Seminario de Docencia FC

Acercarnos a las formas aditivas de los números a través del microscopio

J. César Guevara Bravo

Facultad de Ciencias, UNAM

29 de abril de 2021

Teoría aditiva de los números (TAN), es la representación de los enteros como suma de otros enteros.

DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C. & obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

Esta teoría toma un perfil propio a partir de Fermat.

Fermat incursiona en la TAN de la mano de Diofanto con la obra ***Aritmética***

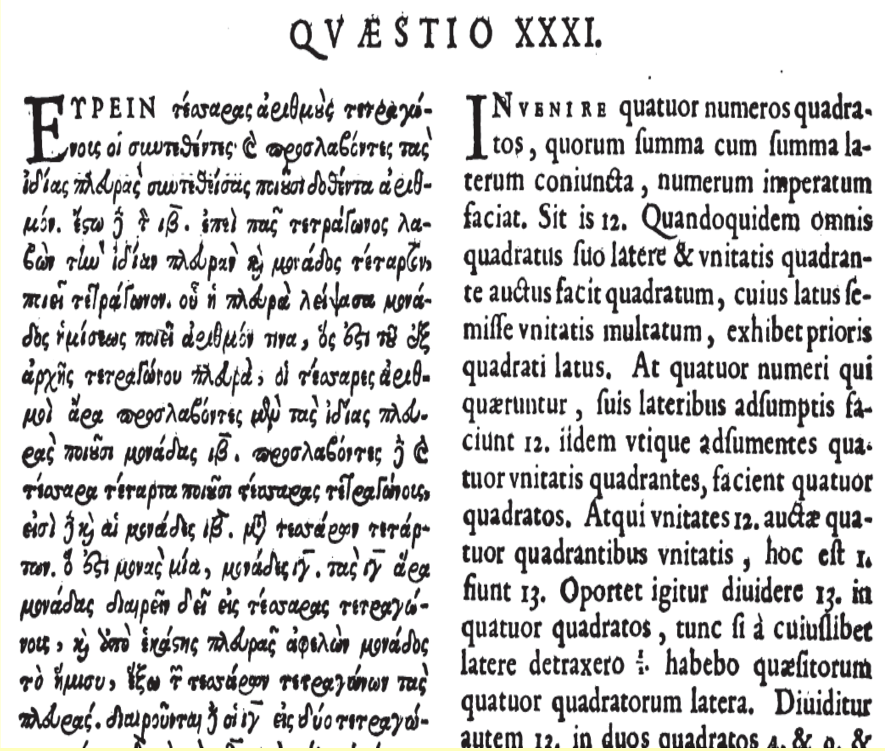
La obra de Diofanto no se encuentra en Europa hasta mediados del siglo XVI. Lo que se puede conocer de este autor es por Luca Pacioli. Y un vínculo importante fue Fibonacci.

Encontrar cuatro cuadrados cuya suma aumentada en la suma de sus lados, sea un número dado.

En términos modernos:

Dado a, encontrar x, y, z, v, tales que

$x^2 + y^2 + z^2 + v^2 + x + y + z + v = a$.


QVÆSTIO XXXI.

INVENIRE quatuor numeros quadratos, quorum ſumma cum ſumma laterum coniuncta, numerum imperatum faciat. Sit is 12. Quandoquidem omnis quadratus ſuo latere & vnitatis quadrante auctus facit quadratum, cuius latus ſemiſſe vnitatis multatum, exhibet prioris quadrati latus. At quatuor numeri qui quæruntur, ſuis lateribus adſumptis faciunt 12. iidem vtique adſumentes quatuor vnitatis quadrantes, facient quatuor quadratos. Atqui vnitates 12. auctæ quatuor quadrantibus vnitatis, hoc eſt 1. fiunt 13. Oportet igitur diuidere 13. in quatuor quadratos, tunc ſi à cuiuſlibet latere detraxero $\frac{1}{2}$. habebo quæſitorum quatuor quadratorum latera. Diuiditur autem 12. in duos quadratos 4. & 9. &

Tenemos el comentario de Fermat en el margen del libro de Diofanto, éste dice:

in quatuor aut in plures quadratos , quod ſemper fieri poſſe docuimus. Denique eadem arte , & ampliando lemma Diophanti , vt ſupra fecimus , inuenientur quotlibet quadrati , quorum ſumma adſumpto quolibet multiplici ſummæ laterum , datum conficiat numerum. Quoniam autem in his omnibus quæſtionibus plerumque accidit aliquem numerum ita diuidendum eſſe in duos , vel tres vel plures quadratos, vt quilibet eorum excedat certum aliquem numerum, quod ritè perfici nequit, niſi per artificium quo vtitur Diophantus duodecima , decima tertia , & decima quarta quinti , ſatius erit hujuſmodi quæſtionum explicationem in eum locum reiicere.

OBSERVATIO D. P. F.

IMo propoſitionem pulcherrimam & maxime generalem nos primi deteximus. Nempe omnem numerum vel eſſe triangulum vel ex duobus aut tribus triangulis compoſitum eſſe quadratum vel ex duobus aut tribus aut quatuor quadratis compoſitum

“Aún más, hay una proposición muy bella y completamente general que hemos sido los primeros en descubrir:”

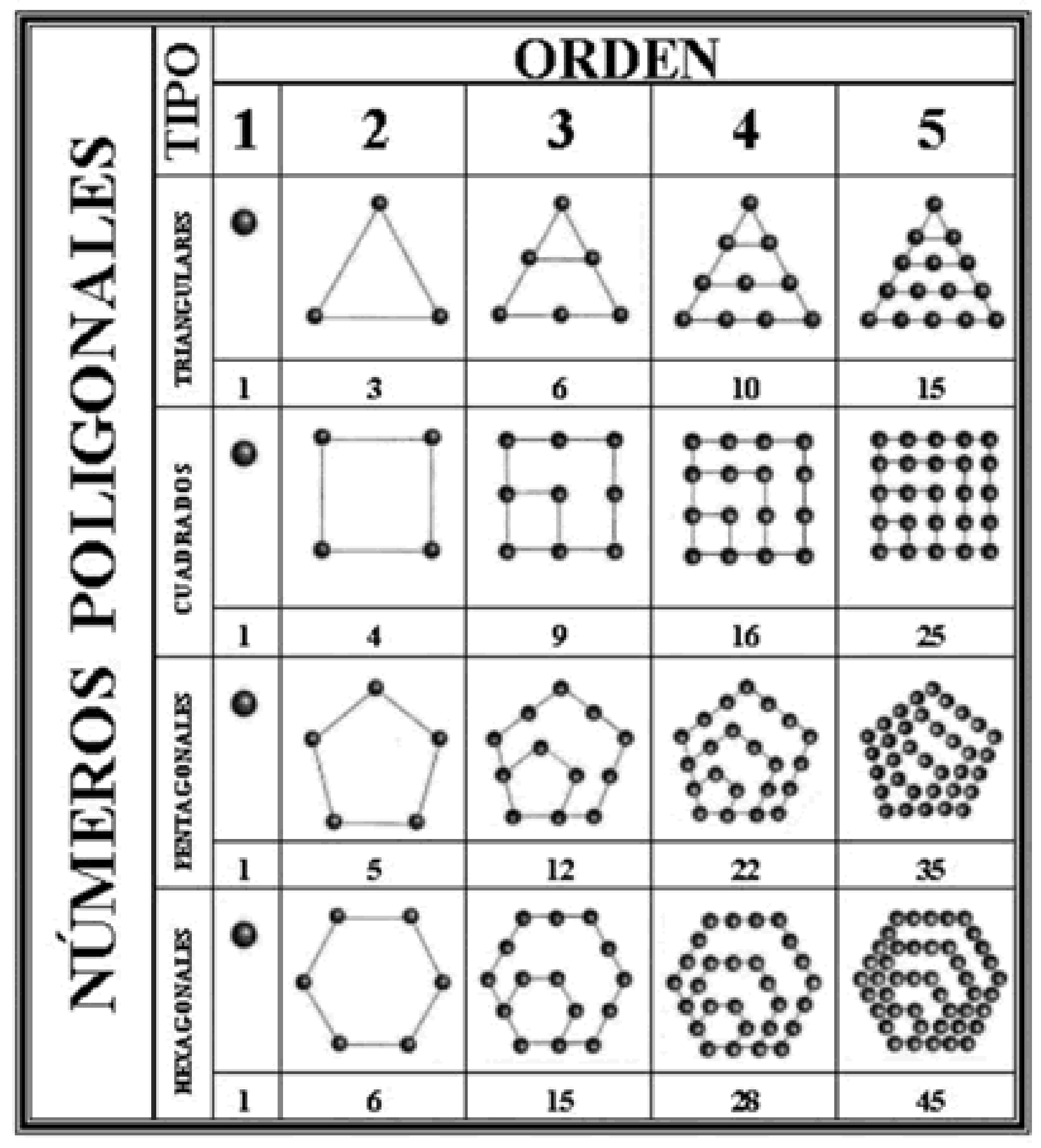
Todo número es:

Triangular, o bien la suma de 2 o 3 números triangulares.

Cuadrado o suma de 2, 3 o 4 cuadrados.

Pentagonal o la suma de 2, 3, 4 o 5 pentagonales.

Y así sucesiva e indefinidamente, ya sea **hexagonales**, **heptagonales** o poligonales cualesquiera, pudiéndose enunciar según el número de ángulos.



Triangulares $\mathrm{T_n} = \frac{n(n+1)}{2}$

Cuadrados $\mathrm{C}_n = n^2$

Pentagonales $\mathrm{W_n} = \frac{n(3n-1)}{2}$

Hexagonales $\mathrm{H_n} = k(2k-1)$

Para m $\geq$ 1 se tiene que el k-ésimo número poligonal de orden (m+2) es:

$$P_m(k) = \frac{mk(k-1)}{2} + k$$

En el camino se demostró que todo entero es una:

suma de cuatro cuadrados $\rightarrow$ Lagrange

suma de tres triangulares $\rightarrow$ Gauss

Por ejemplo:

$$42 = \frac{a(a+1)}{2} + \frac{b(b+1)}{2} + \frac{c(c+1)}{2} = \frac{3(4)}{2} + \frac{5(6)}{2} + \frac{6(7)}{2}$$

$$42 = m^2 + n^2 + p^2 + q^2 = 4^2 + 4^2 + 3^2 + 1^2$$

$$42 = \frac{r(3r-1)}{2} + \frac{s(3s-1)}{2} + \frac{t(3t-1)}{2} + \frac{u(3u-1)}{2} + \frac{v(3v-1)}{2} =$$

$$= \frac{2(6-1)}{2} + \frac{2(6-1)}{2} + \frac{2(6-1)}{2} + \frac{2(6-1)}{2} + \frac{4(12-1)}{2}$$

$$= 5 + 5 + 5 + 5 + 22$$

¿Podemos pasar a más dimensiones y no estar sólo en dos dimensiones?

Podemos preguntarnos ¿qué pasa con la cantidad de representaciones para cada entero?

¿es única? Veamos un ejemplo

$$204 = 5^2 + 7^2 + 7^2 + 9^2$$

Resulta que no lo es

$$204 = 5^2 + 7^2 + 7^2 + 9^2 =$$
$$3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 =$$
$$2^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 =$$
$$1^2 + 3^2 + 5^2 + 13^2 =$$
$$1^2 + 1^2 + 9^2 + 11^2 =$$
$$0^2 + 2^2 + 10^2 + 10^2 =$$
$$0^2 + 2^2 + 2^2 + 14^2$$

Lo mismo pasa con los triangulares, pentagonales, etc.

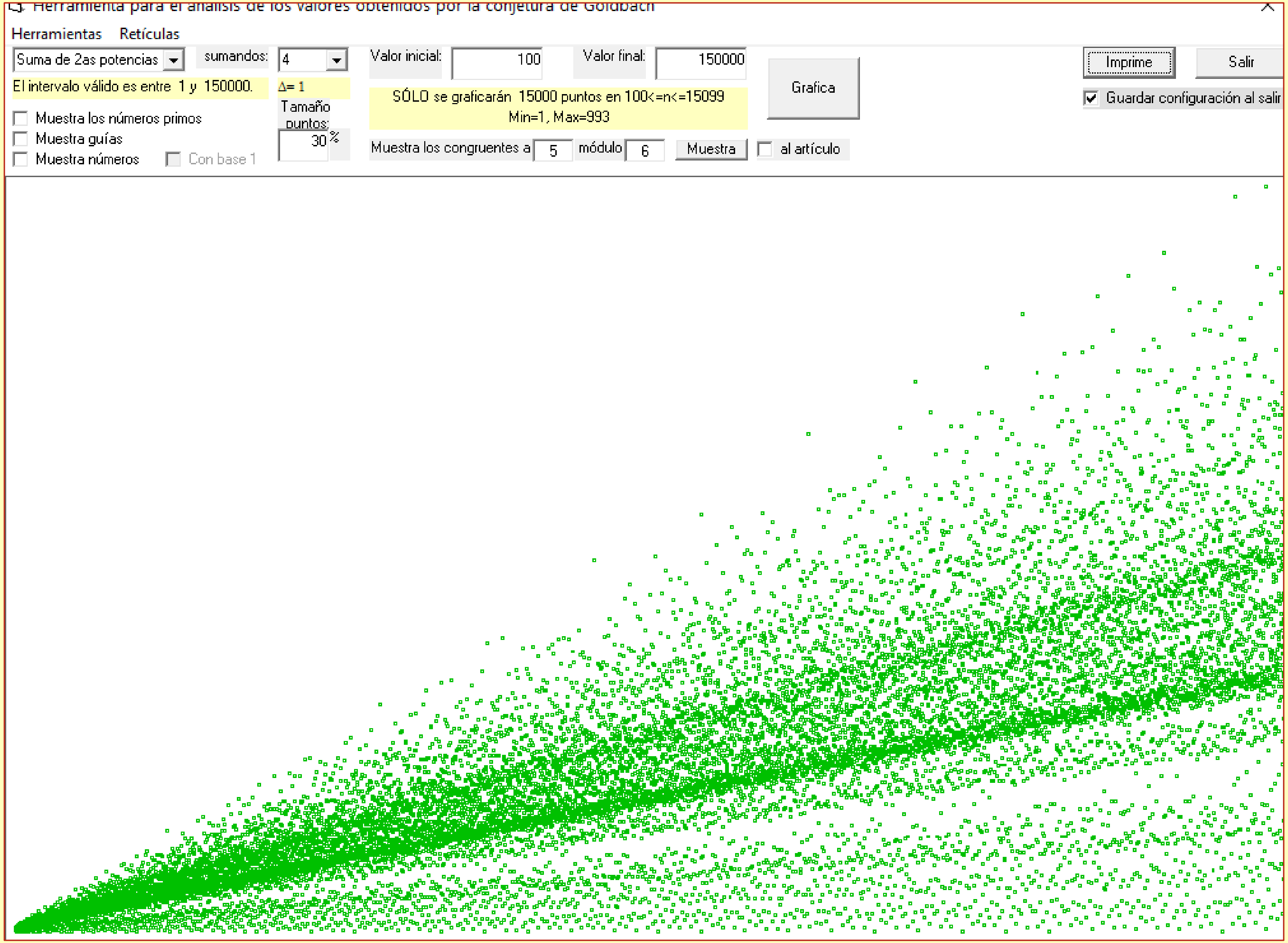
Exploremos la cantidad de representaciones

Veamos la cantidad de representaciones de un entero n como suma de cuatro cuadrados en términos de una función

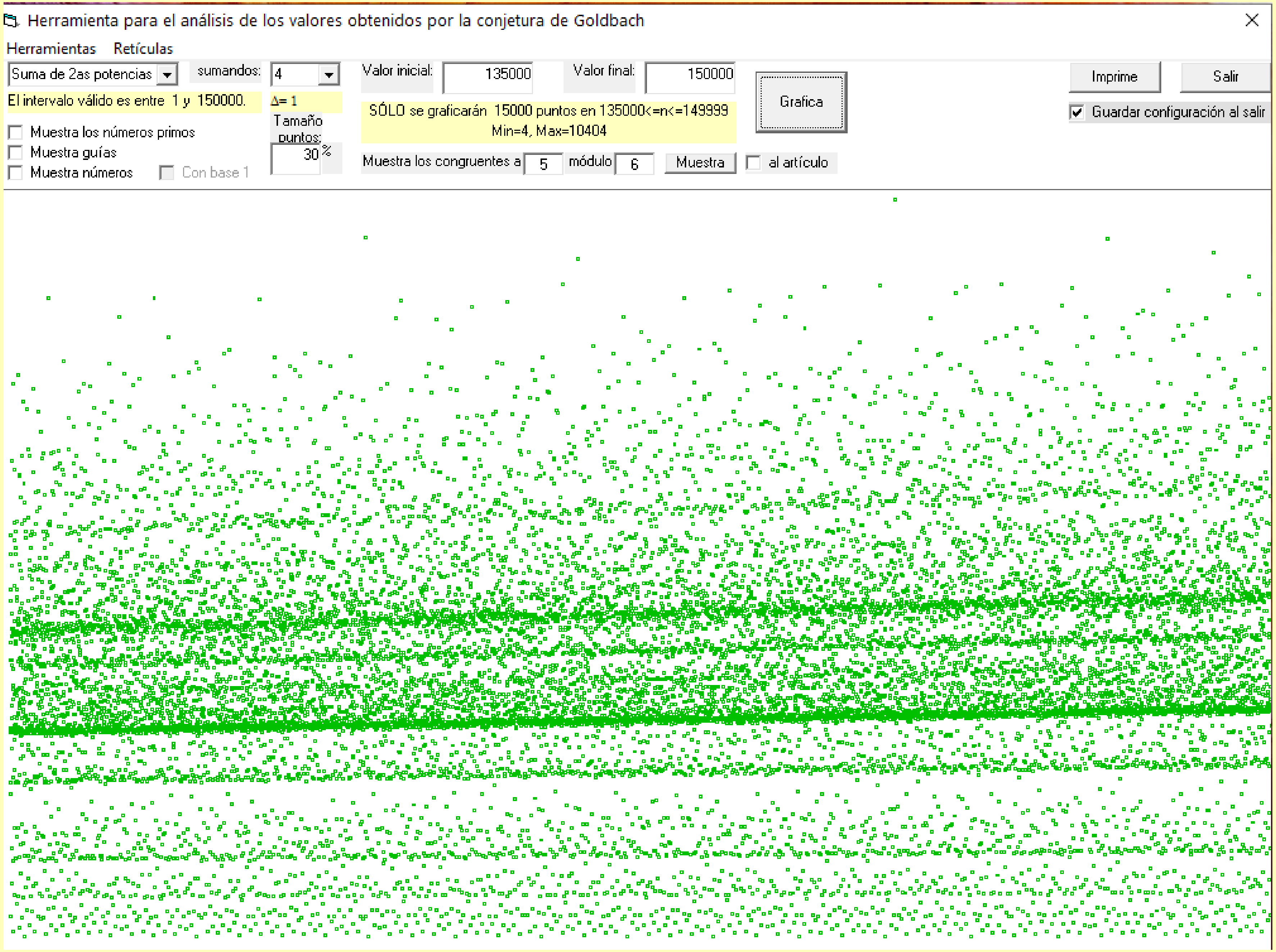
S(n)

Por ejemplo

S(204)=7



Cantidad de representa-ciones de n como suma de 4 cuadrados

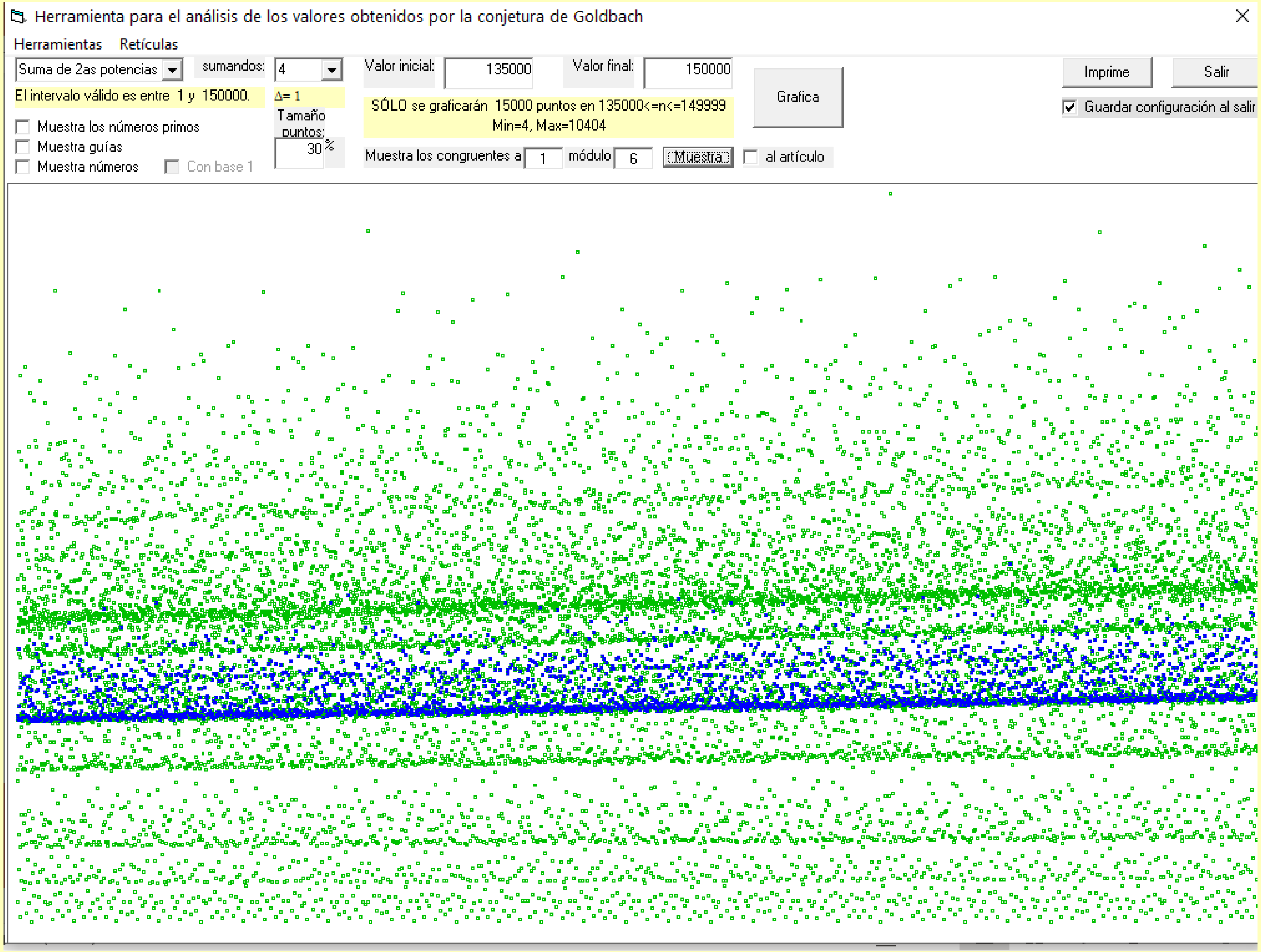


Acercamiento para n entre

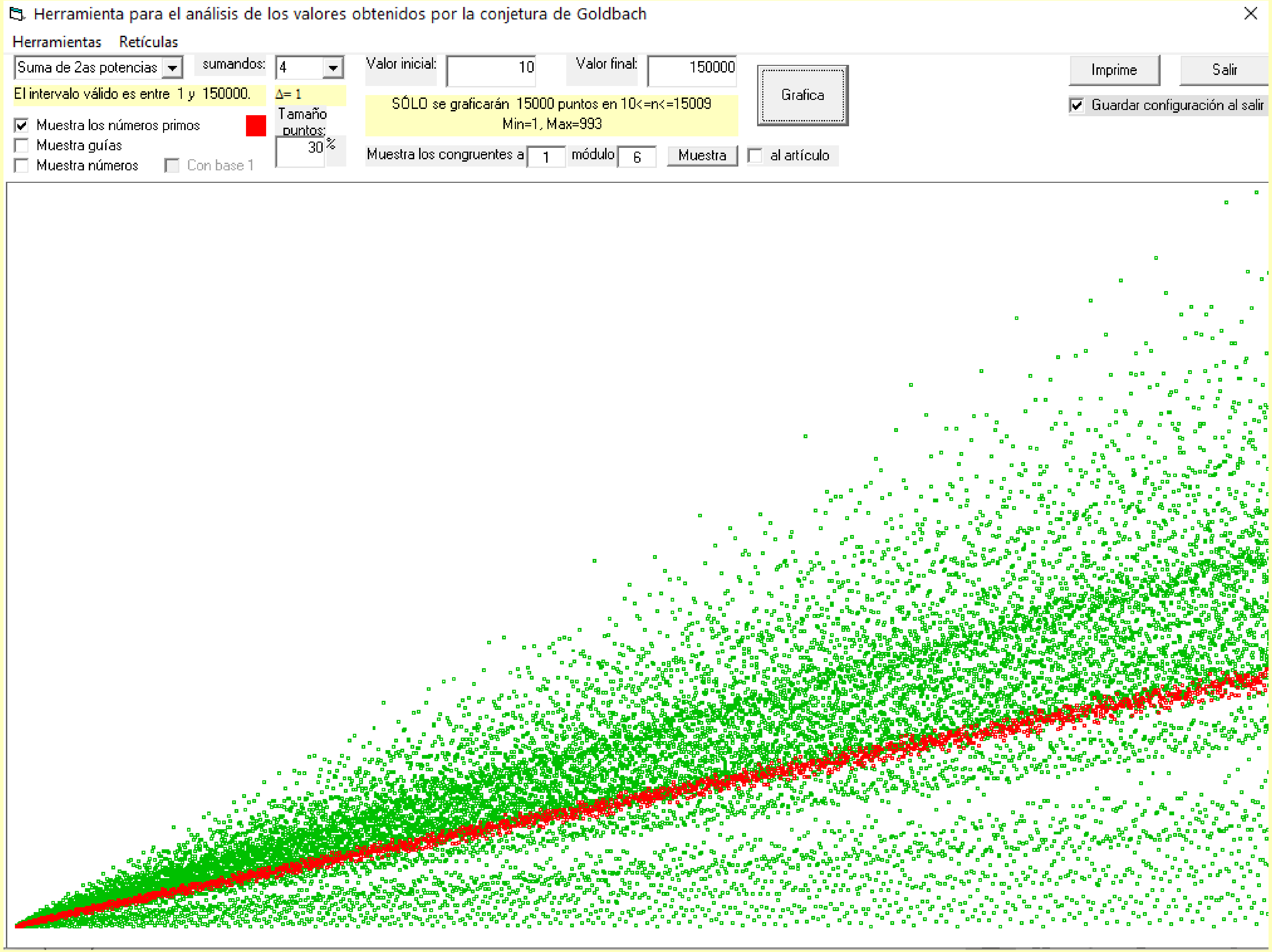
135000

y

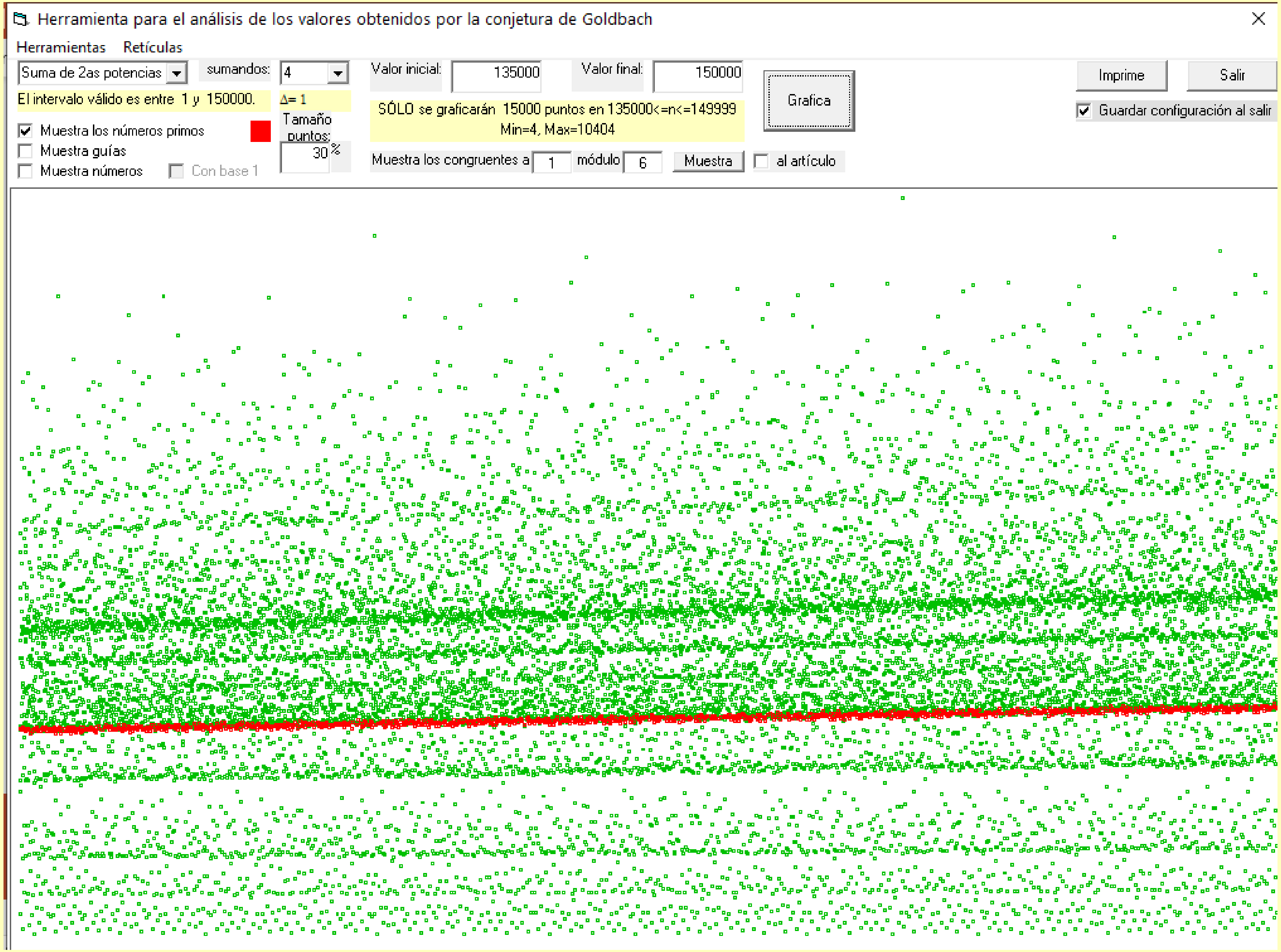
150000



Los azules son las representaciones para la clase n=6k+1.



Los rojos son las represen-taciones como suma de 4 cuadra-dos de los primos.



Acercamiento para n entre

135000

y

150000

Ejemplo: El primo 1013

$$1013 = 16^2 + 17^2 + 18^2 + 12^2$$

$$1013 = 16^2 + 24^2 + 10^2 + 9^2$$

$$1013 = 16^2 + 26^2 + 9^2 + 0^2$$

$$1013 = 17^2 + 24^2 + 12^2 + 2^2$$

$$1013 = 18^2 + 18^2 + 14^2 + 13^2$$

.

$$1013 = 30^2 + 10^2 + 3^2 + 2^2$$

Total de Formas 29

Ejemplo: El 1014

$$1014 = 16^2 + 19^2 + 19^2 + 6^2$$

$$1014 = 16^2 + 21^2 + 14^2 + 11^2$$

$$1014 = 16^2 + 26^2 + 9^2 + 1^2$$

$$1014 = 17^2 + 24^2 + 10^2 + 7^2$$

.

$$1014 = 30^2 + 10^2 + 3^2 + 2^2$$

Total de Formas 53

Para el número 1016 son 10 maneras como suma de 4 cuadrados

Se puede hacer algo semejante para suma de tres cuadrados, por ejemplo:

$$261 = 4^2 + 7^2 + 14^2$$

$$= 1^2 + 2^2 + 16^2$$

$$= 1^2 + 8^2 + 14^2$$

$$= 6^2 + 9^2 + 12^2$$

Otro ejemplo:

$$
\begin{aligned}
297 &= 6^2 + 6^2 + \ 15^2 \\
&= 3^2 + 12^2 + \ 12^2 \\
&= 2^2 + 2^2 + \ 17^2 \\
&= 4^2 + 5^2 + \ 16^2 \\
&= 8^2 + 8^2 + \ 13^2 \\
&= 1^2 + 10^2 + \ 14^2
\end{aligned}
$$

Si n es impar existen primos S_t, t_r y w_r tal que

$$n = S_t + t_r + w_r$$

y de la misma manera $GI(n)$ representa a la cantidad de representaciones de como suma de tres primos, para n.

Ejemplo: Sea $n = 33$. Las sumas son

$(2 + 2 + 29)$ $(7 + 7 + 19)$

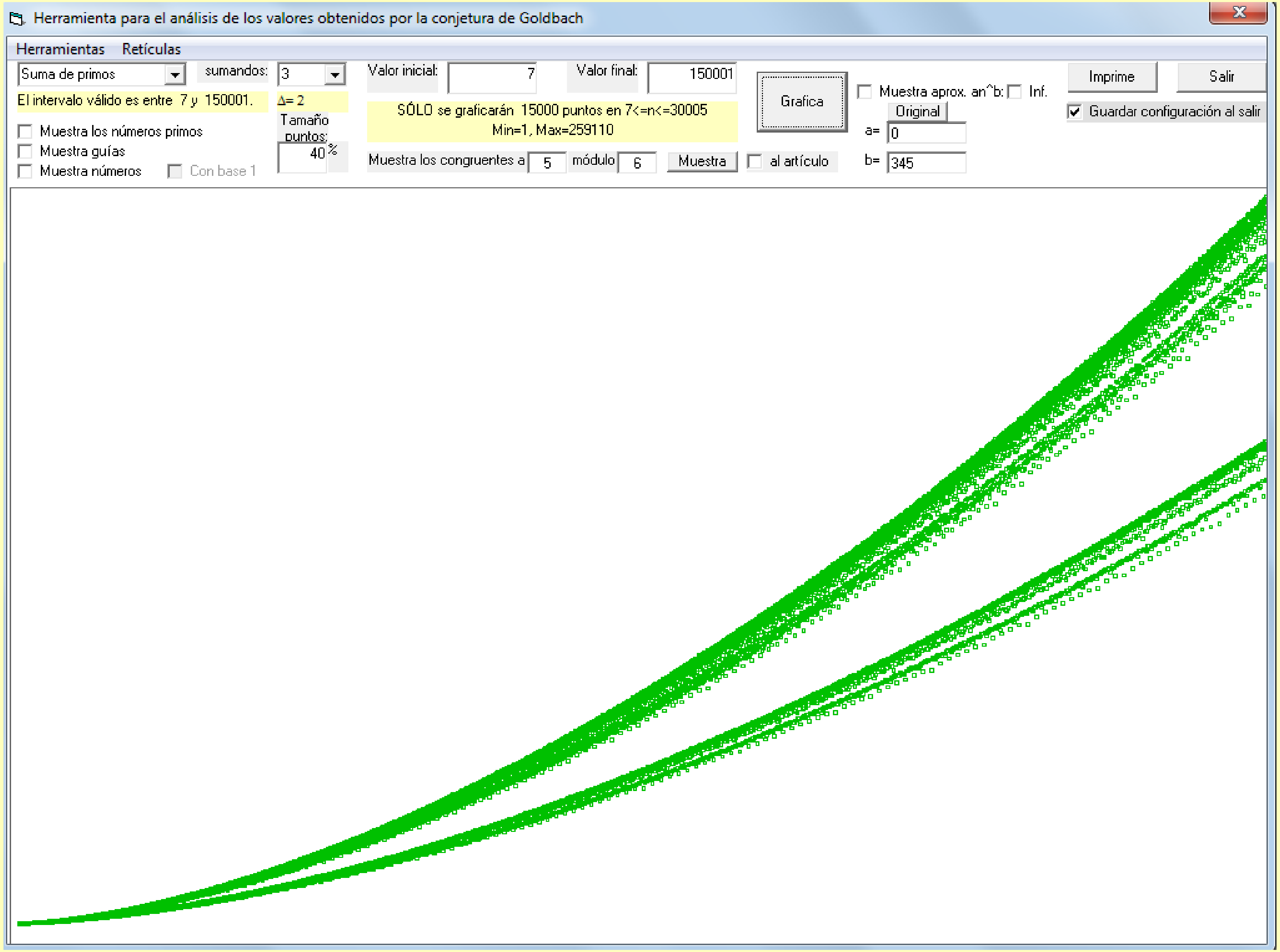
$(3 + 7 + 23)$ $(7 + 13 + 13)$

$(3 + 11 + 19)$ $(11 + 11 + 11)$

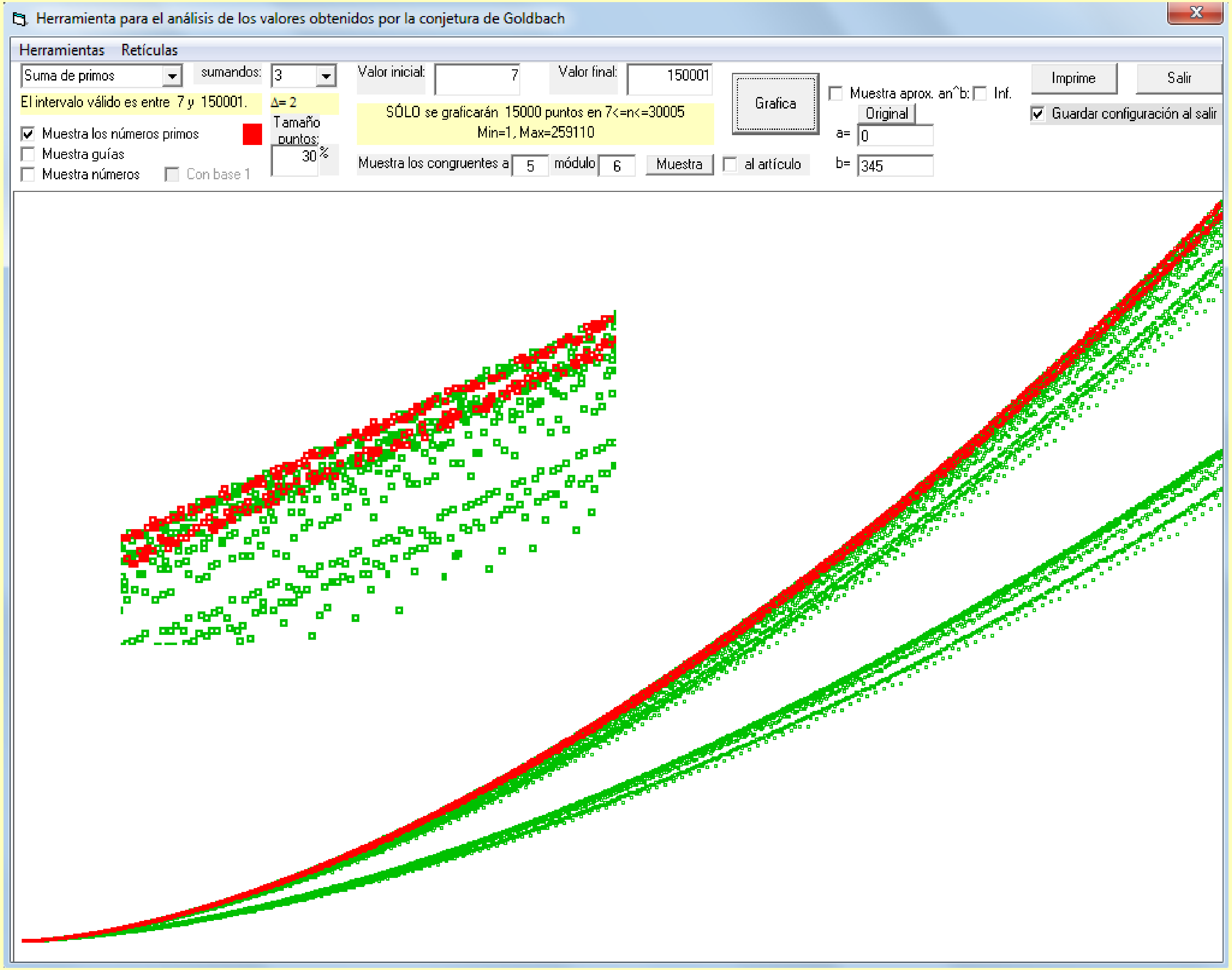
$(3 + 13 + 17)$ $(5 + 11 + 17)$

$(5 + 5 + 23)$

$GI(n) = 9$



Gráfica de la función $GI(n)$ para n impar

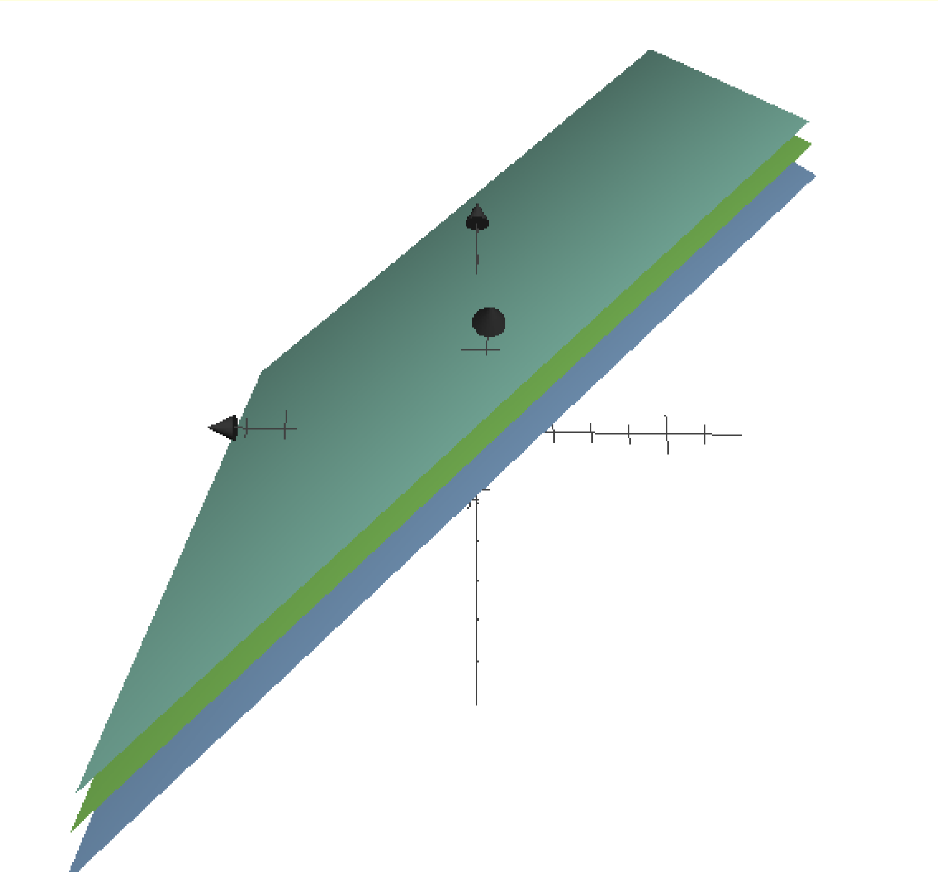


Los rojos indican la cantidad de representaciones de los primos, como suma de tres primos.

Para el caso terciario de n = p + q + r, los puntos

$n_i = (p, q, r)$ de las representaciones están en el plano

$$n = x + y + z.$$



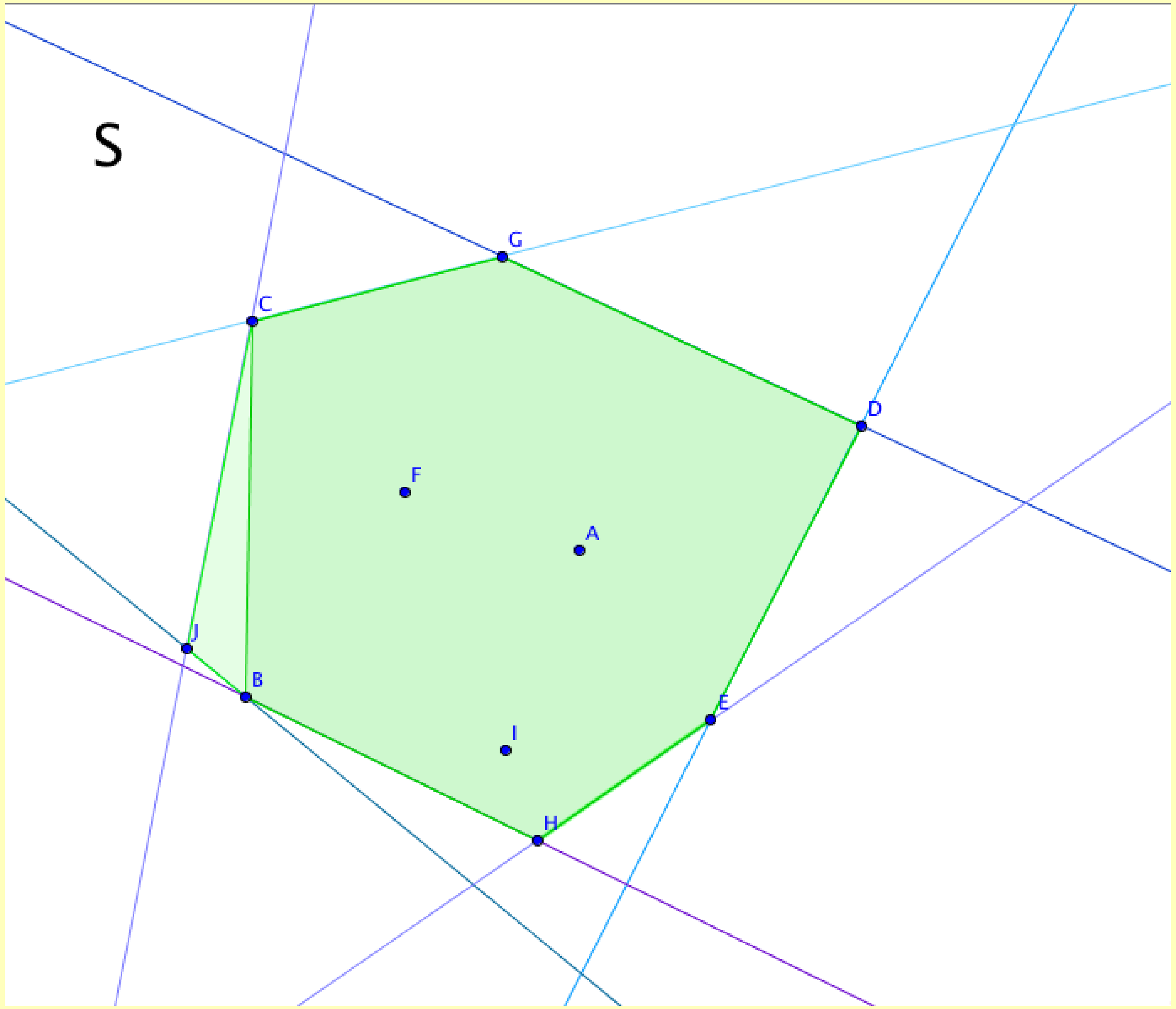
Al visualizar cada terna como el punto en el espacio (p_n, q_n, r_n), entonces, se tiene que todas las triadas asociadas a n están en el plano $x + y + z = n$

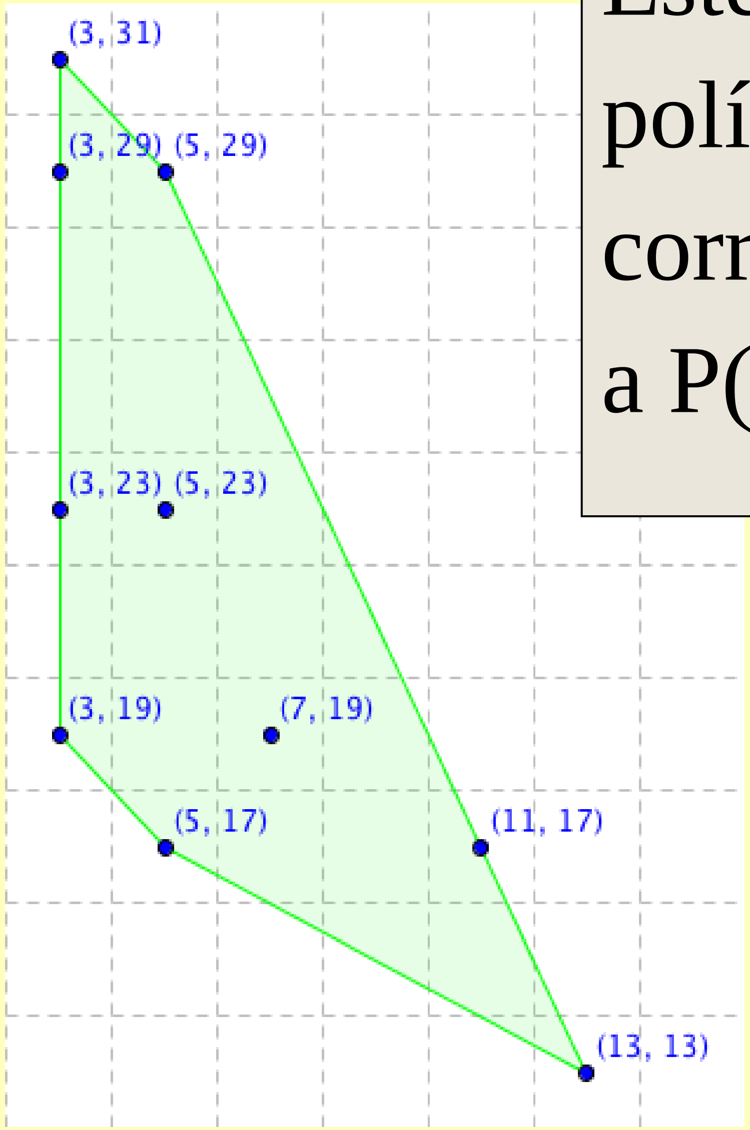
Sea $n = 33$. Las triadas que lo suman son

$$(2, 2, 29), (3, 7, 23), (3, 11, 19), (3, 13, 17), (5, 5, 23), (5, 11, 17),$$
$$(7, 7, 19), (7, 13, 13), (11, 11, 11),$$

y al proyectarlas sobre XZ nos queda

$$(2, 29), (3, 23), (3, 19), (3, 17), (5, 23), (5, 17), (7, 19),$$
$$(7, 13), (11, 11)$$





Este polígono corresponde a P(39)