Equations Différentielles Scalaires d'Ordre k

[L2] [2017/2018]

1. Définitions Générales

$\triangleq$ Une **équation différentielle scalaire d'ordre** p est une équation de la forme :

$$F(t, y, y', \cdots, y^{(p)}) = 0 \qquad (S)$$

où $F : \mathbb{R} \times \mathbb{K}^{p+1} \to \mathbb{K}$ est donnée. L'inconnue est une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ p fois dérivable. Cette équation est "résolue" en la dérivée p-ième si elle peut se réécrire sous la forme :

$$y^{(p)} = G(t, y, y', \cdots, y^{(p-1)})$$

$\triangleq$ Une **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre** p est de la forme :

$$\sum_{k=0}^{p} \alpha_k(t) y^{(k)}(t) = \beta(t)$$

La linéarité entraîne que l'espace des solutions, s'il n'est pas vide, est un espace affine dirigé par l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

2. Résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants : cas simple

$$(E) \qquad \alpha_p y^{(p)} + \cdots + \alpha_0 y = \beta, \;\; \alpha_i \in \mathbb{K}$$

$\triangleq$ Le **polynôme caractéristique de** (E) est :

$$P = \alpha_p X^p + \cdots + \alpha_0$$

Si $P(\lambda) = 0$, alors $e^{\lambda t}$ est solution de l'équation homogène associée :

$$\sum_{k=0}^{p} \alpha_k (e^{\lambda t})^{(k)} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p} \alpha_k \lambda^k = e^{\lambda t} P(\lambda) = 0$$

$\top$ Si P n'a que des racines simples $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ alors les fonctions $(e^{\lambda_k t})$ forment une base de l'espace vectoriel des solutions homogènes sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire pour $t \in \mathbb{R}$.

La base est réelle si les λ_k sont tous réels, complexe dans tous les cas. Si P est à coefficients réels et $\lambda = a + ib \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est racine, alors $\bar{\lambda}$ est aussi racine. Les solutions réelles correspondantes seront alors $f(t) = e^{at}\cos(bt)$ et $g(t) = e^{at}\sin(bt)$ car $\mathrm{Vect}(f, g) = \mathrm{Vect}(e^{\lambda t}, e^{\bar{\lambda} t})$ en tant que $\mathbb{C}$-ev .

On suppose que $\beta = \gamma e^{\mu t}$, $\gamma, \mu \in \mathbb{K}$ et que $P(\mu) \neq 0$. Dans ce cas, il existe alors une solution particulière de (E) $s = \theta e^{\mu t}$:

$$\theta e^{\mu t} P(\mu) = \gamma e^{\mu t} \iff \theta = \frac{\gamma}{P(\mu)}$$

3. Résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants : cas compliqué

A partir d'un polynôme P quelconque, on définit l'opérateur différentiel :

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k \frac{d^k}{dt^k}$$

D'où

$$(E) \iff P\left(\frac{d}{dt}\right)(y) = \beta$$

Si P et Q sont deux polynômes, alors $P\left(\frac{d}{dt}\right) \circ Q\left(\frac{d}{dt}\right) = (P \circ Q)\left(\frac{d}{dt}\right)$

On s'intéresse dans un premier temps à $Q(X) = (X - \lambda)$ et à $y = t^q e^{\mu t},\ q \geq 1$.

$\mathcal{L}$

$$Q\left(\frac{d}{dt}\right)(t^q e^{\mu t}) = \left(\frac{d}{dt} - \lambda\right)(t^q e^{\mu t}) = e^{\mu t}(qt^{q-1} + (\mu - \lambda)t^q)$$

Pour $\mu = \lambda$, on trouve alors simplement $e^{\mu t} q t^{q-1}$. Pour $\mu \neq \lambda$, le résultat est un polynôme de même degré que t^q .

$\mathscr{C}$ Si λ est racine de P de multiplicité k , et si R est un polynôme de degré $l,$ alors

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)(R(t)e^{\lambda t}) = 0$$

dans le cas où $l - k < 0$. Sinon, le résultat est de la forme $S(t)e^{\lambda t}$ avec $\deg(S) = l - k$.

$\square$ $P = T(X)(X - \lambda)^k$ avec $T(\lambda) \neq 0$. Donc :

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) = T\left(\frac{d}{dt}\right) \circ \left(\frac{d}{dt} - \lambda\right)^k$$

D'après le **lemme**, $\left(\frac{d}{dt} - \lambda\right)(Re^{\lambda t}) = Ue^{\lambda t}$ avec $\deg(U) = \deg(R) - 1$.
Par récurrence : $\left(\frac{d}{dt} - \lambda\right)^k (Re^{\lambda t}) = Ve^{\lambda t}$ avec $\deg(V) = \max(0, \deg(R) - k) = \max(0, l - k)$.
D'où

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)(Re^{\lambda t}) = T\left(\frac{d}{dt}\right)(Ve^{\lambda t}) = Se^{\lambda t}$$

et comme $T(\lambda) \neq 0$, $\deg(S) = \deg(V) = \max(0, l - k)$.

$\top$ **Résolution de l'équation homogène :**

P admet s racines $\lambda_1, \cdots, \lambda_s \in \mathbb{C}$ de multiplicités respectives $m_1, \cdots, m_s,$ $\sum_{i=1}^{s} m_i = \deg P$.

Une base complexe des solutions homogènes sur $t \in \mathbb{R}$ est alors :

$$\bigcup_{i=1}^{s}\left(\bigcup_{j=1}^{m_i} t^j e^{\lambda_i t}\right) = (e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \cdots, t^{m_1} e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots)$$

Ici, chaque élément de la famille correspond aux hypothèses du corollaire dans le cas où $l - k < 0$.

4. Second Membre Particulier

On s'intéressera à des seconds membres de la forme $Q(t)e^{\mu t}$.

Toute combinaison linéaire $\sum Q_i e^{\mu_i t}$ peut être traitée par la même technique, par le principe de superposition :

$$\begin{cases} P\left(\frac{d}{dt}\right)(\hat{y}_1) & = \beta_1 \\ P\left(\frac{d}{dt}\right)(\hat{y}_2) & = \beta_2 \end{cases} \implies P\left(\frac{d}{dt}\right)(a\hat{y}_1 + z\hat{y}_2) = a\beta_1 + z\beta_2, \;\; a, z \in \mathbb{K}$$

Si μ n'est pas racine de P , il existe une solution particulière $\hat{y} = R(t)e^{\mu t}$ avec $\deg(R) = \deg(Q)$. Si μ est racine de P de multiplicité k , il existe une solution particulière $\hat{y} = R(t)e^{\mu t} \cdot t^k$ avec $\deg(R) = \deg(Q)$.
En ajoutant le facteur t^k , on s'assure en effet que l'image de $\hat{y}$ par $P\left(\frac{d}{dt}\right) = T\left(\frac{d}{dt}\right) \circ \left(\frac{d}{dt} - \mu\right)^k$ sera $e^{\mu t}$ facteur d'un polynôme de même degré que R , donc de même degré que Q .

Méthode pratique : On résoud l'injection des coefficients inconnus de R dans (E) et on identifie avec les coefficients du second membre, c'est-à-dire avec ceux de Q , le facteur $e^{\mu t}$ se simplifiant des deux côtés.