Dimension de l'Orthogonal d'un s.e.v pour une Forme Quadratique Non Dégénérée en Dimension Finie

$\top$ Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, corps commutatif de caractéristique différente de 2, et q une forme quadratique sur E, avec f dénotant sa forme polaire. Si E est de dimension finie n, et si f est non dégénérée, alors, pour tout s.e.v F de dimension p ,

$$\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F = n - p$$

$\square$ Soient $\mathscr{C}$ une base de E, $Q := [q]^{\mathscr{C}}$, $\mathscr{B} = (b_1, \cdots, b_p)$ une base de F , et $x \in E$ quelconque. En notant $X = [x]^{\mathscr{C}}$ et $B_i = [b_i]^{\mathscr{C}}$, on obtient l'équivalence:

$$x \in F^{\perp} = \{b_1, \cdots, b_p\}^{\perp} \iff \forall i \in \{1, \cdots, p\},\ {}^tXQB_i = [f(x, b_i)] = [0]$$

Notons ϕ l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathscr{C}$ est Q . Comme f est non dégénérée, Q est inversible, d'où ϕ est un automorphisme de E . L'image par ϕ de $\mathscr{B}$, $\mathscr{U} := (\phi(b_1), \cdots, \phi(b_p))$ est donc également une famille libre de p vecteurs de E , c'est-à-dire $\operatorname{rg}(\mathscr{U}) = \operatorname{rg}(\mathscr{B}) = p$.

Définissons la matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les p premières colonnes sont formées des p vecteurs-colonne B_i , et dont les $n-p$ dernières colonnes sont toutes $[0_E]^{\mathscr{C}}$. Alors :

$$\operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg}(b_1, \cdots, b_p, 0_E, \cdots, 0_E) = \dim \operatorname{Vect}(b_1, \cdots, b_p, 0_E, \cdots, 0_E) = \dim F = p$$

Soit alors $U := QB$. Par produit matriciel, les p premières colonnes de U sont formées des vecteurs-colonne $QB_i = [\phi(b_i)]^{\mathscr{C}}$, et bien sûr les $n-p$ dernières colonnes de U sont pleines de zéros. D'où comme pour B, $\operatorname{rg}(U) = \operatorname{rg}(\mathscr{U}) = p$. Remarquons alors que :

$${}^tXU = {}^tXQB = \begin{bmatrix} f(x,b_1) & \cdots & f(x,b_p) & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} x \in F^{\perp} &\iff \begin{bmatrix} f(x,b_1) & \cdots & f(x,b_p) & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ &\iff {}^tXQB = {}^tXU = {}^t({}^tUX) = {}^t\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En notant λ l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathscr{C}$ est ${}^tU$, on en déduit que $x \in F^{\perp} \iff x \in \ker \lambda$, donc $F^{\perp} = \ker \lambda$. D'où finalement :

$$\dim F^{\perp} = \dim \ker \lambda = \dim E - \operatorname{rg}({}^tU) = \dim E - \operatorname{rg}(U) = n - p$$

Last updated 2018-04-14 16:01:57 CEST