Bài tập về nhà:

1/ CM: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{3}n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$

$P(1) = 1^2$

~~Giả sử: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{3}n$~~

- Ta có: $\frac{1}{3}n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ (1)

- Mặc khác:

Giả sử $1^2 + 2^2 + n^2 = \frac{1}{3}n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$

Cần cm: $P(n+1) = 1^2 + 2^2 + \ldots + (n+1)^2 = \frac{1}{3}(n+1)\left(n+\frac{3}{2}\right)(n+2)$

$= \underbrace{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2} + (n+1)^2 = \left(\frac{1}{3}n + \frac{1}{3}\right)\left(n^2 + \frac{7}{2}n + 3\right)$

$= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + n^2 + 2n + 1 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{6}n$

$+1$

$\dots (n+\frac{?}{2})(n+2)$

$\Rightarrow \underbrace{1^2+2^2+\dots+n^2}+(n+1)^2 = (\frac{1}{3}n+\frac{1}{3})(n^2+\frac{3}{2}n+1)$

$= \frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n+n^2+2n+1 = \frac{1}{3}n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{13}{6}n+1$

$= \frac{1}{3}n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{13}{6}n+1 = \frac{1}{3}n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{13}{6}n+1$ (đúng)

2) $f(n) = a_0 + a_1 + \dots + a_m \cdot n^m$

Gọi $C = |a_0| + |a_1| + \dots + |a_m| > 0$

Với $n > 1$, ta có:

$|f(n)| \leq |a_0| + |a_1 \cdot n| + |a_2 \cdot n^2| + \dots + |a_m \cdot n^m|$

$\Leftrightarrow |f(n)| \leq \underbrace{(|a_0| + |a_1| + \dots + |a_m|)}\cdot n^m$

$|f(n)| \leq C \cdot n^m$

$\Rightarrow f(n) = O(n^m)$

3/ M_1: $r = a \% b$ $(0 \leq r < b)$

M_2: If $(r = 0)$, thuật toán kết thúc → b là đáp án

M_3: $a \leftarrow b$ $(a \geq b)$; $b \leftarrow r$ và quay lại M_1

```
int UCLN(int a, int b)
{ int r = a%b;
  if (r=0) return b;
  UCLN(b, r)
}
```

Giả sử $UCLN(a, b) \leq T(n)$ và $n = ab$

}

Giả sử UCLN$(a, b) \leq T(n)$ và $n = ab$

Nếu UCLN$(a,b) \rightarrow n$ bước

thì $a \geq f(n+2)$ và $b \geq f(n+1)$

trong đó $f(n)$ là số hạng thứ n trong fibonacci

$\forall n \geq 0$

$\Rightarrow$ UCLN$(b, a\%b) \rightarrow n-1$ bước

$\Rightarrow b \geq f(n-1+2) \Leftrightarrow b \geq f(n+1)$

$a\%b \geq f(n-1+1) \Leftrightarrow a\%b \geq f(n)$

$\Rightarrow$ ~~$a = qb + r$ (q là thương số $\frac{a}{b}$)~~

~~$a = \frac{a}{b} \cdot b + a\%b$~~

... tổng của hai số hạng

Mà mỗi số bằng tổng của 2 số hạng đứng trước nó:

$f(n+2) = f(n+1) + f(n)$

$\Rightarrow$ Thuật toán tìm ƯCLN theo Euclid tuân theo Fibonacci

Theo công thức Binet:

$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \approx \phi^n$ (với ϕ là tỷ lệ vàng $\approx 1{,}618...$)

$\Leftrightarrow f(n) \approx \phi^n$

$\Leftrightarrow n \approx \log_\phi(f(n))$

Nếu thuật toán Euclide cho a, b giảm đi n bước thì a ít nhất bằng $f(n+2)$ và b ít nhất bằng $f(n+1)$ (trường hợp dừng ở bước lặp lại lần 2 ƯCLN(b, a%b))

$\Rightarrow f(n+1) \approx min(a, b)$

$\Rightarrow n+1 \approx \log_\phi(min(a,b))$

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \approx \phi^n$$ (với ϕ là tỷ lệ vàng $\approx 1,618...$)

$\Leftrightarrow f(n) \approx \phi^n$

$\Leftrightarrow n \approx \log_{\phi}(f(n))$

Nếu thuật toán Euclide cho a, b giảm đi n bước thì a ít nhất bằng $f(n+2)$ và b ít nhất bằng $f(n+1)$ (trường hợp dừng ở bước lặp lại lần 2 UCLN(b, a%b))

$\Rightarrow f(n+1) \approx \min(a,b)$

$\Rightarrow n+1 \approx \log_{\phi}(\min(a,b))$

$\Rightarrow O(n) \approx O(n+1) \approx \log_2(\min(a,b)) \approx \log_2 n$