Développements limités usuels en 0

$$\boldsymbol{e^x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)$$

$$\mathbf{sh}\ \boldsymbol{x} = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{O}\left(x^{2n+3}\right)$$

$$\mathbf{ch}\ \boldsymbol{x} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{O}\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x} = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{O}\left(x^{2n+3}\right)$$

$$\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{O}\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\boldsymbol{(1+x)^\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n + \mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{1-x}} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)$$

$$\mathbf{ln}\boldsymbol{(1-x)} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n} + \mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{1+x}} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)$$

$$\mathbf{ln}\boldsymbol{(1+x)} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)$$

$$\boldsymbol{\sqrt{1+x}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-3)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}x^n + \mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \cdots + (-1)^n\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}x^n + \mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)$$

$$\mathbf{Arctan}\ \boldsymbol{x} = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{O}\left(x^{2n+3}\right)$$

$$\mathbf{Argth}\ \boldsymbol{x} = x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{O}\left(x^{2n+3}\right)$$

$$\mathbf{Arcsin}\ \boldsymbol{x} = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{1\times 3\times\cdots(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{O}\left(x^{2n+3}\right)$$

$$\mathbf{Argsh}\ \boldsymbol{x} = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{1\times 3\times\cdots(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{O}\left(x^{2n+3}\right)$$

$$\mathbf{th}\ \boldsymbol{x} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \mathrm{O}\left(x^9\right)$$

$$\mathbf{tan}\,\boldsymbol{x} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \mathrm{O}\left(x^9\right)$$

Développements en série entière usuels

$\boldsymbol{e^{ax}}$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\, x^n$		$a \in \mathbb{C},\ x \in \mathbb{R}$
$\mathbf{sh}\ \boldsymbol{x}$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$		$x \in \mathbb{R}$
$\mathbf{ch}\ \boldsymbol{x}$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\, x^{2n}$		$x \in \mathbb{R}$
$\mathbf{sin}\, \boldsymbol{x}$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$		$x \in \mathbb{R}$
$\mathbf{cos}\, \boldsymbol{x}$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}$		$x \in \mathbb{R}$

$\boldsymbol{(1+x)^{\alpha}}$	$=$	$\displaystyle 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n$	$(\alpha \in \mathbb{R})$	$x \in \,]-1\,;1\,[$
$\boldsymbol{\dfrac{1}{a-x}}$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^{n+1}}\, x^n$	$(a \in \mathbb{C}^*)$	$x \in \,]-\lvert a\rvert\,;\lvert a\rvert\,[$
$\boldsymbol{\dfrac{1}{(a-x)^2}}$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{a^{n+2}}\, x^n$	$(a \in \mathbb{C}^*)$	$x \in \,]-\lvert a\rvert\,;\lvert a\rvert\,[$
$\boldsymbol{\dfrac{1}{(a-x)^k}}$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{C}_{n+k-1}^{k-1}}{a^{n+k}}\, x^n$	$(a \in \mathbb{C}^*)$	$x \in \,]-\lvert a\rvert\,;\lvert a\rvert\,[$
$\mathbf{ln}\boldsymbol{(1-x)}$	$=$	$\displaystyle -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, x^n$		$x \in [-1\,;1\,[$
$\mathbf{ln}\boldsymbol{(1+x)}$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, x^n$		$x \in \,]-1\,;1\,]$
$\boldsymbol{\sqrt{1+x}}$	$=$	$\displaystyle 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-3)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}\, x^n$		$x \in \,]-1\,;1\,[$
$\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}}$	$=$	$\displaystyle 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}\, x^n$		$x \in \,]-1\,;1\,[$
$\mathbf{Arctan}\ \boldsymbol{x}$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}$		$x \in [-1\,;1\,]$
$\mathbf{Argth}\ \boldsymbol{x}$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\, x^{2n+1}$		$x \in \,]-1\,;1\,[$
$\mathbf{Arcsin}\ \boldsymbol{x}$	$=$	$\displaystyle x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}\, \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$		$x \in \,]-1\,;1\,[$
$\mathbf{Argsh}\ \boldsymbol{x}$	$=$	$\displaystyle x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}\, \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$		$x \in \,]-1\,;1\,[$

Dérivées usuelles

Fonction		Dérivée	Dérivabilité
x^n	$n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}^*$
x^α	$\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$e^{\alpha x}$	$\alpha \in \mathbb{C}$	$\alpha e^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$
a^x	$a \in \mathbb{R}_+^*$	$a^x \ln a$	$\mathbb{R}$
$\ln \lvert x \rvert$		$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\log_a x$	$a \in \mathbb{R}_+^* \smallsetminus \{1\}$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$\mathbb{R}^*$
$\cos x$		$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$		$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$		$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \smallsetminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \;\middle\vert\; k \in \mathbb{Z} \right\}$
$\operatorname{cotan} x$		$-1 - \operatorname{cotan}^2 x = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} \smallsetminus \pi\mathbb{Z}$
$\operatorname{ch} x$		$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$		$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{th} x$		$1 - \operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{coth} x$		$1 - \operatorname{coth}^2 x = \dfrac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$\mathbb{R}^*$
$\operatorname{Arcsin} x$		$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1\,;1[$
$\operatorname{Arccos} x$		$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1\,;1[$
$\operatorname{Arctan} x$		$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{Argsh} x$		$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{Argch} x$		$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]1\,;+\infty[$
$\operatorname{Argth} x$		$\dfrac{1}{1-x^2}$	$]-1\,;1[$

Primitives usuelles

I Polynômes et fractions simples

Fonction		Primitive	Intervalles
$(x-x_0)^n$	$x_0 \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{N}\ :\ x \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{Z} \setminus (\mathbb{N} \cup \{-1\})\ :$ $x \in \left]-\infty\,;x_0\right[\,,\,\left]x_0\,;+\infty\right[$
$(x-x_0)^\alpha$	$x_0 \in \mathbb{R}$ $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{(x-x_0)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\left]x_0\,;+\infty\right[$
$(x-z_0)^n$	$z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{(x-z_0)^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x-a}$	$a \in \mathbb{R}$	$\ln\lvert x-a\rvert$	$\left]-\infty\,;a\right[\,,\,\left]a\,;+\infty\right[$
$\dfrac{1}{x-(a+\mathrm{i}b)}$	$a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{2}\ln\left[(x-a)^2+b^2\right]$ $+\,\mathrm{i}\ \mathrm{Arctan}\,\dfrac{x-a}{b}$	$\mathbb{R}$

II Fonctions usuelles

Fonction	Primitive	Intervalles
$\ln x$	$x(\ln x - 1)$	$\left]0\,;+\infty\right[$
$e^{\alpha x}\quad \alpha \in \mathbb{C}^*$	$\dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$
$\mathrm{cotan}\ x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$	$\left]k\pi\,;(k+1)\pi\right[$
$\mathrm{sh}\ x$	$\mathrm{ch}\ x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}\ x$	$\mathrm{sh}\ x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{th}\ x$	$\ln(\mathrm{ch}\ x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{coth}\ x$	$\ln\lvert\mathrm{sh}\ x\rvert$	$\left]-\infty\,;0\right[\,,\,\left]0\,;+\infty\right[$

III Puissances et inverses de fonctions usuelles

Fonction	Primitive	Intervalles
$\sin^2 x$	$\dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin 2x}{4}$	$\mathbb{R}$
$\cos^2 x$	$\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4}$	$\mathbb{R}$
$\tan^2 x$	$\tan x - x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi\,;\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$
$\operatorname{cotan}^2 x$	$-\operatorname{cotan} x - x$	$]\,k\pi\,;(k+1)\pi\,[$
$\operatorname{sh}^2 x$	$\dfrac{\operatorname{sh} 2x}{4} - \dfrac{x}{2}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch}^2 x$	$\dfrac{\operatorname{sh} 2x}{4} + \dfrac{x}{2}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{th}^2 x$	$x - \operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$
$\coth^2 x$	$x - \coth x$	$]-\infty\,;0\,[\;,\;]\,0\,;+\infty\,[$
$\dfrac{1}{\sin x}$	$\ln\left\lvert\tan\dfrac{x}{2}\right\rvert$	$]\,k\pi\,;(k+1)\pi\,[$
$\dfrac{1}{\cos x}$	$\ln\left\lvert\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert$	$\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi\,;\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$
$\dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$	$\ln\left\lvert\operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right\rvert$	$]-\infty\,;0\,[\;,\;]\,0\,;+\infty\,[$
$\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$	$2 \operatorname{Arctan} e^x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{cotan}^2 x$	$-\operatorname{cotan} x$	$]\,k\pi\,;(k+1)\pi\,[$
$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi\,;\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$
$\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = \coth^2 x - 1$	$-\coth x$	$]-\infty\,;0\,[\;,\;]\,0\,;+\infty\,[$
$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$	$\operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sin^4 x}$	$-\operatorname{cotan} x - \dfrac{\operatorname{cotan}^3 x}{3}$	$]\,k\pi\,;(k+1)\pi\,[$
$\dfrac{1}{\cos^4 x}$	$\tan x + \dfrac{\tan^3 x}{3}$	$\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi\,;\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$

IV Fonctions dérivées de fonctions réciproques

Fonction		Primitive	Intervalles
$\dfrac{1}{1+x^2}$		$\operatorname{Arctan} x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$a \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{a} \operatorname{Arctan} \dfrac{x}{a}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1-x^2}$		$\begin{cases} \operatorname{Argth} x \\ \dfrac{1}{2} \ln \left\lvert \dfrac{1+x}{1-x} \right\rvert \end{cases}$	$\begin{cases}]-1\,;1[\\ ]-\infty\,;-1[\,, \\ ]-1\,;1[\,,\ ]1\,;+\infty[\end{cases}$
$\dfrac{1}{a^2-x^2}$	$a \in \mathbb{R}^*$	$\begin{cases} \dfrac{1}{a} \operatorname{Argth} \dfrac{x}{a} \\ \dfrac{1}{2a} \ln \left\lvert \dfrac{a+x}{a-x} \right\rvert \end{cases}$	$\begin{cases}]-\lvert a\rvert\,;\lvert a\rvert[\\ ]-\infty\,;-\lvert a\rvert[\,, \\ ]-\lvert a\rvert\,;\lvert a\rvert[\,,\ ]\lvert a\rvert\,;+\infty[\end{cases}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$\operatorname{Arcsin} x$	$]-1\,;1[$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$a \in \mathbb{R}^*$	$\operatorname{Arcsin} \dfrac{x}{\lvert a\rvert}$	$]-\lvert a\rvert\,;\lvert a\rvert[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$		$\operatorname{Argsh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$		$\begin{cases} \operatorname{Argch} x \\ -\operatorname{Argch}(-x) \\ \ln\lvert x+\sqrt{x^2-1}\rvert \end{cases}$	$\begin{cases}]1\,;+\infty[\\ ]-\infty\,;-1[\\ ]-\infty\,;-1[\text{ ou }]1\,;+\infty[\end{cases}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$	$a \in \mathbb{R}^*$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a}\right\rvert$	$\begin{cases} a>0 \ :\ \mathbb{R} \\ a<0 \ : \\ \quad]-\infty\,;-\sqrt{-a}[\\ \quad \text{ou }]\sqrt{a}\,;+\infty[\end{cases}$
$\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$		$\dfrac{1}{2} \operatorname{Arctan} x + \dfrac{x}{2(x^2+1)}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{x^2}{(x^2+1)^2}$		$\dfrac{1}{2} \operatorname{Arctan} x - \dfrac{x}{2(x^2+1)}$	$\mathbb{R}$

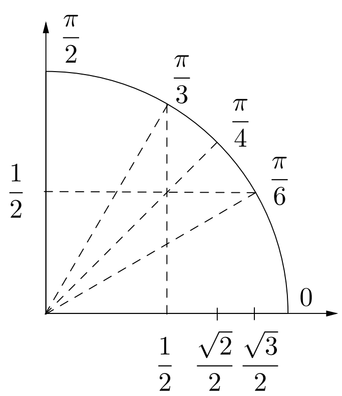
Trigonométrie

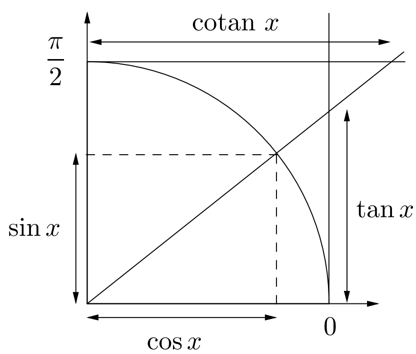
I Fonctions circulaires

1 Premières propriétés

	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\operatorname{cotan} x$
Ensemble de définition	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$
Période	2π	2π	π	π
Parité	impaire	paire	impaire	impaire
$f(\pi - x)$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\tan x$	$-\operatorname{cotan} x$
$f(\pi + x)$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$\operatorname{cotan} x$
$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$	$\cos x$	$\sin x$	$\operatorname{cotan} x$	$\tan x$
$f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\operatorname{cotan} x$	$-\tan x$
Ensemble de dérivabilité	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$
Dérivée	$\cos x$	$-\sin x$	$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$-1 - \operatorname{cotan}^2 x = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$

2 Valeurs remarquables





	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{1}/2$	0
$\tan x$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	indéfini
cotan x	indéfini	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0

II Fonctions réciproques des fonctions circulaires

1 Définition

Les périodicités et les symétries des fonctions trigonométriques introduisent une difficulté pour résoudre les équations du type $\sin x = \lambda$. Par exemple, $\pi/6$, $5\pi/6$ et $\pi/6 + 4\pi$ ont tous la même image par la fonction sinus. Les « fonctions circulaires réciproques » Arcsin , Arccos , Arctan et Arccot ne sont pas de vraies réciproques, puisque les fonctions de départ ne sont pas des bijections ; ajoutons qu'elles ne sont *pas* périodiques. Il faut les combiner avec la périodicité et, pour sinus et cosinus, avec les symétries par rapport à l'axe des ordonnées et l'axe des abscisses respectivement.

- Si $\sin x = \lambda \in [\,-1\,;1\,]$, alors $x = \text{Arcsin}\ \lambda \mod 2\pi$
  ou $x = \pi - \text{Arcsin}\ \lambda \mod 2\pi$
- Si $\cos x = \lambda \in [\,-1\,;1\,]$, alors $x = \text{Arccos}\ \lambda \mod 2\pi$
  ou $x = -\,\text{Arcsin}\ \lambda \mod 2\pi$
- Si $\tan x = \lambda \in \mathbb{R}$, alors $x = \text{Arctan}\ \lambda \mod \pi$
- Si cotan $x = \lambda \in \mathbb{R}$, alors $x = \text{Arccot}\ \lambda \mod \pi$

Le problème réciproque est, lui, sans difficulté : si $x = \text{Arcsin}\ \lambda$, alors $\sin x = \lambda$.

2 Propriétés

	Arcsin x	Arccos x	Arctan x	Arccot x
Ensemble de définition	$[\,-1\,;1\,]$	$[\,-1\,;1\,]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Ensemble image	$[\,-\pi/2\,;\pi/2\,]$	$[\,0\,;\pi\,]$	$]\,-\pi/2\,;\pi/2\,[$	$]\,0\,;\pi\,[$
Période	aucune	aucune	aucune	aucune
Parité	impaire	aucune	impaire	aucune
Ensemble de dérivabilité	$]\,-1\,;1\,[$	$]\,-1\,;1\,[$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Dérivée	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\dfrac{-1}{1+x^2}$

3 Relations

$$\text{Arccos } x + \text{Arcsin } x = \pi/2$$

$$\text{Arctan } x + \text{Arctan } y = \text{Arctan } \frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi \quad \text{où} \quad \varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{si } xy < 1 \\ 1 & \text{si } xy > 1 \text{ et } x, y \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } xy > 1 \text{ et } x, y \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\text{Arctan } x + \text{Arccot } x = \pi/2$$

$$\text{Arccot } x = \begin{cases} \text{Arctan } 1/x & \text{si } x > 0 \\ \pi + \text{Arctan } 1/x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Arctan } x + \text{Arctan } 1/x = \text{sign}(x) \times \pi/2$$

III Formules

1 Corollaires du théorème de Pythagore

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{1 + \cot^2 x} = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

2 Addition des arcs

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \qquad \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \qquad \tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad \sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \qquad \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \qquad \tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

3 Arc double, arc moitié

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 x \end{aligned} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \qquad \tan x = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$$

En notant $t = \tan \frac{x}{2}$ comme dans les règles de Bioche, on a :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

4 Formule de Moivre

$$(\cos a + \mathrm{i}\ \sin a)^n = \cos na + \mathrm{i}\ \sin na$$

d'où

$$\begin{aligned} \cos 3a &= \cos^3 a - 3\cos a\ \sin^2 a \\ &= 4\cos^3 a - 3\cos a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 3a &= 3\cos^2 a\ \sin a - \sin^3 a \\ &= 3\sin a - 4\sin^3 a \end{aligned}$$

$$\tan 3a = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}$$

5 Arcs en progression arithmétique

$$\sum_{k=0}^{n} \sin kx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \qquad \sum_{k=0}^{n} \cos kx = \frac{\cos \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

IV Trigonométrie hyperbolique

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$$

$$\mathrm{ch}\,(a+b) = \mathrm{ch}\ a\,\mathrm{ch}\ b + \mathrm{sh}\ a\,\mathrm{sh}\ b \qquad \mathrm{ch}\ p + \mathrm{ch}\ q = 2\,\mathrm{ch}\ \frac{p+q}{2}\ \mathrm{ch}\ \frac{p-q}{2}$$

$$\mathrm{sh}\,(a+b) = \mathrm{sh}\ a\,\mathrm{ch}\ b + \mathrm{sh}\ b\,\mathrm{ch}\ a \qquad \mathrm{sh}\ p + \mathrm{sh}\ q = 2\,\mathrm{sh}\ \frac{p+q}{2}\ \mathrm{ch}\ \frac{p-q}{2}$$

$$\mathrm{th}\,(a+b) = \frac{\mathrm{th}\ a + \mathrm{th}\ b}{1 + \mathrm{th}\ a\ \ \mathrm{th}\ b} \qquad \mathrm{th}\ p + \mathrm{th}\ q = \frac{\mathrm{sh}\,(p+q)}{\mathrm{ch}\ p\ \ \mathrm{ch}\ q}$$

$$\mathrm{ch}\,(a-b) = \mathrm{ch}\ a\,\mathrm{ch}\ b - \mathrm{sh}\ a\,\mathrm{sh}\ b \qquad \mathrm{ch}\ p - \mathrm{ch}\ q = 2\,\mathrm{sh}\ \frac{p+q}{2}\ \mathrm{sh}\ \frac{p-q}{2}$$

$$\mathrm{sh}\,(a-b) = \mathrm{sh}\ a\,\mathrm{ch}\ b - \mathrm{sh}\ b\,\mathrm{ch}\ a \qquad \mathrm{sh}\ p - \mathrm{sh}\ q = 2\,\mathrm{sh}\ \frac{p-q}{2}\ \mathrm{ch}\ \frac{p+q}{2}$$

$$\mathrm{th}\,(a-b) = \frac{\mathrm{th}\ a - \mathrm{th}\ b}{1 - \mathrm{th}\ a\ \ \mathrm{th}\ b} \qquad \mathrm{th}\ p - \mathrm{th}\ q = \frac{\mathrm{sh}\,(p-q)}{\mathrm{ch}\ p\ \ \mathrm{ch}\ q}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}\ 2x &= \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x \\ &= 2\,\mathrm{ch}^2 x - 1 \\ &= 1 + 2\,\mathrm{sh}^2 x \end{aligned} \qquad \mathrm{ch}^2 x = \frac{\mathrm{ch}\ 2x + 1}{2}$$

$$\mathrm{sh}\ 2x = 2\,\mathrm{sh}\ x\,\mathrm{ch}\ x \qquad \mathrm{sh}^2 x = \frac{\mathrm{ch}\ 2x - 1}{2}$$

$$\mathrm{th}\ 2x = \frac{2\,\mathrm{th}\ x}{1 + \mathrm{th}^2 x} \qquad \mathrm{th}\ x = \frac{\mathrm{sh}\ 2x}{\mathrm{ch}\ 2x + 1} = \frac{\mathrm{ch}\ 2x - 1}{\mathrm{sh}\ 2x}$$

En notant $t = \text{th}\,\dfrac{x}{2}$, on a :

$$\text{sh}\,x = \frac{2t}{1-t^2} \qquad\qquad \text{ch}\,x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

$$(\text{ch}\,a + \text{sh}\,a)^n = \text{ch}\,na + \text{sh}\,na$$

d'où

$$\begin{aligned}\text{ch}\,3a &= \text{ch}^3 a + 3\,\text{ch}\,a\,\text{sh}^2 a\\ &= 4\,\text{ch}^3 a - 3\,\text{ch}\,a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{sh}\,3a &= 3\,\text{ch}^2 a\,\text{sh}\,a + \text{sh}^3 a\\ &= 4\,\text{sh}^3 a + 3\,\text{sh}\,a\end{aligned}$$

$$\text{th}\,3a = \frac{3\,\text{th}\,a + \text{th}^3 a}{1 + 3\,\text{th}^2 a}$$

Tableaux des dérivées et primitives et quelques formules en prime

Fonction	Domaine de dérivabilité	Dérivée
$\ln(x)$	$\mathbb{R}^{+,*}$	$\frac{1}{x}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^{+,*}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^{+,*}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi[, k \in \mathbb{Z}$	$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\arccos(x)$	$]-1;1[$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arcsin(x)$	$]-1;1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$

Opération	Dérivée
$f+g$	$f'+g'$
$f\cdot g$	$f'\cdot g+f\cdot g'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$
$g\circ f$	$f'\times g'\circ f$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^u	$u'e^u$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$

Fonction	Intervalle d'intégration	Primitive
$(x-a)^n, n\in\mathbb{N}, a\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1}$
$\frac{1}{x-a}, a\in\mathbb{R}$	$]-\infty;a[$ OU $]a;+\infty[$	$\ln(\lvert x-a\rvert)$
$\frac{1}{(x-a)^n}, a\in\mathbb{R}, n\geq 2$	$]-\infty;a[$ OU $]a;+\infty[$	$-\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$
$\cos(ax), a\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a}\sin(ax)$
$\sin(ax), a\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{a}\cos(ax)$
$\tan(x)$	$]k\pi-\frac{\pi}{2}; k\pi+\frac{\pi}{2}[, k\in\mathbb{Z}$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}^{+,*}$	$x\ln(x)-x$
$e^{ax}, a\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a}e^{ax}$
$(x-a)^\alpha, a\in\mathbb{R}, \alpha\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$]a;+\infty[$	$\frac{1}{\alpha+1}(x-a)^{\alpha+1}$
$a^x, a>0$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\ln(a)}a^x$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$	$\arctan(x)$
$\sqrt{x-a}, a\in\mathbb{R}$	$]a;+\infty[$	$\frac{2}{3}(x-a)^{3/2}$
$\frac{1}{\sqrt{x-a}}, a\in\mathbb{R}$	$]a;+\infty[$	$2\sqrt{x-a}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;1[$	$\arcsin(x)$

Quelques formules de trigonométrie vraiment utiles. a, b et x sont des réels (quelconques) :

$$\cos^2(x)+\sin^2(x)=1, \quad \cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b), \quad \sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b),$$

$$\cos(2x)=2\cos^2(x)-1=1-2\sin^2(x), \quad \cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2},$$

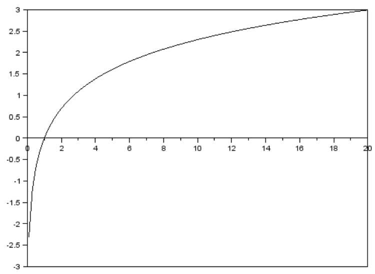
$$\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x), \quad \sin^2(x)=\frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

Fonctions usuelles : logarithme et exponentielle, fonction puissance, fonctions circulaires et leurs réciproques

Définition 1 (Logarithme)**.** On définit $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ comme **la** primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

Propriété 1.

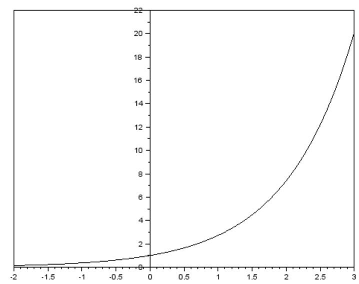
1. $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
2. $\forall x, y \in]0, +\infty[, \ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$.
3. $\forall x > 0, \ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$.
4. $\forall x, y \in]0, +\infty[, \ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$.
5. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \ln(x^n) = n\ln(x)$.
6. $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$



Définition 2 (Exponentielle)**.** On définit $exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ comme **la** solution de l'équation différentielle $y' = y$ de condition initiale $y(0) = 1$.
On note $\exp(x) = e^x$.

Propriété 2.

1. $\exp$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, e^{x+y} = e^x \cdot e^y$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = 1/e^x$.
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}, e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.
5. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, e^{nx} = (e^x)^n$.
6. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.



Propriété 3. On a $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$ et $\forall x > 0, e^{\ln(x)} = x$.

Définition 3 (Fonction puissance)**.** Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la *fonction puissance* sur $]0, +\infty[$ par
$p_a(x) := e^{a\ln(x)}$. On note $x^a := e^{a\ln(x)}$.

Exemples :

$$\ln(x^2) = 2\ln(x), \quad e^{2x+y} = e^{2x} \cdot e^y, \quad 2^x = e^{x\ln(2)}, \quad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\ln(x)}, \quad \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}\ln(x)}.$$

Croissances comparées : Pour tous $\alpha > 0, \beta > 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$$

Autrement dit, l'exponentielle impose toujours sa limite en $\pm\infty$ aux fonctions puissances, et celles-ci imposent toujours leur limites en 0^+ ou $+\infty$ au logarithme.

Fonctions circulaires réciproques

On suppose connues les fonctions *sinus* et *cosinus*. On rappelle que la fonction *tangente* est définie sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Valeurs spéciales des fonctions trigonométriques

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Formules de trigonométrie

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \qquad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin(x) \qquad \tan(x + \pi) = \tan(x)$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) \qquad \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

Définition 4 (Arcsinus)**.** Sinus est une bijection de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1; 1]$. On appelle *arcsinus* sa réciproque.

$$\forall x \in [-1; 1], \forall \theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], \quad x = \sin(\theta) \Leftrightarrow \arcsin(x) = \theta.$$

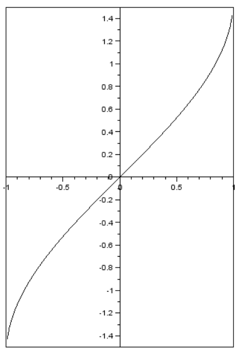
Définition 5 (Arccosinus)**.** Cosinus est une bijection de $[0; \pi]$ sur $[-1; 1]$. On appelle *arccosinus* sa réciproque.

$$\forall x \in [-1; 1], \forall \theta \in [0; \pi], \quad x = \cos(\theta) \Leftrightarrow \arccos(x) = \theta.$$

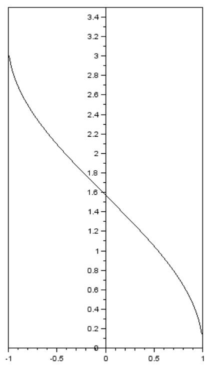
Définition 6 (Arctangente)**.** Tangente est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. On appelle *arctangente* sa réciproque.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, \quad x = \tan(\theta) \Leftrightarrow \arctan(x) = \theta.$$

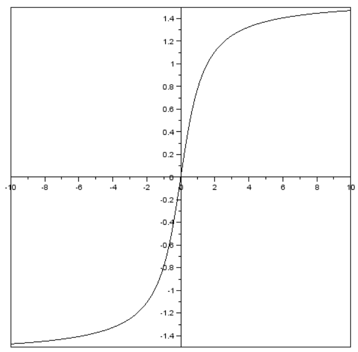
Arcsinus



Arccosinus



Arctangente



Propriété 4.

1. $\forall x \in [-1; 1], \sin(\arcsin(x)) = x.$
2. $\forall x \in [-1; 1], \cos(\arccos(x)) = x.$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x.$

Ici x appartient au domaine de définition de la fonction réciproque.

Propriété 5.

1. $\forall \theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], \arcsin(\sin(\theta)) = \theta.$
2. $\forall \theta \in [0; \pi], \arccos(\cos(\theta)) = \theta.$
3. $\forall \theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, \arctan(\tan(\theta)) = \theta.$

★ Attention, ici θ ne parcourt pas tout l'ensemble de définition des fonctions sinus, cosinus ou tangente !

Exemples :

1. $\arcsin(\sin(\frac{17\pi}{5})) = \arcsin(\sin(\frac{20\pi}{5} - \frac{3\pi}{5})) = \arcsin(\sin(-\frac{3\pi}{5})) = -\frac{3\pi}{5}.$
2. $\arccos(\cos(\frac{17\pi}{5})) = \arccos(\cos(\frac{20\pi}{5} - \frac{3\pi}{5})) = \arccos(\cos(-\frac{3\pi}{5})) = \arccos(\cos(\frac{3\pi}{5})) = \frac{3\pi}{5}.$
3. $\arctan(\tan(\frac{17\pi}{5})) = \arctan(\tan(-\frac{3\pi}{5})) = -\frac{3\pi}{5}.$

Dérivées : Les fonctions arcsinus et arccosinus sont (infiniment) dérivables sur $]-1; 1[$ et arctangente est (infiniment) dérivable sur $\mathbb{R}$. Leurs dérivées sont données par

Propriété 6.

1. $\forall x \in]-1; 1[, \boxed{\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}.$
2. $\forall x \in]-1; 1[, \boxed{\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}.$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \boxed{\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}}.$