Processus de Poisson et File d'Attente

Probabilités & Statistiques -- L2 -- 2017/2018

1. Processus de Poisson

On suppose que l'on a des "succès" arrivant de manière aléatoire mutuellement indépendants avec une densité de probabilité $\lambda(t)$. On suppose que pour un δt suffisamment la probabilité d'un succès entre t et $t+\delta t$ est $\lambda \delta t$, et que la probabilité de deux succès ou plus dans le même intervalle est négligeable devant δt au voisinage de 0. On suppose qu'un succès ne peut pas "disparaître" une fois qu'il a eu lieu. On considère la variable aléatoire discrète N_t du "nombre de succès" enregistrés sur $[0, t]$.

On pose $p_n(t) := \mathbb{P}(N_t = n), \ \forall t \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$.
En $t = 0$, $N_0 = 0$, donc $p_0(0) = 1$ et $p_n(0) = 0$, $\forall n > 0$.

On va calculer $p_n(t+\delta t)$ en fonction des $p_n(t)$. $N_{t+\delta t} = n$ est possible dans l'un des trois cas suivants :
— aucun succès entre t et $t+\delta t \longrightarrow N_t = n$.
— un succès entre t et $t+\delta t \longrightarrow N_t = n-1$.
— k succès entre t et $t+\delta t \longrightarrow N_t = n-k$.

On utilise la **formule des probabilités totales** :

$$\begin{aligned}
p_n(t+\delta t) &= \sum_0^n \mathbb{P}(N_{t+\delta t} = n | N_t = n-k)\mathbb{P}(N_t = n-k) \\
&= (1 - \lambda\delta t - o(\delta t))p_n(t) + \lambda\delta t p_{n-1}(t) + o(\delta t)\sum_2^n p_{n-k}(t) \\
\frac{p_n(t+\delta t) - p_n(t)}{\delta t} &= -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + o(1) \\
p'_n(t) &= -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t)
\end{aligned}$$

Le cas spécial de $n = 0$:

$$\begin{aligned}
p_0(t+\delta t) &= (1 - \lambda\delta t - o(\delta t))p_0(t) \\
p'_0(t) &= -\lambda p_0(t)
\end{aligned}$$

d'où le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases}
p'_0 = -\lambda p_0 & (S^0) \\
p'_n = -\lambda p_n + \lambda p_{n-1} & (S^n), \ \forall n > 0 \\
p_0(0) = 1 \\
p_n(0) = 0, \ \forall n > 0
\end{cases}$$

La résolution donne successivement:

$$\begin{gathered}
p_0 = C_0 e^{-\lambda t}, \ C_0 = 1 \text{ car } p_0(0) = 1 \text{ donc } p_0 = e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t} \\
p_1 = C_1 e^{-\lambda t}, \ p'_1 = C'_1 e^{-\lambda t} - \lambda p_1
\end{gathered}$$

en injectant cela dans (S^1) il vient :

$$C'_1 e^{-\lambda t} = \lambda p_0 = \lambda e^{-\lambda t} \text{ donc } C_1 = \lambda t, \ p_1 = \lambda t e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t)^1}{1!}e^{-\lambda t}$$

Par récurrence :

$$C_n' e^{-\lambda t} = \lambda p_{n-1} = \lambda \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}$$

$$C_n = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad \text{donc} \quad p_n(t) = \mathbb{P}(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

$$\forall t, \ N_t \sim \mathscr{P}(\lambda t)$$

— Le processus est **sans mémoire** : ce qui se passe sur $[a, b]$ n'a pas d'influence sur ce qui se passe sur $[c, d]$, pour $b < c$.
— Si l'on considère $t_0 > 0$ quelconque, et si on s'intéresse à $N(t) - N(t_0)$, c'est-à-dire le **nombre de succès dans l'intervalle** $]t_0, t]$, on obtient les mêmes équations différentielles : $N_t - N_{t_0} \sim \mathscr{P}(\lambda(t - t_0))$. L'espérance est $\lambda(t - t_0)$: λ est donc le **nombre moyen de succès par unités de temps**.
— On peut calculer le **temps d'attente** T **d'un premier succès**. Le temps d'attente est supérieur à t ssi on n'a encore enregistré aucun succès au temps t :

$$P(T > t) = P(N_t = 0) = p_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Fonction de répartition de T :

$$F_T = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } \ t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a bien $F_T(+\infty) = 1$. La densité de probabilité de T est donc $F_T' = \lambda e^{-\lambda t}$, donc $T \sim \mathscr{E}(\lambda)$ et donc $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda}$.

2. Graphe de Transition d'un Processus de Poisson

On dira que le processus est **dans l'état** n **à l'instant** t si $N_t = n$.

Les flèches partant toutes d'un même état doivent avoir des probabilités dont la somme doit donner 1.

3. File D'Attente (exemple)

Il y a un **guichet** qui sert des clients. Le guichet ne traite qu'une personne à la fois. L'arrivée et le départ des clients dans la **file d'attente** sont supposés être deux Processus de Poisson de paramètres λ et μ.
Les clients **arrivent et repartent aléatoirement** et de manière **indépendante**, indépendamment de t.
Tout évènement de probabilité en δt^2 est supposée négligeable.
Graphe de transition de la file d'attente :

4. Loi de la Longueur de la File

— $N(t)$ désigne le **nombre de clients dans la file à l'instant** t.
— $p_n(t) := \mathbb{P}(N(t) = n), \ \forall t \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$

A partir du graphe de transition, pour $n \neq 0$:
$\mathbb{P}(N(t + \delta t) = n | N(t) = n) = 1 - \lambda \delta t - \mu \delta t$
$\mathbb{P}(N(t + \delta t) = n | N(t) = n - 1) = \lambda \delta t$
$\mathbb{P}(N(t + \delta t) = n | N(t) = n + 1) = \mu \delta t$

Donc :

$$p_n(t+\delta t) = \lambda \delta t p_{n-1}(t) + \mu \delta t p_{n+1}(t) + (1-\lambda\delta t - \mu \delta t) p_n(t)$$
$$p_n' = \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1} - (\lambda+\mu) p_n$$

Et pour $n = 0$:

$$p_0(t+\delta t) = \mu \delta t p_1(t) + (1-\lambda \delta t) p_0(t)$$
$$p_0' = \mu p_1 - \lambda p_0$$

$$\begin{cases} p_0' + \lambda p_0 = \mu p_1 \qquad (S^0) \\ p_n' + (\lambda+\mu) p_n = \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1} \qquad (S^n),\ \forall n > 0 \end{cases}$$

On obtient un système trop complexe dans le cas général. On peut cependant trouver les solutions constantes, pour lesquelles les p_i sont des constantes, et donc pour lesquelles $p_i' = 0$:

$$\begin{cases} \mu p_1 - \lambda p_0 = 0 \qquad (S^0) \\ \mu p_2 - \lambda p_1 = \mu p_1 - \lambda p_0 = 0 \qquad (S^1) \\ \mu p_{n+1} - \lambda p_n = \mu p_n - \lambda p_{n-1} = 0 \qquad (S^n),\ \forall n > 0 \end{cases}$$

D'où :

$$p_{n+1} = \frac{\lambda}{\mu} p_n = \frac{\lambda^{n+1}}{\mu^{n+1}} p_0$$

La condition $\sum p_i = p_0 \sum \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = 1$ permet de déduire que nécessairement $\lambda < \mu$, et surtout : $\frac{p_0}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = 1$ d'où $p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$ et finalement :

$$\forall n \geq 0,\ p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$\top$ **Loi de la longueur L de la file d'attente en régime stationnaire** :
- Si $\lambda \geq \mu$, la file d'attente s'allonge indéfiniment.
- Sinon, $\mathbb{P}(L = n) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right),\ \forall n \in \mathbb{N}$

Dans ce cas-là, on remarque que $1 + L \sim \mathscr{G}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$.

D'où :

$$\mathbb{E}(1+L) = 1 + \mathbb{E}(L) = \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}} \text{ donc } \mathbb{E}(L) = \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}} - 1 = \frac{\lambda/\mu}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

5. Temps Moyen d'Attente

$\top$ Lorsqu'un client arrive, il y a en moyenne $\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$ clients qui attendent déjà. Le temps moyen de service d'un client est l'espérance du départ d'un client, qui suit une loi exponentielle, donc ce temps moyen de service par client est $\frac{1}{\mu}$. En conséquence, le temps d'attente moyen T avant d'être servi est $T = \frac{\lambda/\mu}{\mu-\lambda}$.

eg Si l'on a en moyenne 5 clients/h, et si le service dure 8 min, alors on aura $\lambda = 5 \text{ clients/h}$ et $\mu = 60/8 = 7,5 \text{ clients/h}$, d'où $\mathbb{E}(L) = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{5}{2,5} = 2 \text{ clients}$ et finalement $T = 2/\mu = 4/15 = 16 \text{ min}$.
Remarquons que $\mathbb{P}(L=0) = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{5}{7,5} = \frac{1}{3}$ d'où $\mathbb{P}(L>0) = \frac{2}{3}$. Cette dernière valeur est appelée **taux d'occupation**.

6. Modèles plus généraux de Files d'Attentes

On généralise le modèle précédent :

— Il peut y avoir un nombre quelconque $x \in \mathbb{N}_+^{*\infty}$ de guichets.
— Il peut y avoir une taille limite $y \geq x$ pour la file d'attente : les clients arrivant devant une file pleine se font rejeter.
— Les lois gérant l'arrivée et le départ des clients peuvent être quelconques. Pour nous elles resteront du type exponentiel, noté M.

Notation d'un modèle : $A/D/x/y$ où A et D désignent des types de lois pour l'arrivée et le départ des clients.

eg
- Le premier modèle était du type $M/M/1/\infty$.
- Files à plusieurs guichets : $M/M/x/\infty$.
- Files à plusieurs guichets et avec rejets : $M/M/x/y, \ \ y \geq x$.
- Files à plusieurs guichets et avec rejets mais sans attente : $M/M/x/x$.
- Files sans attente et sans rejets : $M/M/\infty/\infty$.

7. Loi de la Longueur de la File (Cas Général)

La méthode de résolution est la même que pour le premier modèle. Au lieu de trouver

$$\forall n \geq 0, \ \ p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$$

On trouve alors

$$\forall n > 0, \ \ p_n = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} p_0 = \frac{\prod_0^{n-1} \lambda_i}{\prod_1^n \mu_i} p_0$$

eg
- $M/M/1/\infty$: un unique λ puisque la longueur de la file n'influe pas sur l'arrivée de nouveaux clients, et un unique μ car il n'y a qu'un guichet, et car la loi de départ des clients ne dépend pas de la longueur de la file, d'où l'on retrouve $p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$.
- $M/M/\infty/\infty$: toujours un unique lambda, mais ici, pour n clients dans la file, sur les n guichets actifs, n'importe lequel peut relâcher son client. Les guichets étant indépendants, on doit sommer la valeur μ (vitesse d'un guichet) par le nombre de guichets actifs, qui dépend de l'état dans lequel le système se trouve :

Donc :

$$\forall n \geq 0, \ \ p_n = \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} p_0 = \frac{p_0}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

On reconnaît une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda/\mu)$.

Last updated 2018-03-29 01:11:33 CEST