

Minicurso: “Aplicação da Teoria de Topos aos Fundamentos Matemáticos da Teoria Quântica”

W. de Siqueira Pedra - IFUSP

IV Escola de Física Jayme Tiomno

Aula 1/5

- Motivação
- Bibliografia
- Ementa
- **“Re-Visão” de Álgebra Linear**

...a essência de qualquer experimento em Física não nos deixa outra
escolha a não ser

**usar os conceitos usuais, talvez refinados pela terminologia da física
clássica,**

não só em todas as condições de construção e de manipulação do
instrumental de medida, mas também na descrição dos reais resultados
experimentais ...

... é igualmente importante entender que justamente esta circunstância
implica que

**não resulta que um experimento sobre um fenômeno que se situa
fora dos limites da física clássica possa ser interpretado como dando
informação sobre propriedades independentes dos objetos...**

Ces “**nuages probabilistes**”,
remplaçant les rassurantes particules matérielles d’antan,
me rappellent étrangement les élusifs “voisinages ouverts”
qui peuplent les **topos**, tels des fantômes évanescents,
pour entourer des “**points**” **imaginaires**.

(Récoltes et Semailles - témoignage sur un passé de mathématicien, 1986)

Complementariedade como Transição “Local-Global”

“**Sheaf theory** was invented in the mid 1940s as a branch of algebraic topology to deal with the **collation of local data** on topological spaces. ... this theory is now indispensable in modern mathematics. However, instead of its **generality dealing with local-to-global transitions**, applications to other areas in science or engineering have **not been well established so far except for logic and semantics** in computer science with the **notion of Topos**”

(R. Ghrist, Y. Hiraoka, 2011)

Introdução à teoria de categorias:

- 1 F. W. Lawvere, S. H. Schanuel. *Conceptual Mathematics: A First Introduction to Categories*. Cambridge University Press, 2009.
- 2 S. Awodey. *Category Theory*. Oxford University Press, 2010.

Aplicação de topos em teoria quântica:

- 1 C. Flori. *A First Course in Topos Quantum Theory*. Springer, 2013.
- 2 H. Halvorson (editor). *Deep Beauty: Understanding the Quantum World through Mathematical Innovation*. Cambridge University Press, 2011.
- 3 A. Döring, C. J. Isham. "What is a Thing?": Topos Theory in the Foundations of Physics. In: B. Coecke (editor), *New Structures for Physics*. Lecture Notes in Physics, vol 813. Springer, 2010.

Artigos originais:

- ❶ J. Butterfield, C.J. Isham. A Topos Perspective on the Kochen–Specker Theorem II: Conceptual Aspects and Classical Analogues, *International Journal on Theoretical Physics* 38, 1999, 827–859.
- ❷ J. Butterfield, C.J. Isham. A Topos Perspective on the Kochen–Specker Theorem I: Quantum States as Generalized Valuations, *International Journal on Theoretical Physics* 11, 1998, 2669–2733.

Tópicos de teoria da informação quântica:

- ❶ S. Abramsky, A. Brandenburger. The sheaf-theoretic structure of non-locality and contextuality. *New J. Phys.* 13 (113036), 2011, 1–40.

- 1 **Noções algébricas importantes:** álgebras, $*$ -álgebras, espectro de um elemento de álgebra, estados, álgebras comutativas, espectro de uma álgebra comutativa.
- 2 **O teorema de Bell-Kochen-Specker** (versão usual).
- 3 **Introdução à teoria de categorias:** noções elementares, funtores, transformações naturais e categorias de pré-feixes (tipo relevante de topos).
- 4 **Categoria de matrizes autoadjuntas e uma versão categorial de B-K-S.**
- 5 **Pré-feixe espectral sobre contextos clássicos e B-K-S como ausência de pontos num espaço de estados.**

Noções algébricas importantes

Definição (Álgebra)

Dizemos que um espaço vetorial (complexo) \mathcal{A} é uma “álgebra” (complexa) se este é munido de uma operação binária $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ (“produto”) **bilinear**, isto é:

i.) Para todo $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{A}$, vale

$$A_1 \cdot (A_2 + A_3) = A_1 \cdot A_2 + A_1 \cdot A_3 \quad \text{e} \quad (A_1 + A_2) \cdot A_3 = A_1 \cdot A_3 + A_2 \cdot A_3 .$$

ii.) Para todo $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, vale

$$\alpha(A_1 \cdot A_2) = (\alpha A_1) \cdot A_2 = A_1 \cdot (\alpha A_2)$$

A álgebra \mathcal{A} é “comutativa” se, para todo $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, vale

$$A_1 \cdot A_2 = A_2 \cdot A_1 .$$

Se, para todo $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{A}$, valer

$$(A_1 \cdot A_2) \cdot A_3 = A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3) \doteq A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 ,$$

então a álgebra \mathcal{A} é dita ser “associativa”.

Definição (Subálgebras e Unidades)

O elemento $1 \in \mathcal{A}$ (quando existe) é chamado “unidade” desta álgebra se, para todo $A \in \mathcal{A}$, tem-se

$$1 \cdot A = A \cdot 1 = A.$$

Neste caso disemos que \mathcal{A} é uma “álgebra unital”. Se a \mathcal{A} é unital então sua unidade é única e será aqui denotada por 1 .

Um subespaço vetorial $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ é dito ser uma “subálgebra” da álgebra \mathcal{A} , se valer

$$B_1 \cdot B_2 \in \mathcal{B}$$

para todo $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$.

Se a álgebra \mathcal{A} é unital e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ uma subálgebra então dizemos que \mathcal{B} é “subálgebra unital” se

$$1 \in \mathcal{B}$$

Exemplo

O corpo dos números complexos \mathbb{C} (como espaço vetorial unidimensional) munido do produto

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \doteq \alpha_1 \alpha_2$$

é uma álgebra (complexa) comutativa, associativa e unital ($\mathbf{1} = 1$).

Exemplo

Para todo conjunto não vazio Ω o espaço vetorial complexo das funções $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$, que será denotado por $\mathcal{F}(\Omega)$, munido do produto

$$f_1 \cdot f_2(\omega) \doteq f_1(\omega)f_2(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

é igualmente uma álgebra (complexa) comutativa, associativa e unital ($\mathbf{1}(\omega) = 1$).

As funções constantes $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ formam uma subálgebra unital de $\mathcal{F}(\Omega)$.

Exemplo

Para todo $n \in \mathbb{N}$, o espaço vetorial (complexo) $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ das matrizes complexas $n \times n$ munido do produto usual de matrizes é uma álgebra (complexa). Esta álgebra é associativa e unital ($\mathbf{1} = \text{id}_{n \times n}$), mas não é comutativa se $n > 1$.

As matrizes diagonais formam uma subálgebra (comutativa!) unital de $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$.

As matrizes da forma $\alpha \text{id}_{n \times n}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, formam, por sua vez, uma subálgebra unital da (sub)álgebra das matrizes diagonais.

Exemplo

Para todo $n \in \mathbb{N}$, o espaço vetorial $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ das matrizes complexas $n \times n$ munido do “produto de Jordan”

$$M_1 \circ M_2 \doteq \frac{1}{2} (M_1 \cdot M_2 + M_2 \cdot M_1) , \quad M_1, M_2 \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C}) ,$$

é uma álgebra comutativa unital ($\mathbf{1} = \text{id}_{n \times n}$), a qual não é associativa se $n > 1$.

As matrizes diagonais formam uma subálgebra (associativa!) unital de $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ com o produto de Jordan.

Definição (Conjugações Complexas)

Seja V um espaço vetorial complexo. Dizemos que a transformação $*$: $V \rightarrow V$ é uma “conjugação complexa” se:

- i.) $*$ é uma “involução”, isto é, é sua própria inversa: $v^{**} = v$.
- ii.) $*$ é “antilinear”, isto é, para todo $v_1, v_2 \in V$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, vale

$$(v_1 + v_2)^* = v_1^* + v_2^* \quad \text{e} \quad (\alpha v_1)^* = \bar{\alpha} v_1^* .$$

Dizemos que um conjunto de vetores $\Phi \subseteq V$ é “auto-conjugado” se, para todo $v \in V$,

$$v^* \in \Phi \quad \text{sempre que} \quad v \in \Phi .$$

Dizemos que o elemento $v \in V$ é “auto-conjugado” se

$$v^* = v$$

Exemplo

São conjugações complexas (no sentido abstrato da definição acima):

- ① Em \mathbb{C} (visto com espaço vetorial complexo),

$$z^* \doteq \bar{z}$$

(conjugação usual de números complexos). Os elementos auto-conjugados são os números puramente reais.

- ② Em $\mathcal{F}(\Omega)$,

$$f^*(\omega) \doteq \overline{f(\omega)}, \quad \omega \in \Omega.$$

Os elementos auto-conjugados são as funções a valores reais.

- ③ Para todo $n \in \mathbb{N}$, em $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$,

$$M^* \doteq M^\dagger,$$

M^\dagger a matriz adjunta (ou matriz conjugada Hermitiana) da matriz M . Os elementos auto-conjugados são as matrizes autoadjuntas.

As matrizes diagonais formam um conjunto auto-conjugado de $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$

Definição ($*$ -Álgebras)

Seja \mathcal{A} uma álgebra complexa munida de uma conjugação complexa. Dizemos que \mathcal{A} é uma " $*$ -álgebra" se, para todo $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, valer que

$$(A_1 \cdot A_2)^* = A_2^* \cdot A_1^* .$$

As subálgebras auto-conjugadas de \mathcal{A} são chamadas " $*$ -subálgebras" de \mathcal{A} . (Note-se que $*$ -subálgebras de uma $*$ -álgebra são novas $*$ -álgebras.)

As $*$ -subálgebras **comutativas unitais** de uma álgebra unital \mathcal{A} são chamadas "contextos (clássicos)" de \mathcal{A} .

Exemplo

As álgebras complexas \mathbb{C} , $\mathcal{F}(\Omega)$ e $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ munidas das conjugações complexas dos exemplos acima são $*$ -álgebras.

Todas as $*$ -subálgebras de $\mathcal{F}(\Omega)$ são contextos (pois esta álgebra é comutativa).

A subálgebra de $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ formada pelas matrizes diagonais é um contexto desta $*$ -álgebra. Para $n > 1$ nem toda $*$ -subálgebra de $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ é um contexto.

Definição (Tipos importantes de elementos de \ast -álgebra)

Seja \mathcal{A} uma \ast -álgebra.

- 1 $P \in \mathcal{A}$ é um “projetor ortogonal” se P for auto-conjugado ($P^\ast = P$) e idempotente ($P \cdot P = P$).
- 2 $U \in \mathcal{A}$ é uma “isometria parcial” se $U^\ast \cdot U$ e $U \cdot U^\ast$ forem projetores ortogonais.
- 3 $U \in \mathcal{A}$ é um “unitário” se a álgebra \mathcal{A} for unital e

$$U^\ast \cdot U = U \cdot U^\ast = 1.$$

(Numa \ast -álgebra unital a unidade 1 é sempre um projetor e, portanto, unitários são isometrias parciais.)

- 4 Sejam $P_1, \dots, P_N \in \mathcal{A}$ projetores ortogonais. Estes são “mutualmente ortogonais” se $P_i \cdot P_j = 0$ para $i \neq j$.
- 5 A família $\{P_1, \dots, P_N\}$ mutuamente ortogonal de projetores é uma “resolução da identidade” se \mathcal{A} é unital e vale

$$P_1 + \dots + P_N = 1.$$

Exemplo

Seja uma dimensão $n \in \mathbb{N}$ qualquer.

- ❶ Para todo vetor não nulo $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{C}^n$, a matriz $n \times n$

$$P_{\mathbf{e}} \doteq \frac{1}{e_1^2 + \dots + e_n^2} \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \cdot [e_1 \quad \dots \quad e_n] \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$$

é um projetor ortogonal da $*$ -álgebra $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$.

- ❷ Se $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k \in \mathbb{C}^n$ são **vetores ortogonais** (no sentido usual em \mathbb{C}^n) não nulos então os projetores ortogonais $P_{\mathbf{e}_1}, \dots, P_{\mathbf{e}_k}$ são mutualmente ortogonais.
- ❸ Se $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{C}^n$ é uma **base ortogonal** (no sentido usual) para \mathbb{C}^n , então $\{P_{\mathbf{e}_1}, \dots, P_{\mathbf{e}_n}\}$ é uma resolução da identidade da $*$ -álgebra unital $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$.

Pelo exemplo vemos que resoluções da identidade podem ser vistas como generalização (de cunho algébrico!) da noção de base ortogonal.

Observação (Contextos Gerados por Elementos Comutantes)

Seja uma $*$ -álgebra unital \mathcal{A} e $\{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \mathcal{A}$ um conjunto **auto-conjugado de elementos que comutam** entre si, isto é,

$$[A_i, A_j] \doteq A_i \cdot A_j - A_j \cdot A_i = 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Então existe no mínimo um contexto de \mathcal{A} que contém este conjunto. O menor destes contextos é chamado “contexto gerado por $\{A_1, \dots, A_n\}$ ” e será denotado por

$$\mathcal{C}(A_1, \dots, A_n) \subseteq \mathcal{A}.$$

Em particular, a cada resolução da identidade $\{P_1, \dots, P_m\}$ em \mathcal{A} associamos o contexto

$$\mathcal{C}(P_1, \dots, P_m) \subseteq \mathcal{A}.$$

Note-se que $\{P_1, \dots, P_m\}$ é um conjunto auto-conjugado de elementos que comutam entre si, por definição de projetor e de resolução da identidade.

Se $\{P_{\mathbf{e}_1}, \dots, P_{\mathbf{e}_n}\}$ é a resolução da identidade da álgebra de matrizes $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$, associada a uma base ortogonal $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ de \mathbb{C}^n , então o contexto correspondente o contexto das matrizes diagonais com respeito a esta base.

Teorema (Teorema Espectral para Matrizes)

Seja uma matriz autoadjunta $M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, cujo conjunto de autovalores é denotado por $\sigma(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ (onde $m \leq n$).

- i.) Existe uma matriz unitária $U \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ tal, que $U^* M U$ é uma matriz diagonal.
- ii.) Existe uma resolução da identidade $\{P_1, \dots, P_m\} \subseteq \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ única tal, que

$$M = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_m P_m .$$

Definição (“Cálculo Espectral” para Matrizes)

Seja uma matriz autoadjunta $M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, cujo conjunto de autovalores é $\sigma(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$. Seja $\{P_1, \dots, P_m\}$ a resolução da identidade associada a M .

Para toda função f a valores complexos, cujo domínio contém $\sigma(M)$, definimos:

$$f(M) \doteq f(\lambda_1)P_1 + \dots + f(\lambda_m)P_m \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C}) .$$

Definição (Homomorfismos)

Sejam duas álgebras \mathcal{A} e \mathcal{B} . A transformação **linear** $\Xi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é um “homomorfismo” (de álgebra) se esta for multiplicativa, isto é,

$$\Xi(A_1 \cdot A_2) = \Xi(A_1) \cdot \Xi(A_2) .$$

Os seguintes tipos especiais de homomorfismo $\Xi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ são importantes:

- ① Se \mathcal{A} e \mathcal{B} são álgebras unitais e $\Xi(1) = 1$ então Ξ é um “homomorfismo unital”.
- ② Se Ξ é injetor então dizemos que é um “homomorfismo fiel”.
- ③ Seja \mathcal{A} e \mathcal{B} são $*$ -álgebras e vale

$$\Xi(A^*) = \Xi(A)^* , \quad A \in \mathcal{A} ,$$

então Ξ é um “ $*$ -homomorfismo”.

- ④ Se \mathcal{A} é $*$ -álgebra unital e $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ um contexto ($*$ -subálgebra unital) então os $*$ -homomorfismos unitais $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}$ são chamados “caráteres” de \mathcal{C} .

O conjunto de todos os caráteres do contexto \mathcal{C} é chamado “espectro de Gelfand” de \mathcal{C} e denotado por $\Sigma(\mathcal{C})$.

Exemplo ($*$ -homomorfismo)

Seja uma matriz autoadjunta $M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$. O cálculo espectral define um $*$ -homomorfismo unital fiel $\mathcal{F}(\sigma(M)) \rightarrow \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$.

[É um bom exercício provar esta afirmação!]

Exemplo (Caráteres)

i.) Seja ω_0 um ponto qualquer do conjunto Ω . Então a função

$$\varphi_{\omega_0} : \mathcal{F}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi_{\omega_0}(f) \doteq f(\omega_0)$$

é um caráter da $*$ -álgebra comutativa unital $\mathcal{F}(\Omega)$.

ii.) Se Ω é finito, todo caráter de $\mathcal{F}(\Omega)$ é da forma acima.

[É um bom exercício provar esta afirmação!]

iii.) Para um $n \in \mathbb{N}$ qualquer, seja o vetor $\psi_0 \doteq (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$. A função

$$\varphi_{\psi_0} : \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi_{\psi_0}(M) \doteq \langle \psi_0 | M | \psi_0 \rangle = \psi_0 M \psi_0^t = M_{11}$$

é um caráter do contexto das matrizes $n \times n$ diagonais.

Aula 2/5

- **“Re-Visão” de Álgebra Linear, cont.**
(caráteres e espectros de Gelfand de contextos de matrizes)
- **Teorema de Bell-Kochen-Specker, versão usual**

Definição (Espectro de Elemento de Álgebra Unital)

Seja \mathcal{A} uma álgebra unital. O elemento $A \in \mathcal{A}$ é “invertível” se existe $A^{-1} \in \mathcal{A}$ tal, que

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = 1.$$

Tal elemento A^{-1} é único quando existe e é chamado o “elemento inverso” de A .

O “espectro” de um elemento $A \in \mathcal{A}$ é o conjunto de números complexos $z \in \mathbb{C}$ para os quais $z1 - A \in \mathcal{A}$ é **não** invertível. Denotamos este conjunto por $\sigma_{\mathcal{A}}(A) \subseteq \mathbb{C}$.

Exemplo

- i.) Para todo $z \in \mathbb{C}$ (visto como elemento da álgebra unital \mathbb{C}), $\sigma_{\mathbb{C}}(z) = \{z\}$.
- ii.) Para todo $f \in \mathcal{F}(\Omega)$, $\sigma_{\mathcal{F}(\Omega)}(f) = f(\Omega)$ (conjunto imagem da função f).
- iii.) Para toda matriz $M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, (não necessariamente autoadjunta) o espectro $\sigma_{\mathcal{B}}(M)$ para qualquer $*$ -subálgebra $\mathcal{B} \subseteq \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ que contenha M é exatamente o conjunto $\sigma(M)$ de autovalores da matriz M .

Observação

Se \mathcal{A} e \mathcal{B} são duas álgebras unitais e $\Xi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ um homomorfismo unital então, para todo $A \in \mathcal{A}$,

$$\sigma_{\mathcal{B}}(\Xi(A)) \subseteq \sigma_{\mathcal{A}}(A) .$$

[É um bom exercício provar esta afirmação!]

Em particular, se \mathcal{C} é uma $*$ -álgebra comutativa (contexto), para todo caráter $\varphi \in \Sigma(\mathcal{C})$ e todo elemento $C \in \mathcal{C}$, vale

$$\varphi(C) \in \sigma_{\mathcal{C}}(C) .$$

Se \mathcal{C} um contexto de uma álgebra de matrizes $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ então, para todo caráter $\varphi \in \Sigma(\mathcal{C})$ e toda matriz $M \in \mathcal{C}$, $\varphi(M)$ é um autovalor de M .

Observação

O cálculo espectral é um $*$ -homomorfismo que preserva espectros: Para toda matrix $M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ autoadjunta e toda funo $f \in \mathcal{F}(\sigma(M))$, o espectro de $f(M)$ é a imagem de f , o espectro desta função como elemento da álgebra $\mathcal{F}(\sigma(M))$.

Teorema

Seja uma matriz autoadjunta $M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ qualquer.

i.) A função

$$\Sigma(\mathcal{C}(M)) \rightarrow \sigma(M), \quad \varphi \mapsto \varphi(M),$$

é uma bijeção.

ii.) Para toda função $f : \sigma(M) \rightarrow \mathbb{C}$ e carácter $\varphi \in \mathcal{C}(M)$,

$$f(M) \in \mathcal{C}(M) \quad \text{e} \quad \varphi(f(M)) = f(\varphi(M)).$$

Com efeito:

$$\mathcal{C}(M) = \{f(M) : f \text{ uma função } \sigma(M) \rightarrow \mathbb{C}\}.$$

[É um bom exercício provar esta identidade!]

iii.) Todo contexto \mathcal{C} de $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ é desta forma, isto é, para alguma matriz autoadjunta $M_{\mathcal{C}}$,

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(M_{\mathcal{C}}) = \{f(M_{\mathcal{C}}) : f \text{ uma função } \sigma(M_{\mathcal{C}}) \rightarrow \mathbb{C}\}.$$

Observação

- 1 *Pelo teorema, determinar o espectro $\sigma(M)$ (autovalores) de uma matriz M é o mesmo que determinar os caracteres do contexto gerado por M .*
- 2 *Esta constatação permite uma generalização natural do conceito de espectro de matriz para “espectro conjunto” de matrizes autoadjuntas M_1, \dots, M_k que comutam: Este último é o espectro (de Gelfand) do contexto $\mathcal{C}(M_1, \dots, M_k)$.*

Todo carácter φ deste é unicamente determinado pelos “números quânticos”

$$\varphi(M_1), \dots, \varphi(M_k) \in \mathbb{R}.$$

- 3 *Como o cálculo funcional é um $*$ -homomorfismo fiel, podemos ver $\mathcal{C}(M)$ como uma “cópia” em $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ da álgebra de funções no espectro da matriz M .*
- 4 *Num sentido similar, qualquer contexto de $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ é uma cópia da álgebra de funções no espectro de Gelfand deste contexto.*

Dito de outro modo, contextos de $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ são o mesmo que $$ -álgebras de funções, até um $*$ -homomorfismo fiel.*

O Teorema de Bell-Kochen-Specker

Definição (Valorações)

Seja

$$\mathcal{O}_{n \times n} = \{M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C}) : M^* = M\},$$

isto é, o conjunto das matrizes $n \times n$ autoadjuntas.

Em Mecânica Quântica $\mathcal{O}_{n \times n}$ representa o conjunto dos “observáveis” de um sistema (quântico) de n níveis.

Dizemos que a função $V : \mathcal{O}_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma “valoração” para tais observáveis se, para todo observável $A \in \mathcal{O}_{n \times n}$ e toda função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, vale

$$V(f(A)) = f(V(A)).$$

$f(A) \in \mathcal{O}_{n \times n}$, isto é, a matriz $f(A)$ é autoadjunta, pois a função f toma valores reais.

Surge imediatamente a questão sobre a existência de tais valorações. O teorema de Bell-Kochen-Specker, que discutiremos e provaremos num caso especial, responde **negativamente** a esta questão para todo $\mathcal{O}_{n \times n}$, $n \geq 3$.

Antes de demonstrarmos este fato, veremos algumas implicações importantes da suposta existência de valorações.

Lema

Seja V uma valoração de $\mathcal{O}_{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}$. Para todo contexto \mathcal{C} da álgebra de matrizes $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$, existe um caráter $\varphi_{\mathcal{C}}^V$ único que coincide com V nas matrizes autoadjuntas de \mathcal{C} .

Demonstração.

Seja $\mathcal{C} \subseteq \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ e suponha que tal caráter $\varphi_{\mathcal{C}}^V$ exista. Então, por linearidade, para toda matriz $M \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathcal{C}}^V(M) &= \varphi_{\mathcal{C}}^V\left(\frac{1}{2}(M + M^*)\right) + i\varphi_{\mathcal{C}}^V\left(\frac{i}{2}(M^* - M)\right) \\ &= V\left(\frac{1}{2}(M + M^*)\right) + iV\left(\frac{i}{2}(M^* - M)\right).\end{aligned}$$

Disto segue que $\varphi_{\mathcal{C}}^V$ é único, se existe. Note-se que as matrizes $\frac{1}{2}(M + M^*)$ e $\frac{i}{2}(M^* - M)$ são autoadjuntas.

Para provar a existência, utilizamos a última igualdade como definição de uma função $\varphi_{\mathcal{C}}^V : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e mostramos que esta é um caráter. □

Demonstração.

Por definição de valoração $V(0) = 0$ e temos

$$\varphi_C^V(M) = V(M) \quad \text{e} \quad \varphi_C^V(M + iM') = \varphi_C^V(M) + i\varphi_C^V(M')$$

para matrizes $M, M' \in \mathcal{C}$ **autoadjuntas**. Pela definição de valoração segue ainda que, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $M \in \mathcal{C}$ autoadjunta,

$$\varphi_C^V(\alpha M) = V(\alpha M) = \alpha V(M) = \alpha \varphi_C^V(M) .$$

Assim, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ e $M \in \mathcal{C}$ autoadjunta,

$$\begin{aligned} \varphi_C^V(\alpha M) &= \varphi_C^V(\operatorname{Re}\{\alpha\}M + i\operatorname{Im}\{\alpha\}M) \\ &= \varphi_C^V(\operatorname{Re}\{\alpha\}M) + i\varphi_C^V(\operatorname{Im}\{\alpha\}M) \\ &= \operatorname{Re}\{\alpha\}\varphi_C^V(M) + i\operatorname{Im}\{\alpha\}\varphi_C^V(M) = \alpha\varphi_C^V(M) . \end{aligned}$$



Demonstração.

Desta última igualdade para $\alpha = -1$, escrevendo

$$M = \frac{1}{2}(M + M^*) + i\frac{i}{2}(M^* - M) ,$$

vemos que, para qualquer matriz $M \in \mathcal{C}$ (não necessariamente autoadjunta),

$$\varphi_{\mathcal{C}}^V(M^*) = \overline{\varphi_{\mathcal{C}}^V(M)} .$$

Sejam $M, M' \in \mathcal{C}$ **autoadjuntas**. Recorde-se que, para alguma matriz autoadjunta $\tilde{M} \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\tilde{M})$ e, portanto, para todas funções $f, f' : \sigma(\tilde{M}) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$M = f(\tilde{M}) , \quad M' = f'(\tilde{M}) \quad \text{e} \quad M + M' = (f + f')(\tilde{M}) .$$

Logo, pela definição de valoração

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{C}}^V(M + M') &= \varphi_{\mathcal{C}}^V((f + f')(\tilde{M})) = V((f + f')(\tilde{M})) \\ &= (f + f')(V(\tilde{M})) = f(V(\tilde{M})) + f'(V(\tilde{M})) \\ &= V(f(\tilde{M})) + V(f'(\tilde{M})) = \varphi_{\mathcal{C}}^V(M) + \varphi_{\mathcal{C}}^V(M') . \end{aligned}$$



Demonstração.

Usando as identidades acima, mostramos que, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ e $M, M' \in \mathcal{C}$,

$$\varphi_{\mathcal{C}}^V(M + M') = \varphi_{\mathcal{C}}^V(M) + \varphi_{\mathcal{C}}^V(M') \quad \text{e} \quad \varphi_{\mathcal{C}}^V(\alpha M) = \alpha \varphi_{\mathcal{C}}^V(M),$$

isto é, $\varphi_{\mathcal{C}}^V : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é linear. Com argumentos similares vemos que

$$\varphi_{\mathcal{C}}^V(MM') = \varphi_{\mathcal{C}}^V(M)\varphi_{\mathcal{C}}^V(M'),$$

primeiro para $M, M' \in \mathcal{C}$ autoadjuntas e em seguida a identidade é estendida para todas $M, M' \in \mathcal{C}$ por meio das outras identidades já demonstradas.

Com isso fica mostrado que $\varphi_{\mathcal{C}}^V$ é um carácter com a propriedade enunciada. □

Teorema (Bell-Kochen-Specker)

Para toda dimensão $n \geq 3$, o conjunto de observáveis $\mathcal{O}_{n \times n}$ (de um sistema quântico de n níveis) **não** possui valorações.

Demonstração.

Seja $n \in \mathbb{N}$ qualquer e suponha-se que exista uma valoração V para $\mathcal{O}_{n \times n}$. Seja $\{P_1, \dots, P_m\}$ uma resolução da identidade de $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$. Recorde-se que esta família está contida em algum contexto \mathcal{C} .

Pelo lema, há um caráter $\varphi_{\mathcal{C}}^V$ de \mathcal{C} que coincide com V nas matrizes autoadjuntas e, portanto, nos projetores P_1, \dots, P_m . Disto concluímos que

$$\begin{aligned} 1 &= \varphi_{\mathcal{C}}^V(1) = \varphi_{\mathcal{C}}^V(P_1 + \dots + P_m) \\ &= \varphi_{\mathcal{C}}^V(P_1) + \dots + \varphi_{\mathcal{C}}^V(P_m) \\ &= V(P_1) + \dots + V(P_m) . \end{aligned}$$



Demonstração.

Por outro lado, pelas definições de projetor ortogonal e de valoração,

$$V(P_k)^2 = V(P_k \cdot P_k) = V(P_k) \in \mathbb{R} .$$

Disto segue que

$$V(P_k) = \varphi_C^V(P_k) \in \sigma(P_k) \subseteq \{0, 1\} .$$

Assim, para toda valoração V e resolução da identidade $\{P_1, \dots, P_m\}$ de $\mathcal{O}_{n \times n}$ devem valer:

$$V(P_1) + \dots + V(P_m) = 1 \quad \text{com} \quad V(P_1), \dots, V(P_m) \in \{0, 1\} .$$



Demonstração.

Disto segue que para toda valoração e toda resolução da identidade $\{P_1, \dots, P_m\}$ de $\mathcal{O}_{n \times n}$, para (exatamente) um $k = 1, \dots, m$, vale

$$V(P_k) = 1 \quad \text{e} \quad V(P_{k'}) = 0 \quad \text{se} \quad k' \neq k.$$

A prova do teorema consiste então em apresentar resoluções da identidade para as quais se possa explicitar uma **obstrução à validade desta identidade** para toda valoração V fixa (supostamente existente).

Provaremos aqui **somente o caso especial** $n = 4$. O caso $n > 4$ é provado por uma adaptação simples do caso considerado. O caso $n = 3$ é o mais difícil (mais de 100 resoluções da identidade foram usadas na prova original!) e é mais apropriado que se consulte a literatura para uma demonstração completa. Porém, já no caso especial aqui considerado se vê em que consistem as referidas obstruções.

Consideraremos **onze** resoluções da identidades associadas a bases ortogonais de \mathbb{C}^4 :



Bell-Kochen-Specker

Demonstração.

e_1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	0	0	1
	0	0	0	0	1	1	-1	1	1	0	0
	0	0	0	0	1	1	1	-1	-1	1	1
	0	0	0	0	1	1	1	1	0	-1	0
e_2	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
	1	1	0	0	-1	1	1	1	0	-1	1
	0	0	1	0	1	-1	-1	1	0	0	0
	0	0	0	1	1	1	1	-1	-1	0	1
e_3	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1
	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1
	1	1	0	1	-1	1	1	1	1	1	-1
	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	-1
e_4	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1
	0	0	1	1	1	1	0	-1	-1	1	-1
	0	1	0	-1	1	0	0	0	-1	-1	-1
	1	-1	-1	0	-1	-1	-1	0	1	-1	1



Demonstração.

Pela primeira parte da prova, toda valoração V deveria associar o valor 1 a exatamente onze destes vetores (um, e só um, em cada coluna da tabela), pelo respectivo projetor ortogonal, e 0 aos demais.

Porém, um mesmo vetor aparece exatamente duas ou quatro vezes nesta tabela, o que implica que o número de vetores com valoração 1 deve ser par (enquanto onze é ímpar!)



Observação

Muito antes de Kochen e Specker, von Neumann havia provado a não existência de $*$ -homomorfismos $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ (isto é, caracteres).

Assim, B-K-S pode ser visto como uma melhora significativa deste resultado precedente.

Aula 3/5

- **Categorias**
- **Funtores**

Categorias

Definição

Uma “categoria” \mathcal{C} consiste em:

- Uma coleção de “objetos”: A, B, C, \dots , denotada por $\text{Ob}_{\mathcal{C}}$,
- Uma coleção de “flechas” ou “morfismos”: f, g, h, \dots , denotada por $\text{Mor}_{\mathcal{C}}$,
- $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ denota a coleção de todas as flechas $f : A \rightarrow B$ da categoria \mathcal{C} .
Os objetos $\text{dom}(f) = A$ e $\text{cod}(f) = B$ são respectivamente o “domínio” e o “contradomínio” da flecha $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$.
- Dadas quaisquer flechas $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ para quaisquer $A, B, C \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}$, existe uma flecha $g \circ f : A \rightarrow C$,
- Uma flecha $\text{id}_A : A \rightarrow A$ para cada $A \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}$.

(lei associativa) Para quaisquer flechas $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ e $h : C \rightarrow D$, vale

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

(unidade) Para toda flecha $f : A \rightarrow B$, vale

$$f \circ \text{id}_A = f = \text{id}_B \circ f.$$

Definição

Dizemos que a categoria \mathcal{C} é uma “categoria pré-ordem” se, para todo par de objetos A e B , $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ contém no máximo um elemento, isto é, existe no máximo uma flecha $f : A \rightarrow B$.

Estas categorias, apesar de parecerem ser muito simples (só o parecem...), são muito importantes. Por exemplo, veremos que observáveis quânticos (aqui, matrizes autoadjuntas) e contextos ($*$ -subálgebras comutativas) formam categorias pré-ordem muito importantes em teoria quântica.

Definição

Seja \mathcal{C} uma categoria. A “categoria oposta” \mathcal{C}^{op} à categoria \mathcal{C} é definida por

$$\text{Ob}_{\mathcal{C}^{\text{op}}} \doteq \text{Ob}_{\mathcal{C}} \quad \text{e} \quad \text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(A, B) \doteq \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$$

onde, para todo $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(A, B)$ e $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(B, C)$:

$$g \circ_{\mathcal{C}^{\text{op}}} f \doteq f \circ_{\mathcal{C}} g .$$

Definição

Seja \mathcal{C} uma categoria. Um morfismo $f : A \rightarrow B$ em \mathcal{C} é:

- “mônico” (ou um “monomorfismo”) se $f \circ g = f \circ h$ somente se $g = h$ (f é “simplificável à esquerda”). Notação: $f : A \rightarrowtail B$.
- “épico” (ou um “epimorfismo”) se $g \circ f = h \circ f$ somente se $g = h$ (f é “simplificável à direita”). Notação: $f : A \twoheadrightarrow B$.
- “iso” (ou um “isomorfismo”) se existe uma flecha $f^{-1} : B \rightarrow A$ tal, que

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_A, \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_B.$$

Neste caso dizemos que os objetos A, B são “isomorfos” ou “equivalentes”.
Notação: $A \sim B$.

$[A]$ denota a “classe de equivalência” do objeto A , isto é, a coleção de todos os objetos equivalentes a A .

Observação

Numa categoria qualquer, toda flecha iso é ao mesmo tempo monomorfismo e epimorfismo.

Porém, a recíproca desta propriedade vale em algumas categorias (como a dos conjuntos, por exemplo), mas não em toda categoria.

Definição

*Dizemos que um objeto I na categoria \mathcal{C} é “inicial” se, para todo objeto A , existe uma **única** flecha $\iota_A : I \rightarrow A$.*

*Um objeto T de \mathcal{C} é “terminal” se, para todo objeto A , existe uma **única** flecha $\tau_A : A \rightarrow T$.*

Observação

Seja \mathcal{C} uma categoria qualquer.

- 1 Se T (I) é um objeto terminal (inicial) de \mathcal{C} então toda flecha com $\text{dom}(f) = T$ ($\text{cod}(f) = I$) é necessariamente mônica (épica).
- 2 Dois objetos terminais (iniciais) de \mathcal{C} são necessariamente equivalentes.

[Provar estes dois fatos é um bom exercício.] Por causa do segundo fato é comum que se fale do objeto (no singular) inicial e do final da categoria \mathcal{C} , se existem.

Definição

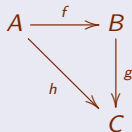
Em textos sobre teoria de categorias é muito comum usar-se “notação diagramática”. Por exemplo:

- 1 Escreve-se $A \xrightarrow{f} B$ no lugar de $f : A \rightarrow B$ para significar que $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$.
- 2 De modo análogo, $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ significa que existem flechas $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$, assim como a composição $g \circ f : A \rightarrow C$.

Definição

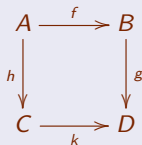
Em teoria de categorias também equações escritas em forma de diagramas. Por exemplo:

- 1 Se vale a equação $g \circ f = h$ para flechas de uma categoria \mathcal{C} dizemos que o seguinte “diagrama triangular” comuta:



A , B e C são os respectivos domínios e contradomínios das flechas.

- 2 De modo similar, a equação $g \circ f = k \circ h$ se refere a comutatividade do “quadrado”



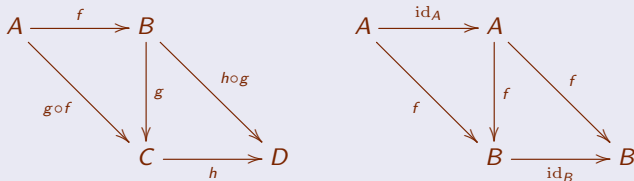
Definição

Também sistemas de equações para flechas são escritos em forma de diagramas:

- 1 Para representar os axiomas

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f, \quad f \circ \text{id}_A = f = \text{id}_B \circ f$$

da teoria de categorias dizemos que o seguinte diagrama comuta:



Os diagramas acima são compostos de subdiagramas “quadrados” e “triangulares”, os quais se referem as equações individuais do sistema.

Os diagramas que consideraremos aqui são deste tipo.

Exemplo (Categoria dos Conjuntos)

Sets é a categoria cujos objetos são os conjuntos e, para todo par (de conjuntos) $A, B \in \text{Ob}_{\text{Sets}}$, a coleção de flechas $\text{Mor}_{\text{Sets}}(A, B)$ a coleção de todas as funções de A para B . A composição de flechas é a composição comum de **funções**.

Nesta categoria as flechas mônicas são as funções injetoras, as épicas são as sobrejetoras, e as iso são as bijetoras.

O conjunto vazio \emptyset é o objeto inicial da categoria de conjuntos e todo conjunto $\{\bullet\}$ de um elemento é um objeto terminal.

De modo similar definimos a categoria **FinSets** dos conjuntos finitos.

Por causa deste exemplo muitos autores consideram a teoria geral de categorias como uma **abstração da noção de função**.

Exemplo (Categoria dos Espaços Vetoriais)

Vect_C é a categoria cujos objetos são os espaços vetoriais complexos e, para todo par (de espaços vetoriais) $A, B \in \text{Ob}_{\text{Vect}_C}$, $\text{Mor}_{\text{Vect}_C}(A, B)$ é a coleção de todas as transformações lineares de A para B .

Nesta categoria as flechas mônicas são as transformações lineares injetoras, as épicas são as sobrejetoras, e as iso são as bijetoras.

O espaço vetorial trivial $\{0\}$ é ao mesmo tempo objeto terminal e inicial desta categoria.

De modo similar definimos a categoria **FinVect_C** dos espaços vetoriais complexos de dimensão finita.

Exemplo

A categoria $\ast\text{-}\mathbf{UAlg}$ é aquela cujos objetos são as \ast -álgebras unitais e, para todo par $A, B \in \text{Ob}_{\ast\text{-}\mathbf{Alg}}$, $\text{Mor}_{\ast\text{-}\mathbf{Alg}}(A, B)$ é a coleção de todos os \ast -homomorfismos unitais de A para B .

Nesta categoria as flechas mônicas são \ast -homomorfismos unitais fieis, as épicas são os \ast -homomorfismos unitais sobrejetores, e as iso são \ast -homomorfismos bijetores (também chamados \ast -isomorfismos). Estes últimos são automaticamente unitais.

A \ast -álgebra unital \mathbb{C} é o objeto inicial da categoria.

De modo similar definimos ainda:

- $\ast\text{-}\mathbf{UAlg}$, a categoria das \ast -álgebras unitais comutativas,
- $\ast\text{-}\mathbf{FinUAlg}$, a categoria das \ast -álgebras unitais comutativas de dimensão finita.

Exemplo (Conjuntos Pré-Ordenados)

Seja \mathcal{X} um conjunto qualquer e \preceq uma relação binária neste conjunto. Dizemos que esta relação é uma “pré-ordem” se for reflexiva (para todo $A \in \mathcal{X}$, $A \preceq A$) e transitiva (para todo $A, B, C \in \mathcal{X}$, $A \preceq B$ e $B \preceq C$ somente se $A \preceq C$).

Todo conjunto pré-ordenado \mathcal{X} é visto como a categoria pré-ordem cujos objetos são os elementos de \mathcal{X} e $\text{Mor}_{\mathcal{X}}(A, B)$ contém (exatamente) uma flecha se, e somente se, $A \preceq B$.

Nesta categoria todas as flechas são simultaneamente mônicas e épicas. Se \mathcal{X} possui um elemento máximo (mínimo) então este é o objeto terminal (inicial) da categoria.

Por causa deste exemplo alguns autores vêem as **categorias gerais como generalização da noção de conjunto pré-ordenado**.

Os seguintes dois exemplos de categoria pré-ordem são importantes em teoria quântica:

Exemplo (Categoria de Contextos)

Seja \mathcal{C} uma família de contextos de uma $*$ -álgebra unital \mathcal{A} . Para contextos $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \in \mathcal{C}$, a propriedade “ \mathcal{C} ser contexto ($*$ -subálgebra unital) de \mathcal{C}' ” define uma pré-ordem em \mathcal{C} . Portanto, tais famílias serão vistas como categorias.

Denotaremos por $\mathcal{C}_{n \times n}$ a categoria de todos os contextos da álgebra de matrizes $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$.

Nesta categoria o objeto inicial é o contexto dos múltiplos da matriz identidade. Não há objetos terminais se $n > 1$, pois a existência de tal objeto implicaria $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ ser comutativa.

Exemplo (Categoria de Observáveis Quânticos)

Sejam $A, B \in \mathcal{O}_{n \times n}$ dois observáveis quânticos (matrizes autoadjuntas). Dizemos que A “depende totalmente” de B se existe uma função

$$f : \sigma(B) \rightarrow \mathbb{R}$$

tal, que

$$A = f(B) \quad (\text{de modo equivalente, } A \in \mathcal{C}(B)).$$

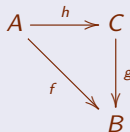
Neste caso escrevemos $A \preceq B$. Esta relação entre observáveis é uma pré-ordem e $\mathcal{O}_{n \times n}$ será visto como a categoria correspondente.

Nesta categoria os objetos iniciais são os observáveis constantes (múltiplos de matriz identidade).

Não há objetos terminais se $n > 1$, pois a existência de tal objeto implicaria $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ ser comutativa.

Definition (Fatoração de Monomorfismos)

Seja \mathcal{C} uma categoria, $A, B, C \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}$, e duas flechas mônicas $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ e $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, B)$. Se existe $h \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C)$ tal, que $f = g \circ h$ então dizemos que f é “fatorada” por g .



Neste caso escrevemos $f \rightarrow g$. Com estas flechas (entre monomorfismos de \mathcal{C}) a coleção de flechas mônicas de \mathcal{C} com contradomínio fixo B é uma categoria pré-ordem.

Observação

- 1 Para qualquer categoria \mathcal{C} , se $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ e $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, B)$ são **mônicas** e $f \sim g$ então $C \sim A$ (em \mathcal{C}).
- 2 Seja $\mathcal{C} = \mathbf{Sets}$ e $B \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}$ um conjunto qualquer. Para qualquer subconjunto $C \subseteq B$ seja $i_C \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, B)$ a função identidade $x \mapsto x$.

i_C é mônico e $C \mapsto [i_C]$ define uma bijeção entre subconjuntos de B e classes de equivalência de flechas mônicas com contradomínio B

[É um bom exercício provar tais fatos!] Estas observações motivam a seguinte definição:

Definition (Sub-objetos)

Seja \mathcal{C} uma categoria qualquer. Para todo objeto $B \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}$ definimos seus “sub-objetos” como sendo as classes de equivalência de monomorfismos com contradomínio B .

A coleção de todos os sub-objetos de B será denotada por $\text{Sub}(B)$.

Observação

Seja \mathcal{C} uma categoria qualquer e T um objeto terminal nesta.

- 1 Para todo objeto $B \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}$, toda flecha $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(T, B)$ é mônica.
- 2 Para toda flecha $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(T, B)$, a única flecha em $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(T, B)$ contida no sub-objeto $[f] \in \text{Sub}(B)$ é a própria f . O domínio de toda outra flecha em $[f]$ também é terminal. [É um bom exercício provar isto.]
- 3 Se $\mathcal{C} = \mathbf{Sets}$ então T é um conjunto que contém somente um ponto: $T = \{\cdot\}$.

Estas observações motivam a seguinte definição:

Definition (Elementos de um Objeto)

Seja \mathcal{C} uma categoria qualquer. Para todo objeto $B \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}$, os subobjetos de B correspondentes a flechas cujo domínio é um objeto terminal.

A coleção de elementos de B é identificada com $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(T, B)$ para um objeto terminal T fixo qualquer (já que dois objetos terminais são sempre equivalentes.)

Exemplo

Em **Sets** elementos de um conjunto $A \in \text{Ob}_{\text{Sets}}$ são classes de equivalência de funções $\{\cdot\} \rightarrow A$ e podem ser identificados com pontos usuais de A , que são exatamente as imagens de tais funções.

Exemplo

Na categoria $\ast\text{-UCAlg}$ a álgebra \mathbb{C} é objeto inicial. Portanto, na categoria oposta $\ast\text{-UCAlg}^{\text{op}}$ é objeto final. Logo para toda $\ast\text{-álgebra}$ unital comutativa A como objeto de $\ast\text{-UCAlg}^{\text{op}}$ os elementos de A são os $\ast\text{-homomorfismos}$ unitais $A \rightarrow \mathbb{C}$. Isto é, o espectro de Gelfand

$$\Sigma(A) = \text{Mor}_{\ast\text{-UCAlg}^{\text{op}}}(\mathbb{C}, A)$$

de uma $\ast\text{-álgebra}$ unital comutativa A nada mais é que coleção de elementos de A na categoria oposta à da $\ast\text{-álgebras}$ unitais comutativas.

Com efeito, as categorias opostas a algumas (sub)categorias de $\ast\text{-álgebras}$ unitais comutativas são equivalentes (num sentido definido mais tarde) a categorias de conjuntos. Por exemplo, veremos que $\ast\text{-FinUCAlg}^{\text{op}}$ é equivalente a **FinSets**.

Funtores

Definition (Funtores)

Um “funtor covariante” $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ de uma categoria \mathcal{C} para uma categoria \mathcal{D} é um transformação tal, que:

- Para todo $A \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}$, $F(A) \in \text{Ob}_{\mathcal{D}}$.
- Para flechas $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $F(f) \in \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ são flechas tais, que

$$F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)} \quad \text{e} \quad F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) .$$

De modo similar, um “funtor contravariante” $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ de uma categoria \mathcal{C} para uma categoria \mathcal{D} é um transformação tal, que:

- Para todo $A \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}$, $F(A) \in \text{Ob}_{\mathcal{D}}$.
- Para flechas $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $F(f) \in \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(B), F(A))$ são flechas tais, que

$$F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)} \quad \text{e} \quad F(g \circ f) = F(f) \circ F(g) .$$

Observação

- Funtores contravariantes $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ podem ser naturalmente vistos com funtores covariantes $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ ou $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{op}}$.
- Se $\mathcal{D} = \mathbf{Sets}$ os funtores contravariantes $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ são chamados “pré-feixes” sobre a categoria \mathcal{C} .

Exemplo (Funtor Identidade)

Seja \mathcal{C} uma categoria qualquer. O “funtor identidade covariante” $\text{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ é a transformação que age trivialmente sobre objetos e flechas.

O “funtor identidade contravariante” $\text{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$ é o funtor que age trivialmente sobre objetos e transforma flechas $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(A, B)$ nelas mesmas, porém vistas como elementos de $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$.

Exemplo (Funtor Esquecimento)

Seja $E : *-\mathbf{UAlg} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$ a transformação que leva $*$ -álgebras unitais nelas mesmas, porém vistas somente como espaços vetoriais complexos, e $*$ -homomorfismos unitais neles mesmos, porém vistos somente como transformações lineares. E é um funtor do tipo “esquecimento”.

Definições análogas podem ser feitas em muitas outras situações. Por exemplo, temos funtores esquecimento

$$\begin{aligned} *-\mathbf{UCAlg} &\rightarrow *-\mathbf{UAlg}, \\ \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}} &\rightarrow \mathbf{Sets}, \\ \mathbf{FinSets} &\rightarrow \mathbf{Sets}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Exemplo (Funtor Pré-Imagem)

Seja $P : \mathbf{Sets} \rightarrow \mathbf{Sets}$ a transformação que

- a todo conjunto A o conjunto de suas partes (subconjuntos) $\mathcal{P}(A)$ e
- a todo função $f \in \mathbf{Mor}_{\mathbf{C}}(A, B)$ a “função pré-imagem” $f^{-1} : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A)$,

$$f^{-1}(C) \doteq \{x \in A : f(x) \in C\} .$$

Esta transformação é um funtor contravariante e, portanto, um pré-feixe sobre \mathbf{Sets} .

Exemplo (Funtor Hom)

Seja \mathcal{C} uma categoria “localmente pequena”, isto é, uma categoria na qual, para todo par de objetos A e B , a coleção de flechas $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ pode ser vista como um conjunto. (Em certas categorias tais coleções de flechas são “grandes demais” para poderem ser vistas como conjuntos. Todas as categoriais relevantes para nós são localmente pequenas.)

Para todo objeto $A \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}$, o “funtor hom contravariante” $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$ é o pré-feixe sobre a categoria \mathcal{C} que transforma todo objeto $B \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}$ no conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A) \doteq \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$, e toda flecha $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$ na função

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, A) & : & \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A) & \rightarrow & \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A) \\ & & g & \mapsto & g \circ f \end{array}.$$

Este tipo de pré-feixe é tem um papel central na teoria, pois **muitos pré-feixes importantes são equivalentes a funtores hom**.

Discutiremos abaixo algumas propriedades destes funtores, pois são relevantes para aprofundamento no tema do curso.

Exemplo (Funtor Espectral)

Seja $S : *-\mathbf{FinUCAlg} \rightarrow \mathbf{FinSets}$ a transformação que leva:

- $*-\text{álgebras unitais comutativas } \mathcal{A} \text{ de dimensão finita nos respectivos espectros de Gelfand } \Sigma(\mathcal{A}) \text{ (os quais são conjuntos finitos)}$
- $*-\text{homomorfismos unitais } \Xi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \text{ na função}$

$$\begin{array}{ccc} S(\Xi) & : & \Sigma(\mathcal{B}) \rightarrow \Sigma(\mathcal{A}) \\ & & \varphi \mapsto \varphi \circ \Xi \end{array}$$

(Note-se aqui que a composição $\varphi \circ \Xi$ de um carácter e um $*-\text{homomorfismo unital}$ é um novo carácter.)

S é um funtor contravariante.

Para certas categorias de $*-\text{álgebras unitais comutativas de dimensão infinita}$ existem funtores análogos ao deste exemplo.

Exemplo (Funtor Contra-Espectral)

Seja $K : \mathbf{FinSets} \rightarrow * - \mathbf{FinUCAlg}$ a transformação que leva:

- Conjuntos finitos Ω na respectiva álgebra de funções $\mathcal{F}(\Omega)$ (a qual é uma $*$ -álgebra unital comutativas de dimensão finita).
- Funções $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ no $*$ -homomorfismo unital

$$\begin{array}{ccc} K(f) & : & \mathcal{F}(\Omega') \rightarrow \mathcal{F}(\Omega) \\ & & g \mapsto g \circ f \end{array}$$

K é um funtor contravariante.

Para certas categorias de funções **contínuas** mais gerais que as de domínio finito existem funtores análogos ao deste exemplo.

Aula 4/5

- **Transformações Naturais**
- **Categorias de Funtores**

Transformações Naturais

Transformações Naturais

Definition (Transformações Naturais, Caso Contravariante)

Sejam \mathcal{C} e \mathcal{D} duas categorias quaisquer e sejam $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ dois funtores contravariantes. Uma “transformação natural” $N : F \rightarrow G$ é uma coleção $N = (N_A)_{A \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}}$ de flechas $N_A \in \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(A), G(A))$ da categoria \mathcal{D} tais, que

$$\begin{array}{ccc} F(B) & \xrightarrow{F(f)} & F(A) \\ N_B \downarrow & & \downarrow N_A \\ G(B) & \xrightarrow{G(f)} & G(A) \end{array}$$

para todo $A, B \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}$ e toda $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, isto é,

$$N_A \circ F(f) = G(f) \circ N_B .$$

A coleção das transformações naturais de F para G será denotada por $\text{Nat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(F, G)$.

Transformações Naturais

Definition (Transformações Naturais, Caso Covariante)

De modo similar, se $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ são funtores covariantes, uma transformação natural $N : F \rightarrow G$ é uma coleção $N = (N_A)_{A \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}}$ de flechas $N_A \in \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(A), G(A))$ tais, que, para todo $A, B \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}$ e toda $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, vale

$$N_B \circ F(f) = G(f) \circ N_A.$$

A coleção das transformações naturais de F para G será denotada por $\text{Nat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(F, G)$.

Definition (Isomorfismos Naturais)

Sejam \mathcal{C} e \mathcal{D} duas categorias, $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ dois funtores, e seja uma transformação natural $N : F \rightarrow G$. Esta é um “isomorfismo natural” se, para todo $A \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}$, N_A é uma flecha iso.

Se existe um isomorfismo natural entre os funtores estes são ditos equivalentes.

Exemplo (Transformações Naturais de Funtores Hom)

Seja \mathcal{C} uma categoria localmente pequena. Para todo par de objetos $A, B \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}$ e flecha $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, definimos uma transformação natural

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, f) = (\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, f)_C)_{C \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, B)$$

por:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, f)_C & : & \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, B) \\ & & g \mapsto f \circ g \end{array}$$

Com efeito, como discutido abaixo em mais detalhes, toda transformação natural de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ para $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, B)$ é desta forma.

Definition (Equivalência de Categorias)

Dizemos que duas categorias \mathcal{C} e \mathcal{D} são equivalentes se existem funtores **covariantes** $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, bem como dois **isomorfismos naturais**

$$N_{\mathcal{C}} : G \circ F \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{C}} \quad \text{e} \quad N_{\mathcal{D}} : F \circ G \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}.$$

Dizemos também que os funtores F e G são equivalências das categorias \mathcal{C} e \mathcal{D} .

Observação

Se $G \circ F = \text{Id}_{\mathcal{C}}$ e $F \circ G = \text{Id}_{\mathcal{D}}$ então \mathcal{C} e \mathcal{D} são equivalentes pela definição acima. (Considere as transformações naturais triviais $N_{\mathcal{C}} = (\text{id}_A)_{A \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}}$ e $N_{\mathcal{D}} = (\text{id}_A)_{A \in \text{Ob}_{\mathcal{D}}}$.)

Esta propriedade mais forte dos funtores $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ poderia ter sido usada como definição de equivalência de categorias, porém revelou-se demasiado restritiva nos exemplos importantes.

O seguinte teorema é uma formulação categorial do fato discutido no início do curso de que contextos de álgebras de matrizes são equivalentes às álgebras de funções nos respectivos espectros de Gelfand:

Teorema (Gelfand-Naimark)

Os funtores spectral

$$S : * - \mathbf{FinUCAlg} \rightarrow \mathbf{FinSets}$$

e contra-spectral

$$K : \mathbf{FinSets} \rightarrow * - \mathbf{FinUCAlg}$$

são equivalências das categorias $ - \mathbf{FinUCAlg}^{\text{op}}$ e $\mathbf{FinSets}$.*

Este teorema possui versões para álgebras de dimensão infinita.

Observação

O teorema acima tem as seguintes implicações, pela definição de isomorfismo natural:

- *Existem $*$ -isomorfismos entre $*$ -álgebras unitais comutativas \mathcal{A} de dimensão finita e as álgebras de funções $\mathcal{F}(\Sigma(\mathcal{A}))$.*
- *Ademais, estes $*$ -isomorfismos tem “naturalidade”, ou seja, se comportam bem com relação a $*$ -homomorfismos unitais $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ entre $*$ -álgebras unitais comutativas de dimensão finita.*
- *Para todo conjunto finito Ω o espectro de Gelfand $\Sigma(\mathcal{F}(\Omega))$ pode ser identificado (por uma bijeção) com o próprio Ω .*
- *Ademais, tal identificação se comporta bem com relação a transformações $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ entre dois conjuntos finitos.*

Categorias de Funtores

Definition (Categorias de Funtores Covariantes)

Sejam \mathcal{C} e \mathcal{D} duas categorias fixas. Os objetos da “categoria de funtores” $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ são os funtores covariantes $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e, para todo $F, G \in \text{Ob}_{\mathcal{D}^{\mathcal{C}}}$, definimos

$$\text{Mor}_{\mathcal{D}^{\mathcal{C}}}(F, G) \doteq \text{Nat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(F, G) .$$

Dadas $N = (N_A)_{A \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}} : F \rightarrow G$ e $M = (M_A)_{A \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}} : G \rightarrow H$, definimos a composição destas transformações naturais por:

$$M \circ N \doteq (M_A \circ N_A)_{A \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}} .$$

\mathcal{C} é chamada categoria base da categoria de funtores $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$.

Definition (Categorias de Funtores covariantes)

De modo similar, os objetos da “categoria de funtores” $\mathcal{D}^{c^{op}}$ são os funtores contravariantes $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e, para todo $F, G \in \text{Ob}_{\mathcal{D}^{c^{op}}}$, definimos

$$\text{Mor}_{\mathcal{D}^{c^{op}}}(F, G) \doteq \text{Nat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(F, G) .$$

Dadas $N = (N_A)_{A \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}} : F \rightarrow G$ e $M = (M_A)_{A \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}} : G \rightarrow H$, definimos a composição destas tranformações naturais por:

$$M \circ N \doteq (M_A \circ N_A)_{A \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}} .$$

A categoria de funtores contravariantes **Sets** $^{c^{op}}$ é chamada “categoria de pré-feixes” sobre a categoria \mathcal{C} .

Definição (Funtor de Yoneda)

Seja \mathcal{C} uma categoria localmente pequena. O “funtor de Yoneda” $Y : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ associado a \mathcal{C} é o funtor covariante que transforma o objeto $A \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}$ no pré-feixe

$$Y(A) \doteq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$$

e a flecha $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$ na transformação natural

$$Y(f) \doteq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, f) \in \text{Mor}_{\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}}(Y(B), Y(C)) \ .$$

Teorema (“Lema de Yoneda”)

Seja \mathcal{C} uma categoria localmente pequena. Para todo pré-feixe $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$ e todo objeto $A \in \mathbf{Ob}_{\mathcal{C}}$, as transformações naturais $\mathbf{Nat}_{\mathcal{C}, \mathbf{Sets}}(Y(A), F)$ estão em bijeção com os elementos do conjunto $F(A)$ através da associação

$$\alpha \mapsto \alpha_A(\mathrm{id}_A) \in F(A) . \quad (1)$$

Note-se que

$$[Y(A)](A) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A) \ni \mathrm{id}_A \quad \text{e} \quad \alpha_B : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A) \rightarrow F(B) .$$

Em particular, para todo par de objetos $A, B \in \mathbf{Ob}_{\mathcal{C}}$, as transformações naturais

$$\mathbf{Nat}_{\mathcal{C}, \mathbf{Sets}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, B)) = \mathbf{Nat}_{\mathcal{C}, \mathbf{Sets}}(Y(A), Y(B))$$

entre funtores hom contravariantes estão em bijeção com as flechas

$$[Y(B)](A) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$$

pela relação (1).

Observação

Seja \mathcal{C} uma categoria localmente pequena e $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$ um pré-feixe.

- Dado o lema de Yoneda, surge naturalmente a questão de saber se existe um objeto $A \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}$ e um ponto $a \in F(A)$ tal que a transformação natural de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ para F seja um **isomorfismo** natural.
- Se existe tal par (A, a) o pré-feixe é dito “representável” e o par é chamado um “elemento universal” do funtor.
- (A, a) é universal se, e somente se, para todo outro par (B, b) , $A \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}$, $b \in F(B)$, existe único morfismo $f_B \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$ tal, que $F(f_B)(a) = b$.
- Por sua vez, esta uma condição é equivalente ao par (A, a) ser inicia numa certa categoria natural (dependente de F) para tais pares.
- Esta noção de universalidade é a relevante, do ponto de vista de categorias, em diversas situações de universalidade que ocorrem em matemática, por exemplo nos produtos tensoriais de espaços vetoriais.

Observação

Seja \mathcal{C} uma categoria qualquer.

- Sejam $X, Y \in \text{Ob}_{\text{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}}$ dois pré-feixes. Uma flecha (transformação natural)

$$f : X \rightarrow Y, \quad f = (f_A)_{\text{Ob}_{\mathcal{C}}}$$

é mênica se, e somente se, todas as funções $f_A : X(A) \rightarrow Y(A)$ são injetoras.

- Disto segue que dois monomorfismos $f, g : X \rightarrow Y$ são equivalentes se, e somente se,

$$\text{im}(f_A) = \text{im}(g_A) \subseteq Y(A), \quad A \in \text{Ob}_{\mathcal{C}},$$

onde $\text{im}(f_A), \text{im}(g_A) \subseteq Y(A)$ denotam as imagens das funções f_A e g_A .

Categorias de Funtores

Analogamente à categoria dos conjuntos, esta observação permite que subobjetos (que são, por definição, classes de equivalência de monomorfismos) de pré-feixes sejam identificados com outros pré-feixes:

Definição (Subobjetos de Pré-Feixes)

Seja \mathcal{C} uma categoria qualquer. Os subobjetos de um pré-feixe $Y \in \text{Ob}_{\text{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}}$ são identificados com os pré-feixes $X \in \text{Ob}_{\text{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}}$ para os quais, para todo $A \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}$,

$$X(A) \subseteq Y(A)$$

e $i = (i_A)_{A \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}}$ é uma transformação natural de X para Y , onde

$$i_A : X(A) \rightarrow Y(A)$$

é a função inclusão $x \mapsto x$.

Lema

Seja \mathcal{C} uma categoria qualquer. O objeto inicial da categoria de pré-feixes $\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ é o funtor contravariante $\mathbf{0}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$ que a cada objeto de \mathcal{C} associa o conjunto vazio \emptyset , e a cada flecha de \mathcal{C} , a identidade id_{\emptyset} de \emptyset . De modo similar, o objeto terminal $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}$ de $\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ é o funtor contravariante que a cada objeto de \mathcal{C} associa o conjunto $\{\bullet\}$ de um ponto e a cada flecha de \mathcal{C} , a identidade $\text{id}_{\{\bullet\}}$ de $\{\bullet\}$.

Definição (Seções Globais de Pré-Feixes)

Seja \mathcal{C} uma categoria qualquer e um pré-feixe $Y \in \mathbf{Ob}_{\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}}$. Um pré-feixe X é uma “seção global” de Y se, para todo $A \in \mathbf{Ob}_{\mathcal{C}}$,

$$X(A) = \{x_A\}$$

para um $x_A \in Y(A)$ e

$$i = (i_A)_{A \in \mathbf{Ob}_{\mathcal{C}}}, \quad i_A : x_A \mapsto x_A,$$

é uma transformação natural. Note-se que:

- Tais funtores X (seções globais) transformam necessariamente morfismos $f : A \rightarrow B$ de \mathcal{C} na única função $\{x_B\} \rightarrow \{x_A\}$. Portanto, estão completamentente determinados pela coleção $(x_A)_{A \in \mathbf{Ob}_{\mathcal{C}}}$.
- A condição de naturalidade corresponde às igualdades

$$x_A = Y(f)(x_B)$$

para todo morfismo $f \in \mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

Assim, as seções globais de um pré-feixe podem ser identificadas aos seus elementos.