Minicurso: "Aplicação da Teoria de Topos aos Fundamentos Matemáticos da Teoria Quântica"

W. de Siqueira Pedra - IFUSP

IV Escola de Física Jayme Tiomno

Aula 1/5

- Motivação
- Bibliografia
- Ementa
- **“Re-Visão” de Álgebra Linear**

Niels Bohr, sobre a complementariedade

...a essência de qualquer experimento em Física não nos deixa outra escolha a não ser

usar os conceitos usuais, talvez refinados pela terminologia da física clássica,

não só em todas as condições de construção e de manipulação do instrumental de medida, mas também na descrição dos reais resultados experimentais ...

... é igualmente importante entender que justamente esta circunstância implica que

não resulta que um experimento sobre um fenômeno que se situa fora dos limites da física clássica possa ser interpretado como dando informação sobre propriedades independentes dos objetos...

Ces **“nuages probabilistes”**,

remplaçant les rassurantes particules matérielles d’antan,

me rappellent étrangement les élusifs “voisinages ouverts”

qui peuplent les **topos**, tels des fantômes évanescents,

pour entourer des **“points” imaginaires.**

(Récoltes et Semailles - témoignage sur un passé de mathématicien, 1986)

Complementariedade como Transição "Local-Global"

"**Sheaf theory** was invented in the mid 1940s as a branch of algebraic topology to deal with the **collation of local data** on topological spaces. ... this theory is now indispensable in modern mathematics. However, instead of its **generality dealing with local-to-global transitions**, applications to other areas in science or engineering have **not been well established so far except for logic and semantics** in computer science with the **notion of Topos**"

(R. Ghrist, Y. Hiraoka, 2011)

Bibliografia

Introdução à teoria de categorias:

1. F. W. Lawvere, S. H. Schanuel. Conceptual Mathematics: A First Introduction to Categories. Cambridge University Press, 2009.
2. S. Awodey. Category Theory. Oxford University Press, 2010.

Aplicação de topos em teoria quântica:

1. C. Flori. A First Course in Topos Quantum Theory. Springer, 2013.
2. H. Halvorson (editor). Deep Beauty: Understanding the Quantum World through Mathematical Innovation. Cambridge University Press, 2011.
3. A. Döring, C. J. Isham. "What is a Thing?": Topos Theory in the Foundations of Physics. In: B. Coecke (editor), New Structures for Physics. Lecture Notes in Physics, vol 813. Springer, 2010.

Bibliografia

Artigos originais:

1. J. Butterfield, C.J. Isham. A Topos Perspective on the Kochen–Specker Theorem II: Conceptual Aspects and Classical Analogues, International Journal on Theoretical Physics 38, 1999, 827–859.
2. J. Butterfield, C.J. Isham. A Topos Perspective on the Kochen–Specker Theorem I: Quantum States as Generalized Valuations, International Journal on Theoretical Physics 11, 1998, 2669–2733.

Tópicos de teoria da informação quântica:

1. S. Abramsky, A. Brandenburger. The sheaf-theoretic structure of non-locality and contextuality. New J. Phys. 13 (113036), 2011, 1–40.

Ementa

1. **Noções algébricas importantes:** álgebras, *-álgebras, espectro de um elemento de álgebra, estados, álgebras comutativas, espectro de uma álgebra comutativa.
2. **O teorema de Bell-Kochen-Specker** (versão usual).
3. **Introdução à teoria de categorias:** noções elementares, funtores, transformações naturais e categorias de pré-feixes (tipo relevante de topos).
4. **Categoria de matrizes autoadjuntas e uma versão categorial de B-K-S.**
5. **Pré-feixe espectral sobre contextos clássicos e B-K-S como ausência de pontos num espaço de estados.**

Noções algébricas importantes

Definição (Álgebra)

Dizemos que um espaço vetorial (complexo) $\mathcal{A}$ *é uma "álgebra" (complexa) se este é munido de uma operação binária* $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *("produto")* **bilinear**, *isto é:*

i.) *Para todo* $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{A}$, *vale*

$$A_1 \cdot (A_2 + A_3) = A_1 \cdot A_2 + A_1 \cdot A_3 \quad e \quad (A_1 + A_2) \cdot A_3 = A_1 \cdot A_3 + A_2 \cdot A_3 \ .$$

ii.) *Para todo* $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ *e* $\alpha \in \mathbb{C}$, *vale*

$$\alpha(A_1 \cdot A_2) = (\alpha A_1) \cdot A_2 = A_1 \cdot (\alpha A_2)$$

A álgebra $\mathcal{A}$ *é "comutativa" se, para todo* $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, *vale*

$$A_1 \cdot A_2 = A_2 \cdot A_1 \ .$$

Se, para todo $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{A}$, *valer*

$$(A_1 \cdot A_2) \cdot A_3 = A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3) \doteq A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \ ,$$

então a álgebra $\mathcal{A}$ *é dita ser "associativa".*

Definição (Subálgebras e Unidades)

O elemento $\mathbb{1} \in \mathcal{A}$ *(quando existe) é chamado "unidade" desta álgebra se, para todo* $A \in \mathcal{A}$*, tem-se*

$$\mathbb{1} \cdot A = A \cdot \mathbb{1} = A \ .$$

Neste caso disemos que $\mathcal{A}$ *é uma "álgebra unital". Se a* $\mathcal{A}$ *é unital então sua unidade é única e será aqui denotada por* $\mathbb{1}$.

Um subespaço vetorial $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ *é dito ser uma "subálgebra" da álgebra* $\mathcal{A}$*, se valer*

$$B_1 \cdot B_2 \in \mathcal{B}$$

para todo $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$.

Se a álgebra $\mathcal{A}$ *é unital e* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ *uma subálgebra então dizemos que* $\mathcal{B}$ *é "subálgebra unital" se*

$$\mathbb{1} \in \mathcal{B}$$

.

Noções algébricas

Exemplo

O corpo dos números complexos $\mathbb{C}$ *(como espaço vetorial unidimensional) munido do produto*

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \doteq \alpha_1 \alpha_2$$

é uma álgebra (complexa) comutativa, associativa e unital ($\mathfrak{1} = 1$).

Exemplo

Para todo conjunto não vazio Ω *o espaço vetorial complexo das funções* $\Omega \to \mathbb{C}$, *que será denotado por* $\mathcal{F}(\Omega)$, *munido do produto*

$$f_1 \cdot f_2(\omega) \doteq f_1(\omega) f_2(\omega) \ , \quad \omega \in \Omega \ ,$$

é igualmente uma álgebra (complexa) comutativa, associativa e unital ($\mathfrak{1}(\omega) = 1$).

As funções constantes $\Omega \to \mathbb{C}$ *formam uma subálgebra unital de* $\mathcal{F}(\Omega)$.

Noções algébricas

Exemplo

Para todo $n \in \mathbb{N}$, *o espaço vetorial (complexo)* $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ *das matrizes complexas* $n \times n$ *munido do produto usual de matrizes é uma álgebra (complexa). Esta álgebra é associativa e unital* ($\mathfrak{1} = \mathrm{id}_{n\times n}$), *mas não é comutativa se* $n > 1$.

As matrizes diagonais formam uma subálgebra (comutativa!) unital de $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

As matrizes da forma $\alpha \mathrm{id}_{n\times n}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, *formam, por sua vez, uma subálgebra unital da (sub)álgebra das matrizes diagonais.*

Exemplo

Para todo $n \in \mathbb{N}$, *o espaço vetorial* $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ *das matrizes complexas* $n \times n$ *munido do "produto de Jordan"*

$$M_1 \circ M_2 \doteq \frac{1}{2}\left(M_1 \cdot M_2 + M_2 \cdot M_1\right) \ , \quad M_1, M_2 \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) \ ,$$

é uma álgebra comutativa unital ($\mathfrak{1} = \mathrm{id}_{n\times n}$), *a qual não é associativa se* $n > 1$.

As matrizes diagonais formam uma subálgebra (associativa!) unital de $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ *com o produto de Jordan.*

Noções algébricas

Definição (Conjugações Complexas)

Seja V *um espaço vetorial complexo. Dizemos que a transformação* $^* : V \to V$ *é uma "conjugação complexa" se:*

i.) * *é uma "involução", isto é, é sua própria inversa:* $v^{**} = v$.

ii.) * *é "antilinear", isto é, para todo* $v_1, v_2 \in V$ *e* $\alpha \in \mathbb{C}$, *vale*

$$(v_1 + v_2)^* = v_1^* + v_2^* \quad e \quad (\alpha v_1)^* = \overline{\alpha} v_1^* \ .$$

Dizemos que um conjunto de vetores $\Phi \subseteq V$ *é "auto-conjugado" se, para todo* $v \in V$,

$$v^* \in \Phi \quad \text{sempre que} \quad v \in \Phi \ .$$

Dizemos que o elemento $v \in V$ *é "auto-conjugado" se*

$$v^* = v$$

.

Exemplo

So conjugações complexas (no sentido abstrato da definição acima):

1. *Em* $\mathbb{C}$ *(visto com espaço vetorial complexo),*

$$z^* \doteq \overline{z}$$

   (conjugação usual de números complexos). Os elementos auto-conjugados são os números puramente reais.

2. *Em* $\mathcal{F}(\Omega)$*,*

$$f^*(\omega) \doteq \overline{f(\omega)}\ , \quad \omega \in \Omega\ .$$

   Os elementos auto-conjugados são as funções a valores reias.

3. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$*, em* $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$*,*

$$M^* \doteq M^\dagger,$$

   $M^\dagger$ *a matriz adjunta (ou matriz conjugada Hemitiana) da matriz* M*. Os elementos auto-conjugados são as matrizes autoadjuntas.*

   As matrizes diagonais formam um conjunto auto-conjugado de $.\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$

Noções algébricas

Definição ($*$-Álgebras)

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra complexa munida de uma conjugação complexa. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma "$*$-álgebra" se, para todo $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, valer que

$$(A_1 \cdot A_2)^* = A_2^* \cdot A_1^* \ .$$

As subálgebras auto-conjugadas de $\mathcal{A}$ são chamadas "$*$-subálgebras" de $\mathcal{A}$. (Note-se que $*$-subálgebras de uma $*$-álgebra são novas $*$-álgebras.)

As $*$-subálgebras **comutativas unitais** *de uma álgebra unital $\mathcal{A}$ são chamadas "contextos (clássicos)" de $\mathcal{A}$.*

Exemplo

As álgebras complexas $\mathbb{C}$, $\mathcal{F}(\Omega)$ e $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ munidas das conjugações complexas dos exemplos acima são $*$-álgebras.

Todas as $*$-subálgebras de $\mathcal{F}(\Omega)$ são contextos (pois esta ágebra é comutativa).

A subálgebra de $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ formada pelas matrizes diagonais é um contexto desta $*$-álgebra. Para $n > 1$ nem toda $*$-subálgebra de $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ é um contexto.

Definição (Tipos importantes de elementos de $*$-álgebra)

Seja $\mathcal{A}$ uma $*$-álgebra.

1. $P \in \mathcal{A}$ *é um "projetor ortogonal" se* P *for auto-conjugado* ($P^* = P$) *e idempotente* ($P \cdot P = P$).
2. $U \in \mathcal{A}$ *é uma "isometria parcial" se* $U^* \cdot U$ *e* $U \cdot U^*$ *forem projetores ortogonais.*
3. $U \in \mathcal{A}$ *é um "unitário" se a álgebra* $\mathcal{A}$ *for unital e*
$$U^* \cdot U = U \cdot U^* = \mathbf{1}.$$
(Numa $*$-álgebra unital a unidade $\mathbf{1}$ é sempre um projetor e, portanto, unitários são isometrias parciais.)
4. *Sejam* $P_1, \ldots, P_N \in \mathcal{A}$ *projetores ortogonais. Estes são "mutualmente ortogonais" se* $P_i \cdot P_j = 0$ *para* $i \neq j$.
5. *A família* $\{P_1, \ldots, P_N\}$ *mutualmente ortogonal de projetores é uma "resolução da identidade" se* $\mathcal{A}$ *é unital e vale*
$$P_1 + \cdots + P_N = \mathbf{1} \ .$$

Exemplo

Seja uma dimensão $n \in \mathbb{N}$ qualquer.

1. *Para todo vetor não nulo $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n) \in \mathbb{C}^n$, a matriz $n \times n$*

$$P_{\mathbf{e}} \doteq \frac{1}{e_1^2 + \cdots + e_n^2} \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1 & \cdots & e_n \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$$

   é um projetor ortogonal da $*$-álgebra $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

2. *Se $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k \in \mathbb{C}^n$ são* **vetores ortogonais** *(no sentido usual em $\mathbb{C}^n$) não nulos então os projetores ortogonais $P_{\mathbf{e}_1}, \ldots, P_{\mathbf{e}_k}$ são mutualmente ortogonais.*

3. *Se $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{C}^n$ é uma* **base ortogonal** *(no sentido usual) para $\mathbb{C}^n$, então $\{P_{\mathbf{e}_1}, \ldots, P_{\mathbf{e}_n}\}$ é uma resolução da identidade da $*$-álgebra unital $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$.*

Pelo exemplo vemos que resoluções da identidade podem ser vistas como generalização (de cunho algébrico!) da noção de base ortogonal.

Noções algébricas

Observação (Contextos Gerados por Elementos Comutantes)

Seja uma $*$-álgebra unital $\mathcal{A}$ e $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \mathcal{A}$ um conjunto **auto-conjugado de elementos que comutam** *entre si, isto é,*

$$[A_i, A_j] \doteq A_i \cdot A_j - A_j \cdot A_i = 0 \ , \quad i, j = 1, \ldots, n \ .$$

Então existe no mínimo um contexto de $\mathcal{A}$ que contém este conjunto. O menor destes contexto é chamado "contexto gerado por $\{A_1, \ldots, A_n\}$"e será denotado por

$$\mathcal{C}(A_1, \ldots, A_n) \subseteq \mathcal{A} \ .$$

Em particular, a cada resolução da identidade $\{P_1, \ldots, P_m\}$ em $\mathcal{A}$ associamos o contexo

$$\mathcal{C}(P_1, \ldots, P_m) \subseteq \mathcal{A} \ .$$

Note-se que $\{P_1, \ldots, P_m\}$ é um conjunto auto-conjugado de elementos que comutam entre si, por definição de projetor e de resolução da identidade.

Se $\{P_{\mathbf{e}_1}, \ldots, P_{\mathbf{e}_n}\}$ é a resolução da identidade da álgebra de matrizes $\mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$, associada a uma base ortogonal $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ de $\mathbb{C}^n$, então o contexto correspondente o contexto das matrizes diagonais com respeito a esta base.

Noções algébricas

Teorema (Teorema Espectral para Matrizes)

Seja uma matriz autoadjunta $M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, *cujo conjunto de autovalores é denotado por* $\sigma(M) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ *(onde* $m \leq n$*).*

i.) *Existe uma matriz unitária* $U \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ *tal, que* $U^* MU$ *é uma matriz diagonal.*

ii.) *Existe uma resolução da identidade* $\{P_1, \ldots, P_m\} \subseteq \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ *única tal, que*

$$M = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_m P_m \ .$$

Definição ("Cálculo Espectral" para Matrizes)

Seja uma matriz autoadjunta $M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, *cujo conjunto de autovalores é* $\sigma(M) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$. *Seja* $\{P_1, \ldots, P_m\}$ *a resolução da identidade associada a* M.

Para toda função f *a valores complexos, cujo domínio contém* $\sigma(M)$, *definimos:*

$$f(M) \doteq f(\lambda_1)P_1 + \cdots + f(\lambda_m)P_m \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) \ .$$

Noções algébricas

Definição (Homomorfismos)

Sejam duas álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$*. A transformação* **linear** $\Xi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *é um "homomorfismo" (de álgebra) se esta for multiplicativa, isto é,*

$$\Xi(A_1 \cdot A_2) = \Xi(A_1) \cdot \Xi(A_2) \ .$$

Os seguintes tipos especiais de homomorfismo $\Xi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *são importantes:*

1. *Se* $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ *são álgebras unitais e* $\Xi(\mathfrak{1}) = \mathfrak{1}$ *então* Ξ *é um "homomorfismo unital".*
2. *Se* Ξ *é injetor então dizemos que é um "homomorfismo fiel".*
3. *Seja* $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ *são* $*$*-álgebras e vale*

   $$\Xi(A^*) = \Xi(A)^*, \quad A \in \mathcal{A} \ ,$$

   então Ξ *é um "*$*$*-homomorfismo".*
4. *Se* $\mathcal{A}$ *é* $*$*-álgebra unital e* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ *um contexto (*$*$*-subálgebra unital) então os* $*$*-homomorfismos unitais* $\varphi : \mathcal{C} \to \mathbb{C}$ *são chamados "caráteres" de* $\mathcal{C}$*.*

   O conjunto de todos os caráteres do contexto $\mathcal{C}$ *é chamado "espectro de Gelfand" de* $\mathcal{C}$ *e denotado por* $\Sigma(\mathcal{C})$*.*

Noções algébricas

Exemplo ($*$-homomorfismo)

Seja uma matriz autoadjunta $M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$. *O cálculo espectral define um* $*$*-homomorfismo unital fiel* $\mathcal{F}(\sigma(M)) \to \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

[É um bom exercício provar esta afirmação!]

Exemplo (Caráteres)

i.) *Seja* ω_0 *um ponto qualquer do conjunto* Ω. *Então a função*

$$\varphi_{\omega_0} : \mathcal{F}(\Omega) \to \mathbb{C} \ , \quad \varphi_{\omega_0}(f) \doteq f(\omega_0)$$

é um cárater da $*$*-álgebra comutativa unital* $\mathcal{F}(\Omega)$.

ii.) *Se* Ω *é finito, todo caráter de* $\mathcal{F}(\Omega)$ *é da forma acima.*
[É um bom exercício provar esta afirmação!]

iii.) *Para um* $n \in \mathbb{N}$ *qualquer, seja o vetor* $\psi_0 \doteq (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^n$. *A função*

$$\varphi_{\psi_0} : \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C} \ , \quad \varphi_{\omega_0}(M) \doteq \langle \psi_0 | M | \psi_0 \rangle = \psi_0 M \psi_0^t = M_{11}$$

é um caráter do contexto das matrizes $n \times n$ *diagonais.*

Aula 2/5

- **“Re-Visão” de Álgebra Linear, cont.**
  (caráteres e espectros de Gelfand de contextos de matrizes)
- **Teorema de Bell-Kochen-Specker, versão usual**

Definição (Espectro de Elemento de Álgebra Unital)

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra unital. O elemento $A \in \mathcal{A}$ é "invertível" se existe $A^{-1} \in \mathcal{A}$ tal, que

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \mathbb{1} \ .$$

Tal elemento A^{-1} é único quando existe e é chamado o "elemento inverso" de A.

O "espectro" de um elemento $A \in \mathcal{A}$ é o conjunto de números compexos $z \in \mathbb{C}$ para os quais $z\mathbb{1} - A \in \mathcal{A}$ é **não** *invertível. Denotamos este conjunto por $\sigma_{\mathcal{A}}(A) \subseteq \mathbb{C}$.*

Exemplo

- i.) *Para todo $z \in \mathbb{C}$ (visto como elemento da álgebra unital $\mathbb{C}$), $\sigma_{\mathbb{C}}(z) = \{z\}$.*
- ii.) *Para todo $f \in \mathcal{F}(\Omega)$, $\sigma_{\mathcal{F}(\Omega)}(f) = f(\Omega)$ (conjunto imagem da função f).*
- iii.) *Para toda matriz $M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, (não necessariamente autoadjunta) o espectro $\sigma_{\mathcal{B}}(M)$ para qualquer $*$-subálgebra $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ que contenha M é exatamente o conjunto $\sigma(M)$ de autovalores da matriz M.*

Noções algébricas

Observação

Se $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *são duas álgebras unitais e* $\Xi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *um homomorfismo unital então, para todo* $A \in \mathcal{A}$,

$$\sigma_{\mathcal{B}}(\Xi(A)) \subseteq \sigma_{\mathcal{A}}(A) \ .$$

[É um bom exercício provar esta afirmação!]

Em particular, se $\mathcal{C}$ *é uma* $*$*-álgebra comutativa (contexto), para todo caráter* $\varphi \in \Sigma(\mathcal{C})$ *e todo elemento* $C \in \mathcal{C}$, *vale*

$$\varphi(C) \in \sigma_{\mathcal{C}}(C) \ .$$

Se $\mathcal{C}$ *um contexto de uma álgebra de matrizes* $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ *ento, para todo caráter* $\varphi \in \Sigma(\mathcal{C})$ *e toda matriz* $M \in \mathcal{C}$, $\varphi(M)$ *é um autovalor de* M.

Noções algébricas

Teorema

Seja uma matriz autoadjunta $M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ *qualquer.*

i.) *A função*

$$\Sigma(\mathcal{C}(M)) \to \sigma(M) \ , \quad \varphi \mapsto \varphi(M) \ ,$$

é uma bijeção.

ii.) *Para toda função* $f : \sigma(M) \to \mathbb{C}$ *e caráter* $\varphi \in \mathcal{C}(M)$,

$$f(M) \in \mathcal{C}(M) \quad e \quad \varphi(f(M)) = f(\varphi(M)) \ .$$

Com efeito:

$$\mathcal{C}(M) = \{f(M) \ : \ f \text{ uma função } \sigma(M) \to \mathbb{C}\} \ .$$

[É um bom exercício provar esta identidade!]

iii.) *Todo contexto* $\mathcal{C}$ *de* $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ *é desta forma, isto é, para alguma matriz autoadjunta* $M_{\mathcal{C}}$,

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(M_{\mathcal{C}}) = \{f(M_{\mathcal{C}}) \ : \ f \text{ uma função } \sigma(M_{\mathcal{C}}) \to \mathbb{C}\} \ .$$

Noções algébricas

Observação

1. *Pelo teorema, determinar o espectro $\sigma(M)$ (autovalores) de uma matriz M é o mesmo que determinar os caráteres do contexto gerado por M.*
2. *Esta constatação permite uma generalização natural do conceito de espectro de matriz para "espectro conjunto" de matrizes autoadjuntas $M_1, \ldots, M_k$ que comutam: Este último é o espectro (de Gelfand) do contexto $\mathcal{C}(M_1, \ldots, M_k)$.*

   Todo caráter φ deste é unicamente determinado pelos "números quânticos"

   $$\varphi(M_1), \ldots, \varphi(M_k) \in \mathbb{R} \ .$$

3. *Como o cálculo funcional é um $*$-homomorfismo fiel, podemos ver $\mathcal{C}(M)$ como uma "cópia"em $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ da álgebra de funções no espectro da matriz M.*
4. *Num sentido similar, qualquer contexto de $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ é uma cópia da álgebra de funções no espectro de Gelfand deste contexto.*

   Dito de outro modo, contextos de $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ são o mesmo que $*$–ágebras de funções, até um $*$-homomorfismo fiel.

O Teorema de Bell-Kochen-Specker

Bell-Kochen-Specker

Definição (Valorações)

Seja

$$\mathcal{O}_{n\times n} = \{M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) \ : \ M^* = M\} ,$$

isto é, o conjunto das matrizes $n \times n$ *autoadjuntas.*

Em Mecânica Quântica $\mathcal{O}_{n\times n}$ *representa o conjunto dos "observáveis" de um sistema (quântico) de* n *níveis.*

Dizemos que a função $V : \mathcal{O}_{n\times n} \to \mathbb{R}$ *é uma "valoração" para tais observáveis se, para todo observável* $A \in \mathcal{O}_{n\times n}$ *e toda função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, vale*

$$V(f(A)) = f(V(A)) .$$

$f(A) \in \mathcal{O}_{n\times n}$*, isto é, a matriz* $f(A)$ *é* **autoadjunta***, pois a função* f *toma valores* **reais***.*

Surge imediatamente a questão sobre a existência de tais valorações. O teorema de Bell-Kochen-Specker, que discutiremos e provaremos num caso especial, responde **negativamente** a esta questão para todo $\mathcal{O}_{n\times n}$, $n \geq 3$.

Antes de demostrarmos este fato, veremos algumas implicações importantes da suposta existência de valorações.

Bell-Kochen-Specker

Lema

Seja V *uma valoração de* $\mathcal{O}_{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$. *Para todo contexto* $\mathcal{C}$ *da álgebra de matrizes* $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$, *existe um caráter* $\varphi_{\mathcal{C}}^{V}$ *único que coincide com* V *nas matrizes autoadjuntoas de* $\mathcal{C}$.

Demonstração.

Seja $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ e suponha que tal caráter $\varphi_{\mathcal{C}}^{V}$ exista. Então, por linearidade, para toda matriz $M \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathcal{C}}^{V}(M) &= \varphi_{\mathcal{C}}^{V}\left(\frac{1}{2}(M+M^{*})\right) + i\varphi_{\mathcal{C}}^{V}\left(\frac{i}{2}(M^{*}-M)\right) \\
&= V\left(\frac{1}{2}(M+M^{*})\right) + iV\left(\frac{i}{2}(M^{*}-M)\right).
\end{aligned}$$

Disto segue que $\varphi_{\mathcal{C}}^{V}$ é único, se existe. Note-se que as matrizes $\frac{1}{2}(M+M^{*})$ e $\frac{i}{2}(M^{*}-M)$ são autoadjuntas.

Para provar a existência, utilizamos a última igualdade como definição de uma função $\varphi_{\mathcal{C}}^{V} : \mathcal{C} \to \mathbb{C}$ e mostramos que esta é um caráter. □

Bell-Kochen-Specker

Demonstração.

Por definição de valoração $V(0) = 0$ e temos

$$\varphi_{\mathcal{C}}^{V}(M) = V(M) \quad \text{e} \quad \varphi_{\mathcal{C}}^{V}(M + iM') = \varphi_{\mathcal{C}}^{V}(M) + i\varphi_{\mathcal{C}}^{V}(M')$$

para matrizes $M, M' \in \mathcal{C}$ **autoadjuntas**. Pela definição de valoração segue ainda que, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $M \in \mathcal{C}$ autoadjunta,

$$\varphi_{\mathcal{C}}^{V}(\alpha M) = V(\alpha M) = \alpha V(M) = \alpha \varphi_{\mathcal{C}}^{V}(M) \ .$$

Assim, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ e $M \in \mathcal{C}$ autoadjunta,

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{C}}^{V}(\alpha M) &= \varphi_{\mathcal{C}}^{V}(\mathrm{Re}\{\alpha\}M + i\mathrm{Im}\{\alpha\}M) \\ &= \varphi_{\mathcal{C}}^{V}(\mathrm{Re}\{\alpha\}M) + i\varphi_{\mathcal{C}}^{V}(\mathrm{Im}\{\alpha\}M) \\ &= \mathrm{Re}\{\alpha\}\varphi_{\mathcal{C}}^{V}(M) + i\mathrm{Im}\{\alpha\}\varphi_{\mathcal{C}}^{V}(M) = \alpha\varphi_{\mathcal{C}}^{V}(M) \ . \end{aligned}$$

$\square$

Demonstração.

Desta última igualdade para $\alpha = -1$, escrevendo

$$M = \frac{1}{2}(M + M^*) + i\frac{i}{2}(M^* - M) \ ,$$

vemos que, para qualquer matriz $M \in \mathcal{C}$ (não necessáriamente autoadjunta),

$$\varphi_{\mathcal{C}}^{V}(M^*) = \overline{\varphi_{\mathcal{C}}^{V}(M)} \ .$$

Sejam $M, M' \in \mathcal{C}$ **autoadjuntas**. Recorde-se que, para alguma matriz autoadjunta $\tilde{M} \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\tilde{M})$ e, portanto, para tudas funções $f, f' : \sigma(\tilde{M}) \to \mathbb{R}$,

$$M = f(\tilde{M}) \ , \quad M' = f'(\tilde{M}) \quad \text{e} \quad M + M' = (f + f')(\tilde{M}) \ .$$

Logo, pela definição de valoração

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{C}}^{V}(M + M') &= \varphi_{\mathcal{C}}^{V}((f + f')(\tilde{M})) = V((f + f')(\tilde{M})) \\ &= (f + f')(V(\tilde{M})) = f(V(\tilde{M})) + f'(V(\tilde{M})) \\ &= V(f(\tilde{M})) + V(f'(\tilde{M})) = \varphi_{\mathcal{C}}^{V}(M) + \varphi_{\mathcal{C}}^{V}(M') \ . \end{aligned}$$

□

Demonstração.

Usando as identidades acima, mostramos que, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ e $M, M' \in \mathcal{C}$,

$$\varphi_{\mathcal{C}}^{V}(M + M') = \varphi_{\mathcal{C}}^{V}(M) + \varphi_{\mathcal{C}}^{V}(M') \quad \text{e} \quad \varphi_{\mathcal{C}}^{V}(\alpha M) = \alpha \varphi_{\mathcal{C}}^{V}(M) \ ,$$

isto é, $\varphi_{\mathcal{C}}^{V} : \mathcal{C} \to \mathbb{C}$ é linear. Com argumentos similares vemos que

$$\varphi_{\mathcal{C}}^{V}(MM') = \varphi_{\mathcal{C}}^{V}(M)\varphi_{\mathcal{C}}^{V}(M'),$$

primeiro para $M, M' \in \mathcal{C}$ autoadjuntas e em seguida a identidade é estendida para todas $M, M' \in \mathcal{C}$ por meio das outras identidades já demonstradas.

Com isso fica mostrado que $\varphi_{\mathcal{C}}^{V}$ é um caráter com a propriedade enunciada. $\square$

Teorema (Bell-Kochen-Specker)

Para toda dimensão $n \geq 3$, o conjunto de observáveis $\mathcal{O}_{n\times n}$ (de um sistema quântico de n níveis) **não** *possui valorações.*

Demonstração.

Seja $n \in \mathbb{N}$ qualquer e suponha-se que exista uma valoração V para $\mathcal{O}_{n\times n}$. Seja $\{P_1, \ldots, P_m\}$ uma resolução da identidade de $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Recorde-se que esta família esta contida em algum contexto $\mathcal{C}$.

Pelo lema, há um caráter $\varphi_{\mathcal{C}}^{V}$ de $\mathcal{C}$ que coincide com V nas matrizes autoadjuntas e, portanto, nos projetores $P_1, \ldots, P_m$. Disto concluímos que

$$\begin{aligned} 1 &= \varphi_{\mathcal{C}}^{V}(\mathbb{1}) = \varphi_{\mathcal{C}}^{V}(P_1 + \cdots + P_m) \\ &= \varphi_{\mathcal{C}}^{V}(P_1) + \cdots + \varphi_{\mathcal{C}}^{V}(P_m) \\ &= V(P_1) + \cdots + V(P_m) \; . \end{aligned}$$

$\square$

Demonstração.

Por outro lado, pelas definições de projetor ortogonal e de valoração,

$$V(P_k)^2 = V(P_k \cdot P_k) = V(P_k) \in \mathbb{R} \ .$$

Disto segue que

$$V(P_k) = \varphi_{\mathcal{C}}^{V}(P_k) \in \sigma(P_k) \subseteq \{0,1\} \ .$$

Assim, para toda valoração V e resolução da identidade $\{P_1, \ldots, P_m\}$ de $\mathcal{O}_{n\times n}$ devem valer:

$$V(P_1) + \cdots + V(P_m) = 1 \quad \text{com} \quad V(P_1), \ldots, V(P_m) \in \{0,1\} \ .$$

$\square$

Demonstração.

Disto segue que para toda valoração e toda resolução da identidade $\{P_1, \ldots, P_m\}$ de $\mathcal{O}_{n\times n}$, para (exatamente) um $k = 1, \ldots, m$, vale

$$V(P_k) = 1 \quad \text{e} \quad V(P_{k'}) = 0 \quad \text{se} \quad k' \neq k.$$

A prova do teorema consiste então em apresentar resoluções da identidade para as quais se possa explicitar uma **obstrução à validade desta identidade** para toda valoração V fixa (supostamente existente).

Provaremos aqui **somente o caso especial** $n = 4$. O caso $n > 4$ é provado por uma adaptação simples do caso considerado. O casos $n = 3$ é o mais difícil (mais de 100 resoluções da identidade foram usadas na prova original!) e é mais apropriado que se consulte a literatura para uma demosntração completa. Porém, já no caso especial aqui considerado se vê em que consistem as referidas obstruções.

Consideraremos **onze** resolusões da identidades associadas a bases ortogonais de $\mathbb{C}^4$: $\square$

Demonstração.

$\mathfrak{e}_1$	$\begin{matrix}1\\0\\0\\0\end{matrix}$	$\begin{matrix}1\\0\\0\\0\end{matrix}$	$\begin{matrix}1\\0\\0\\0\end{matrix}$	$\begin{matrix}1\\0\\0\\0\end{matrix}$	$\begin{matrix}-1\\1\\1\\1\end{matrix}$	$\begin{matrix}-1\\1\\1\\1\end{matrix}$	$\begin{matrix}1\\-1\\1\\1\end{matrix}$	$\begin{matrix}1\\1\\-1\\1\end{matrix}$	$\begin{matrix}0\\1\\-1\\0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0\\0\\1\\-1\end{matrix}$	$\begin{matrix}1\\0\\1\\0\end{matrix}$
$\mathfrak{e}_2$	$\begin{matrix}0\\1\\0\\0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0\\1\\0\\0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0\\0\\1\\0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0\\0\\0\\1\end{matrix}$	$\begin{matrix}1\\-1\\1\\1\end{matrix}$	$\begin{matrix}1\\1\\-1\\1\end{matrix}$	$\begin{matrix}1\\1\\-1\\1\end{matrix}$	$\begin{matrix}1\\1\\1\\-1\end{matrix}$	$\begin{matrix}1\\0\\0\\-1\end{matrix}$	$\begin{matrix}1\\-1\\0\\0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0\\1\\0\\1\end{matrix}$
$\mathfrak{e}_3$	$\begin{matrix}0\\0\\1\\0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0\\0\\1\\1\end{matrix}$	$\begin{matrix}0\\1\\0\\1\end{matrix}$	$\begin{matrix}0\\1\\1\\0\end{matrix}$	$\begin{matrix}1\\1\\-1\\1\end{matrix}$	$\begin{matrix}1\\0\\1\\0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0\\1\\1\\0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0\\0\\1\\1\end{matrix}$	$\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}$	$\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}$	$\begin{matrix}1\\1\\-1\\-1\end{matrix}$
$\mathfrak{e}_4$	$\begin{matrix}0\\0\\0\\1\end{matrix}$	$\begin{matrix}0\\0\\1\\-1\end{matrix}$	$\begin{matrix}0\\1\\0\\-1\end{matrix}$	$\begin{matrix}0\\1\\-1\\0\end{matrix}$	$\begin{matrix}1\\1\\1\\-1\end{matrix}$	$\begin{matrix}0\\1\\0\\-1\end{matrix}$	$\begin{matrix}1\\0\\0\\-1\end{matrix}$	$\begin{matrix}1\\-1\\0\\0\end{matrix}$	$\begin{matrix}1\\-1\\-1\\1\end{matrix}$	$\begin{matrix}1\\1\\-1\\-1\end{matrix}$	$\begin{matrix}1\\-1\\-1\\1\end{matrix}$

$\square$

Bell-Kochen-Specker

Demonstração.

Pela primeira parte da prova, toda valoração V deveria associar o valor 1 a exatamente onze destes vetores (um, e só um, em cada coluna da tabela), pelo respectivo projetor ortogonal, e 0 aos demais.

Porém, um mesmo vetor aparece exatamente duas ou quatro vezes nesta tabela, o que implica que o número de vetores com valoração 1 deve ser par (enquanto onze é impar!) . $\square$

Observação

Muito antes de Kochen e Specker, von Neumann havia provado a não exisência de $*$*-homomorfismos* $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ *(isto é, caráteres).*

Assim, B-K-S pode ser visto como uma melhora significativa deste resultado precedente.