}$ 是由命题 2.8 确定的形式。则每个 $E_i \cap F_j \in \mathcal{S}$，并且构成了 X 的分划。由于 $E_i = \bigcup_{j=1}^{m} E_i \cap F_j$ 以及测度的可列可加性，知 $\mu(E_i) = \sum_{j=1}^{m} \mu(E_i \cap F_j)$。同理，$\mu(F_j) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i \cap F_j)$。对每个 i, j，设 $c_{ij} = c_i$，$d_{ij} = d_j$，则有

$$I(f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \mu(E_i \cap F_j) \qquad I(g) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} d_{ij} \mu(E_i \cap F_j)$$

由于 $f \leq g$，同时注意到 c_{ij} 是 f 在 $E_i \cap F_j$ 上的取值，d_{ij} 是 g 在 $E_i \cap F_j$ 上的取值，因此 $c_{ij} \leq d_{ij}$。这就表明 $I(f) \leq I(g)$. □

3.1.2 非负可测函数的积分

定义 3.2 (非负可测函数的积分).

设 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 是测度空间，$f:X\to[0,+\infty]$ 是 $\mathcal{S}-$ 可测函数，
定义 f 对 μ 的积分 $\int^{+} f\mathrm{d}\mu$ 为

$$\int^{+} f\mathrm{d}\mu=\sup\left\{I(s):s\le f,s:X\to[0,+\infty]\text{是}\mathcal{S}-\text{可测简单函数}\right\}$$

命题 3.1.

定义 3.2 与定义 3.1 所确定的积分是兼容的。
换言之，设 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 是测度空间，$f:X\to[0,+\infty]$ 是 $\mathcal{S}-$ 可测简单函数，则

$$\int^{+} f\mathrm{d}\mu=I(f)$$

证明. 考察 $A=\left\{I(s):s\le f,s:X\to[0,+\infty]\text{是}\mathcal{S}-\text{可测简单函数}\right\}$. 对于任何 $a\in A$，都会有某个 $X\to[0,+\infty]$ 的 $\mathcal{S}-$ 可测简单函数 s，满足 $s\le f$ 并且 $a=I(s)$. 由引理 3.1 知 $a=I(s)\le I(f)$。因此，$\sup A\le I(f)$。同时注意到 $I(f)\in A$，故 $\sup A\ge I(f)$。所以，$\int^{+} f\mathrm{d}\mu=\sup A=I(f)$ □

引理 3.2.

设 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 是测度空间，$f:X\to[0,+\infty]$ 是 $\mathcal{S}-$ 可测简单函数。则

$$\int^{+} f\mathrm{d}\mu\ge 0$$

此外，假若在 X 上恒有 $f=0$，则

$$\int^{+} f\mathrm{d}\mu=0$$

证明. 对所有满足 $s\le f$ 的非负简单可测函数 s，由定义 3.1 知 $I(s)=\sum_{i=1}^{n}c_i\mu(E_i)\ge 0$。再由定义 3.2 知取 sup 后仍然保持 $\int^{+} f\mathrm{d}\mu\ge 0$。

$f=0$ 是非负可测简单函数，由定义 3.1 知 $I(f)=0$。再由命题 3.1 知 $\int^{+} f\mathrm{d}\mu=0$ □

事实上，还有第二种定义非负可测函数积分的方法，那就是借由 Lebesgue 下和。

定义 3.3 (Lebesgue 下和).

设 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 是测度空间，$f:X\to[0,+\infty]$ 是 $\mathcal{S}-$ 可测函数，P 是 X 的有限可测分划（意思是存在有限个 $E_1,\cdots,E_n\in\mathcal{S}$ 构成 X 的分划）。
定义 Lebesgue 下和 $L(f,P)$ 为

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}m_i\mu(E_i)$$

其中 E_i 构成有限可测分划 P，$m_i=\inf_{x\in E_i}f(x)$

命题 3.2.

设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是测度空间，$f : X \to [0, +\infty]$ 是 $\mathcal{S}-$ 可测函数，则

$$\int^{+} f \mathrm{d}\mu = \sup \left\{ L(f, P) : P\text{是}X\text{的有限可测分划} \right\}$$

证明. 只需证明对下述两个集合 A, B，有 $\sup A = \sup B$：

$$A = \left\{ I(s) : s \leq f, s : X \to [0, +\infty]\text{是}\mathcal{S} - \text{可测简单函数} \right\}$$

$$B = \left\{ L(f, P) : P\text{是}X\text{的有限可测分划} \right\}$$

一方面，对任何 $a \in A$，都有 $a = I(s)$，其中 $s \leq f$，s 是非负 $\mathcal{S}-$ 可测简单函数。设 $s = \sum c_i \chi_{E_i}$，则 E_i 构成了 X 的有限可测分划 P，并且由 $s \leq f$ 知道 $c_i \leq \inf_{x \in E_i} f(x) = m_i$。因此取 $b = L(f, P) \in B$ 就有 $a = \sum c_i \mu(E_i) \leq \sum m_i \mu(E_i) = b$。故 $\sup A \leq \sup B$

另一方面，对任何 $b \in B$，设 $b = L(f, P) = \sum m_i \mu(E_i)$，其中 E_i 构成了 X 的有限可测分划 P。由 f 非负知 m_i 非负。这就自动确定了一个非负 $\mathcal{S}-$ 可测简单函数 $s = \sum m_i \chi_{E_i}$. 由于每个 $m_i = \inf_{x \in E_i} f(x)$，故 $s \leq f$。取 $a = I(s) \in A$ 就有 $a = b$. 故 $\sup A \geq \sup B$. □

3.1.3 可测函数的积分

回忆定义 2.4，$f^{+} = \max(f, 0), f^{-} = \max(-f, 0)$。由命题 2.7，当 $f : X \to \mathbb{R}$ 是 $\mathcal{S}-$ 可测函数时，f^{+}, f^{-} 均为非负 $\mathcal{S}-$ 可测函数，因此 $\int^{+} f^{+} \mathrm{d}\mu$ 与 $\int^{+} f^{-} \mathrm{d}\mu$ 均有意义。

定义 3.4 (可测函数的积分).

设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是测度空间，$f : X \to \mathbb{R}$ 是 $\mathcal{S}-$ 可测函数。
如果 $\int^{+} f^{+} \mathrm{d}\mu$ 与 $\int^{+} f^{-} \mathrm{d}\mu$ 二者中至少有一个是有限的，则定义 f 对 μ 的 **Lebesgue 积分** $\int f \mathrm{d}\mu$ 为

$$\int f \mathrm{d}\mu = \int^{+} f^{+} \mathrm{d}\mu - \int^{+} f^{-} \mathrm{d}\mu$$

命题 3.3.

定义 3.4 与定义 3.2 所确定的积分是兼容的。
换言之，设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是测度空间，$f : X \to [0, +\infty]$ 是 $\mathcal{S}-$ 可测函数，则

$$\int f \mathrm{d}\mu = \int^{+} f \mathrm{d}\mu$$

证明. 显见 $f^{+} = f$，$f^{-} = 0$。由引理 3.2，$\int^{+} f^{-} \mathrm{d}\mu = 0$ 有限。故 $\int f \mathrm{d}\mu$ 有意义，且

$$\int f \mathrm{d}\mu = \int^{+} f^{+} \mathrm{d}\mu - \int^{+} f^{-} \mathrm{d}\mu = \int^{+} f \mathrm{d}\mu$$

□

3.2 Lebesgue 积分的性质

在进行下面的讨论前，先定义 f 在 X 的一个子集 E 上的积分。

定义 3.5 (子集上的积分).

设 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 是测度空间，并且 $E\in\mathcal{S}$。如果 $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 是 $\mathcal{S}-$ 可测函数，则定义 f 在 E 上对于 μ 的积分 $\int_E f\mathrm{d}\mu$ 为子测度空间 $(E,\mathcal{S}\cap\mathcal{P}(E),\mu|_{\mathcal{S}\cap\mathcal{P}(E)})$ 上 $f|_E$ 对于 $\mu|_{\mathcal{S}\cap\mathcal{P}(E)}$ 的积分 $\int f|_E\mathrm{d}\mu|_{\mathcal{S}\cap\mathcal{P}(E)}$：

$$\int_E f\mathrm{d}\mu=\int f|_E\mathrm{d}\mu|_{\mathcal{S}\cap\mathcal{P}(E)}$$

命题 3.4.

定义 3.5 与定义 3.4 所确定的积分是兼容的。
换言之，设 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 是测度空间，$f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 是 $\mathcal{S}-$ 可测函数，则

$$\int_X f\mathrm{d}\mu=\int f\mathrm{d}\mu$$

证明. 这是显然的。 □

下面研究 Lebesgue 积分的诸性质。

命题 3.5 (积分的齐性 (GTM 282, 3.20) [3]).

设 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 是测度空间，$E\in\mathcal{S}$，$f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 使得 $\int_E f\mathrm{d}\mu$ 有定义，设 $c\in\mathbb{R}$。则

$$\int_E cf\mathrm{d}\mu=c\int_E f\mathrm{d}\mu$$

证明. 先假设 $c\geq 0$ 且 f 是非负简单可测函数。则 cf 亦是非负简单可测函数。此时该命题由定义 3.1 显然成立。

再假设 $c\geq 0$ 且 f 是非负可测函数。则 cf 亦是非负可测函数。注意到对每个非负简单可测函数 s 而言，$s\leq f$ 等价于 $cs\leq cf$，而由刚才的讨论 $I(cs)=cI(s)$。因此取上确界后，由定义 3.2 知 $\int_E cf\mathrm{d}\mu=c\int_E f\mathrm{d}\mu$ 成立。

然后假设 $c\geq 0$ 且 f 是可测函数，则 cf 亦是可测函数。此时

$$\begin{aligned}\int_E cf\mathrm{d}\mu&=\int_E(cf)^+\mathrm{d}\mu-\int_E(cf)^-\mathrm{d}\mu=\int_E cf^+\mathrm{d}\mu-\int_E cf^-\mathrm{d}\mu\\&=c\int_E f^+\mathrm{d}\mu-c\int_E f^-\mathrm{d}\mu=c\left(\int_E f^+\mathrm{d}\mu-\int_E f^-\mathrm{d}\mu\right)=c\int_E f\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

最后假设 $c<0$ 且 f 是可测函数，则 cf 亦是可测函数。此时 $-c>0$ 并且

$$\begin{aligned}\int_E cf\mathrm{d}\mu&=\int_E(cf)^+\mathrm{d}\mu-\int_E(cf)^-\mathrm{d}\mu=\int_E(-c)f^-\mathrm{d}\mu-\int_E(-c)f^+\mathrm{d}\mu\\&=(-c)\int_E f^-\mathrm{d}\mu-(-c)\int_E f^+\mathrm{d}\mu=(-c)\left(\int_E f^-\mathrm{d}\mu-\int_E f^+\mathrm{d}\mu\right)=c\int_E f\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

□

看到这里，自然会问 $\int(f+g)\mathrm{d}\mu=\int f\mathrm{d}\mu+\int g\mathrm{d}\mu$ 是否成立呢？事实上也是成立的，我们留到下节证明。

命题 3.6 (零测集上的积分).

设 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 是测度空间，$E\in\mathcal{S}$ 且 $\mu(E)=0$，$f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 是 $\mathcal{S}-$ 可测函数。则

$$\int_E f\mathrm{d}\mu=0$$

证明. 先假设 f 是非负可测的。则由定义 3.1 ，以及零测集的 $\mathcal{S}-$ 可测子集仍零测的事实，所有满足 $s\leq f$ 的非负简单可测函数 s 都有 $\int_E s\mathrm{d}\mu=0$。再由定义 3.2 知道 $\int_E f\mathrm{d}\mu=0$。

再考虑一般的 f。因为 f^+,f^- 是非负可测的，由刚才的讨论，$\int_E f^+\mathrm{d}\mu=0$ 且 $\int_E f^-\mathrm{d}\mu=0$。因此 $\int_E f\mathrm{d}\mu=\int_E f^+\mathrm{d}\mu-\int_E f^-\mathrm{d}\mu=0$。 □

命题 3.7 (积分的区域可加性 (Rudin, 11.24)[2]).

设 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 是测度空间，$f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 使得 f 非负 $\mathcal{S}-$ 可测，或 $\int f\mathrm{d}\mu<+\infty$。设一列集合 $A_1,A_2,\cdots\in\mathcal{S}$ 满足两两无交 $A_i\cap A_j=\emptyset\ (i\neq j)$，设 $A=\bigcup A_i$，则

$$\int_A f\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{A_i}f\mathrm{d}\mu$$

定理 3.1 (积分测度).

设 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 是测度空间，$f:X\to[0,+\infty]$ 是 $\mathcal{S}-$ 可测函数。则

$$\phi:\mathcal{S}\to[0,+\infty],\ A\mapsto\int_A f\mathrm{d}\mu$$

是可测空间 $(X,\mathcal{S})$ 上的测度。

证明. 引理 3.2 保证了 ϕ 确实是 $\mathcal{S}\to[0,+\infty]$ 的。命题 3.6 及 $\mu(\emptyset)=0$ 的事实保证了 $\phi(\emptyset)=0$。命题 3.7 保证了 ϕ 的可数可加性。从而 ϕ 是测度。 □

命题 3.8 (积分的保序性).

设 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 是测度空间，$E\in\mathcal{S}$，$f,g:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 使得 $\int_E f\mathrm{d}\mu,\int_E g\mathrm{d}\mu$ 有定义，并且 $f\leq g$ 在 E 上恒成立。则

$$\int_E f\mathrm{d}\mu\leq\int_E g\mathrm{d}\mu$$

证明. 先假设 f,g 非负可测。那么所有满足 $s\leq f$ 的非负简单可测函数 s 都满足 $s\leq g$，取上确界后由定义 3.2 就有 $\int_E f\mathrm{d}\mu\leq\int_E g\mathrm{d}\mu$。

再考虑一般的情况。由 $f\leq g$ 知 $f^+\leq g^+$, $f^-\geq g^-$。因此由刚才的讨论，$\int_E f^+\mathrm{d}\mu\leq\int_E g^+\mathrm{d}\mu$，$\int_E f^-\mathrm{d}\mu\geq\int_E g^-\mathrm{d}\mu$。故

$$\int_E f\mathrm{d}\mu=\int_E f^+\mathrm{d}\mu-\int_E f^-\mathrm{d}\mu\leq\int_E g^+\mathrm{d}\mu-\int_E g^-\mathrm{d}\mu=\int_E g\mathrm{d}\mu$$

□

命题 3.9 (积分的绝对值不等式 (Rudin, 11.26) [2]).

设 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 是测度空间，$f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 使得 $\int_E f\mathrm{d}\mu$ 有定义。则

$$\left|\int_E f\mathrm{d}\mu\right|\le\int_E|f|\mathrm{d}\mu$$

命题 3.10 (积分的界 (GTM 282, 3.25)[3]).

设 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 是测度空间，$E\in\mathcal{S}$，$f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 使得 $\int_E f\mathrm{d}\mu$ 有定义。则

$$\left|\int_E f\mathrm{d}\mu\right|\le\left(\sup_E|f|\right)\mu(E)$$

证明.

$$\left|\int_E f\mathrm{d}\mu\right|\le\int_E|f|\mathrm{d}\mu\le\int_E\left(\sup_E|f|\right)\mathrm{d}\mu=\left(\sup_E|f|\right)\mu(E)$$

（第一个不等号来自命题 3.9；第二个不等号来自命题 3.8；最后的等号来自非负简单可测函数的积分的定义） □

命题 3.11.

设 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 是测度空间，$E\in\mathcal{S}$，$f:X\to\overline{\mathbb{R}}$, $g:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 均是 $\mathcal{S}-$ 可测函数，在 E 上几乎处处 $f=g$，且 $\int_E g\mathrm{d}\mu$ 有定义。则 $\int_E f\mathrm{d}\mu$ 有定义，并且

$$\int_E f\mathrm{d}\mu=\int_E g\mathrm{d}\mu$$

证明. 先假设 f,g 均非负可测，则 $\int_E f\mathrm{d}\mu$ 有定义。由在 E 上几乎处处 $f=g$ 知存在 $N,S\in\mathcal{S}$ 使得 $E=N\cup S$，$N\cap S=\emptyset$，在 S 上 $f=g$，且 $\mu(N)=0$。故

$$\int_E f\mathrm{d}\mu=\int_S f\mathrm{d}\mu+\int_N f\mathrm{d}\mu=\int_S f\mathrm{d}\mu=\int_S g\mathrm{d}\mu=\int_S g\mathrm{d}\mu+\int_N g\mathrm{d}\mu=\int_E g\mathrm{d}\mu$$

（其中第一个与最后一个等号使用了命题 3.7，第二个与倒数第二个等号使用了命题 3.6）

下面再讨论一般情况。由在 E 上几乎处处 $f=g$ 知道在 E 上几乎处处 $f^+=g^+$ 且 $f^-=g^-$。由刚才的讨论知道 $\int_E f^+\mathrm{d}\mu=\int_E g^+\mathrm{d}\mu$，$\int_E f^-\mathrm{d}\mu=\int_E g^-\mathrm{d}\mu$。由 $\int_E g\mathrm{d}\mu$ 有定义知道前面两个积分至少有一个是有限的，从而 $\int_E f\mathrm{d}\mu$ 有定义，并且

$$\int_E f\mathrm{d}\mu=\int_E f^+\mathrm{d}\mu-\int_E f^-\mathrm{d}\mu=\int_E g^+\mathrm{d}\mu-\int_E g^-\mathrm{d}\mu=\int_E g\mathrm{d}\mu$$

□

命题 3.12 (Stein, Chapter 2, Proposition 1.6(v)).

设 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 是测度空间，$E\in\mathcal{S}$，$f:X\to[0,+\infty]$ 使得 $\int_E f\mathrm{d}\mu<+\infty$，则在 E 上几乎处处 $f<+\infty$。

证明. 对 $k\in\mathbb{Z}^+$，设 $E_k=\{x\in E:f(x)\ge k\}$，$E_\infty=\{x\in E:f(x)=\infty\}$. 由于 $\int_E f\mathrm{d}\mu$ 是有定义的，故 f 是 $\mathcal{S}-$ 可测函数，故 $E_k,E_\infty\in\mathcal{S}$，并且有

$$+\infty>\int_E f\mathrm{d}\mu\ge\int_E k\chi_{E_k}\mathrm{d}\mu=k\mu(E_k)$$

（其中第一个不等号是条件；第二个不等号是注意到在 E 上 $f \geq k\chi_{E_k}$，然后用命题 3.8；最后的等号来自非负简单可测函数积分的定义）

故当 $k \to \infty$ 时

$$\mu(E_k) < \frac{\int_E f \mathrm{d}\mu}{k} \to 0$$

注意到 $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots$ 并且 $E_\infty = \bigcap E_k$. 故由命题 1.6 知

$$\mu(E_\infty) = \lim_{k \to \infty} \mu(E_k) = 0$$

即在 E 上几乎处处 $f < +\infty$。 □

命题 3.13 (Stein, Chapter 2, Proposition 1.6(vi)).

设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是测度空间，$E \in \mathcal{S}$，$f : X \to [0, +\infty]$ 是 $\mathcal{S}-$ 可测函数。则 $\int_E f \mathrm{d}\mu = 0$，等价于：在 E 上几乎处处 $f = 0$。

证明. $(\Rightarrow)$: 对 $k \in \mathbb{Z}^+$，设 $E_k = \{x \in E : f(x) \geq 1/k\}$，$E_\infty = \{x \in E : f(x) \neq 0\}$. 则

$$0 = \int_E f \mathrm{d}\mu \geq \int_E \frac{1}{k}\chi_{E_k} \mathrm{d}\mu = \frac{1}{k}\mu(E_k) \geq 0$$

因此每个 $\mu(E_k) = 0$，当然也会有 $\mu(E_k) \to 0$ $(k \to \infty)$。

注意到 $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$ 并且 $E_\infty = \bigcup E_k$. 故由命题 1.6 知

$$\mu(E_\infty) = \lim_{k \to \infty} \mu(E_k) = 0$$

即在 E 上几乎处处 $f = 0$。

$(\Leftarrow)$: 这是命题 3.11 的直接推论。 □

3.3 收敛定理

本节介绍四个收敛定理。

- 单调收敛定理
- Fatou 定理
- 有界收敛定理
- 控制收敛定理

3.3.1 单调收敛定理

定理 3.2 (单调收敛定理 (GTM 282, 3.11) [3]).

设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是测度空间，$\mathcal{S}-$ 可测函数序列 $f_1, f_2, \cdots : X \to \overline{\mathbb{R}}$ 点态收敛于 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$。如果在 X 上恒有 $0 \le f_1 \le f_2 \le \cdots$，那么

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu$$

证明. 由命题 2.4 知 f 是非负 $\mathcal{S}-$ 可测函数。因为每个 $f_n \le f$，所以 $\int f_n \mathrm{d}\mu \le \int f \mathrm{d}\mu$，取极限后 $\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu \le \int f \mathrm{d}\mu$。下证另外一个方向。

对所有 $s \le f$ 的非负简单可测函数 s，固定其中一个 s 并设 $s = \sum_{i=1}^m c_i \chi_{A_i}$。令 $t \in (0,1)$。对 $n \in \mathbb{Z}^+$，令

$$E_n = \left\{ x \in X : f_n(x) \ge t \sum_{i=1}^m c_i \chi_{A_i}(x) \right\}$$

则 $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$，并且 $\bigcup_n E_n = X$. 因此对每个 A_i，都有 $A_i \cap E_1 \subseteq A_i \cap E_2 \subseteq \cdots$，并且 $\bigcup_n (A_i \cap E_n) = A_i$。故对每个 A_i 都有 $\lim_{n\to\infty} \mu(A_i \cap E_n) = \mu(A_i)$。

对 $n \in \mathbb{Z}^+$，对任何 $x \in X$，有

$$f_n(x) \ge t \sum_{i=1}^m c_i \chi_{A_i \cap E_n}(x)$$

由积分的保序性，

$$\int f_n \mathrm{d}\mu \ge t \sum_{i=1}^m c_I \mu(A_i \cap E_n)$$

两边取极限，

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu \ge t \sum_{i=1}^m c_i \mu(A_i)$$

由于这是对所有的 $t \in (0,1)$ 都成立的，让 $t \to 1$ 即得

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu \ge \sum_{i=1}^m c_i \mu(A_i) = I(s)$$

由于这是对所有非负简单可测函数 $s \le f$ 成立的，两边对所有这样的 s 取上确界即得

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu \ge \int f \mathrm{d}\mu$$

□

命题 3.14 (积分的可加性).

设 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 是测度空间，$E\in\mathcal{S}$，$f,g:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 使得 f,g 均非负 $\mathcal{S}-$ 可测，或 $\int_E f\mathrm{d}\mu<+\infty,\int_E g\mathrm{d}\mu<+\infty$。则

$$\int_E(f+g)\mathrm{d}\mu=\int_E f\mathrm{d}\mu+\int_E g\mathrm{d}\mu$$

证明. 先假设 f,g 是非负简单可测函数，则该命题由定义 3.1 明显成立。

再假设 f,g 是非负可测函数。由定理 2.1，存在递增的非负简单可测函数序列 f_n,g_n，使得 f_n,g_n 分别点态收敛于 f,g。此时 f_n+g_n 是递增的非负简单可测函数序列，并且点态收敛于 $f+g$。由单调收敛定理（定理 3.2），

$$\begin{aligned}\int_E(f+g)\mathrm{d}\mu&=\lim_{n\to\infty}\int_E(f_n+g_n)\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\left(\int_E f_n\mathrm{d}\mu+\int_E g_n\mathrm{d}\mu\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}\mu+\lim_{n\to\infty}\int_E g_n\mathrm{d}\mu=\int_E f\mathrm{d}\mu+\int_E g\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

最后讨论 $\int_E f\mathrm{d}\mu<+\infty,\int_E g\mathrm{d}\mu<+\infty$ 的情况。注意到恒等式（请自行验证）：

$$(f+g)^++f^-+g^-=(f+g)^-+f^++g^+$$

由刚才已证非负可测情形的可加性，

$$\int_E(f+g)^+\mathrm{d}\mu+\int_E f^-\mathrm{d}\mu+\int_E g^-\mathrm{d}\mu=\int_E(f+g)^-\mathrm{d}\mu+\int_E f^+\mathrm{d}\mu+\int_E g^+\mathrm{d}\mu$$

由 $\int_E f\mathrm{d}\mu<+\infty$，知 $\int_E f^+\mathrm{d}\mu<+\infty$. 同理 $\int_E g^+\mathrm{d}\mu<+\infty$。注意到 $(f+g)^+\le f^++g^+$，所以由积分的保序性和之前已证非负可测情形的可加性，

$$\int_E(f+g)^+\mathrm{d}\mu\le\int_E(f^++g^+)\mathrm{d}\mu=\int_E f^+\mathrm{d}\mu+\int_E g^+\mathrm{d}\mu<+\infty$$

同理可证 $\int_E(f+g)^-\mathrm{d}\mu<+\infty$。这表明 $\int_E(f+g)\mathrm{d}\mu$ 有定义（而且有限），并且

$$\begin{aligned}\int_E(f+g)\mathrm{d}\mu&=\int_E(f+g)^+\mathrm{d}\mu-\int_E(f+g)^-\mathrm{d}\mu\\&=\int_E f^+\mathrm{d}\mu-\int_E f^-\mathrm{d}\mu+\int_E g^+\mathrm{d}\mu-\int_E g^-\mathrm{d}\mu=\int_E f\mathrm{d}\mu+\int_E g\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

□

3.3.2 Fatou 定理

定理 3.3 (Fatou 定理 (Rudin, 11.31) [2]).

设 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 是测度空间，设 $\mathcal{S}-$ 可测函数序列 $f_1,f_2,\cdots:X\to[0,+\infty]$。如果 $f:X\to[0,+\infty]$ 定义为 $f(x)=\liminf_{n\to\infty}f_n(x)$，那么

$$\int f\mathrm{d}\mu\le\liminf_{n\to\infty}\int f_n\mathrm{d}\mu$$

3.3.3 有界收敛定理

定理 3.4 (有界收敛定理 (GTM 282, 3.26) [3]).

设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是测度空间，并且 $\mu(X) < +\infty$。设 $\mathcal{S}-$ 可测函数序列 $f_1, f_2, \cdots : X \to \mathbb{R}$ 点态收敛于 $f : X \to \mathbb{R}$。如果存在 $M \in \mathbb{R}^+$ 使得对任何 $n \in \mathbb{Z}^+, x \in X$ 都有 $|f_n(x)| \leq M$，那么

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu$$

证明. 由命题 2.4 知 f 是 $\mathcal{S}-$ 可测函数，此外 $|f| \leq M$。对任何 $\varepsilon > 0$，由 Egorov 定理（定理 2.3）知存在 $E \in \mathcal{S}$ 使得 $\mu(X \backslash E) < \frac{\varepsilon}{4M}$ 并且 $f_1, f_2, \cdots$ 在 E 上一致收敛于 f。因此当 n 充分大时，$(\sup_E |f_n - f|)\,\mu(E) < \frac{\varepsilon}{2}$，并且

$$\begin{aligned}
\left|\int f_n \mathrm{d}\mu - \int f \mathrm{d}\mu\right| &= \left|\int_{X\backslash E} f_n \mathrm{d}\mu - \int_{X\backslash E} f \mathrm{d}\mu + \int_E (f_n - f)\mathrm{d}\mu\right| \\
&\leq \left|\int_{X\backslash E} f_n \mathrm{d}\mu\right| + \left|\int_{X\backslash E} f \mathrm{d}\mu\right| + \left|\int_E (f_n - f)\mathrm{d}\mu\right| \\
&\leq M\mu(X\backslash E) + M\mu(X\backslash E) + \left(\sup_E |f_n - f|\right)\mu(E) \\
&< M\frac{\varepsilon}{4M} + M\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

（其中倒数第二个不等式使用了命题 3.10）

故

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu$$

□

命题 3.15 (GTM 282, 3.29[3]).

设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是测度空间，$g : X \to [0, +\infty]$ 使得 $\int g \mathrm{d}\mu < +\infty$。则对于任何 $\varepsilon > 0$，存在 $E \in \mathcal{S}$，使得 $\mu(E) < +\infty$ 并且

$$\int_{X\backslash E} g \mathrm{d}\mu < \varepsilon$$

证明. 由非负可测函数积分的定义，对任何 $\varepsilon > 0$，存在非负简单可测函数 $s \leq g$，满足

$$\int g \mathrm{d}\mu < \int s \mathrm{d}\mu + \varepsilon$$

设 $s = \sum_i s_i \chi_{E_i}$，$E = \bigcup_{i\in I} E_i$，其中指标集 $I = \{i : s_i > 0\}$。则 $E \in \mathcal{S}$，$\mu(E) < +\infty$（否则，$\int g \mathrm{d}\mu \geq \int s \mathrm{d}\mu \geq (\min_{i\in I} s_i)\mu(E) = +\infty$，与条件 $\int g \mathrm{d}\mu < +\infty$ 矛盾），并且

$$\begin{aligned}
\int_{X\backslash E} g \mathrm{d}\mu &= \int g \mathrm{d}\mu - \int_E g \mathrm{d}\mu \\
&< \int s \mathrm{d}\mu + \varepsilon - \int_E g \mathrm{d}\mu \\
&= \int_E s \mathrm{d}\mu + \varepsilon - \int_E g \mathrm{d}\mu \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

□

命题 3.16 (积分的绝对连续性 (GTM 282,3.28) [3]).

设 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 是测度空间，$g: X\to[0,+\infty]$ 使得 $\int g\mathrm{d}\mu<+\infty$。则对于任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对任何 $B\in\mathcal{S}$，当 $\mu(B)<\delta$ 时，

$$\int_B g\mathrm{d}\mu<\varepsilon$$

证明. 由非负可测函数积分的定义，对任何 $\varepsilon>0$，存在非负简单可测函数 $s\le g$，满足

$$\int g\mathrm{d}\mu-\int s\mathrm{d}\mu<\frac{\varepsilon}{2}$$

可以进一步要求 $s<+\infty$（由 $\int g\mathrm{d}\mu<+\infty$ 与命题 3.12 知在 X 上几乎处处 $s\le g<+\infty$，即取到 $s=\infty$ 的点构成零测集。在这些点上将 s 改成有限值，不改变 $\int s\mathrm{d}\mu$）。

让 $H=\max\{s(x):x\in X\}$，则 $0\le H<+\infty$。令 $\delta>0$ 使得 $H\delta<\frac{\varepsilon}{2}$。现在对任何 $B\in\mathcal{S}$，当 $\mu(B)<\delta$ 时，

$$\begin{aligned}\int_B g\mathrm{d}\mu&<\int_B(g-s)\mathrm{d}\mu+\int_B s\mathrm{d}\mu\\&\le\int(g-s)\mathrm{d}\mu+H\mu(B)\\&<\frac{\varepsilon}{2}+H\delta<\varepsilon\end{aligned}$$

□

命题 3.17.

设 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 是测度空间，$g: X\to[0,+\infty]$ 使得 $\int g\mathrm{d}\mu<+\infty$。则对于任何 $\varepsilon>0$，存在 $E\in\mathcal{S}$，使得 g 在 E 上有界，并且

$$\int_{X\backslash E} g\mathrm{d}\mu<\varepsilon$$

证明. 对任何 $m\in\mathbb{Z}^+$，设 $E_m=\{x\in X:g(x)\ge m\}$。由 $\int g\mathrm{d}\mu$ 有定义知 g 是 $\mathcal{S}-$ 可测函数，故 $E_m\in\mathcal{S}$，并且

$$+\infty>\int g\mathrm{d}\mu\ge\int m\chi_{E_m}\mathrm{d}\mu=m\mu(E_m)$$

故当 $m\to\infty$ 时

$$\mu(E_m)<\frac{\int g\mathrm{d}\mu}{m}\to 0$$

对任何 $\varepsilon>0$，由命题 3.16，存在 $\delta>0$，使得对任何 $B\in\mathcal{S}$，当 $\mu(B)<\delta$ 时，$\int_B g\mathrm{d}\mu<\varepsilon$。由 $\mu(E_m)\to 0$ 知，存在 $M\in\mathbb{Z}^+$，使得 $\mu(E_M)<\delta$。因此 $\int_{E_M} g\mathrm{d}\mu<\varepsilon$。

设 $E=X\backslash E_M$，则 $E\in\mathcal{S}$，g 在 E 上有界（因为 $E=\{x\in X:g(x)<M\}$），并且

$$\int_{X\backslash E} g\mathrm{d}\mu=\int_{E_M} g\mathrm{d}\mu<\varepsilon$$

□

3.3.4 控制收敛定理

定理 3.5 (控制收敛定理).

设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是测度空间，$\mathcal{S}-$ 可测函数序列 $f_1, f_2, \cdots : X \to \overline{\mathbb{R}}$ 点态收敛于 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$。如果存在 $\mathcal{S}-$ 可测函数 $g : X \to [0, \infty]$，使得 $\int g \mathrm{d}\mu < +\infty$，并且对任何 $n \in \mathbb{Z}^+, x \in X$ 都有 $|f_n(x)| \le g(x)$，那么

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu$$

证明.【证法一】(使用 Fatou 定理，Rudin, 11.31)(未完待续)

【证法二】(使用有界收敛定理，Stein, Chapter 2, Theorem 1.13)

由 $|f_n| \le g$ 知 $|f| \le g$，故 $|f_n - f| \le 2g$。

对任何 $\varepsilon > 0$，由命题 3.17，存在 $E \in \mathcal{S}$，使得 g 在 E 上有界并且 $\int_{X\setminus E} g \mathrm{d}\mu < \varepsilon$。故存在 $M \in \mathbb{R}^+$，使得对于任何 $n \in \mathbb{Z}^+, x \in E$，$|f_n(x)| \le g(x) \le M$。由有界收敛定理（定理 3.4），$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \mathrm{d}\mu = \int_E f \mathrm{d}\mu$。于是对充分大的 n 都有 $\int_E |f_n - f| \mathrm{d}\mu < \varepsilon$。故

$$\begin{aligned}
\int |f_n - f| \mathrm{d}\mu &= \int_E |f_n - f| \mathrm{d}\mu + \int_{X\setminus E} |f_n - f| \mathrm{d}\mu \\
&\le \int_E |f_n - f| \mathrm{d}\mu + 2\int_{X\setminus E} g \mathrm{d}\mu \\
&< \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon
\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu$$

□

3.4 Riemann 积分

记 $\int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} f$ 是 f 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分。

引理 3.3.

设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是有界函数，$|f|\le M$，P,P' 是 $[a,b]$ 的两个分划，P 包含 k 个分划点，P' 中最长区间的长度为 δ。则 Darboux 下和有如下关系：

$$L(f,P)\le L(f,P')+2M\delta k$$

证明. P' 中的每个区间分成两类：

1. 包含 P 中的分划点
2. 不包含 P 中的分划点

只有第一类区间，才有可能使得其上 P' 对应的 Darboux 下和小于 P 的，且差距不会超过振幅乘最大长度，即 $2M\delta$。而第一类区间的个数不会超过 P 的分划点个数，即 k 个。因此，$L(f,P')$ 再小，也不会小过 $L(f,P)-2M\delta k$。 □

引理 3.4.

设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是有界函数，P_n 是 $[a,b]$ 的一系列分划，P_{n+1} 是 P_n 的加细，并且当 $n\to\infty$ 时，P_n 中最长区间的长度趋于 0。则 Darboux 上和与下和的极限 $\lim_{n\to\infty}U(f,P_n)$, $\lim_{n\to\infty}L(f,P_n)$ 存在，且分别等于 Darboux 上积分与下积分 $U(f)$, $L(f)$。

证明. 因 f 有界，设 $|f|\le M$. 因为 P_{n+1} 是 P_n 的加细，所以 $U(f,P_n)$ 单调递减，$L(f,P_n)$ 单调递增，此外它们都是有界的（因为落在 $[-M,M]$ 中）。由单调有界定理，$\lim_{n\to\infty}U(f,P_n)$, $\lim_{n\to\infty}L(f,P_n)$ 存在。

下证 $L(f)=\lim_{n\to\infty}L(f,P_n)$（$U(f)$ 是类似的）。由单调递增知只需证 $L(f)=\sup_{n\in\mathbb{Z}^+}L(f,P_n)$. 而我们已经知道了 $L(f,P_n)\le L(f)$。因此只需证 $\forall\varepsilon>0$，存在 N 使得 $L(f)<L(f,P_N)+\varepsilon$。

现在对于任何 $\varepsilon>0$，由 $L(f)$ 的定义（$L(f)=\sup\left\{L(f,P):P\text{是}[a,b]\text{的分划}\right\}$）知道，存在一个分划 P，使得 $L(f)<L(f,P)+\frac{\varepsilon}{2}$。设 P 包含 k 个分划点。因为当 $n\to\infty$ 时，P_n 中最长区间的长度趋于 0，所以可以取充分大的 N，使得 P_N 中最长区间的长度 δ 小于 $\frac{\varepsilon}{4Mk}$. 根据引理 3.3，$L(f,P)\le L(f,P_N)+2M\delta k<L(f,P_N)+\frac{\varepsilon}{2}$。因此，

$$L(f)<L(f,P)+\frac{\varepsilon}{2}<L(f,P_N)+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=L(f,P_N)+\varepsilon$$

□

定理 3.6 ((GTM 282, 3.34) [3]).

设 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 是有界函数。记 m 是 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度。则：

1. 如果 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积，那么 Lebesgue 积分 $\int_{[a,b]} f\mathrm{d}m$ 存在，并且

$$\int_{[a,b]} f\mathrm{d}m = \int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} f$$

2. f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积，等价于：f 在 $[a, b]$ 上几乎处处连续。

证明. 因 f 有界，设 $|f| \le M$。设 P_n 是 $[a, b]$ 的 2^n 等分分划。则 P_{n+1} 是 P_n 的加细，并且 P_n 中的每个区间的长度都是 $\frac{b-a}{2^n}$，当 $n \to \infty$ 时趋于 0。由引理 3.4，

$$L(f) = \lim_{n\to\infty} L(f, P_n) \qquad U(f) = \lim_{n\to\infty} U(f, P_n)$$

设 P_n 中的区间分别是 $I_1, \cdots, I_{2^n}$。令

$$\phi_n = \sum_{j=1}^{2^n} (\inf_{I_j} f)\chi_{I_j} \qquad \psi_n = \sum_{j=1}^{2^n} (\sup_{I_j} f)\chi_{I_j}$$

则显然有 $\phi_n \le f \le \psi_n$, $\phi_n \le \phi_{n+1}$, $\psi_{n+1} \le \psi_n$, $|\phi_n| \le M$, $|\psi_n| \le M$，且

$$L(f, P_n) = \int_{[a,b]} \phi_n \mathrm{d}m \qquad U(f, P_n) = \int_{[a,b]} \psi_n \mathrm{d}m$$

令

$$\phi(x) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(x) \qquad \psi(x) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(x)$$

对每个 $x \in [a, b]$，由 $\phi_n(x), \psi_n(x)$ 单调有界知 ϕ, ψ 的定义是良好的，并且 $\phi \le f \le \psi$。因为 $m[a, b] = b - a < +\infty$，$\phi_n, \psi_n$ 是阶梯函数序列（从而是 Lebesgue 可测函数序列），并且 $|\phi_n| \le M$, $|\psi_n| \le M$，所以由有界收敛定理（定理 3.4）知道

$$L(f) = \lim_{n\to\infty} L(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \phi_n \mathrm{d}m = \int_{[a,b]} \phi \mathrm{d}m$$
$$U(f) = \lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \psi_n \mathrm{d}m = \int_{[a,b]} \psi \mathrm{d}m$$

因此，f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积，等价于 $L(f) = U(f)$，等价于 $\int_{[a,b]} \phi\mathrm{d}m = \int_{[a,b]} \psi\mathrm{d}m$，等价于 $\int_{[a,b]} (\psi - \phi)\mathrm{d}m = 0$，（由 $\psi - \phi$ 非负可测及命题 3.13）等价于在 $[a, b]$ 上几乎处处 $\psi - \phi = 0$，（由 $\phi \le f \le \psi$）等价于在 $[a, b]$ 上几乎处处 $\phi = f = \psi$。

现在来证明原命题：

1. 第一个结论的证明：因为 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积，所以 $\int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} f = U(f)$。由之前的讨论，在 $[a, b]$ 上几乎处处 $f = \psi$。由命题 3.11 知 $\int_{[a,b]} f\mathrm{d}m$ 存在，且

$$\int_{[a,b]} f\mathrm{d}m = \int_{[a,b]} \psi\mathrm{d}m = U(f) = \int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} f$$

2. 第二个结论的证明：假若 $x \in [a, b]$ 不属于任何 P_n 中的分划点，那么显见 $\phi(x) = f(x) = \psi(x)$ 等价于 f 在 x 点连续。因为所有 P_n 的分划点的并集可数，其测度是 0，所以 f 在 $[a, b]$ 上几乎处处连续，等价于在 $[a, b]$ 上几乎处处 $\phi = f = \psi$，（由之前的讨论）等价于 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积。

□

第四章　微分

第五章　乘积测度

参考文献

[1] Stein, E.M. & Shakarchi, R., 2005. Real analysis: measure theory, integration, and Hilbert spaces., Princeton, N.J.: Princeton University Press.

[2] Rudin, W., 1976. Principles of mathematical analysis Third., New York ; Tokyo: McGraw-Hill.

[3] Sheldon, A., 2020. Measure, Integration & Real Analysis, Graduate Texts in Mathematics., Cham: Springer International Publishing AG.