

Mini-Projet

Problème de Couplage (Matching)

Nathanael Bayard — L3 DLMI — Algorithmique des Graphes

1 Présentation du Problème et Théorème de Hall

On peut définir le problème de façon abstraite, de la manière suivante :

Δ Définition. On appelle *problème de couplage* la donnée d'un triplet $P = (X, Y, \phi)$ tel que :

(i) X et Y soient des ensembles finis quelconques non vides.

(ii) $\phi \subseteq X \times Y$

Un élément $y \in Y$ est dit compatible avec un élément $x \in X$ lorsque $(x, y) \in \phi$. On introduit la notation suivante :

$$\forall x \in X, \quad \phi x := \{y \in Y ; (x, y) \in \phi\}$$

que l'on étend aux sous-parties de X :

$$\forall B \subseteq X, \quad \phi B := \bigcup_{x \in B} \phi x = \{y \in Y ; \exists x \in B, (x, y) \in \phi\}$$

ϕx est donc l'ensemble des éléments de Y compatibles avec x , ϕB est l'ensemble des éléments de Y compatibles avec au moins un élément de B .

On définit alors une de solution au problème de la manière suivante :

Δ Définition. On appelle *couplage* pour le problème de couplage $P = (X, Y, \phi)$ toute application bijective $f : A \subseteq X \rightarrow B \subseteq Y$, qui “respecte” ϕ dans le sens que :

$$\forall x \in A, \quad f(x) \in \phi x$$

De façon équivalente, cela signifie que le graphe $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ de f (au sens d'un graphe d'application) doit être inclus dans ϕ . On appellera *étendue* du couplage f , le cardinal de son graphe d'application, qui vaut aussi en particulier $|\text{Im } f|$.

On appelle *couplage parfait* pour P un couplage f dont l'ensemble de définition soit X tout entier, et l'ensemble d'arrivée soit Y . L'existence d'un couplage parfait entraîne évidemment que nécessairement $|X| = |Y|$.

On appelle *couplage maximum* pour le problème P , tout couplage f de P tel que pour tout autre couplage g , $|\text{Im } g| \leq |\text{Im } f|$. On peut aussi l'interpréter en disant que f est un maximum au sens de son étendue parmi tous les couplages de P qui existent.

Tout couplage parfait est bien sûr maximum, mais la réciproque n'est à priori pas vraie. Le Théorème de Hall donne une condition nécessaire et suffisante sur P pour qu'il admette un couplage parfait.

⊢ Théorème. (Hall) Soient X, Y deux ensembles finis non vides, $\phi \subseteq X \times Y$, et $P = (X, Y, \phi)$ le problème de couplage associé. Alors P admet un couplage parfait si et seulement si

(i) ϕ respecte la condition suivante, dite *condition de couplage* :

$$\forall B \subseteq X, \quad |B| \leq |\phi B| \tag{1}$$

(ii) $|X| = |Y|$

Preuve.

Prouvons la nécessité de ces deux conditions. Remarquons en premier lieu que si $f : A \subseteq X \rightarrow \text{Im } f$ est un couplage pour P , alors comme $f(x) \in \phi x$ pour tout $x \in A$, on a l'inclusion :

$$\forall B \subseteq A, \quad f(B) \subseteq \bigcup_{x \in B} \phi x = \phi B$$

En particulier si P admet un couplage parfait $f : X \rightarrow Y$, l'inclusion ci-dessus entraîne bien la condition énoncée par le Théorème de Hall :

$$\forall B \subseteq X, \quad |B| = |f(B)| \leq |\phi B|$$

La première égalité venant de l'injectivité de f . Sa bijectivité entraîne aussi évidemment $|X| = |Y|$.

Prouvons maintenant que ces conditions sont suffisantes pour obtenir l'existence d'un couplage parfait. Par hypothèse, ϕ respecte donc la condition (1). Soit $\gamma \subseteq \phi$ respectant aussi la condition (1), et minimal au sens que pour tout $\xi \subset \gamma$, ξ ne respecte pas la condition (1).

Soit $z \in X$. Puisque γ respecte la condition de couplage, on a l'inégalité $|\gamma z| = |\gamma \{z\}| \geq |\{z\}| = 1$. Montrons que $|\gamma z| = 1$ par l'absurde.

Supposons que $\{u, v\} \subseteq \gamma z$, avec $u \neq v$. On définit $\lambda_u := \gamma \setminus \{(z, u)\}$. On définit symétriquement $\lambda_v := \gamma \setminus \{(z, v)\}$. Remarquons que

$$\forall B \subseteq X \setminus \{z\}, \quad \lambda_u B = \lambda_v B = \gamma B \quad (2)$$

Puisque $\lambda_u \subset \gamma$ et idem pour λ_v , alors, par construction de γ , ni λ_u ni λ_v ne peuvent vérifier la condition (1), et alors :

$$\exists B_u \subseteq X, \quad |B_u| > |\lambda_u B_u|$$

$$\exists B_v \subseteq X, \quad |B_v| > |\lambda_v B_v|$$

Nécessairement, au vu de (2), z appartient à B_u et aussi à B_v . Définissons $B := (B_u \cap B_v) \setminus \{z\}$, et $W := \lambda_u B_u \cap \lambda_v B_v$.

De par (2), on a $\gamma B = \lambda_u B = \lambda_v B$ donc $\gamma B = \lambda_u B \subseteq \lambda_u B_u$ et symétriquement $\gamma B \subseteq \lambda_v B_v$, donc finalement, $\gamma B \subseteq W$.

Nous aurons aussi besoin du résultat suivant :

$$\lambda_u B_u \cup \lambda_v B_v = \gamma(B_u \cup B_v) \quad (3)$$

L'inclusion \subseteq est évidente du fait que γ contient λ_u et λ_v . Pour l'inclusion réciproque, la seule chose à vérifier est que u et v soient bien dans le membre de gauche, puisqu'ils sont dans le membre de droite. Or, $u \in \lambda_v z \subseteq \lambda_v B_v$ puisque $z \in B_v$, et idem $v \in \lambda_u B_u$. D'où l'égalité (3).

Comme γ respecte la condition de couplage, on en déduit que

$$|\lambda_u B_u \cup \lambda_v B_v| = |\gamma(B_u \cup B_v)| \geq |B_u \cup B_v| \quad (4)$$

Finalement :

$$\begin{aligned} |\gamma B| &\leq |W| \quad \text{car} \quad \gamma B \subseteq W \\ &= |\lambda_u B_u \cap \lambda_v B_v| = |\lambda_u B_u| + |\lambda_v B_v| - |\lambda_u B_u \cup \lambda_v B_v| \\ &\leq (|B_u| - 1) + (|B_v| - 1) - |B_u \cup B_v| \\ &\quad \text{puisque} \quad |\lambda_u B_u| < |B_u| \quad \text{et} \quad |\lambda_v B_v| < |B_v| \quad \text{et} \quad (4) \\ &= |B_u \cap B_v| - 2 \\ &= |(B_u \cap B_v) \setminus \{z\}| - 1 \\ &= |B| - 1 \end{aligned}$$

D'où finalement $|\gamma B| < |B|$: absurde puisque γ respecte la condition de couplage (1).

On vient donc de prouver que $\forall z \in X, |\gamma z| = 1$.

On peut définir une application $f : X \rightarrow Y$ qui à $x \in X$ lui associe l'unique $y \in Y$ tel que $\gamma x = \{y\}$. Reste à démontrer la bijectivité de f : si $f(x) = f(x') = y$, c'est que $\gamma x = \gamma x' = \{y\}$, et alors comme γ respecte la condition de couplage :

$$|\{x, x'\}| \leq |\gamma \{x, x'\}| = |\{y\}| = 1$$

D'où $x = x'$, et f est bien injective, donc bijective puisque d'après (ii), $|X| = |Y|$. f est donc bien un couplage parfait pour P , ce qui achève cette démonstration. \square

De nombreux problèmes concrets peuvent être modélisés par un problème de couplage. L'objectif est souvent de construire une bijection $f : X \rightarrow Y$, c'est-à-dire une association un-à-un entre deux ensembles, avec des contraintes sur les valeurs que peuvent prendre $f(x)$ ou $f^{-1}(y)$, contraintes dépendant de x ou de y .

Il est à remarquer que la notion de problème de couplage est complètement symétrique par rapport à X et Y .

Δ Définition. Soit $P = (X, Y, \phi)$ un problème de couplage. Alors on définit son *symétrique* P^{-1} comme le problème de couplage $P^{-1} := (Y, X, \phi^{-1})$, avec :

$$\phi^{-1} := \{(y, x) \in Y \times X ; (x, y) \in \phi\}$$

Si $f : A \subseteq X \rightarrow \text{Im } f$ est un couplage parfait (respectivement maximum) pour $P = (X, Y, \phi)$ alors f^{-1} est un couplage parfait (respectivement maximum) pour P^{-1} . En effet, f^{-1} sera bien une bijection de $\text{Im } f \subseteq Y$ dans $A \subseteq X$, et il est clair que si $\Gamma_f \subseteq \phi$, alors $\Gamma_{f^{-1}} \subseteq \phi^{-1}$. L'étendue de f est bien sûr la même que celle de f^{-1} .

2 Modélisation par un Graphe

Ce type de problème se prête naturellement bien à la modélisation par un graphe (au sens de la théorie des graphes). En fait cela nous permet d'éviter de distinguer les problèmes symétriques P et P^{-1} .

Δ Définition. On appelle *graphe du problème de couplage* $P = (X, Y, \phi)$, le graphe non orienté, simple, biparti $G := (V, E)$, avec $V := X \cup Y$ (on supposera ici X et Y disjoints) et $E := \phi$ (en identifiant 2-uplets de sommets, et arêtes).

Ici comme G est non orienté, la notation (x, y) désigne donc une arête reliant x à y , et correspondrait plus rigoureusement au doubleton $\{x, y\}$.

Un *couplage* du graphe G correspondra à un ensemble d'arêtes $M \subseteq E$ tel qu'il existe un couplage $f : A \subseteq X \rightarrow \text{Im } f$ de P , tel que le graphe d'application Γ_f de f soit M , c'est-à-dire :

$$M = \Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

En termes plus graphiques, du fait de l'injection de f , M correspond à un ensemble d'arêtes de G deux à deux disjoints par sommets. En particulier, chaque sommet de G admet au plus un voisin dans le graphe partiel (V, M) .

Un *couplage parfait* de G correspondra similairement à un ensemble $M = \Gamma_f \subseteq E$ avec $f : X \rightarrow Y$ un couplage parfait pour P . L'existence d'un couplage parfait pour G implique bien sûr $|X| = |Y|$.

Un *couplage maximum* pour G correspondra à un ensemble $M = \Gamma_f \subseteq E$ avec $f : A \subseteq X \rightarrow \text{Im } f$ un couplage maximum pour P .

Cela correspond aussi exactement à un couplage M pour G de cardinal maximal, puisque le nombre d'arêtes dans M est exactement égal à l'étendue du couplage f de P qui lui correspond. Un couplage maximum M est donc un ensemble d'arêtes de G deux à deux sommet-disjointes et qui soit maximal au sens du cardinal.

Les graphes des problèmes P et P^{-1} sont exactement égaux, et tout couplage (resp. maximum, resp. parfait) de l'un est un couplage (resp. maximum, resp. parfait) pour l'autre.

3 Algorithme de Hopcroft-Karp

Le problème qui consiste à trouver un couplage maximum pour un graphe biparti simple $G = (V = X \cup Y, E)$ peut être résolu en temps polynômial grâce à l'algorithme de Hopcroft-Karp. Plus exactement, la complexité dans le pire cas est en $O(m\sqrt{n})$ avec $n := |V|$ et $m := |E|$.

3.1 L'idée

Δ Définition. Soit $G = (V = X \cup Y, E)$ le graphe d'un problème de couplage, et $M \subseteq E$ un couplage de G . On dit que $v \in V$ est libre par rapport à M s'il est isolé dans (V, M) , c'est-à-dire s'il n'est pas l'extrémité d'une arête dans M .

On dira que C est un *chemin d'augmentation* de M dans G , lorsque C est un chemin de G , simple et élémentaire (donc non cyclique), de longueur non nulle, dont les deux sommets d'extrémités sont libres par rapport à M , et dont la suite des arêtes traversées est en alternance dans M et dans $E \setminus M$.

Comme exemple trivial, un chemin d'augmentation "minimaliste" peut très bien être une unique arête dans $E \setminus M$ reliant deux sommets libres.

Tout sommet faisant partie d'un chemin d'augmentation de M est, ou bien une des extrémités libres du chemin, ou bien n'est pas libre, puisqu'en effet il est dans ce cas l'extrémité d'exactlyement une arête dans M .

Du fait qu'un chemin d'augmentation C alterne la traversée d'arêtes dans M et dans $E \setminus M$, et comme il commence et se termine par des arêtes dans $E \setminus M$ (puisque ses extrémités sont libres pour M), il est alors nécessaire que la longueur du chemin C soit impaire. Par bipartisme de G , on en déduit que les extrémités de C sont nécessairement un élément de X et un élément de Y .

Si C est un chemin d'augmentation pour M dans G , en identifiant C avec l'ensemble des arêtes qu'il visite, on peut définir l'ensemble $M' := M \oplus C$ (où \oplus désigne la différence symétrique entre ensembles), et

remarquer qu'alors M' est encore un couplage de G : tout sommet de (V, M') est en effet encore de degré inférieur ou égal à 1, et bien sûr $M' \subseteq E$.

Par ailleurs, M' contient exactement une arête de plus que le couplage M . À partir du couplage trivial $M_0 = \emptyset$, on peut ainsi construire une suite finie (M_0, \dots, M_s) de couplages de G qui soit strictement croissante pour le cardinal : l'élément M_{i+1} est défini comme la différence symétrique de M_i avec un chemin d'augmentation pour M_i dans G . La suite s'arrête lorsqu'il ne reste plus de chemins d'augmentation à trouver pour le dernier élément de la suite.

Afin de prouver que le dernier couplage M_s de cette suite, obtenu selon cette méthode des chemins d'augmentation, est un couplage maximum de G , (c'est-à-dire que pour tout autre couplage M de G , on aurait $|M| \leq |M_s|$), nous avons le théorème suivant.

⊤ **Théorème.** (Berge 1957) Un couplage M est maximum si et seulement si G ne contient pas de chemins d'augmentation pour M .

Preuve. Comme montré précédemment, s'il existe un chemin d'augmentation C pour M , alors $C \oplus M$ est un couplage contenant une arête de plus que M , ce qui implique que M ne peut être maximum.

Réciproquement, supposons M non maximum. Soit M^* un couplage maximum dans G , qui existe forcément puisque X et Y sont finis. On doit donc avoir $\lambda := |M^*| - |M| > 0$. Définissons $S := M \oplus M^*$.

S est l'ensemble des arêtes qui ne sont pas communes à M et M^* : c'est l'union disjointe de $S \cap M^* = M^* \setminus M$ et $S \cap M = M \setminus M^*$, et on doit avoir $|M^* \setminus M| = |M \setminus M^*| + \lambda$: il doit donc y avoir λ arêtes de plus dans S qui proviennent de M^* que d'arêtes provenant de M .

Soit $x \in V$. Dans le graphe partiel (V, S) , si x est l'extrémité d'une arête de M , alors il ne peut être l'extrémité d'une autre arête de M , puisque M est un couplage. De la même façon, x est l'extrémité d'au plus une arête de M^* . Par suite, tous les sommets de (V, S) sont de degré inférieurs ou égaux à 2.

On en déduit que S contient un ensemble de cycles et de chemins élémentaires maximaux de G (que l'on ne peut pas prolonger dans S) deux à deux sommet-disjoints, et où il y a toujours alternance entre une arête de M et une arête de M^* dans chacun de ces cycles et chemins.

Les cycles sont donc tous de longueur paire, et contiendront autant d'arêtes de M que d'arêtes de M^* . De même, tout chemin maximal de S de longueur paire contiendra autant d'arêtes de M que d'arêtes de M^* .

Comme il est supposé y avoir λ arêtes de plus dans $S \cap M^*$ que dans $S \cap M$, cela implique forcément qu'il existe dans S au moins un chemin C ayant plus d'arêtes provenant de M^* que d'arêtes provenant de M . Un tel chemin est alors de longueur impaire, commençant et se terminant par deux arêtes de $M^* \setminus M$, donc par deux sommets libres par rapport à M , car si les extrémités de C n'étaient pas libre pour M , le chemin C pourrait être prolongé d'au moins une arête, et ne serait donc pas maximal (ou bien ce serait un cycle, ce qui a déjà été exclu). Par suite, C est un chemin d'augmentation pour M dans G , ce qui achève la preuve de la réciproque.

Précisons un point qui sera utile pour prouver le théorème qui va suivre : il n'existe aucun chemin maximal dans S contenant strictement moins d'arêtes de M^* que d'arêtes de M : si un tel chemin existait, ce serait un chemin d'augmentation pour M^* , ce qui est impossible du fait que M^* est un couplage maximum pour G . \square

Le théorème suivant sera important pour prouver la complexité de l'algorithme que nous allons décrire plus bas.

⊤ **Théorème.** (Hopcroft-Karp) On reprend les hypothèses et notations du théorème précédent. Alors, il existe, dans $S = M^* \oplus M$, exactement $\lambda = |M^*| - |M| > 0$ chemins d'augmentation pour M qui soient deux-à-deux sommet-disjoints.

Preuve. Il suffit de voir que chaque chemin d'augmentation pour M dans S contient exactement une arête de plus provenant de M^* , que d'arêtes provenant de M . Il existe donc nécessairement λ chemins d'augmentation disjoints dans S pour justifier que M^* contienne λ arêtes de plus que M , tout cela en tenant compte que, comme montré précédemment, les chemins d'augmentation pour M sont les seules parties de S qui influent sur la différence de taille entre M et M^* . \square

Par application du théorème de Berge, M_s étant le dernier couplage de la suite, comme aucun chemin d'augmentation n'existe pour celui-ci, M_s est donc nécessairement un couplage maximum. Cela achève la preuve de la validité de l'algorithme de résolution du problème de couplage maximum par chemins d'augmentation.

3.2 L'algorithme

On améliore l'algorithme esquissé précédemment de la manière suivante : au lieu d'utiliser un seul chemin d'augmentation quelconque à chaque étape, on récupère un ensemble maximal K aussi grand que possible de chemins d'augmentation de M qui soient tous de la même longueur k la plus courte possible

pour un chemin d'augmentation, et deux à deux sommet-disjoints. On utilise alors chaque élément de K pour augmenter M .

A noter que K n'a besoin d'être *maximal* que au sens de l'inclusion, et non pas *maximum* au sens du cardinal, ce qui serait autrement plus dur à construire. Concrètement, s'il n'existe pas d'autre chemin de longueur k et deux à deux sommet-disjoint de tous les éléments de K , alors on considèrera que K est maximal.

Algorithme Hopcroft-Karp.

Entrée : Graphe biparti simple non orienté $G = (V, E) = (X \cup Y, E)$.

Sortie : Couplage maximum M de G .

```

 $M \leftarrow \emptyset$ 
Faire {
     $K \leftarrow \{C_1, \dots, C_n\}$ 
    //  $\forall i, j, C_i$  est un chemin d'augmentation pour  $M$  de longueur minimale  $k$ 
    // et  $C_i \cap C_j = \emptyset$  par sommets et arêtes
    // et  $K$  est maximal au sens de l'inclusion.
     $M \leftarrow M \oplus \biguplus_{C \in K} C = (((M \oplus C_1) \oplus C_2) \dots) \oplus C_n$ 
} Tant que  $K \neq \emptyset$ . // tant qu'il reste des chemins d'augmentation à trouver
Retourner  $M$ .
```

3.3 Mise en Œuvre Concrète

On divise le travail de la construction progressive du couplage M , en *étapes*, toutes identiques. Chaque étape construit K et utilise ses éléments pour augmenter M . Une étape correspond en fait à un passage dans la boucle **tant que ... faire** du pseudo-code ci-dessus. À chaque étape, il y a deux phases. Définissons $L \subseteq X$ l'ensemble des sommets de X libres pour le couplage M .

La phase #1 consiste à récupérer la longueur k du plus petit chemin d'augmentation que l'on puisse trouver pour M dans G . Cela se fait par un parcours en largeur qui commence par traiter tous les sommets de L , puis qui se poursuit en suivant la règle que les arêtes explorées doivent être dans M et dans $E \setminus M$ en alternance. En fait, comme toutes les arêtes du niveau 0 sont dans $E \setminus M$ (car toutes les racines L du parcours sont libres pour M), chaque niveau de profondeur du parcours est intégralement inclus dans M , puis dans $E \setminus M$, puis dans M , et ainsi de suite en alternance.

On explore donc le graphe G en s'arrêtant à la profondeur k , c'est-à-dire à la profondeur où l'on trouve le plus petit chemin d'augmentation pour M dans G , donc là où on rencontre le premier sommet de Y qui soit libre pour M . Cependant on ne s'arrête pas avant d'avoir traité tous les sommets à cette profondeur. Lors de ce parcours largeur, on mémorise aussi, pour chaque sommet s visité, la profondeur $p(s)$ à laquelle on l'a visité. On interdit bien sûr les revisites, car les chemins d'augmentations sont élémentaires.

La phase #2 consiste en la recherche des éléments de K , et leur utilisation pour augmenter M . Chaque élément de K peut être trouvé par un parcours en profondeur de G à partir d'un sommet de L particulier, qui sera l'une de ses extrémités. Durant chacun de ces parcours, on alterne bien sûr la traversée d'arêtes dans M et dans $E \setminus M$. On s'arrange également pour que tout sommet v visité à *partir* d'un sommet s soit de profondeur $p(v) = p(s) + 1$ (telle que mesurée durant la phase #1), ce qui nous assure de trouver un chemin le plus court possible (de longueur k). On interdit de plus la revisite d'un sommet de G durant toute la phase #2 : cela nous assure que les chemins de K trouvés sont bien deux à deux sommet-disjoints.

C'est un choix justifié du fait que si un sommet v est visité par un parcours profondeur à partir d'un certain sommet libre de X , mais si v n'est pas retenu pour faire partie d'un chemin de K , alors les autres parcours le rejettent tout autant, car il ne permet pas, à sa profondeur $p(v)$, de rejoindre un élément libre de Y de manière compatible avec la définition d'un chemin d'augmentation de M de longueur k .

L'augmentation de M en utilisant chacun des chemins de K se fait à la volée durant la remontée de chaque parcours en profondeur qui a permis trouvé le chemin en question.

3.4 Complexité

La complexité de chaque phase #1 et #2, est donc la somme de la complexité d'un parcours largeur et d'un parcours profondeur, tous deux généralisés – l'absence de revisites durant chaque phase justifiant cette évaluation. Chaque étape de l'algorithme a donc une complexité temporelle qui se mesure donc en $O(2(n + m)) = O(n + m)$.

Comme le graphe G est biparti, toutes les arêtes de G sont dans $X \times Y$ donc on a finalement

$$m \leq |X \times Y| = |X| \times |Y| \leq \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4}$$

du fait que $n = |X| + |Y|$ et que l'on a, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq (x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy \quad \text{donc} \quad xy \leq \frac{(x + y)^2}{4}$$

Donc $m = O(n^2)$, par suite m l'emporte sur n dans le pire cas, et la complexité d'une étape de l'algorithme est donc $O(m)$.

Il peut être montré qu'à chaque étape, la longueur minimale k pour laquelle on puisse trouver un chemin d'augmentation, augmente d'au moins 1. Ce résultat est non trivial, voire même difficile. On peut en trouver une preuve dans [Meena Mahajan, "Matchings in Graphs", 2010].

Après l'étape \sqrt{n} , tous les chemins d'augmentation que l'on peut trouver seront donc de longueur au moins égale à \sqrt{n} . Soit M le couplage obtenu à ce moment-là de l'algorithme, M^* un couplage maximum pour G , et $S := M \oplus M^*$.

S contient entre autres un certain nombre de chemins d'augmentation de M , donc nécessairement tous de longueur supérieure ou égale à \sqrt{n} . Comme ils sont deux-à-deux sommet-disjoints (*c.f.* le théorème de Berge), chaque chemin d'augmentation passe par un peu plus de \sqrt{n} sommets qu'il ne partage pas avec les autres chemins d'augmentation de M dans S , et alors il ne peut donc y avoir davantage que \sqrt{n} chemins d'augmentation distincts dans S , puisque le nombre total de sommets disponibles est limité à n .

D'après le théorème de Hopcroft-Karp, le nombre de chemins d'augmentation dans S est égal à la différence $|M^*| - |M|$. D'où ici, $|M^*| - |M| \leq \sqrt{n}$. Comme chaque étape de l'algorithme trouve au moins un chemin d'augmentation, à chaque étape M croît en cardinal par au moins 1. Par suite, à l'étape $2\sqrt{n}$ (ou avant si l'algorithme termine plus tôt), on a forcément $|M| = |M^*|$, et M est donc un couplage maximum, comme recherché.

Par suite, l'algorithme de Hopcroft-Karp se termine donc toujours après $O(2\sqrt{n}) = O(\sqrt{n})$ étapes, chaque étape ayant une complexité de $O(m)$, d'où la complexité finale de Hopcroft-Karp qui est bien $O(m\sqrt{n}) = O(n^2\sqrt{n}) = O(n^{2.5})$.