CENTRE UNIVERSITAIRE JEAN-FRANÇOIS CHAMPOLLION – ALBI

Licence Maths L2 **Algèbre 3** **Avril 2009**

Devoir (formes quadratiques)

A rendre dans la semaine du 20 avril 2009

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension quelconque et f une forme bilinéaire sur E vérifiant :

$$(\star) : \qquad \forall x, y \in E, f(x,y) = 0 \Rightarrow f(y,x) = 0.$$

On veut montrer que f est ou bien une forme bilinéaire symétrique (i.e. que pour tous $x, y \in E$ alors $f(x,y) = f(y,x)$) ou bien une forme bilinéaire antisymétrique (i.e. que pour tous $x, y \in E$ alors $f(x,y) = -f(y,x)$).

1 Soit f une forme bilinéaire sur E. Montrer que si

$$\forall a \in E, f(a,a) = 0$$

alors f est antisymétrique.

2 Soit f une forme bilinéaire sur E vérifiant $(\star)$. On suppose en outre qu'il existe $a \in E$ tel que $f(a,a) \neq 0$.

- a Soit $b \in E$. Montrer que $f(a,b) = f(b,a)$.
- b *Cette question utilise à plusieurs reprises la sous-question (a)* – Soit $x \in E$ fixé et tel que $f(x,x) = 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $f(a + \lambda x, a + \lambda x) = 0$. En déduire que si $y \in E$ alors $f(a + \lambda x, y) = f(y, a + \lambda x)$ puis que $f(x,y) = f(y,x)$.

3 Démontrer le résultat annoncé.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit f une forme bilinéaire symétrique sur E. On se propose de démontrer que

$$F^{\perp\perp} = F + E^{\perp}.$$

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Pour $x \in E$, on note f_x la forme bilinéaire sur E définie par

$$\forall y \in E, f_x(y) = f(x,y).$$

Soit $\varphi : F \to E^*$ l'application définie par

$$\forall x \in F, \varphi(x) = f_x.$$

1 Montrer que φ est linéaire puis exprimer $(\operatorname{Im}\varphi)^\circ$ et $\ker\varphi$ en fonction de F.

2 Montrer que $\dim F^{\perp} + \dim F = \dim E + \dim(F \cap E^{\perp})$.

3
- a Comparer les dimensions de $F^{\perp\perp}$ et $F + E^{\perp}$.
- b Montrer que $F^{\perp\perp} = F + E^{\perp}$.

Exercice 3

Soit q une forme quadratique non dégénérée sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 4. On suppose qu'il existe une partie L de E égale à son orthogonal pour q.

1. Montrer que L est un plan vectoriel et que q admet des vecteurs isotropes non nuls.

2. Soit (e_1, e_2) une base de L. On pose $H_1 = \mathrm{vect}(e_1)^{\perp}$ et $H_2 = \mathrm{vect}(e_2)^{\perp}$.

   a. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de E telle que $H_1 = \mathrm{vect}(e_1, e_2, e_3)$ et $H_2 = \mathrm{vect}(e_1, e_2, e_4)$.

   b. Déterminer la matrice M de q dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que $\det(M) > 0$ et en déduire la signature de q.