Chapitre 1

Suites et séries de fonctions

Sommaire du chapitre

I Introduction 1
II Convergence simple d'une suite de fonctions 2
III Convergence uniforme d'une suite de fonctions . . 4
IV Séries de fonctions – Convergences simple et uniforme 6
V Convergences absolue et normale des séries de fonctions 8
VI Propriétés de la limite uniforme d'une suite de fonctions 10
VI.1 Continuité 10
VI.2 Intégration et primitivation 11
VI.3 Dérivation 13
VII Exercices de synthèse 14

Séquence I
Introduction

Suites de fonctions

L'exemple ci-dessous est typique des problèmes posés par les suites et séries de fonction au premier abord. Il servira donc de fil rouge et illustrera une bonne partie des notions de ce chapitre.

***Exercice* 1** : *pour tout $x \in \mathbb{R}$, on considère la suite géométrique de premier terme 1 et de raison x définie par :*

$$f_n(x) = x^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. *Remarquer que, à $n \in \mathbb{N}$ fixé, f_n est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Préciser les propriétés de régularité de $f_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$: est-elle dérivable ? de dérivée continue ? mais encore ?*
   Ainsi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. *De même, à $x \in \mathbb{R}$ fixé, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique réelle. Préciser le comportement asymptotique de cette suite en fonction de x.*
   On étudie ici la convergence de la suite de fonction (f_n) en chaque point de l'intervalle de définition $\mathbb{R}$ des fonctions f_n, $n \in \mathbb{N}$: on dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f sur l'intervalle I *(à préciser).*
3. *La fonction f est-elle continue sur l'intervalle I ?*
4. *On voit que la convergence simple ne suffit pas à transmettre des propriétés essentielles de la suite de fonctions (f_n) à sa limite simple f. On propose donc une seconde notion de convergence, plus contraignante, qui permet de savoir si la convergence est « aussi rapide » en tout point de l'intervalle : la* convergence uniforme.

a. Soit $\varepsilon_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$*. La suite* $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge-t-elle vers 0 ?*
On dit que la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur I.

b. Soit $0 < a < 1$ *et* $I_a = [-a, a]$*. On pose* $\mu_n = \sup_{x \in I_a} |f_n(x) - f(x)|$*. La suite* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge-t-elle vers 0 ?*
On dit que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I_a.

Séries de fonctions

Cette introduction aux suites de fonctions mène naturellement aux questions suivantes : la notion de série numérique s'étend-elle aussi aux fonctions ? Quelles sont alors les « bonnes » notions de convergence ?

Exercice 2 : *on reprend l'exemple précédent.*

1. *Par analogie avec les suites et séries numériques, définir la notion de* série de fonctions.
2. *Remarquer que, à* $x \in \mathbb{R}$ *fixé, la série* $\sum f_n(x)$ *est une série numérique. En définir les sommes partielles* $S_n(x)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
3. *Définir une fonction* S *et un intervalle* I *tels que la suite de fonctions* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers* S *sur* I.
   On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers S sur I *lorsque la suite de ses sommes partielles converge simplement vers* S *sur* I.
4. *Montrer que la série de fonctions* (S_n) *ne converge pas uniformément vers* S *sur* I.
5. *Soit* $0 < a < 1$ *et* $I_a = [-a, a]$*. On pose* $\varepsilon_n = \sup_{x \in I_a} |S_n(x) - S(x)|$*. La suite* $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge-t-elle vers 0 ?*
   On dit que la série $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur un intervalle J *lorsque la suite de ses sommes partielles converge uniformément vers* S *sur* J.

Séquence II

Convergence simple d'une suite de fonctions

Dans la suite X désigne un ensemble quelconque non vide et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.

Convergence simple. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* X vers la fonction f si, pour tout $x \in X$, la suite *numérique* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$, c'est-à-dire si :

$$\forall\, x \in X,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

Cela équivaut encore à :

$$\forall\, x \in X,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}_{\varepsilon,x};\ \forall\, n \geq N_{\varepsilon,x},\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

On dit que la fonction f est la *limite simple* de la suite (f_n) sur X.

Remarque : ♠

- Retenir que *l'étude de convergence simple revient à une étude de convergence de suites numériques* : on fixe $x \in X$, puis l'on étudie le comportement asymptotique de la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.
- L'unicité de la limite des suites numériques assure l'*unicité de la limite simple* f, ce qui justifie la définition précédente.
- Comme nous l'avons vu précédemment, le choix de l'ensemble X est déterminant.

Comme dans le cas des suites numériques, le *critère de Cauchy* énoncé ci-dessous est commode pour étudier le comportement asymptotique de la suite sans en connaître la limite *a priori*.

Théorème 2.

Critère de Cauchy. La suite (f_n) converge simplement si et seulement si, pour tout $x \in X$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n \geq N_{\varepsilon,x}$ et $m \geq N_{\varepsilon,x}$, on a $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$.

Preuve : La convergence simple revenant à une convergence de suites numériques, ce critère est une transposition du critère de Cauchy pour les suites numériques. On rappelle que l'ensemble des nombres réels est construit de telle sorte que les suites de Cauchy réelles soient convergentes et que cette propriété, dite de *complétude de* $\mathbb{R}$, se transmet aux suites de nombres complexes par l'intermédiaire des parties réelles et imaginaires. Q.E.D.

Exercice 3 :

1. *$X = [0,1]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto x^n$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ si \ x \in [0,1[\\ 1 \ si \ x = 1. \end{cases}$$

Les représentations graphiques de quelques fonctions f_n illustrent bien la convergence simple de cette suite de fonctions (cf. Figure 2).

2. *$X = \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \dfrac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}}$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ si \ |x| < 1 \\ -1 \ si \ |x| > 1 \\ 0 \ si \ x = \pm 1. \end{cases}$$

3. *$X = \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:*

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} n^2 x \ si \ |x| \leq \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} \ si \ |x| > \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \ si \ x \neq 0 \\ 0 \ si \ x = 0. \end{cases}$$

Remarque : Des fonctions définies par passage à la limite apparaissent naturellement dans de très nombreux problèmes mathématiques, appliquées ou non. Le problème de la « transmission » de certaines propriétés de la suite à la limite est évidemment essentiel. Dans le cas de la convergence simple, on a par exemple, dans les exemples précédents, des cas où les fonctions de la suite sont bornées et/ou continues sans que la limite simple ne le soit. [1]

1. Nous verrons en Devoir Maison que l'on peut construire une limite simple de fonctions continues sur un intervalle qui ne soit continue en *aucun point* de l'intervalle !

Séquence III

Convergence uniforme d'une suite de fonctions

Définition 3.

Convergence uniforme. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* X vers la fonction f si la suite *numérique* $\left(\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, *i.e.* si :

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|=0.$$

Cela équivaut encore à :

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,N\in\mathbb{N}_\varepsilon;\ \forall\,n\geq N_{\varepsilon,x},\ \forall\,x\in X,\ |f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon.$$

On dit que la fonction f est la *limite uniforme* de la suite (f_n) sur X.

Dans la définition, prendre garde à l'ordre des quantificateurs : à la différence de la convergence simple, le rang N_ε à partir duquel l'inégalité est vérifiée est valable quel que soit $x\in X$. Se dire qu'à partir d'un certain rang, le graphe des fonctions de la suite est contenu dans un tube $\{(x,y);\ f(x)-\varepsilon\leq y\leq f(x)+\varepsilon\}$ autour de celui de la limite f, ce qu'illustre la figure 1.

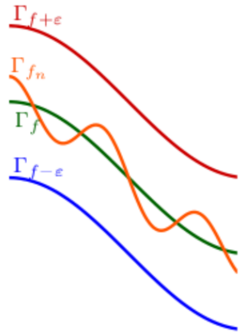

Figure 1 – Convergence uniforme d'une suite de fonctions.

Théorème 4.

Soit (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$. Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur X, alors la suite (f_n) converge simplement vers f sur X.

Attention ! CVU $\Longrightarrow$ CVS mais *la réciproque est fausse* : on a vu par exemple que, pour $X=[0,1]$, la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n: w\mapsto x^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ converge simplement vers $f: x\mapsto 0$ si $x\in[0,1[$, 1 si $x=1$, tandis que :

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in[0,1]}x^n=1.$$

La convergence simple de (f_n) n'est donc pas uniforme (*cf.* Figure 2, où l'on a représenté les fonctions f_n pour $n=2,5,10$ et 20).

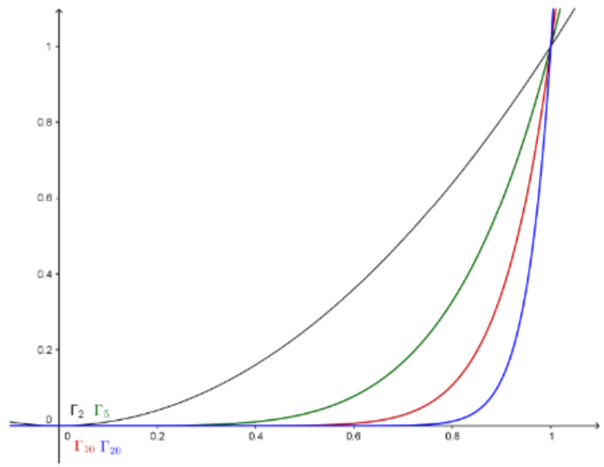

Figure 2 – Convergence simple et non uniforme d'une suite de fonctions.

♠ **Savoir-faire :** Étude d'une suite de fonctions (f_n) :[2]

1. On commence par la convergence simple. Si (f_n) converge simplement sur X, *i.e.* si $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $x \in X$, alors $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ existe.
2. On peut ensuite en étudier la convergence uniforme pour laquelle on peut retenir les deux principales méthodes d'étude suivantes :
   - Étudier les variations de la fonction $\varphi_n = f_n - f$ sur X afin de déterminer $\varepsilon_n = \sup\limits_X |f_n - f|$ et son comportement asymptotique.
   - Majorer *uniformément* $|f_n(x) - f(x)|$ sur I par un terme α_n qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Ou minorer ce terme, si l'on souhaite prouver que la convergence n'est pas uniforme (*cf.* exemple précédent).

Enfin, comme dans le cas de la convergence simple, le *critère de Cauchy uniforme* énoncé ci-dessous constitue un résultat fondamental.

Théorème 5.

Critère de Cauchy uniforme. La suite (f_n) converge uniformément sur X si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n \geq N_\varepsilon$ et $p \geq N_\varepsilon$, on a $|f_n(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in X$.

Preuve : On démontre cette équivalence en prouvant les implications directe et réciproque :

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur X et montrons que le critère de Cauchy uniforme est alors vérifié.

Notons f la limite uniforme de la suite (f_n), alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \geq 0$ tel que pour tous $n \geq N_\varepsilon$ et $p \geq N_\varepsilon$, pour tout $x \in X$:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } |f_p(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

et donc, par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_p(x)| &= |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_p(x)| \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_p(x)| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que le critère est vérifié et montrons qu'alors la suite (f_n) converge uniformément sur X.

Puisque la suite (f_n) vérifie le critère de Cauchy uniforme, pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, elle est donc convergente et l'on note $f(x)$ sa limite. Rappelons de plus que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in X$ et pour tous $n \geq N$ et $p \geq N$, $|f_n(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon$. Par passage à la limite lorsque $p \to +\infty$, pour tout $n \geq N$ et $x \in X$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Q.E.D.

Exercice 4 : *Reconnaître les convergences simple et/ou uniforme des suites de fonctions dont quelques fonctions sont représentées sur les Figures 3 et 4, le cas échéant.*[3]

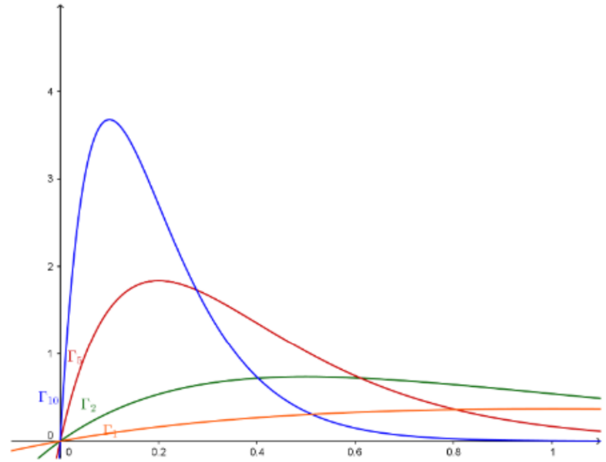

FIGURE 3 – Représentation graphique des fonctions $f_n : x \mapsto n^\alpha x e^{-nx}$ pour $\alpha = 2$ et $n = 1, 2, 5, 10$.

2. Les *savoir-faire* précisent des *méthodes de résolution typiques* des problèmes posés par les suites et séries de fonctions, illustrées dans les exercices proposés et à assimiler lors de l'apprentissage du cours. Ces savoir-faire font partie des *compétences exigibles lors des évaluations.*

3. Les suites de fonctions ainsi représentées seront définies et rigoureusement étudiées en Exercice 5.

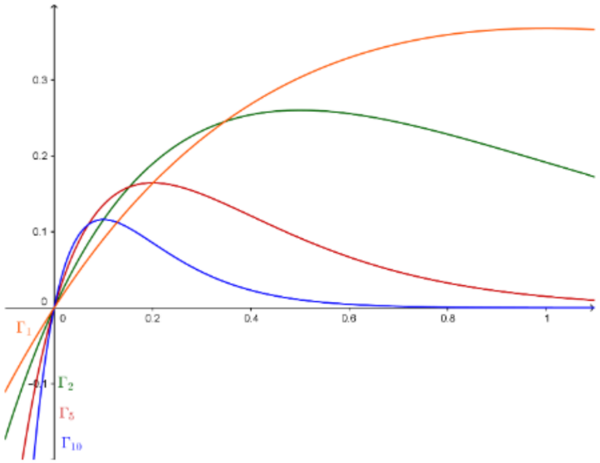

FIGURE 4 – Représentation graphique des fonctions $f_n : x \mapsto n^\alpha x e^{-nx}$ pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et $n = 1, 2, 5, 10$.

Exercice 5 :

1. *Soit* $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$, $x \in \mathbb{R}$. *Montrer que la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge uniformément vers la fonction nulle sur* $X = \mathbb{R}$.
2. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *soit* $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. *Étudier la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *soit* $f_n(x) = xe^{-nx}$, $x \in \mathbb{R}_+$. *Étudier la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}_+$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on pose :* $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$. *Étudier la convergence de la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sur* $\mathbb{R}_+$.
   Cet exemple est un cas dit de « bosse glissante », illustré sur les Figures 3 et 4 (cas $\alpha = 2$ *et* $\alpha = \frac{1}{2}$, $n = 1, 2, 5, 10$*).*
5. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on pose :*

$$\begin{aligned} f_n : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto n^\alpha (1-x) x^n \end{aligned}$$

   a. *Étudier la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   b. *Montrer que, pour tout* $a \in [0,1[$, *la suite de fonctions* (f_n) *converge uniformément sur* $[0,a]$.

SÉQUENCE IV

Séries de fonctions – Convergences simple et uniforme

Soit $u_n : X \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. De même que dans le cas des séries numériques, la notion de série de fonctions est un cas particulier de suite de fonctions que l'on définit et étudie *via* les sommes partielles.

Définition 6.

On appelle *série des fonctions* u_k la suite de fonctions des *sommes partielles* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où, pour $n \in \mathbb{N}$, S_n est la fonction dite *somme partielle de rang* ou *d'ordre* n définie sur X par :

$$S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} u_k(x).$$

On note cette série $\sum u_k$ ou $\sum_{k\geq 0} u_k$.

Les notions de convergence simple et uniforme se traduisent alors de la manière suivante :

Définition 7.

Convergences simple et uniforme d'une série de fonctions. On dit que *la série* $\sum u_k$ *converge simplement* (resp. *uniformément*) *vers* S *sur* X si la suite des sommes partielles (S_n) converge simplement (resp. uniformément) vers S sur X.

Dans ces deux cas, on note $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$, $x \in X$.

De même que dans le cas des suites de fonctions, la convergence uniforme implique la convergence simple.

Propriété 8.

Si la série $\sum u_k$ converge uniformément sur X, alors elle converge simplement sur X.

Par analogie avec les séries numériques, on obtient aisément la condition nécessaire de convergence simple suivante. Celle de convergence uniforme et démontrée ci-après.

Théorème 9.

Condition nécessaire de convergence.

- Si $\sum u_k$ converge simplement sur X, alors (u_n) converge simplement vers $f \equiv 0$ sur X.
- Si $\sum u_k$ converge uniformément sur X, alors (u_n) converge uniformément vers $f \equiv 0$ sur X.

Attention ! La réciproque de ce théorème est fausse : on pourra vérifier que la suite de fonctions définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{aligned} u_n : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x}{n}, \end{aligned}$$

converge uniformément vers 0, mais que $\sum u_n(x)$ diverge pour tout $x \in [0,1]$.

Preuve : Supposons que la série $\sum u_k$ converge uniformément sur X. On note S sa limite.

1. Remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$:
$$\begin{aligned} u_n(x) &= S_n(x) - S_{n-1}(x) \\ &= (S_n(x) - S(x)) - (S(x) - s_{n-1}(x)). \end{aligned}$$
2. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence uniforme, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, pour tout $x \in X$:
$$|S_n(x) - S(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$
Ainsi, pour tout $n \geq N+1$, pour tout $x \in X$:
$$|S(x) - S_{n-1}| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$
3. Il existe donc $N' = N+1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N'$, pour tout $x \in X$, on a $|u_n(x)| \leq \varepsilon$, *i.e.* (u_n) converge uniformément vers 0 sur X. Q.E.D

Savoir-faire : Étude d'une série de fonctions :

1. On commence par la convergence simple. Si $\sum u_n$ converge simplement sur X, *i.e.* si $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $x \in X$, alors $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ existe. Supposons que nous soyons dans ce cas.
2. La série $\sum u_n$ converge uniformément vers S sur X si et seulement si (S_n) converge uniformément vers S sur X. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le reste d'ordre n comme : $R_n = S - S_n$, puis on étudie la convergence de la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\varepsilon_n = \sup_{x\in X} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{x\in X} |R_n(x)|.$$

Définition 10.

Soit $\sum u_k$ une série de fonctions simplement convergente sur X, de somme S. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle *reste de rang* ou *d'ordre* n la fonction $R_n = S - S_n$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} R_n : X &\to \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ x &\mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x). \end{aligned}$$

Puisque, pour tout $x \in X$, la suite numérique $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $S(x)$, la suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ des restes évalués en x converge bien entendu vers 0, mais les restes permettent aussi de caractériser la convergence uniforme de la série $\sum u_k$:

Propriété 11.

Supposons que $\sum u_n$ converge simplement sur X. Alors $\sum u_k$ converge uniformément sur X si et seulement si (R_n) converge uniformément vers 0 sur X.

Exercice 6 :

1. Étudier la série de fonctions $\sum u_n$ où $u_k : x \mapsto x^k$ sur $X =]-1, 1[$, $k \in \mathbb{N}$.

2. Soit $0 < a < 1$. Reprendre l'étude précédente sur $X = [0, a]$.

3. Soit $u_k : x \mapsto n^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$.

b. Montrer que $\sum u_n$ converge uniformément sur $[2, +\infty[$.

Séquence V

Convergences absolue et normale des séries de fonctions

Soit $u_n : X \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. On s'intéresse ici à deux modes de convergence propres aux séries de fonctions.

Définition 12.

Convergences absolue et normale d'une série de fonctions.

- On dit que *la série $\sum u_k$ converge absolument vers S sur X* si la série $\sum |u_n|$ converge simplement vers S sur X.
- On dit que *la série $\sum u_k$ converge normalement vers S sur X* si :
  i. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est bornée sur X.
  ii. La série $\sum \sup_{x \in X} |u_n|$ est convergente.

Savoir-faire : Étude de la convergence normale d'une série de fonctions : puisque l'on étudie une série à termes positifs, on utilise la caractérisation suivante :

Propriété 13.

La série $\sum u_n$ converge normalement sur X si et seulement si il existe une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

- Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in X$, $|u_n(x)| \leq \alpha_n$.
- La série numérique $\sum \alpha_n$ est convergente.

Bien entendu, il ne suffit pas que $\sum \alpha_n$ diverge pour nier la convergence normale de la série $\sum u_n$.

Les différents modes de convergence admettent les liens logiques suivants, et l'on prendra garde au fait que *les réciproques de ces implications sont toutes fausses*, en général (*cf.* Exercice 7).

Théorème 14.

Lien entre les différentes convergences de $\sum u_n$.

$$\begin{tikzcd} & \text{CVU} \arrow[dr, Rightarrow] & \\ \text{CVN} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{CVS} \\ & \text{CVA} \arrow[ur, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

Preuve : On a déjà montré que la convergence uniforme implique la convergence simple.

1. Montrons que CVN $\Rightarrow$ CVA.
   Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in X$, $0 \leq |u_n(x)| \leq \sup\limits_{s\in X} |u_n(s)|$. Il suffit donc de comparer des séries numériques à terme positif.
2. Montrons que CVA $\Rightarrow$ CVS.
   Si pour tout $x \in X$, la série numérique $\sum |u_n(x)|$ converge, alors $\sum u_n(x)$ converge.[4]
3. Montrons que CVN $\Rightarrow$ CVU.
   D'après ce qui précède, $\sum u_n$ converge simplement sur X. Notons $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in X$, alors, pour tout $x \in X$:
   $$|R_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \sup_{s\in X} |u_k(s)|,$$
   d'où $\sup\limits_{x\in X} |R_n(x)| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \sup\limits_{x\in X} |u_k(x)|$, qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$, par hypothèse.
   Donc (R_n) converge uniformément vers 0 sur X, *i.e.* $\sum u_n$ converge uniformément sur X.
   Q.E.D.

4. Pour rappel : cette propriété des séries numériques se démontre à l'aide du Critère de Cauchy, lequel n'est valable que dans un espace complet. Il suffit en effet de vérifier que si $\sum |u_n(x)|$ satisfait le Critère de Cauchy, alors $\sum u_n(x)$ aussi.

Savoir-faire : Puisque la convergence normale d'une série de fonctions implique sa convergence uniforme, il suffit de prouver la première pour obtenir la seconde et donc de :

1. Calculer $\lambda_n = \sup\limits_{x\in X} |u_n(x)|$ par étude des variations de $|u_n|$.
2. Montrer que la série $\sum \lambda_k$ converge (le cas échéant).
3. En déduire que la série de fonctions $\sum u_k$ converge normalement, et donc uniformément, sur X.

Au cours de certaines applications, la convergence normale n'aura pas lieu et il s'agira d'étudier la convergence uniforme de la série de fonctions directement. Ce cas donne souvent lieu à une utilisation intéressante des résultats de convergence des séries alternées (*cf.* Exercice 7).

Exercice 7 :

1. *Montrer que* $\sum \dfrac{1}{n^2+x^2}$ *converge normalement sur* $\mathbb{R}^*$.
2. *Étudier la série* $\sum \dfrac{e^{inx}}{n^2}$.
3. *Montrer que* $\sum \dfrac{1}{n^x}$ *ne converge pas normalement sur* $[1, +\infty[$.
4. *Étude de la série* $\sum v_n(x)$ *où* $v_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n^x}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
   a. *Montrer que* $\sum v_n$ *converge absolument sur* $]1, +\infty[$.
   b. *Montrer que* $\sum v_n$ *converge simplement sur* $]0, +\infty[$.
   c. *Montrer que* $\sum v_n$ *ne converge pas uniformément sur* $]0, +\infty[$.
   d. *Soit* $a > 0$. *Montrer que* $\sum v_n$ *converge uniformément sur* $[a, +\infty[$.
   e. *Montrer que* $\sum v_n$ *ne converge pas normalement sur* $]1, +\infty[$.
   f. *Soit* $a > 1$. *Montrer que* $\sum v_n$ *converge normalement sur* $[a, +\infty[$.