Xử lý tín hiệu số

Trịnh Văn Loan
Bộ môn Kỹ thuật Máy tính
Viện CNTT&TT– ĐHBK Hà Nội

1

1

Tài liệu tham khảo

- Discrete-Time Signal Processing, 2nd Ed., A.V.Oppenheim, R.W. Schafer, J.R. Buck, Prentice Hall, 1999
- Digital Signal Processing. Principles, Algorithms, and Applications, 3rd Ed.,J.G. Proakis, D.G. Manolakis, Prentice Hall, 1996
- Xử lý tín hiệu số
- Xử lý tín hiệu số và lọc số

2

2

Chương 1

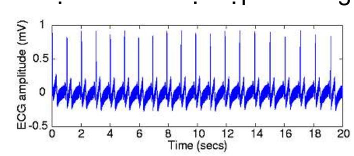
Tín hiệu và hệ thống rời rạc

3

3

1.1 Khái niệm và phân loại

- Tín hiệu là biểu hiện vật lý của thông tin
- Về mặt toán, tín hiệu là hàm của một hoặc nhiều biến độc lập. Các biến độc lập có thể là: thời gian, áp suất, độ cao, nhiệt độ…
- Biến độc lập thường gặp là thời gian. Trong giáo trình sẽ chỉ xét trường hợp này.
- Một ví dụ về tín hiệu có biến độc lập là thời gian: tín hiệu điện tim.

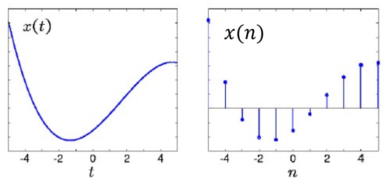


4

4

Phân loại

- Xét trường hợp tín hiệu là hàm của biến thời gian

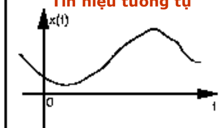
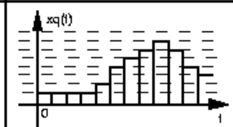
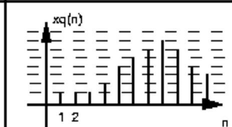


- Tín hiệu tương tự: biên độ (hàm), thời gian (biến) đều liên tục. Ví dụ: $x(t)$
- Tín hiệu rời rạc: biên độ liên tục, thời gian rời rạc. Ví dụ: $x(n)$

5

5

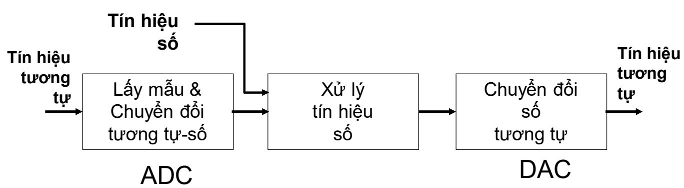
Phân loại tín hiệu

	Thời gian liên tục	Thời gian rời rạc
Biên độ liên tục	Tín hiệu tương tự 	Tín hiệu rời rạc 
Biên độ rời rạc	 Tín hiệu lượng tử hóa	 Tín hiệu số

6

6

Xử lý số tín hiệu



7

7

Tại sao lại tín hiệu số ?

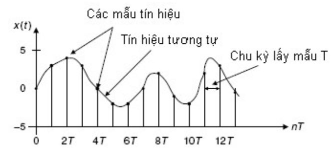
- Để có thể xử lý tự động (bằng máy tính)
- Giảm được nhiễu
- Cho phép sao lưu nhiều lần mà chất lượng không thay đổi
- Các bộ xử lý tín hiệu số (DSP) khi được chế tạo hàng loạt có chất lượng xử lý đồng nhất và chất lượng xử lý không thay đổi theo thời gian

8

8

Chuyển đổi tương tự-số

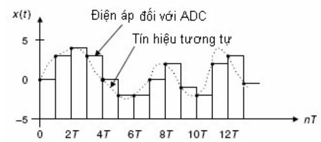
- Lấy mẫu sau đó lượng tử hóa
  - Lấy mẫu (rời rạc hóa thời gian)



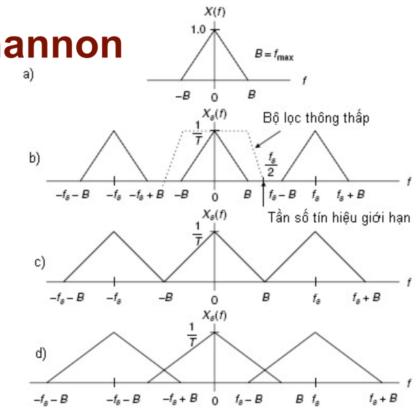
- Chu kỳ lấy mẫu T_s

Tần số lấy mẫu $F_s = \frac{1}{T_s}$

  - Lượng tử hóa (rời rạc hóa biên độ)



Định lý Shannon



- $F_s \geq 2f_{max}$ (f_{max} : tần số lớn nhất của tín hiệu)

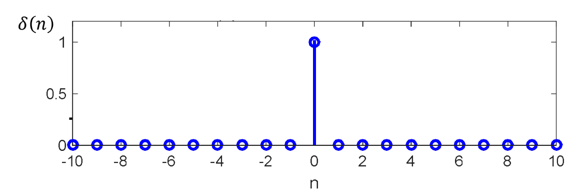
1.2 Ký hiệu tín hiệu rời rạc

- Dãy giá trị thực hoặc phức với phần tử thứ n là $x(n), -\infty < n < +\infty$
- n lấy giá trị nguyên
- Quá trình lấy mẫu đều ($T_s = \text{hằng số}$), giả thiết $T_s = 1 \rightarrow F_s = 1, \omega_s = 2\pi F_s = 2\pi$
- $x(n) = x(nT_s)$

Một số tín hiệu rời rạc đặc biệt

- Xung đơn vị

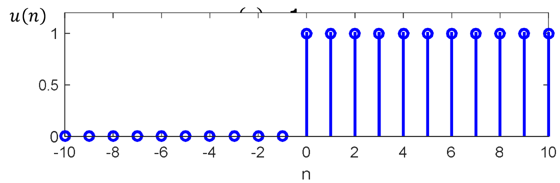
$$\delta(n) = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$$



Một số tín hiệu rời rạc đặc biệt

- Tín hiệu bậc đơn vị

$$u(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$$



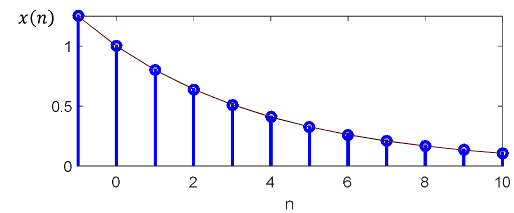
13

13

Một số tín hiệu rời rạc đặc biệt

- Tín hiệu hàm mũ

$$x(n) = a^n$$



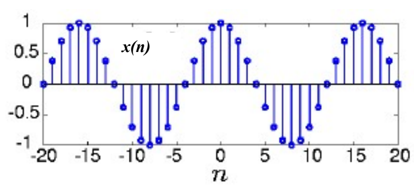
14

14

Một số tín hiệu rời rạc đặc biệt

- Tín hiệu tuần hoàn

$x(n) = x(n+N), N > 0$: chu kỳ

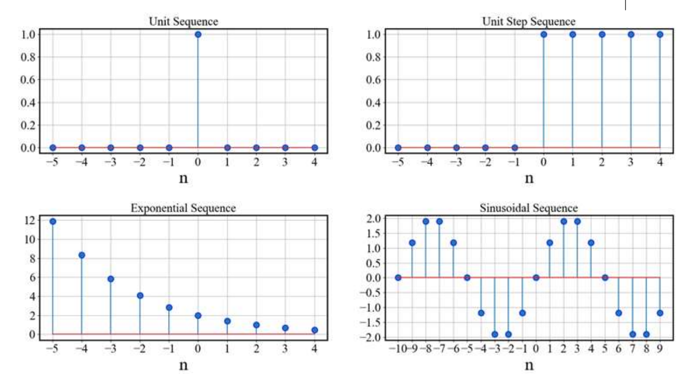


$$x(n) = \sin[2\pi(n + n_0)/N]$$

15

15

Lập trình Python

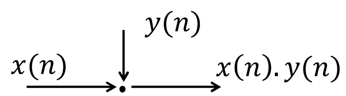


16

16

1.3. Các phép toán với tín hiệu rời rạc

- Phép nhân 2 tín hiệu rời rạc



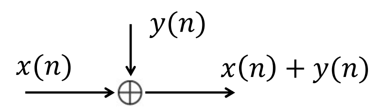
- Phép nhân tín hiệu rời rạc với hệ số

17

17

1.3. Các phép toán với tín hiệu rời rạc

- Phép cộng 2 tín hiệu rời rạc



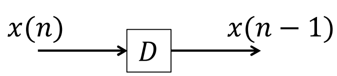
- Phép dịch
  - Nếu dịch phải n_0 mẫu, $x(n)$ trở thành $y(n)$
    $y(n) = x(n - n_0)$
  - Nếu dịch trái n_0 mẫu, $x(n)$ trở thành $y(n)$
    $y(n) = x(n + n_0)$

18

18

1.3. Các phép toán với tín hiệu rời rạc

- Trễ 1 mẫu



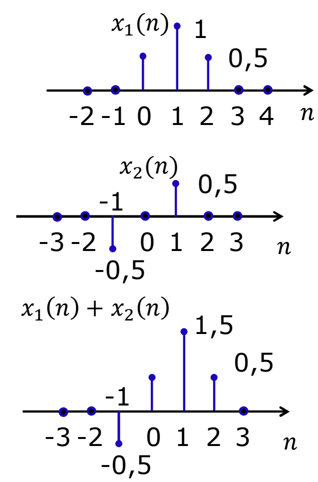
- Một tín hiệu rời rạc bất kỳ $x(n)$ luôn có thể được biểu diễn

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

19

19

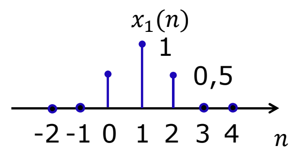
Ví dụ

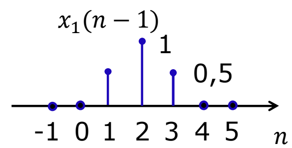


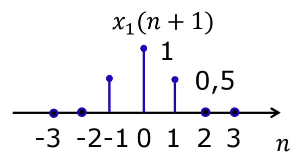
20

20

Ví dụ







1.4. Phân loại các hệ xử lý tín hiệu rời rạc

- $x(n)$: tín hiệu vào (tác động)
- $y(n)$: tín hiệu ra (đáp ứng)
- Phân loại dựa trên các điều kiện ràng buộc đối với phép biến đổi T

$$x(n) \longrightarrow \boxed{T[\,]} \longrightarrow y(n) = T[x(n)]$$

- Hệ tuyến tính nếu thỏa mãn nguyên lý xếp chồng

1.4. Phân loại các hệ xử lý tín hiệu rời rạc

- $x_1(n) \to y_1(n),\ x_2(n) \to y_2(n)$

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)]$$
$$= ay_1(n) + by_2(n)$$

- $y(n) = T[x(n)], x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)]$$

Nếu hệ tuyến tính $h_k(n) = T[\delta(n-k)]$

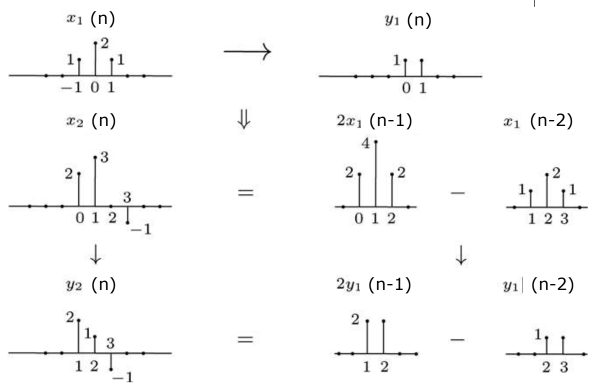
1.4. Phân loại các hệ xử lý tín hiệu rời rạc

- Nếu hệ bất biến theo thời gian
  - Tác động $\delta(n)$ cho đáp ứng $h(n)$
  - Tác động $\delta(n-k)$ cho đáp ứng $h(n-k)$
- Với hệ tuyến tính bất biến (TTBB)

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

- $h(n)$là đáp ứng xung của hệ,
- $y(n) = x(n) * h(n),\ *$: Phép lấy chập

Ví dụ hệ TTBB



25

25

1.4. Phân loại các hệ xử lý tín hiệu rời rạc

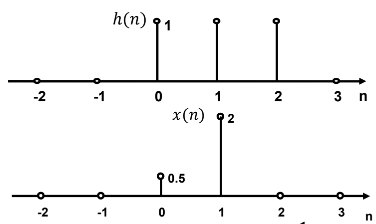
- Độ dài tín hiệu: Số lượng mẫu khác 0 của tín hiệu đó
- Phân biệt các hệ TTBB dựa trên chiều dài của đáp ứng xung
  - FIR: Hệ có đáp ứng xung hữu hạn (Finite Impulse Response)
  - IIR: Hệ có đáp ứng xung vô hạn (Infinite Impulse Response)
- Năng lượng tín hiệu $W = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$

26

26

Ví dụ phép lấy chập

- Ví dụ 1: Tín hiệu vào và đáp ứng xung của hệ TTBB như hình vẽ. Hãy tính tín hiệu ra



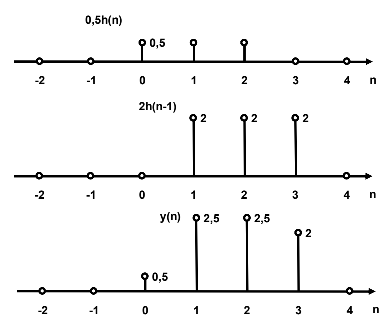
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=0}^{1} x(k)h(n-k)$$

27

27

Ví dụ phép lấy chập

$$y(n) = x(0)h(n-0) + x(1)h(n-1)$$
$$= 0{,}5h(n) + 2h(n-1)$$



28

28

Ví dụ phép lấy chập

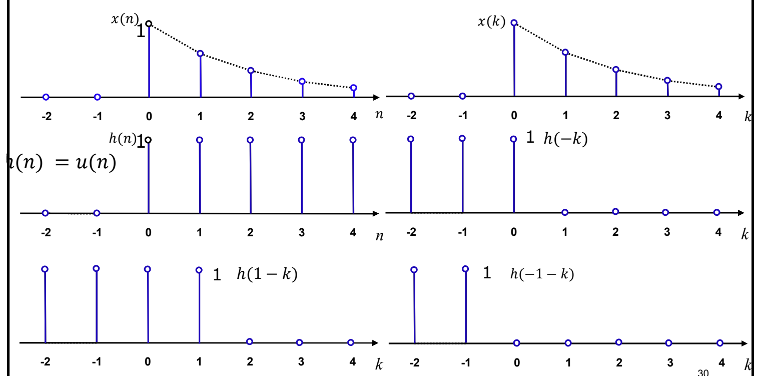
- Ví dụ 2: Cho $x(n)$ và $h(n)$như hình vẽ. Hãy tính $y(n)$

$$x(n) = \alpha^n u(n), 0 < \alpha < 1,$$
$$h(n) = u(n)$$

29

29

Ví dụ phép lấy chập

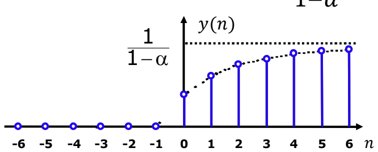


30

30

Ví dụ phép lấy chập

- $n < 0: y(n) = 0$
- $n = 0: y(n) = 1$
- $n > 0: y(n) = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$
- Với mọi giá trị của n : $y(n) = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} u(n)$



31

31

1.5.Tính chất của hệ TTBB

- Giao hoán

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$

- Kết hợp

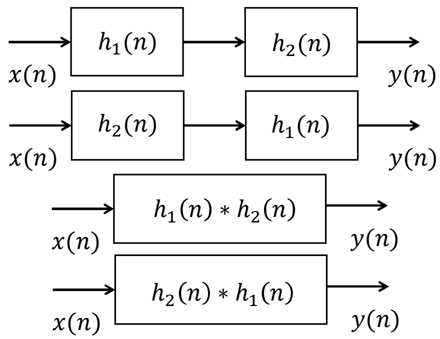
$$[y(n) * x(n)] * z(n) = y(n) * [x(n) * z(n)]$$

32

32

1.5.Tính chất của hệ TTBB

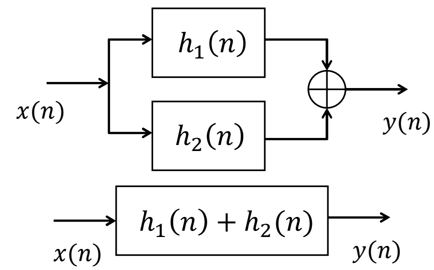
- Các hệ tương đương



1.5.Tính chất của hệ TTBB

- Phân phối

$$x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$$



1.5.Tính chất của hệ TTBB

- Hệ có nhớ và không nhớ
  - Không nhớ: tín hiệu ra phụ thuộc tín hiệu vào ở cùng thời điểm.

  Ví dụ $\quad y(n) = A.x(n)$
  - Có nhớ: tín hiệu ra phụ thuộc tín hiệu vào ở nhiều thời điểm

  Ví dụ $\quad y(n) = x(n) - x(n-1)$

1.5.Tính chất của hệ TTBB

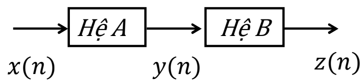
- Hệ đồng nhất

  Tín hiệu ra bằng tín hiệu vào

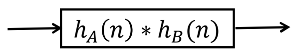
  $$y(n) = x(n)$$
- Hệ A là đảo của hệ B nếu mắc nối tiếp 2 hệ này ta được 1 hệ đồng nhất

1.5.Tính chất của hệ TTBB

- Hệ đảo(A) và hệ khả đảo (B)



$$x(n) = z(n)$$



$$h(n) = h_A(n) * h_B(n) = \delta(n)$$

37

37

1.5.Tính chất của hệ TTBB

- Hệ nhân quả
  - Tín hiệu ra chỉ phụ thuộc tín hiệu vào ở hiện tại và quá khứ
  - Chưa có tác động thì chưa có đáp ứng
  - Đáp ứng không xảy ra trước tác động

38

38

1.5.Tính chất của hệ TTBB

- Hệ nhân quả
  - Nếu $x(n) = 0$ với $n < n_0$ thì $y(n) = 0$ với $n < n_0$
  - Nếu hệ nhân quả thì $y(n)$ không phụ thuộc $x(k)$ với $k > n$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

  - $h(n-k) = 0$ với $k > n$ tức là $h(n) = 0$ với $n < 0$

39

39

1.5.Tính chất của hệ TTBB

- Hệ nhân quả

  Với hệ nhân quả công thức tính tín hiệu ra trở thành

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)h(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

- Chỉ có hệ nhân quả thì mới thực hiện được trên thực tế.
- Tín hiệu nhân quả: $x(n) = 0$ với $n < 0$

40

40

1.5.Tính chất của hệ TTBB

- Hệ ổn định
  - Với tín hiệu vào có giá trị hữu hạn thì tín hiệu ra cũng có giá trị hữu hạn
  - Giả thiết $|x(n)| < B$

$$|y(n)| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)\right|$$

$$|y(n)| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)|$$

$$|y(n)| \le B\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

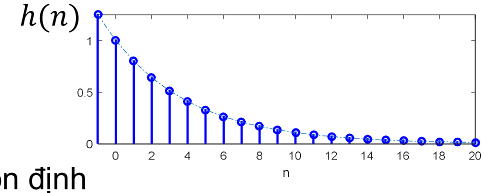
  - Để $y(n)$ có giá trị hữu hạn: $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)| < \infty$

41

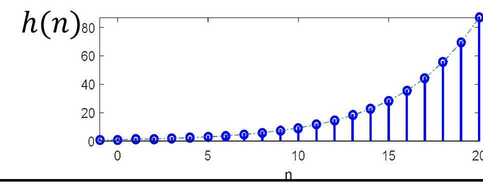
41

Ví dụ đáp ứng xung của hệ ổn định và không ổn định

- Ổn định



- Không ổn định



42

42

Ví dụ

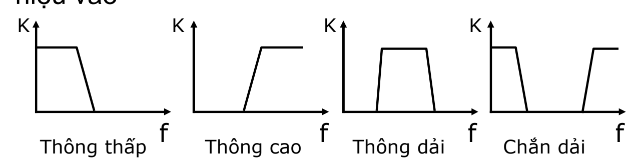
- Xét tính nhân quả và ổn định của hệ có đáp ứng xung $h(n) = a^n u(n)$
  - Đây là hệ nhân quả vì $h(n) = 0$ với $n < 0$
  - Xét tính ổn định $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty}|a|^n$
    - Đây là chuỗi lũy thừa, chuỗi này
    - hội tụ nếu $|a| < 1$
    - phân kỳ nếu $|a| \ge 1$
  - Hệ chỉ ổn định nếu $|a| < 1$

43

43

1.6. Đáp ứng tần số của hệ TTBB

- Đáp ứng tần số: cho biết tính chất truyền đạt của hệ đối với các thành phần tần số khác nhau của tín hiệu vào



- Để xét biểu diễn tần số của hệ TTBB, tác động của hệ có dạng:

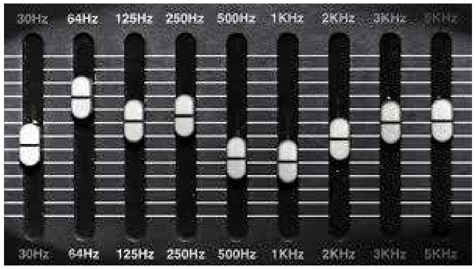
$$x(n) = e^{j\omega n}, -\infty < n < \infty$$

Hệ có đáp ứng xung $h(n)$

44

44

Equalizer



45

1.6. Đáp ứng tần số của hệ TTBB

- Đáp ứng của hệ

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j\omega(n-k)}$$

$$= e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} = x(n)H(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}$$

- $H(e^{j\omega})$ cho biết sự truyền đạt của hệ đối với mỗi tần số ω nên $H(e^{j\omega})$ là đáp ứng tần số của hệ.

46

1.6. Đáp ứng tần số của hệ TTBB

- $H(e^{j\omega})$ là hàm phức nên có thể được biểu diễn theo phần thực, phần ảo:

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega})$$

hoặc theo biên độ-pha:

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\arg[H(e^{j\omega})]}$$

$|H(e^{j\omega})|$: đáp ứng biên độ

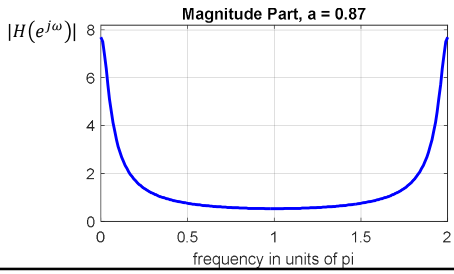
$\arg[H(e^{j\omega})]$: đáp ứng pha

47

Ví dụ xác định đáp ứng tần số

- Hệ TTBB có đáp ứng xung $h(n) = a^n u(n), |a| < 1$. Xác định đáp ứng tần số của hệ.

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$



48

Nhận xét

- $H(e^{j\omega})$ là hàm liên tục theo ω và tuần hoàn theo ω với chu kỳ 2π.
- Nếu $h(n)$ là thực, đáp ứng biên độ đối xứng trong khoảng $0 \le \omega \le 2\pi$.
- Nếu đáp ứng xung là thực, chỉ cần xét khoảng tần số $0 \le \omega \le \pi$.

49

49

Tín hiệu vào có dạng Acosωn, Asinωn y(n) = ?

$$x_1(n) = Ae^{j\omega n} \rightarrow y_1(n) = H(e^{j\omega})Ae^{j\omega n} = A\left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\arg[H(e^{j\omega})]}.e^{j\omega n}$$

$$x_2(n) = Ae^{-j\omega n} \rightarrow y_2(n) = H(e^{-j\omega})Ae^{-j\omega n} = A\left|H(e^{j\omega})\right|e^{-j\arg[H(e^{j\omega})]}.e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2}[x_1(n) + x_2(n)] = A\cos\omega n$$

$$\rightarrow y(n) = \frac{1}{2}[y_1(n) + y_2(n)] = A\left|H(e^{j\omega})\right|\cos(\omega n + \arg(H(e^{j\omega})))$$

$$x(n) = A\sin\omega n$$

$$\rightarrow y(n) = \frac{1}{2j}[y_1(n) - y_2(n)] = A\left|H(e^{j\omega})\right|\sin(\omega n + \arg(H(e^{j\omega})))$$

50

50

1.7. Phép biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc

- Đáp ứng tần số $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$ (1)
- (1) có thể được xem là biểu diễn chuỗi Fourier của . $H(e^{j\omega})$. Các hệ số của chuỗi là $h(n)$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \quad (2)$$

- (1), (2) là cặp biến đổi Fourier của $h(n)$
- (1) là công thức biến đổi Fourier thuận (phân tích)
- (2) là công thức biến đổi Fourier ngược (tổng hợp)

51

51

Ví dụ

- Xét bộ lọc thông thấp lý tưởng

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, |\omega| \le \omega_C \\ 0, \omega_C < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

Hãy xác định đáp ứng xung.

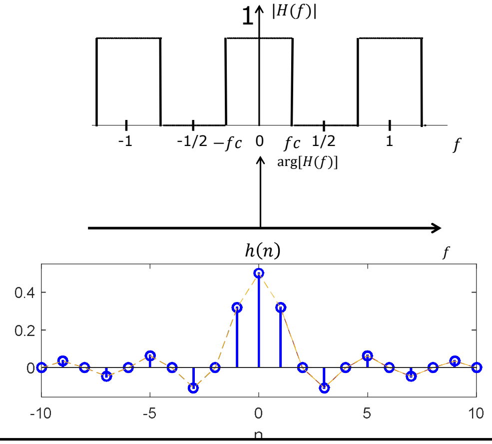
$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_C}^{\omega_C} e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi jn}e^{j\omega}\Big|_{-\omega_C}^{\omega_C}$$

$$= \frac{1}{2\pi jn}\left(e^{j\omega_C n} - e^{-j\omega_C n}\right) = \frac{sin\omega_C n}{\pi n}$$

52

52

Trường hợp $\omega_C = \pi/2, f_C = 1/4$



53

53

1.7. Phép biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc

- Các công thức (1),(2) đúng cho bất kỳ dãy nào có thể lấy tổng theo (1). Vậy với tín hiệu $x(n)$bất kỳ ta có:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n},\ x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

- Theo tần số f:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi fn},\ x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} X(f)e^{j2\pi fn}df$$

- $X(f)$ là hàm phức của biến thực f, tuần hoàn theo f với chu kỳ = 1. $X(f) = X(f+1)$

54

54

Phổ biên độ và phổ pha

$$X(f) = |X(f)|e^{j\arg[X(f)]}$$

$|X(f)|$: Phổ biên độ, $\arg[X(f)]$: Phổ pha

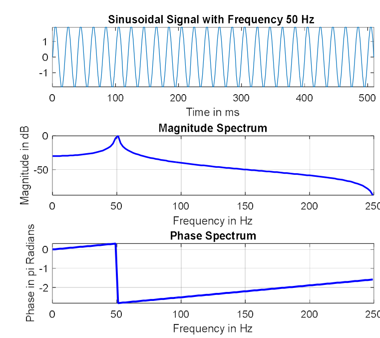
đáp ứng xung $h(n) \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}} H(e^{j\omega})$ đáp ứng tần số

tín hiệu $x(n) \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}} X(e^{j\omega})$ phổ

55

55

Ví dụ phổ biên độ và phổ pha



56

56

1.8. Một số tính chất cơ bản của phép biến đổi Fourier

- Tính tuyến tính

$$ax_1(n) + bx_2(n) \xrightarrow{\mathcal{F}} aX_1\left(e^{j\omega}\right) + bX_2\left(e^{j\omega}\right)$$

- Tính tuần hoàn
  - $X(e^{j\omega})$tuần hoàn chu kỳ 2π
  - $X(f)$ tuần hoàn chu kỳ là 1
- Biến đổi Fourier của tín hiệu trễ

$$x(n) \xrightarrow{\mathcal{F}} X\left(e^{j\omega}\right)$$
$$x(n-n_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} ?$$

57

57

1.8. Một số tính chất cơ bản của phép biến đổi Fourier

$$\mathcal{F}\{x(n-n_0)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0)e^{-j\omega n}$$

- Đặt $n - n_0 = m$

$$\mathcal{F}\{x(m)\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-j\omega(m+n_0)}$$
$$= e^{-j\omega n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-j\omega m}$$
$$= e^{-j\omega n_0} X\left(e^{j\omega}\right)$$

- Nhận xét: Tín hiệu trễ có phổ biên độ không thay đổi còn phổ pha dịch đi 1 lượng ωn_0

58

58

1.8. Một số tính chất cơ bản của phép biến đổi Fourier

- Nếu $h(n)(x(n))$ thực: Đáp ứng biên độ (phổ biên độ) là hàm chẵn theo ω.

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|H\left(e^{-j\omega}\right)\right|, \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|X\left(e^{-j\omega}\right)\right|$$

- Đáp ứng pha (phổ pha) là hàm lẻ theo ω.

$$\arg\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right] = -\arg\left[H\left(e^{-j\omega}\right)\right]$$
$$\arg\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right] = -\arg\left[X\left(e^{-j\omega}\right)\right]$$

59

59

1.9. Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng (PT-SP-TT-HSH)

- Hệ tương tự có quan hệ vào-ra theo phương trình vi phân

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Hệ tương tự}} \longrightarrow y(t)$$

- Hệ rời rạc có quan hệ vào-ra theo PT-SP-TT-HSH

$$x(n) \longrightarrow \boxed{\text{Hệ rời rạc}} \longrightarrow y(n)$$

60

60

1.9. Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng (PT-SP-TT-HSH)

- Dạng tổng quát

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

a_k, b_k là các hệ số.

- Trường hợp $N = 0$: $y(n) = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} x(n-k)$

So sánh với công thức tổng quát $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\, x(n-k)$

$$h(k) = \begin{cases} \frac{b_k}{a_0}, 0 \le k \le M \\ 0, k \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hệ có đáp ứng xung hữu hạn (FIR) hay hệ không truy hồi

61

61

1.9. Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng (PT-SP-TT-HSH)

- Trường hợp $N > 0$:

$$y(n) = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)\right\}$$

Hệ có đáp ứng xung vô hạn (IIR), hay hệ truy hồi

62

62

1.10. Đáp ứng tần số của hệ biểu diễn bằng PT-SP-TT-HSH

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

Lấy biến đổi Fourier cả 2 vế:

- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) e^{-j\omega n}$
- $\sum_{k=0}^{N} a_k \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n-k) e^{-j\omega n} = \sum_{k=0}^{M} b_k \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-k) e^{-j\omega n}$

$$Y(e^{j\omega}) \sum_{k=0}^{N} a_k\, e^{-j\omega k} = X(e^{j\omega}) \sum_{k=0}^{M} b_k\, e^{-j\omega k}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k\, e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k\, e^{-j\omega k}}$$

Đáp ứng tần số xác định bởi các hệ số của PT-SP

63

63

Bài tập làm tại lớp (1/3)

1. Giả sử $x(n) = 0$ với $n < -2$ và $n > 4$. Với mỗi tín hiệu sau đây, hãy xác định giá trị n để cho tín hiệu đó tương ứng bằng 0.
   a) $x(n-3)$ b) $x(n+4)$ c) $x(-n)$ d) $x(-n+2)$ e) $x(-n-2)$

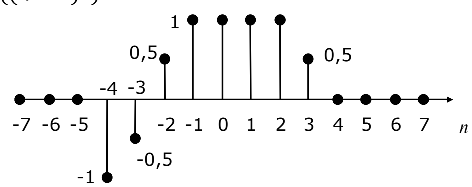
2. Xét hệ S có tín hiệu vào $x(n)$ và tín hiệu ra $y(n)$. Hệ này có được bằng cách mắc hệ S_1 nối tiếp với hệ S_2 theo sau. Quan hệ vào - ra đối với 2 hệ S_1 và S_2 là:
   S_1: $y_1(n) = 2x_1(n) + 4x_1(n-1)$
   S_2: $y_2(n) = x_2(n-2) + (1/2)x_2(n-3)$
   với $x_1(n)$, $x_2(n)$ ký hiệu tín hiệu vào.
   a) Hãy xác định quan hệ vào ra cho hệ S
   b) Quan hệ vào ra của hệ S có thay đổi không nếu thay đổi thứ tự S_1 và S_2 (tức là S_2 nối tiếp với hệ S_1 theo sau).

64

64

Bài tập làm tại lớp (2/3)

3. Tín hiệu rời rạc $x(n)$ cho như hình vẽ sau. Hãy vẽ các tín hiệu:
   a) $x(n-5)$ b) $x(4-n)$ c) $x(2n)$
   d) $x(2n+2)$ e) $x(n)u(2-n)$
   f) $x(n-2)u(3-n)$ g) $x(n-3)\ \delta(n-2)$
   h) $(1/2)x(n)+(1/2)(-1)^n x(n)$
   i) $x((n-1)^2)$



65

65

Bài tập làm tại lớp (3/3)

4. Cho $x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) - 3\delta(n-3)$
   $h(n) = 3\delta(n+1) + 3\delta(n-1)$

   Hãy tính và vẽ kết quả của các phép lấy chập sau:

   a) $y_1(n) = x(n) * h(n)$

   b) $y_2(n) = x(n+2) * h(n)$

66

66

Bài tập làm tại lớp (3/3)

5. Hệ TT-BB có PT-SP: $y(n) = (1/2)[x(n) - x(n-1)]$
   a) Xác định đáp ứng xung của hệ
   b) Xác định đáp ứng tần số và vẽ dạng đáp ứng biên độ

67

67

Chương 2

Phép biến đổi Z

68

68

2.1. Định nghĩa

- Biến đổi z của tín hiệu rời rạc $x(n)$được định nghĩa:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

- $X(z)$ là hàm phức của biến phức z . Định nghĩa như trên là biến đổi z 2 phía. Biến đổi z 1 phía như sau:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

- Xét quan hệ giữa biến đổi z và biến đổi Fourier. Biểu diễn biến phức z trong toạ độ cực $z = re^{j\omega}$

69

69

2.1. Định nghĩa

$$X\left(re^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left(re^{j\omega}\right)^{-n}$$

$$X\left(re^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{x(n) r^{-n}\} e^{-j\omega n}$$

- Trường hợp đặc biệt nếu $r = 1$ hay $|z| = 1$ biểu thức trên trở thành biến đổi Fourier

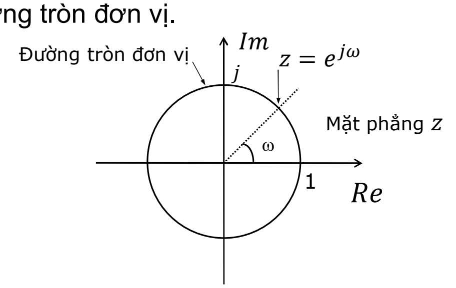
$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega})$$

70

70

2.1. Định nghĩa

- Biến đổi z trở thành biến đổi Fourier khi biên độ của biến z bằng 1, tức là trên đường tròn có bán kính bằng 1 trong mặt phẳng z. Đường tròn này được gọi là đường tròn đơn vị.



71

71

Điều kiện tồn tại biến đổi z

- Miền giá trị của z để chuỗi lũy thừa trong định nghĩa biến đổi z hội tụ gọi là miền hội tụ. Áp dụng tiêu chuẩn Cô-si để xác định miền hội tụ. Chuỗi có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

sẽ hội tụ nếu thỏa mãn điều kiện $\lim_{n\to\infty} |u_n|^{1/n} < 1$

$$X(z) = X_1(z) + X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

- Áp dụng tiêu chuẩn Cô-si cho $X_2(z)$

$$\lim_{n\to\infty} |x(n) z^{-n}|^{1/n} < 1 \qquad \lim_{n\to\infty} |x(n)|^{1/n} |z^{-1}| < 1$$

72

72

Điều kiện tồn tại biến đổi z

- Giả thiết $\lim_{n\to\infty} |x(n)|^{1/n} = R_{x-}$
- Vậy $X_2(z)$ hội tụ với các giá trị của z thỏa mãn
  $$|z| > R_{x-}$$
- Tương tự, $X_1(z)$ hội tụ với các giá trị của z thỏa mãn $|z| < R_{x+}$ với:

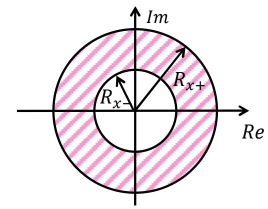
$$R_{x+} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} |x(-n)|^{1/n}}$$

73

73

Điều kiện tồn tại biến đổi z

- Trong trường hợp tổng quát, miền hội tụ của biến đổi z là
  $$0 \le R_{x-} < |z| < R_{x+} \le \infty$$



74

74

Ví dụ 1

- Cho tín hiệu $x(n) = u(n)$.
  Hãy xác định biến đổi z và miền hội tụ.
  $$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 1.z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

  với $|z| > 1, R_{x-} = 1, R_{x+} = \infty$

75

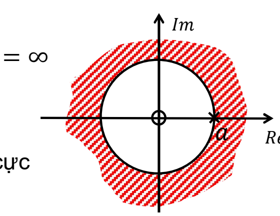
75

Ví dụ 2

- Cho tín hiệu $x(n) = a^n u(n)$. Hãy xác định biến đổi z và miền hội tụ.

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

- Mht: $|z| > |a|, R_{x-} = |a|, R_{x+} = \infty$
- Điểm không: $z = 0$
- Điểm cực: $z = a$
- Miền hội tụ không chứa điểm cực



76

76

Biến đổi z thuận và z ngược

- Biến đổi z thuận

$$x(n) \xrightarrow{\mathbb{Z}} X(z)$$

- Biến đổi z ngược

$$X(z) \xrightarrow{\mathbb{Z}^{-1}} x(n)$$

77

77

2.2. Phép biến đổi z ngược

- Áp dụng định lý Cô-si $\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} z^{k-1}dz = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$

Γ: đường cong khép kín bao gốc tọa độ trên mặt phẳng z.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (1)$$

Nhân (1) với $\frac{z^{m-1}}{2\pi j}$ và lấy tích phân:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} X(z)z^{m-1}dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n+m-1}dz$$

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} X(z)z^{m-1}dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} z^{-n+m-1}dz$$

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} X(z)z^{m-1}dz = x(m) \rightarrow x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} X(z)z^{n-1}dz$$

78

78

2.3. Một số tính chất của biến đổi z

- Tính tuyến tính

$$x(n) = ax_1(n) + bx_2(n) \xrightarrow{\mathbb{Z}} aX_1(z) + bX_2(z)$$

$$X(z) = \mathbb{Z}\{ax_1(n) + bx_2(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}[ax_1(n) + bx_2(n)]z^{-n}$$

$$= a\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)z^{-n} + b\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)z^{-n}$$

$$= aX_1(z) + bX_2(z)$$

- Miền hội tụ của $X(z)$ ít nhất sẽ là giao của 2 miền hội tụ của $X_1(z)$ và $X_2(z)$

$$R_{x-} = \max[R_{x1-}, R_{x2-}],\ R_{x+} = \min[R_{x1+}, R_{x2+}]$$

79

79

2.3. Một số tính chất của biến đổi z

- Biến đổi z của tín hiệu trễ

$$x(n) \xrightarrow{\mathbb{Z}} X(z),\ x(n-n_0) \xrightarrow{\mathbb{Z}} ?$$

$$\mathbb{Z}\{x(n-n_0)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0)z^{-n}$$

Đổi biến $m = n - n_0$,

$$\mathbb{Z}\{x(m)\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)z^{-(m+n_0)}$$

$$= z^{-n_0}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)z^{-m}$$

$$= z^{-n_0}X(z)$$

$$x(n-n_0) \xrightarrow{\mathbb{Z}} z^{-n_0}X(z)$$

80

80

2.3. Một số tính chất của biến đổi z

- Trường hợp trễ 1 mẫu

$$x(n) \rightarrow \boxed{z^{-1}} \rightarrow x(n-1) \qquad x(n) \rightarrow \boxed{D} \rightarrow x(n-1)$$

81

81

2.3. Một số tính chất của biến đổi z

- Giá trị đầu của dãy:

$x(n) = 0$ với $n < 0$, $x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$
$$= x(0) + x(1)\frac{1}{z} + x(2)\frac{1}{z^2} + \cdots$$

- Đảo trục thời gian $\mathbb{Z}\{x(n)\} = X(z), R_{x-} < |z| < R_{x+}$

$\mathbb{Z}\{x(-n)\} = ?$

$$\mathbb{Z}\{x(-n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)z^{m} = X\left(\frac{1}{z}\right)$$
$$1/R_{x+} < |z| < 1/R_{x-}$$

82

82

2.3. Một số tính chất của biến đổi z

- Vi phân của biến đổi z

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-n)x(n)z^{-n-1}$$

Nhân 2 vế với $-z$

$$-z\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [nx(n)]z^{-n} = \mathbb{Z}\{nx(n)\}$$

83

83

2.3. Một số tính chất của biến đổi z

- Biến đổi z của phép lấy chập

$$y(n) = x(n) * h(n) \rightarrow Y(z) = X(z).H(z)$$
$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)z^{-n}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)\right]z^{-n}$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n-k)z^{-n}\right]$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}\right]$$
$$= X(z).H(z)$$

84

84

2.4. Một số phương pháp tính biến đổi z ngược

- Khai triển thành các phân thức hữu tỷ đơn giản

$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{i=1}^{K} \frac{A_i}{z-z_i} \quad A_i = (z-z_i)X(z)|_{z=z_i}$

- <u>Ví dụ</u> Cho $X(z) = \frac{1}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}$

  với $|z| > 2$. Tìm $x(n)$?

$$X(z) = \frac{1/2}{(z^{-1}-1)(z^{-1}-1/2)} = \frac{A_1}{(z^{-1}-1)} + \frac{A_2}{(z^{-1}-1/2)}$$

Mẫu số có 2 nghiệm theo z^{-1} : $z^{-1} = 1$ và $z^{-1} = 1/2$

2.4. Một số phương pháp tính biến đổi z ngược

$$A_1 = (z^{-1}-1)X(z)\Big|_{z^{-1}=1} = 1$$

$$A_2 = (z^{-1}-1/2)X(z)\Big|_{z^{-1}=1/2} = -1$$

$$X(z) = \frac{2}{(1-2z^{-1})} - \frac{1}{(1-z^{-1})}$$

$$x(n) = a^n u(n) \rightarrow X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

Vậy $x(n) = 2.2^n u(n) - u(n) = u(n)(2^{n+1}-1)$

2.4. Một số phương pháp tính biến đổi z ngược

- Khai triển theo phép chia: $X(z)$ có dạng là tỷ số của 2 đa thức theo z. Tiến hành phép chia đa thức để có từng mẫu của $x(n)$.

- <u>Ví dụ</u>

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1-1{,}414z^{-1}+z^{-2}}$$

2.4. Một số phương pháp tính biến đổi z ngược

$$\begin{array}{l|l}
z^{-1} & 1-1{,}414z^{-1}+z^{-2} \\ \hline
\underline{z^{-1}-1{,}414z^{-2}+z^{-3}} & z^{-1}+1{,}414z^{-2}+z^{-3}-z^{-5}-1{,}414z^{-6}\ldots \\
\quad 1{,}414z^{-2}-z^{-3} & \\
\quad \underline{1{,}414z^{-2}-2z^{-3}+1{,}414z^{-4}} & \\
\qquad z^{-3}-1{,}414z^{-4} & \\
\qquad \underline{z^{-3}-1{,}414z^{-4}+z^{-5}} & \\
\qquad\qquad -z^{-5} & \\
\qquad\qquad \underline{-z^{-5}+1{,}414z^{-6}-z^{-7}} & \\
\qquad\qquad\quad -1{,}414z^{-6}+z^{-7} &
\end{array}$$

$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$

$$x(0) = 0, x(1) = 1, x(2) = 1{,}414,$$
$$x(3) = 1, x(4) = 0, x(5) = -1 \ldots.$$
$$n < 0, x(n) = 0$$

Một số cặp biến đổi z thông dụng (1/2)

Tín hiệu	Biến đổi z	Miền hội tụ
$\delta(n)$	1	Toàn mf z
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
$-u(-n-1)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| < 1$
$\delta(n-m)$	z^{-m}	Toàn mf z trừ 0 nếu $m > 0$, trừ ∞ nếu $m < 0$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| < \|a\|$

89

89

Một số cặp biến đổi z thông dụng (2/2)

Tín hiệu	Biến đổi z	Miền hội tụ
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$-na^n u(-n-1)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| < \|a\|$
$\cos(\Omega n)\,u(n)$	$\frac{1-(\cos\Omega)z^{-1}}{1-2(\cos\Omega)z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
$\sin(\Omega n)u(n)$	$\frac{1-(\sin\Omega)z^{-1}}{1-2(\sin\Omega)z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$

90

90

2.5. Ứng dụng biến đổi z để giải PT-SP

- Giải PT-SP: Biết PT-SP, biết tín hiệu vào, tính tín hiệu ra
- Ví dụ Cho PT-SP $y(n) = x(n) + ay(n-1)$

  Biết điều kiện đầu $y(-1) = K$. Tín hiệu vào $x(n) = e^{j\omega n}u(n)$ Hãy xác định tín hiệu ra.

  Lấy biến đổi z 1 phía PT-SP:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} + a\sum_{n=0}^{\infty} y(n-1)z^{-n}$$

Áp dụng công thức tính biến đổi z 1 phía của tín hiệu trễ

$$\mathbb{Z}\{y(n-n_0)\} = z^{-n_0}[Y(z) + \sum_{r=1}^{n_0} y(-r)z^r]$$

$$\Rightarrow \mathbb{Z}\{y(n-1)\} = z^{-1}Y(z) + y(-1)$$

91

91

2.5. Ứng dụng biến đổi z để giải PT-SP

$$Y(z) = X(z) + az^{-1}Y(z) + ay(-1),\ Y(z) = \frac{X(z)+ay(-1)}{1-az^{-1}}$$

$$x(n) = e^{j\omega n}u(n) \quad X(z) = \frac{1}{1-e^{j\omega}z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{aK}{1-az^{-1}} + \frac{1}{(1-az^{-1})(1-e^{j\omega}z^{-1})}$$

$$Y(z) = \frac{aK}{1-az^{-1}} + \frac{a/(a-e^{j\omega})}{(1-az^{-1})} - \frac{e^{j\omega}/(a-e^{j\omega})}{(1-e^{j\omega}z^{-1})}$$

Biến đổi z ngược $y(n) = \left(\underbrace{a^{n+1}K}_{\text{Đáp ứng với điều kiện đầu}} + \underbrace{\frac{a^{n+1}}{a-e^{j\omega}}}_{\text{Đáp ứng quá độ}} - \underbrace{\frac{e^{j\omega(n+1)}}{a-e^{j\omega}}}_{\text{Đáp ứng đối với tín hiệu vào}}\right)u(n)$

92

92

2.6. Hàm truyền đạt của hệ TT- BB

- $y(n) = x(n) * h(n) \rightarrow Y(z) = X(z).H(z)$

  $H(z)$: Hàm truyền đạt

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \mathbb{Z}\{h(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

- Xét $H(z)$ của hệ nhân quả
  - Hệ nhân quả: $h(n) = 0$ với $n < 0, H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n}$
  - $H(z)$ hội tụ với $|z| > R_{h-} = \lim_{n\to\infty} |h(n)|^{1/n}$
  - Miền hội tụ không chứa điểm cực, vậy:

    Mọi điểm cực của hệ TT-BB nhân quả đều nằm trong đường tròn có bán kính $R_{h-} = \lim_{n\to\infty} |h(n)|^{1/n}$

93

93

2.6. Hàm truyền đạt của hệ TT- BB

- Xét $H(z)$ của hệ ổn định
  - Hệ ổn định thì đáp ứng xung thỏa mãn

    $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$ (1)
  - Hàm truyền đạt được xác định theo:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

  - Nếu (1) thỏa mãn thì hội tụ $H(z)$ ngay cả khi $|z| = 1$
  - Vậy nếu miền hội tụ của $H(z)$ chứa đường tròn đơn vị thì hệ sẽ ổn định

94

94

2.6. Hàm truyền đạt của hệ TT- BB

- $H(z)$ của hệ nhân quả và ổn định

  Toàn bộ điểm cực của hệ nhân quả và ổn định phải nằm bên trong đường tròn đơn vị.
- $H(z)$ của hệ đặc trưng bởi PT-SP-TT-HSH

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

Lấy biến đổi z cả 2 vế của PT-SP

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)\right]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)\right]z^{-n}$$

95

95

2.6. Hàm truyền đạt của hệ TT- BB

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n-k)z^{-n}\right] = \sum_{k=0}^{M} b_k\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-k)z^{-n}\right]$$

$$Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

96

96

2.6. Hàm truyền đạt của hệ TT- BB

- Biểu diễn $H(z)$ qua các điểm không z_r và các điểm cực p_k :

$$H(z) = H_0 \frac{\prod_{r=1}^{M}(z - z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(z - p_k)}$$

2.7. Đánh giá đáp ứng tần số

$$H(z) = H_0 \frac{\prod_{r=1}^{M}(z-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)},\ H\left(e^{j\omega}\right) = H_0 \frac{\prod_{r=1}^{M}(e^{j\omega}-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega}-p_k)}$$

$$e^{j\omega} - z_r = V_r(\omega)e^{j\theta_r(\omega)}, e^{j\omega} - p_k = U_k(\omega)e^{j\emptyset_k(\omega)}$$

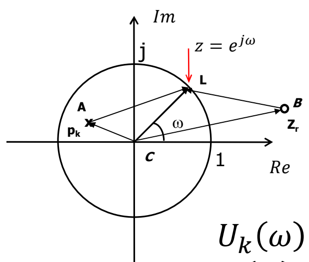
$$V_r(\omega) = \left|e^{j\omega} - z_r\right|, \theta_r(\omega) = \arg[e^{j\omega} - z_r]$$

$$U_k(\omega) = \left|e^{j\omega} - p_k\right|, \emptyset_k(\omega) = \arg[e^{j\omega} - p_k]$$

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = |H_0|.\frac{V_1(\omega)\ldots V_M(\omega)}{U_1(\omega)\ldots U_N(\omega)}$$

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \arg[H_0] + \sum_{r=1}^{M}\theta_r(\omega) - \sum_{k=1}^{N}\emptyset_k(\omega)$$

2.7. Đánh giá đáp ứng tần số



$$CL = CA + AL$$

$$CL = CB + BL$$

$$CL = e^{j\omega}, CA = p_k, CB = z_r$$

$$AL = e^{j\omega} - p_k = U_k(\omega)e^{j\Phi_k(\omega)}$$

$$BL = e^{j\omega} - z_r = V_r(\omega)e^{j\Theta_r(\omega)}$$

$U_k(\omega)$: chiều dài của AL

$V_r(\omega)$: chiều dài của BL

Bài tập Chương 2 (1/2)

1. Cho tín hiệu $x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$

   Hãy tính biến đổi z của tín hiệu này bằng cách dùng:
   a) Định nghĩa biến đổi z
   b) Tín hiệu $u(n)$ và trễ của $u(n)$
2. Tính biến đổi z ngược của $X(z) = ln\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right), |z| > 1/2$
3. Ứng dụng biến đổi z 1 phía để giải PT-SP:

   $$y(n) - (1/2)\,y(n-1) = x(n) - (1/2)\,x(n-1)$$

   Biết $x(n) = \delta(n), y(-1) = 0.$

Bài tập Chương 2 (2/2)

4. Hệ TT-BB có PT-SP:

$$y(n) = y(n-1) + y(n-2) + x(n-1)$$

a) Xác định hàm truyền đạt, điểm không, điểm cực

b) Nhận xét tính nhân quả, ổn định

c) Xác định đáp ứng xung sao cho hệ nhân quả

101

101

Chương 3

Bộ lọc số

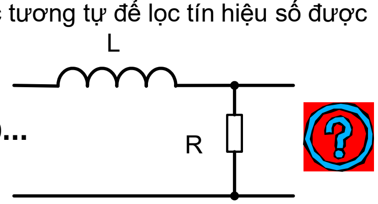
102

102

3.1. Khái niệm lọc số

- Trong nhiều ứng dụng khác nhau, thường phải thay đổi biên độ của các thành phần tần số khác nhau của tín hiệu hoặc loại bỏ đi một số thành phần tần số nào đó. Quá trình xử lý như vậy đối với tín hiệu được gọi là lọc.
- Bộ lọc số: là bộ lọc dùng để lọc tín hiệu số
- Có thể dùng bộ lọc tương tự để lọc tín hiệu số được không ?

...10010010...



103

103

3.1. Khái niệm lọc số

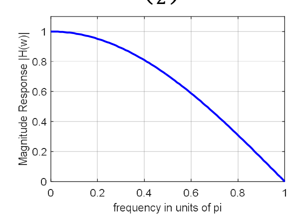
- Xét hệ TT-BB có PT-SP $y(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(n-1)]$

  Đáp ứng xung của hệ: $h(n) = \frac{1}{2}[\delta(n) + \delta(n-1)]$

  Đáp ứng tần số của hệ:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[1 + e^{-j\omega}] = e^{-j\omega/2}\cos\left(\frac{\omega}{2}\right), |H(e^{j\omega})| = |\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)|$$

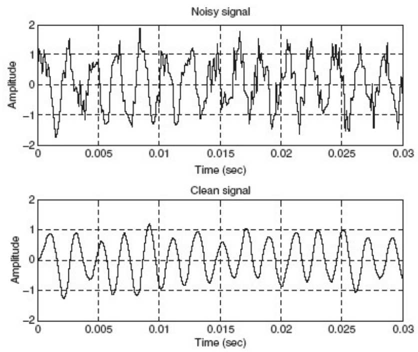
Đáp ứng biên độ của bộ lọc thông thấp



104

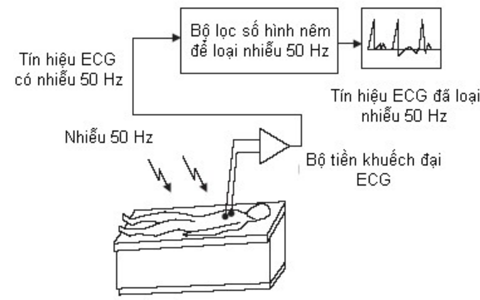
104

Ví dụ lọc để loại nhiễu



105

Ví dụ lọc để loại nhiễu



106

3.2. Bộ lọc FIR

- Bộ lọc FIR và IIR:

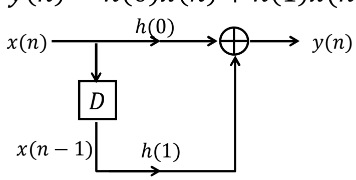
$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

$N = 0$: FIR, $N > 0$: IIR

- $N = 0$: $y(n) = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} x(n-k) = \sum_{k=0}^{M} h(k)\, x(n-k)$

$$M = 1 \rightarrow y(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1)$$

Sơ đồ khối



107

3.2. Bộ lọc FIR

```
Const
  h0 = 0.5;  (* Các hệ số của bộ lọc được *)
  h1 = 0.5;  (* xác định theo thiết kế    *)
Var
  xn, xnt1, yn: real;
Begin
  xnt1 := 0;
  Repeat
    (* Nhập tín hiệu vào từ bàn phím *)
    Write('Cho biết tín hiệu vào xn = ');
    Readln(xn);
    (* Tính tính hiệu ra *)
    yn:= h0 * xn + h1 * xnt1;
    (* Trễ tín hiệu *)
    xnt1 := xn;
  Until Ketthuc;
End.
```


108

3.2. Bộ lọc FIR

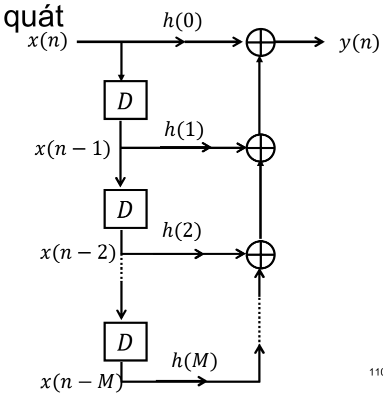
```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

#define h0 0.5 /* Filter coefficients   */
#define h1 0.5 /* calculated based on design */

float xn, xnt1, yn;

void main(void)
{
    xnt1 = 0;
    while (1)
    {
        /* Enter input signal from keyboard */
        printf("Input signal xn = ");
        scanf("%f", &xn);
        /* Compute output signal */
        yn = h0 * xn + h1 * xnt1;
        /* Delay signal */
        xnt1 = xn;
    }
}
```

109

109

3.2. Bộ lọc FIR

- Trường hợp tổng quát



110

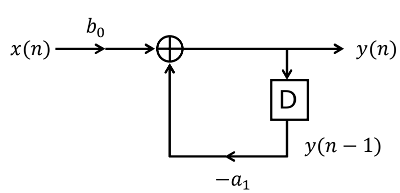
110

3.3. Bộ lọc IIR

- $N = 1, M = 0$ $\;a_0 y(n) + a_1 y(n-1) = b_0 x(n)$

  Giả thiết $a_0 = 1$ $\;y(n) = -a_1 y(n-1) + b_0 x(n)$

  Sơ đồ khối thực hiện



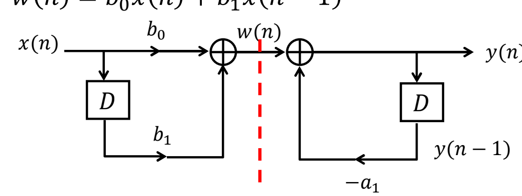
111

111

3.3. Bộ lọc IIR

- $N = M = 1 \rightarrow a_0 y(n) + a_1 y(n-1) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1)$
- Giả thiết $a_0 = 1$

$$y(n) = -a_1 y(n-1) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1)$$
$$= -a_1 y(n-1) + w(n)$$
$$w(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1)$$



112

112

3.3. Bộ lọc IIR

- Tổng quát $(a_0 = 1)$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)$$

$$y(n) = w(n) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)$$

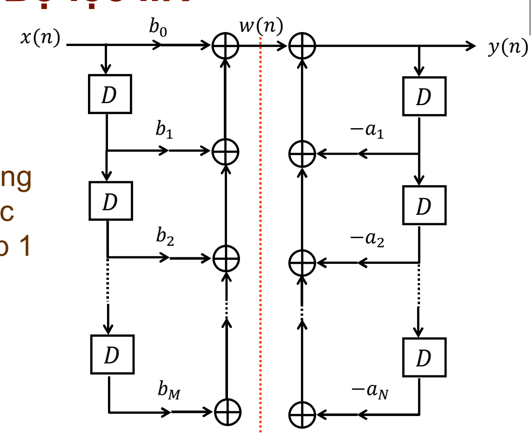
$$w(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

113

113

3.3. Bộ lọc IIR

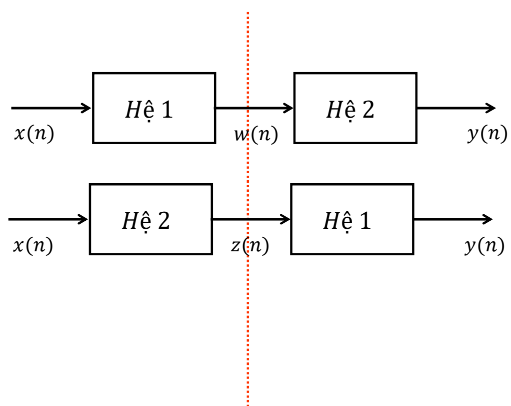
Dạng trực tiếp 1



114

114

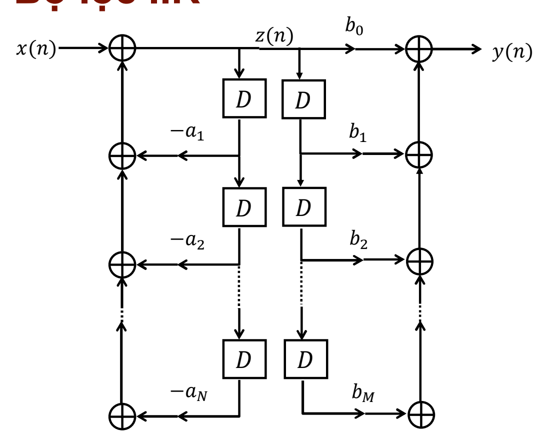
3.3. Bộ lọc IIR



115

115

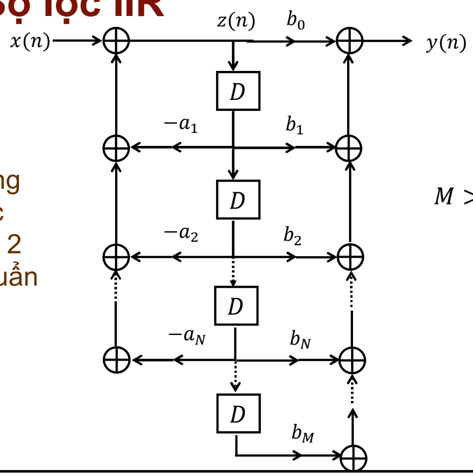
3.3. Bộ lọc IIR



116

116

3.3. Bộ lọc IIR



Dạng trực tiếp 2 (chuẩn tắc)

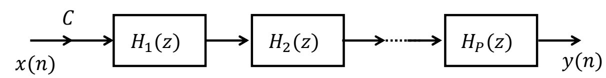
$M > N$

117

117

3.4. Mắc nối tiếp và song song các hệ

- $H(z)$của hệ phức tạp thường được phân tích thành tổng hoặc tích $H(z)$ của các hệ đơn giản, tương ứng với việc mắc song song hoặc nối tiếp các hệ đơn giản
- Mắc nối tiếp $H(z) = C\prod_{k=1}^{P} H_k(z)$, C: Hằng số



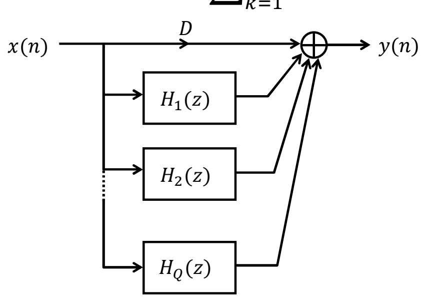
118

118

3.4. Mắc nối tiếp và song song các hệ

- Mắc song song

$$H(z) = D + \sum_{k=1}^{Q} H_k(z) \quad D: \text{Hằng số}$$



119

119

3.5. Khảo sát hệ bậc 1

- $a_0 = b_0 = 1, a_1 = -a \rightarrow y(n) - ay(n-1) = x(n)$
- Hàm truyền đạt $Y(z) - az^{-1}Y(z) = X(z)$

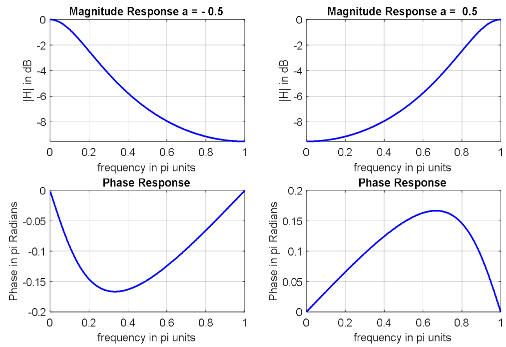
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

- $H(z)$ có 1 điểm không tại $z = 0$ và 1 điểm cực tại $z = a$
- Ổn định: Hệ ổn định nếu $|a| \neq 1$
- Nhân quả: $h(n) = a^n u(n)$ nếu $|z| > |a|$
- Phản nhân quả: $h(n) = -a^n u(-n-1)$ nếu $|z| < |a|$
- Hệ nhân quả và ổn định nếu $|a| < 1$
- Đáp ứng tần số $H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$

120

120

Ví dụ đáp ứng biên độ và pha



121

121

3.6. Khảo sát hệ bậc 2

- $a_0 = b_0 = 1, \rightarrow y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) = x(n)$
- Hàm truyền đạt

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z) = X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

- 1 điểm không bậc 2 tại $z = 0$
- 2 điểm cực $p_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$

122

122

3.6. Khảo sát hệ bậc 2

- Ổn định và nhân quả: $|p_1| < 1, |p_2| < 1$

$$\left|-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}\right| < 2\ ,\ \left|-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}\right| < 2$$

- Ranh giới điểm cực thực và phức: $a_2 = \frac{a_1^2}{4}$
- Xét điểm cực thực:

$$-2 < -a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2} < 2 \quad (*)$$

$$-2 < -a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2} < 2 \quad (**)$$

123

123

3.6. Khảo sát hệ bậc 2

$$(*)\ -a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2} < 2 \rightarrow a_2 > (1 + a_1)$$

$$-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2} > -2 \rightarrow a_2 > a_1 - 1$$

(**) cho kết quả tương tự

- Xét điểm cực phức

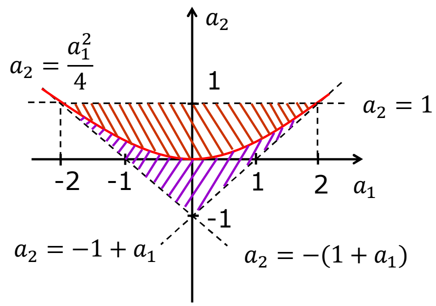
$$p_1 = \frac{-a_1 - j\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2}$$

$$p_2 = \frac{-a_1 + j\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2}$$

$$|p_1| = |p_2| = \sqrt{a_2} \rightarrow a_2 < 1$$

124

124

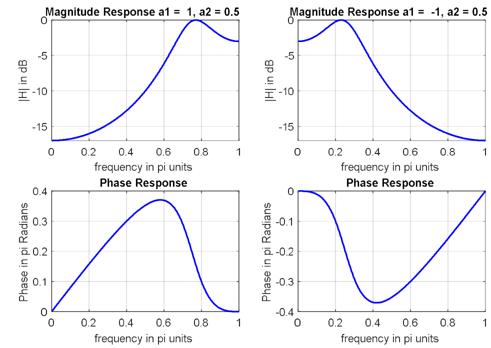


Hệ ổn định và nhân quả nếu a_1 và a_2 thuộc miền tam giác.

125

125

Ví dụ đáp ứng biên độ và pha

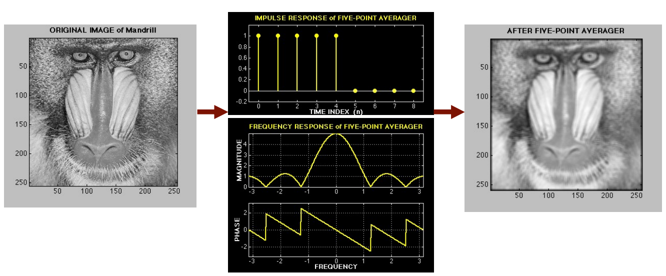


126

126

Ví dụ xử lý ảnh

- Ảnh qua bộ lọc thông thấp (làm trung bình)

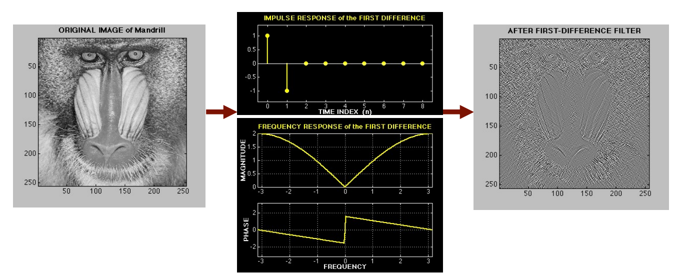


127

127

Ví dụ xử lý ảnh

- Ảnh qua bộ lọc thông cao (đạo hàm)



128

128

Bài tập Chương 3 (1/2)

1. Hệ TT-BB có quan hệ vào ra:

$$y(n) = \frac{1}{3}[x(n-1) + x(n) + x(n+1)]$$

a) Xác định đáp ứng tần số

b) Xác định và vẽ dạng đáp ứng biên độ. Nhận xét tính chất lọc của hệ.

2. Hàm truyền đạt của bộ lọc số có dạng:

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} + 4z^{-3}$$

a) Xác định PT-SP biểu diễn quan hệ vào-ra

b) Vẽ sơ đồ khối thực hiện bộ lọc

Bài tập Chương 3 (2/2)

3. Hệ TT-BB có hàm truyền đạt:

$$H(z) = (1 + az^{-1})/(1 + bz^{-1} + cz^{-2})$$

với a, b, c là hằng số.

a) Xác định quan hệ vào-ra của hệ

b) Vẽ sơ đồ dạng chuẩn tắc thực hiện hệ.

Chương 4

Phép biến đổi Fourier rời rạc

4.1. Chuỗi Fourier rời rạc của tín hiệu rời rạc tuần hoàn

(DFS: Discrete Fourier Serie)

- Xét tín hiệu $x_p(n)$ tuần hoàn với chu kỳ N:

  $x_p(n) = x_p(n + kN)$, k nguyên

- Tín hiệu này không biểu diễn được bằng biến đổi z nhưng có thể biểu diễn bằng chuỗi Fourier thông qua hàm e mũ phức với các tần số là bội của tần số cơ bản $2\pi/N$.

$$e_k(n) = e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$$

- Đây là tín hiệu tuần hoàn theo k với chu kỳ N.

  $k = 0,1,2, \dots, N-1$

4.1. Chuỗi Fourier rời rạc của tín hiệu rời rạc tuần hoàn

- Chuỗi Fourier biểu diễn tín hiệu rời rạc tuần hoàn:

$$x_p(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_p(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (1)$$

- Xác định các hệ số $X_p(k)$ theo $x_p(n)$ dựa vào tính chất trực chuẩn:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}nr} = \begin{cases}1, r = mN \\ 0, r \neq mN\end{cases} \quad m\text{: số nguyên}$$

- Nhân 2 vế $x_p(n)$ với $e^{-j\frac{2\pi}{N}nr}$ và lấy tổng từ $n = 0$ đến $N-1$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nr} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} X_p(k)\, e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}$$

4.1. Chuỗi Fourier rời rạc của tín hiệu rời rạc tuần hoàn

- Thay đổi thứ tự lấy tổng

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nr} = \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k)\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}\right]$$

$k - r = mN \rightarrow [\ldots] = 1, k - r \neq mN \rightarrow [\ldots] = 0$

$k = r + mN$ và $k < N \rightarrow m = 0$ và $k = r$

- Sử dụng tính chất trực chuẩn: $\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nr} = X_p(r)$

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (2)$$

- Nhận xét
  - $X_p(k)$ tuần hoàn theo k với chu kỳ N
  - Các công thức (1), (2) là biểu diễn chuỗi Fourier của tín hiệu rời rạc tuần hoàn. (1): Tổng hợp. (2): Phân tích

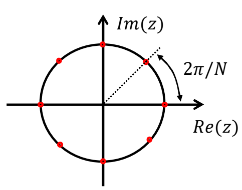
4.1. Chuỗi Fourier rời rạc của tín hiệu rời rạc tuần hoàn

- Quan hệ với biến đổi z

Xét 1 chu kỳ của $x_p(n)$: $x(n) = \begin{cases} x_p(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại}\end{cases}$

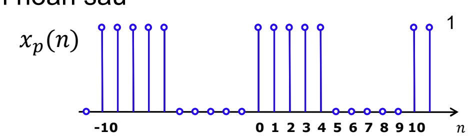
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n}$$

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \rightarrow X_p(k) = X(z)\big|_{z = e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

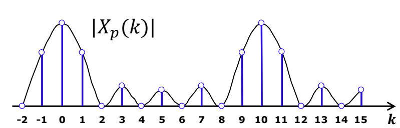


Ví dụ

- Hãy tính các hệ số chuỗi Fourier của dãy tín hiệu tuần hoàn sau



$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{4} e^{-j\frac{2\pi}{10}nk} = e^{-j\frac{4\pi k}{10}}\frac{\sin(\pi k/2)}{\sin(\pi k/10)}$$



4.2. Biến đổi Fourier rời rạc của tín hiệu có độ dài hữu hạn

(DFT: Discrete Fourier Transform)

- Ta đã xét cách biểu diễn một tín hiệu rời rạc tuần hoàn bằng chuỗi Fourier. Bằng cách diễn giải thích hợp ta cũng có thể dùng cách biểu diễn như vậy cho các tín hiệu có độ dài hữu hạn.
- Có thể coi tín hiệu có độ dài hữu hạn N là tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ N trong đó một chu kỳ chính là tín hiệu có độ dài hữu hạn

$$x_p(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN) \qquad x(n) = \begin{cases} x_{p}(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

137

137

4.2. Biến đổi Fourier rời rạc của tín hiệu có độ dài hữu hạn

- Cặp công thức DFT

Biến đổi thuận (phân tích)

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

Biến đổi ngược (tổng hợp)

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{j\frac{2\pi}{N}nk} & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

138

138

4.3. Biến đổi nhanh Fourier

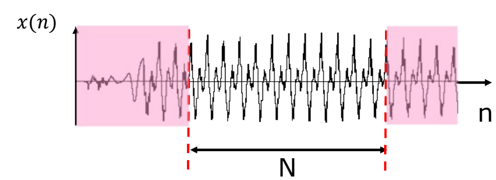
(FFT: Fast Fourier Transform)

- Tính trực tiếp DFT cần N^2 phép nhân số phức và $N(N-1)$ phép cộng số phức
- Thuật giải FFT: phân tích DFT của dãy N số lần lượt thành DFT của các dãy nhỏ hơn
- Điều kiện áp dụng thuật giải: $N = 2^m$.
- Số lượng phép toán giảm xuống còn $N\log_2 N$

139

139

4.4. Các hàm cửa sổ



- Lấy ra đoạn tín hiệu có độ dài N để phân tích
- Tương đương nhân tín hiệu với hàm $w(n)$

  $w(n) = 1$ trong đoạn tín hiệu được lấy

  $w(n) = 0$ trong đoạn tín hiệu không được lấy

  $x'(n) = x(n).w(n)$
- Mặc nhiên đã dùng cửa sổ chữ nhật !

140

140

4.4. Các hàm cửa sổ

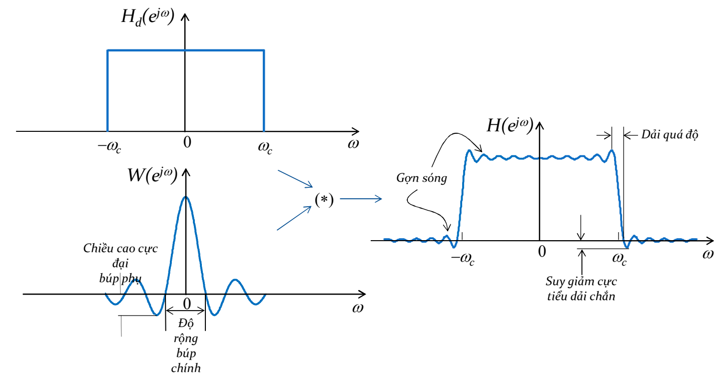
$$X'(f) = X(f) * W(f)$$

- Tín hiệu được phân tích có độ dài hữu hạn đã gây ra $X'(f) \neq X(f) \Rightarrow$ có sai số khi tính biến đổi Fourier
- Để giảm sai số có thể tăng N
- Phương pháp hay dùng là chọn $W(f)$ hay chọn $w(n)$
- Cửa sổ chữ nhật gây sai số lớn nên thường dùng các cửa sổ khác như Hamming, Hanning, Kaiser, Blackman…

141

141

4.4. Các hàm cửa sổ

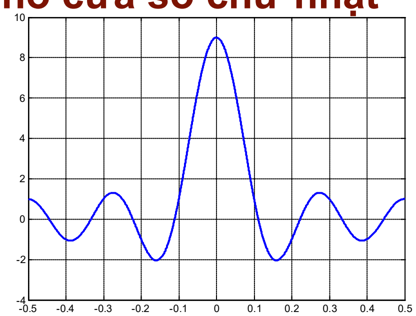


142

142

Phổ cửa sổ chữ nhật

- $N = 9$



$$W(e^{j\omega}) = \left[\frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right] e^{-j\omega\frac{M-1}{2}} \rightarrow W_r(e^{j\omega}) = \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

143

143

4.4. Các hàm cửa sổ

- Hàm cửa sổ Hanning, Hamming:

$$W_{han}(n) = 0,5 + 0,5\cos\left(\frac{n\pi}{N}\right), -N \le n \le N$$

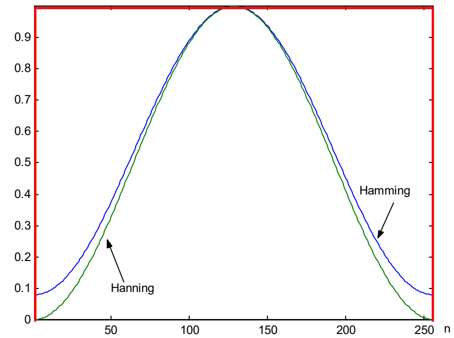
$$W_{ham}(n) = 0,54 + 0,46\cos\left(\frac{n\pi}{N}\right), -N \le n \le N$$

144

144

4.4. Các hàm cửa sổ

- Hàm cửa sổ Hanning, Hamming:

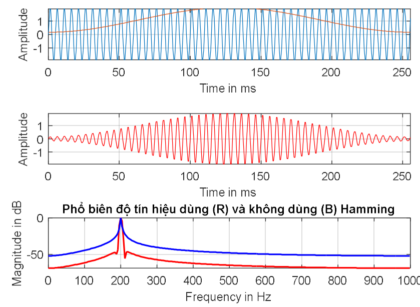


$N = 256$

145

145

4.4. Các hàm cửa sổ



146

146