

# Hidráulica Básica [2015961]

## Tema # 2: Análisis de sistemas de tuberías

Luis Alejandro Morales (Ph.D)

Profesor Asistente

Universidad Nacional de Colombia-Bogotá

Facultad de Ingeniería

Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola

### Contents

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Sistemas de tuberías simples</b>   | <b>2</b>  |
| 1.1      | Tipos de problema en sistemas de tuberías . . . . .                                   | 2         |
| 1.2      | Ecuaciones para la solución de problemas . . . . .                                    | 3         |
| 1.3      | Solución de la ecuación de Colebrook-White . . . . .                                  | 4         |
| 1.3.1    | Método de punto fijo . . . . .  | 4         |
| 1.3.2    | Método de Newton-Raphson . . . . .  | 5         |
| 1.4      | Comprobación de diseño . . . . .  | 6         |
| 1.5      | Cálculo de la potencia requerida . . . . .  | 6         |
| 1.6      | Diseño de la tubería . . . . .  | 6         |
| <b>2</b> | <b>Sistemas de tuberías en serie</b>  | <b>7</b>  |
| 2.1      | Ecuaciones para la solución de problemas . . . . .                                    | 7         |
| 2.2      | Comprobación de diseño . . . . .  | 8         |
| 2.3      | Cálculo de la potencia requerida . . . . .  | 9         |
| 2.4      | Diseño de la tubería . . . . .  | 10        |
| <b>3</b> | <b>Tuberías con pérdida uniforme de caudal por unidad de longitud (Tubos porosos)</b> | <b>11</b> |
| <b>4</b> | <b>Sistemas de tuberías en paralelo</b>   | <b>14</b> |
| 4.1      | Ecuaciones para la solución de problemas . . . . .                                    | 14        |
| 4.2      | Comprobación de diseño . . . . .  | 16        |
| 4.3      | Cálculo de la potencia requerida . . . . .  | 16        |
| 4.4      | Diseño de tuberías en paralelo . . . . .  | 17        |
| <b>5</b> | <b>Redes abiertas de tuberías</b>   | <b>17</b> |
| 5.1      | Ecuaciones para la solución de problemas . . . . .                                    | 18        |
| 5.2      | Comprobación de diseño . . . . .  | 19        |
| 5.3      | Diseño de redes abiertas de tuberías . . . . .  | 20        |
| <b>6</b> | <b>Redes cerradas</b>   | <b>21</b> |
| 6.1      | Principios fundamentales del análisis de redes cerradas . . . . .                     | 21        |
| 6.2      | Método de Hardy-Cross con corrección de caudales . . . . .                            | 24        |
| 6.3      | Método de Hardy-Cross con corrección de cabezas . . . . .                             | 25        |
| 6.4      | Comparación de los métodos de Hardy-Cross . . . . .                                   | 27        |
| 6.5      | Método de análisis lineal . . . . .   | 27        |

# 1 Sistemas de tuberías simples



Figure 1: Acueductos por gravedad.

Una tubería simple es aquella que tiene un diámetro y esta hecha de un solo material a lo largo de su longitud (ver figura 2). La energía que mueve el flujo dentro de la tubería es gracias a la acción de la gravedad (tanque a la entrada) o a una máquina (sistema de bombeo a la entrada). Dichas tuberías pueden tener cualquier tipo de accesorio a lo largo de su longitud lo que implica unas pérdidas menores. Las ecuaciones de Prandtl, Von-Karman y Darcy-Weisbach vistas en la Unidad 1, son utilizadas para el diseño de tuberías simples. Note que existe cierta dificultad para el diseño teniendo en cuenta que la ecuación de Colebrook-White para calcular el coeficiente de rugosidad  $f$  es implícita y requiere un proceso iterativo para su solución. Los algoritmos que aquí se discutirán, constituyen las bases para el análisis y diseño de tuberías más complejos.

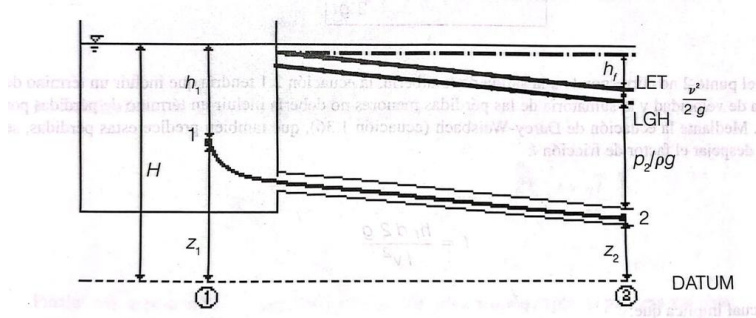


Figure 2: Tubería simple alimentada por un tanque de nivel constante y con descarga a la atmósfera (tomado de [1]).

## 1.1 Tipos de problema en sistemas de tuberías

Los problemas en sistemas de tuberías se clasifican de acuerdo con las variables desconocidas. Las variables involucradas en estos problemas se pueden clasificar como:

- *Características la tubería:* Diámetro ( $D$ ), longitud ( $L$ ), rugosidad absoluta ( $\varepsilon$ ).
- *Propiedades del fluido:* Densidad ( $\rho$ ) y viscosidad dinámica ( $\mu$ ) o cinemática ( $\nu$ ).
- *Variables relacionadas con el esquema del sistema:* Coeficientes de pérdidas menores ( $K$ ) de todos los accesorios en el sistema.
- *Variables relacionadas con la energía impulsora del sistema:* Cabeza de energía ( $H = E_1 - E_2$ ), entre la energía en el embalse de entrada ( $E_1$ ) y la energía salida del sistema ( $E_2$ ), o potencia de la bomba ( $P$ ).

- *Propiedades del flujo*: Caudal ( $Q$ ) y velocidad ( $V$ ) del flujo.
- *Otras variables*: Aceleración de la gravedad ( $g$ ).

De acuerdo con las variables involucradas en sistemas de tuberías, existen tres tipos de problemas:

1. **Comprobación de diseño**: En este tipo de problemas la tubería existe y se conoce su longitud, su diámetro, su rugosidad absoluta (material), al igual que todos los accesorios y sus coeficiente de pérdidas menores. También se conoce la energía impulsora, ya sea una cabeza de energía (gravitacional por diferencia de niveles) o una energía mecánica (suministrada por una bomba). Las propiedades del fluido como la densidad y la viscosidad absoluta son también conocidas. La incógnita es entonces el caudal o la velocidad del flujo en el sistema.

| Variables conocidas  | Incógnita |
|--|-----------|
| D, $\varepsilon$ , H (o P), $\sum K$ , $\rho$ , $\mu$ , g, L | Q (o V)   |

2. **Cálculo de la potencia requerida**: En este tipo de problemas, el sistema existe por lo que se conocen su longitud, su diámetro, su rugosidad absoluta (material), al igual que todos los accesorios y sus coeficiente de pérdidas menores. Las propiedades del fluido como la densidad y la viscosidad dinámica así como el caudal (o velocidad) que fluye por el sistema son también conocidas. La finalidad es determinar la potencia, ya sea mecánica o gravitacional, requerida para mover cierto caudal a través de la tubería dada.

| Variables conocidas  | Incógnita |
|--|-----------|
| D, $\varepsilon$ , Q (o V), $\sum K$ , $\rho$ , $\mu$ , g, L | P (o H)   |

3. **Diseño de la tubería**: En este tipo de problemas se conoce el caudal o la velocidad de flujo y la potencia disponible (mecánica o gravitacional), algunas características de la tubería como la longitud, los accesorios y sus coeficientes de pérdida y las propiedades del fluido como la densidad y la viscosidad dinámica. Se desconoce el diámetro necesario para permitir el paso de el caudal demandado. En cuanto a la rugosidad absoluta, se debe cambiar el tipo de tubería (rugosidad absoluta) con el fin de obtener la mejor opción.

| Variables conocidas  | Incógnita |
|--|-----------|
| $\varepsilon$ , Q (o V), P (o H), $\sum K$ , $\rho$ , $\mu$ , g, L | D         |

## 1.2 Ecuaciones para la solución de problemas

A continuación se presentan las ecuaciones necesarias para resolver los tres problemas ya mencionadas. Estas ecuaciones fueron discutidas en el capítulo anterior.

Si se tiene una tubería simple cuya entrada es en la sección 1 y cuya salida es en la sección, aplicando la ecuación de Bernoulli entre 1 y 2, de manera general, se tiene:

$$\frac{V_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + h_f + \sum h_e - h_b + h_t \quad (1)$$

donde  $h_b$  es la cabeza de energía suministrada por la bomba y  $h_t$  es la cabeza de energía sustraída por la turbina. La energía total en una sección (e.g. 1 o 2) de flujo se puede expresar como  $E = \frac{V^2}{2g} + z + \frac{p}{\gamma}$ , por lo tanto la ecuación 1 se puede expresar como:

$$E_1 - E_2 = h_f + h_e - h_b + h_t \quad (2)$$

en donde  $h_f$  son las pérdidas por fricción estimadas con la ecuación de Darcy-Weisbach como:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (3)$$

y  $h_e$  son las pérdidas por accesorios, las cuales se pueden calcular como:

$$h_e = \sum K \frac{V^2}{2g} \quad (4)$$

El factor de fricción  $f$  en la ecuación 3, se calcula usando el diagrama de Moody o numéricamente usando la ecuación Colebrook-White como:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.52}{Re\sqrt{f}} \right) \quad (5)$$

donde el número de Reynolds ( $Re$ ) se calcula como

$$Re = \frac{VD}{\nu} \quad (6)$$

Si se reemplaza las ecuaciones 3 y 4 en la ecuación 2, se tiene:

$$E_1 - E_2 = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} + \sum K \frac{V^2}{2g} - h_b + h_t \quad (7)$$

despejando  $V$  en la ecuación 7, se tiene:

$$V = \sqrt{2g \frac{E_1 - E_2 + h_b - h_t}{f \frac{L}{D} + \sum K}} \quad (8)$$

En los tres tipos de problemas, el objetivo es usar las ecuaciones 3, 4, 5, 6 y 8 para su solución. Note que la ecuación 5 es una ecuación implícita que requiere del uso de algún método iterativo o numérico para su solución. Note que la ecuación 8 se usa en particular para la solución de problemas de *comprobación de diseño* y de *diseño de tuberías*.

### 1.3 Solución de la ecuación de Colebrook-White

#### 1.3.1 Metodo de punto fijo

Consiste en el siguiente procedimiento:

1. Leer la información de entrada:  $\varepsilon$ ,  $\rho$ ,  $\mu$  o  $\nu$ ,  $V$  o  $Q$ ,  $D$
2. Calcular el  $Re$  usando la ecuación 6
3. Si  $Re < 2000$  (Flujo laminar), calcular  $f$  como:

$$f = Re/64 \quad (9)$$

y luego ir a 6. Si  $Re > 2000$  continuar.

4. Asumir un valor inicial de  $f_i$  (e.g.  $f = 0.01$ ).

5. Usando la siguiente forma de la ecuación 5, calcular un valor  $f_{i+1}$ :

$$f_{i+1} = \left[ -2 \log \left( \frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.52}{Re\sqrt{f_i}} \right) \right]^{-2} \quad (10)$$

6. Si  $|f_i - f_{i+1}| \leq \eta$ , donde  $\eta$  es un error (e.g.  $\eta = 1 \times 10^{-6}$ ), ir a 6. Si  $|f_i - f_{i+1}| > \eta$ , hacer  $f_i = f_{i+1}$  e ir a 6, para calcular un nuevo valor  $f_{i+1}$ .

7. Imprimir  $f$

### 1.3.2 Método de Newton-Raphson

El método de Newton-Rapson es un método numérico para la solución de ecuaciones implícitas. Converge más rápido que el método de punto fijo. Algunas condiciones para poder aplicar el método son para un intervalo  $l$  del dominio:

- $f(x)$  debe estar definida en  $l$ .
- La función de iteración de  $f(x)$  deber ser continua en  $l$ .
- La función implícita  $f(x)$  debe ser diferenciable ( $f'(x)$ ) en  $l$ .

En general la ecuación de Colebrook-White cumple estas condiciones. El método consiste en el siguiente procedimiento:

1. Leer la información de entrada:  $\varepsilon$ ,  $\rho$ ,  $\mu$  o  $\nu$ ,  $V$  o  $Q$ ,  $D$
2. Calcular el  $Re$  usando la ecuación 6
3. Si  $Re < 2000$  (Flujo laminar), calcular  $f$  como:

$$f = Re/64 \quad (11)$$

y luego ir a 6. Si  $Re > 2000$  continuar.

4. Asumir un valor inicial de  $f_i$  (e.g.  $f = 0.01$ ).
5. Calcular

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{f}} \quad (12)$$

6. Calcular

$$f(x_i) = -2 \log \left( \frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.52x_i}{Re} \right) \quad (13)$$

7. Calcular

$$f'(x_i) = \left[ \frac{-2}{\ln 10} \right] \left[ \frac{\frac{2.52}{Re}}{\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.52x_i}{Re}} \right] \quad (14)$$

8. Calcular el nuevo valor de  $x_{i+1}$  como:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i) - x_i}{f'(x_i) - 1} \quad (15)$$

9. Si  $|x_i - x_{i+1}| \leq \eta$ , donde  $\eta$  es un error (e.g.  $\eta = 1 \times 10^{-6}$ ), ir a 6. Si  $|x_i - x_{i+1}| > \eta$ , hacer  $x_i = x_{i+1}$  e ir a 6, para calcular un nuevo valor  $x_{i+1}$ .

10. Imprimir  $f$ , donde:

$$f = \frac{1}{x_{i+1}^2} \quad (16)$$

## 1.4 Comprobación de diseño

A continuación se describe el proceso para solucionar este tipo de problemas que consiste en determinar el valor de  $V$  o  $Q$ .

1. Leer la información de entrada:  $\varepsilon, \rho, \mu$  o  $\nu, L, D, \sum K, E1, E2, h_b$  y  $h_t$ .
2. Aplicar el procedimiento descrito en la sección 1.3.1 o en la sección 1.3.2. Note que lo único que cambia dentro de estos procedimientos es que la velocidad  $V$  es calculada usando la ecuación 8; ya no es un dato de entrada.
3. Imprimir  $V$  y  $f$ .

## 1.5 Cálculo de la potencia requerida

A continuación se describe el proceso para solucionar este tipo de problemas que consiste en determinar la cabeza de energía de la bomba ( $h_b$ ) y su potencia ( $P$ ).

1. Leer la información de entrada:  $\varepsilon, \rho, \mu$  o  $\nu, L, D, \sum K, Q, E1, E2, h_t$  y  $\eta$ .
2. Calcular la velocidad como  $V = Q/A$ .
3. Aplicar el procedimiento descrito en la sección 1.3.1 o en la sección 1.3.2 para calcular  $f$ .
4. Calcular  $h_f$  usando la ecuación 3.
5. Calcular  $h_e$  usando la ecuación 4.
6. Calcular la cabeza de energía de la bomba ( $h_b$ ) despejándola de la ecuación 2.
7. Calcular la potencia  $P$  como:

$$P = \frac{\rho Q g h_b}{\eta} \quad (17)$$

donde  $\eta$  es la eficiencia de la bomba.

8. Imprimir  $h_b$  y  $P$ .

## 1.6 Diseño de la tubería

A continuación se describe el proceso para solucionar este tipo de problemas que consiste en determinar el diámetro óptimo comercial de la tubería.

1. Leer la información de entrada:  $\varepsilon, \rho, \mu$  o  $\nu, L, D, \sum K, Q, E1, E2, h_t$  y  $\eta$ .
2. Asumir un diámetro comercial inicial  $D_i$  para la tubería. El  $D_i$  inicial debe ser pequeño (e.g. 1 pulg.) pero no tan pequeño ya que el procedimiento no converge.

3. Aplicar el procedimiento descrito en la sección 1.3.1 o en la sección 1.3.2. Note que lo único que cambia dentro de estos procedimientos es que la velocidad  $V$  es calculada usando la ecuación 8; ya no es un dato de entrada. De aquí sale un valor de  $f$  y  $V$ .
4. Calcular el nuevo caudal  $Q_n = VA$  usando  $D_i$ , donde  $A = \frac{\pi D_i^2}{4}$ .
5. Si  $Q_n \geq Q$  ir a 6. Si  $Q_n < Q$  tomar el siguiente diámetro comercial superior  $D_{i+1}$  e ir a 3.
6. Imprimir  $D$ .

El diseño óptimo busca, en la mayoría de los casos, la solución más económica. Por lo tanto es necesario muchas veces diseñar con otros materiales (diferente valor de  $\varepsilon$ ) para encontrar la mejor solución.

## 2 Sistemas de tuberías en serie

Las tuberías en serie son dos o mas tuberías conectadas una tras de otra con diferente diámetro o rugosidad (material) o ambos (ver figura 3). Estas tuberías son muy comunes en sistemas de riego localizado de alta frecuencia o en líneas de coducción para acueductos veredales. Al igual que en la sección 1, aquí se describirán las ecuaciones generales para resolver problemas relacionados con tuberías en serie y se explicarán los procedimientos para resolver los tres problemas en tuberías: 1) Comprobación de diseño, 2) cálculo de la potencia y 3) diseño de las tuberías.

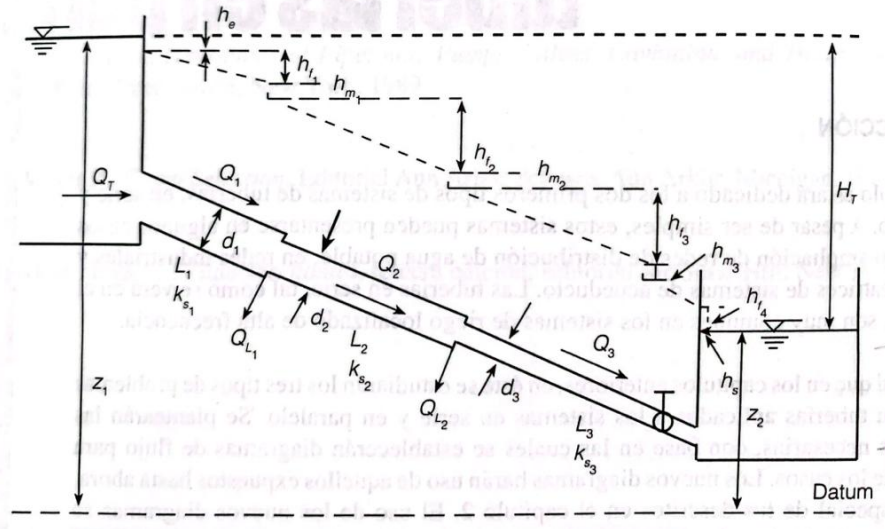


Figure 3: Tres tuberías en serie conectando dos tanques en donde  $Q_{L_i}$  representa un caudal lateral de salida al final de la tubería  $i$  (tomado de [1]).

### 2.1 Ecuaciones para la solución de problemas

Teniendo en cuenta las tuberías en serie de la figura 3, se plantean las siguientes ecuaciones:

- Conservación de la energía

$$\Delta E = E_1 - E_2 = H_T = z_1 - z_2 = h_e + h_{f_1} + h_{m_1} + h_{f_2} + h_{m_2} + h_{f_3} + h_{m_3} + h_s \quad (18)$$

donde  $H_T$  es la diferencia de niveles entre los dos tanques (la energía total disponible en el sistema),  $h_e$  pérdidas menores de entrada,  $h_{f_i}$  pérdidas por fricción en el tubo  $i$ ,  $h_{m_i}$  pérdidas menores (por válvulas, uniones, etc) en la tubería  $i$  y  $h_s$  pérdidas por salida.

Para un numero  $n$  de tuberías en serie la ecuación 18 se puede escribir como:

$$H_T = h_e + \sum_{i=1}^n h_{f_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h_{m_{i,j}} + h_s \quad (19)$$

donde  $m$  es numero de accesorios en la tubería  $i$ ;  $m$  puede ser variable. La ecuación 19 establece que la energía disponible en el sistema se disipa en pérdidas a lo largo de la tubería. Puede haber el caso en el cual tengamos, por ejemplo, una tubería horizontal por lo cual una bomba sería necesaria para impulsar el flujo por lo que en la parte izquierda de la ecuación 18 tendríamos  $H_T = h_b$ . También se puede dar el caso de una turbina en alguna sección de la tubería por lo que habría que sumarle a la derecha de la ecuación  $h_t$ .

Desarrollando la ecuación 19, se tiene:

$$H_T = K_e \left( \frac{V^2}{2g} \right)_1 + \sum_{i=1}^n \left( f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \right)_i + \sum_{i=1}^n \left( \frac{V^2}{2g} \right)_i \sum_{j=1}^m K_j + K_s \left( \frac{V^2}{2g} \right)_n \quad (20)$$

- Conservación de la masa o ecuación de continuidad:

$$Q_T = Q_1 = Q_2 + Q_{L_1} = Q_3 + Q_{L_1} + Q_{L_2} \quad (21)$$

Donde  $Q_i$  es el caudal que viaja por la tubería  $i$  y  $Q_{L_i}$  es el caudal derivado de la tubería  $i$ . La ecuación 21 se puede expresar de forma mas compacta como:

$$Q_T = Q_i + \sum_{j=1}^{i-1} Q_{L_j} \quad (22)$$

En caso de que no existiera derivaciones ( $Q_{L_i} = 0$ ) la ecuación 22 queda como:

$$Q_T = Q_1 = \dots = Q_i = \dots = Q_n \quad (23)$$

## 2.2 Comprobación de diseño

Se desea calcular el valor de  $Q_T = Q_1$ . Antes de describir el proceso de cálculo, deduciremos una ecuación que se utilizará para resolver este tipo de problemas.

De la ecuación de Darcy-Weisbach, despejando el factor de fricción se tiene que:

$$f = \frac{h_f D 2g}{LV^2} \quad (24)$$

Sacando raíz cuadrada e invirtiendo los términos a ambos lados se tiene:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{V\sqrt{L}}{\sqrt{h_f D 2g}} \quad (25)$$

Igualando a la ecuación de Colebrook-White, se tiene:

$$\frac{V\sqrt{L}}{\sqrt{h_f D 2g}} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.52}{Re\sqrt{f}} \right) \quad (26)$$



Reemplazando  $Re = \frac{VD}{\nu}$  y la ecuación 25 en la ecuación 26 y despejando la velocidad, se tiene:

$$V = \frac{-2\sqrt{2gDh_f}}{\sqrt{L}} \log \left( \frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.52\nu\sqrt{L}}{D\sqrt{2gDh_f}} \right) \quad (27)$$

Note que la ecuación 27 es explícita para la velocidad  $V$ .

A continuación se describe el proceso para solucionar este tipo de problemas que consiste en determinar  $Q_T = Q_1$ .

1. Leer:  $\rho$ ,  $\mu$  o  $\nu$ ,  $K_e$  (coef. de pérdidas a la entrada),  $K_s$  (coef. de pérdidas a la salida),  $E1$  y  $E2$ . También, para cada tubería  $i$ , leer:  $\varepsilon_i, L_i, D_i, \sum K_i, Q_{L_i}, h_{b_i}, h_{t_i}$  y  $\eta_i$  (eficiencia de la bomba o turbina). Esta lectura se debe hacer para las  $n$  tuberías del sistema.
2. Para llevar a cabo este proceso es necesario, para la primera iteración, asumir un valor inicial de  $h_{f_1}$ . Se ha encontrado que  $h_f \propto \frac{L}{D^5}$ , de acuerdo con esto, [1] ha establecido que este valor inicial de  $h_{f_1}$  se puede expresar como:

$$h_{f_1} = H_T \frac{L_1/D_1^5}{\sum_{i=1}^n L_i/D_i^5} \quad (28)$$

3. Para la tubería  $i = 1$ : calcular el valor de  $V_1$  usando la ecuación 27, calcular el caudal  $Q_T = Q_1 = V_1 A_1$ , calcular el valor de  $f_1$  usando uno de los dos procedimientos descritos en la secciones 1.3.1 y 1.3.2, calcular  $h_{f_1}$  utilizando la ecuación 3 y  $h_{m_1}$  utilizando la ecuación 4.
4. Para el resto de tuberías  $i = 2 \dots n$ : calcular el caudal  $Q_i$  usando la ecuación 22, calcular la velocidad  $V_i = Q_i/A_i$ ,  $f_i$  usando uno de los dos procedimientos descritos en la secciones 1.3.1 y 1.3.2, calcular  $h_{f_i}$  utilizando la ecuación 3 y  $h_{m_i}$  utilizando la ecuación 4.
5. Calcular la pérdida de energía total estimada  $\hat{H}_T$  usando la ecuación 19. Si  $|\hat{H}_T - H_T| \leq \eta$  donde  $\eta$  es un error (e.g.  $\eta = 1 \times 10^{-6}$ ), ir a 6. Si  $|\hat{H}_T - H_T| > \eta$ , actualizar el valor de  $h_{f_1}$ , como:

$$h_{f_1}^t = h_{f_1}^{t-1} + \Delta h_{f_1} \quad (29)$$

donde  $\Delta h_{f_1}$ , se calcula como

$$\Delta h_{f_i} = (H_T - \hat{H}_T) \frac{L_1/D_1^5}{\sum_{i=1}^n L_i/D_i^5} \quad (30)$$

Una vez calculado el nuevo  $h_{f_1}$  ir a 3.

6. Imprimir  $Q_i$  donde  $i = 1 \dots n$ .

### 2.3 Cálculo de la potencia requerida

A continuación se describe el proceso para solucionar este tipo de problemas que consiste en determinar la cabeza de energía de la bomba ( $h_b$ ) y su potencia ( $P$ ).

1. Leer:  $\rho$ ,  $\mu$  o  $\nu$ ,  $K_e$  (coef. de pérdidas a la entrada),  $K_s$  (coef. de pérdidas a la salida),  $E1$ ,  $E2$  y  $Q_T = Q_1$ . También, para cada tubería  $i$ , leer:  $\varepsilon_i, L_i, D_i, \sum K_i, Q_{L_i}, h_{t_i}$  y  $\eta_i$  (eficiencia de la bomba o turbina). Esta lectura se debe hacer para las  $n$  tuberías del sistema.
2. Utilizando la ecuación 22, calcular el valor de  $Q_i$  para  $i = 2 \dots n$ .

3. Para cada una de las tuberías  $i = 1...n$ , calcular: la velocidad como  $V_i = Q_i/A_i$ ,  $f_i$  usando uno de los dos procedimientos descritos en la secciones 1.3.1 y 1.3.2, calcular  $h_{f_i}$  utilizando la ecuación 3 y  $h_{m_i}$  utilizando la ecuación 4.
4. Calcular la cabeza de energía de la bomba ( $h_b$ ) despejandola de la ecuación 2. Note que en esta ecuación,  $h_f$  es la sumatoria de todas  $h_{f_i}$  y  $h_m$  es la sumatoria de todas las  $h_{m_i}$ .
5. Calcular la potencia  $P$  usando la ecuación 17.
6. Imprimir  $h_b$  y  $P$ .

## 2.4 Diseño de la tubería

Como se había mencionado anteriormente, el diseño, y en este caso, de tuberías en serie es un problema complejo por que eso implica buscar, en la mayoría de los casos, la solución óptima desde el punto de vista económico. Por esto, no solo basta con determinar el diámetro si no también el material de la tubería. A esto hay que sumarle que los coeficientes de perdida dependen del material de la tubería, esta es otra variable que hay que tener en cuenta. Esto quiere decir que pueden existir multiples soluciones para un mismo problema.

A continuación se describe el proceso para solucionar este tipo de problemas que consiste en determinar el diámetro óptimo comercial  $D_i$  de la tubería para  $i = 1...n$ . En este proceso se asume que el material es un dato dado.

1. Leer:  $\rho$ ,  $\mu$  o  $\nu$ ,  $K_e$  (coef. de pérdidas a la entrada),  $K_s$  (coef. de pérdidas a la salida),  $E1$ ,  $E2$  y  $Q_T = Q_1$ . También, para cada tubería  $i$ , leer:  $\varepsilon_i$ ,  $L_i$ ,  $\sum K_i$ ,  $Q_{L_i}$ ,  $h_{b_i}$ ,  $h_{t_i}$  y  $\eta_i$  (eficiencia de la bomba o turbina). Esta lectura se debe hacer para las  $n$  tuberías del sistema.
2. Utilizando la ecuación 22, calcular el valor de  $Q_i$  para  $i = 2...n$ .
3. Inicializar  $h_{f_i}$  para cada tubería  $i = 1...n$ . I-pai Wu en 1975 encontró la siguiente ecuación para inicializar  $h_{f_i}$  antes de iniciar las iteraciones:

$$h_{f_i} = H_T \frac{L_i \cos \theta_i}{\sum_{i=1}^n L_i \cos \theta_i} \quad (31)$$

donde  $\theta_i$  es el angulo formado entre la horizontal y la tubería. Usualmente este angulo es el mismo para todas las tuberías ya que todas tienen la misma pendiente, por lo tanto  $\theta = \frac{z_1 - z_2}{\sum_{i=1}^n L_i}$ , donde  $z_1$  es la altura a la entrada del sistema y  $z_2$  es la altura a la salida del sistema.

4. Para cada tubería  $i = 1...n$ 
  - (a) Asumir un diámetro comercial inicial  $D_i$ . El  $D_i$  inicial debe ser pequeño (e.g. 1 pulg.) pero no tan pequeño ya que el procedimiento no converge.
  - (b) Aplicar el procedimiento descrito en la sección 1.3.1 o en la sección 1.3.2. Note que lo único que cambia dentro de estos procedimientos es que la velocidad  $V$  es calculada usando la ecuación 8; ya no es un dato de entrada. De aqui sale un valor de  $f$  y  $V$ .
  - (c) Calcular el nuevo caudal  $Q_{n_i} = V_i A_i$  usando  $D_i$ , donde  $A_i = \frac{\pi D_i^2}{4}$ .
  - (d) Si  $Q_{n_i} > Q_i$  ir a 5. Si  $Q_{n_i} < Q_i$  tomar el siguiente diámetro comercial superior  $D_{i+1}$  e ir a 4a.
5. Para cada tubería  $i = 1...n$ , calcular la velocidad real como  $V_{R_i} = Q_i/A_i$
6. Para cada tubería  $i = 1...n$ , y con el  $D_i$  y  $V_{R_i}$ , calcular  $f_i$  usando el procedimiento descrito en la sección 1.3.1 o en la sección 1.3.2.

7. Para cada tubería  $i = 1...n$ , calcular  $h_{f_{Ri}}$  utilizando la ecuación 3 y  $h_{m_{Ri}}$  utilizando la ecuación 4. Usar en estas ecuaciones  $D_i$  y  $V_{Ri}$ .
8. La energía del sistema a la salida de la tubería  $n$  suele ser superior a la energía requerida del sistema allí ( $E2$ ), por lo que usualmente se utiliza una valvula para hacer caer la energía a  $E2$ . Dicha caída  $h_{m_v}$ , se calcula como:

$$h_{m_v} = H_T - \sum_{i=1}^n h_{f_{Ri}} - \sum_{i=1}^n h_{m_{Ri}} \quad (32)$$

9. Si  $h_{m_v} > 0$  y  $h_{m_v} \approx E2$ , ir a 10. Si  $h_{m_v} \gg E2$ , para cada tubería  $i = 1...n$ , actualizar el valor de  $h_{f_i}$  para la siguiente iteración como:

$$h_{f_i} = h_{f_{Ri}} + h_{m_v} \quad (33)$$

Luego ir a 4.

10. Imprimir  $D_i$  para  $i = 1...n$ .

Es importante revisar que  $h_{m_v}$  sea positivo, de lo contrario esto supondría presiones negativas que podrían generar cavitación en el sistema. El procedimiento anterior puede ser repetido para diferentes materiales de tubería (diferentes valores de  $\varepsilon$ ) con el fin de escoger el diseño más económico.

### 3 Tuberías con pérdida uniforme de caudal por unidad de longitud (Tubos porosos)

En sistemas de riego moderno existen sistemas de tuberías que estan diseñados para entregar un caudal por unidad de longitud con el objetivo de lograr uniformidad en el riego (ver figura 5). Estas tuberías se conocen como *tubos porosos* o *mangueras exudantes*.



Figure 4: Sistema de riego con tubería porosa.

Si se analiza la tubería de la figura 5, se sabe que la presión disminuye a lo largo de la tubería debido a las pérdidas así como la velocidad ya que el caudal disminuye por unidad de longitud. De la figura 5, tenemos:

- Conservación de la masa

$$Q_x = Q_1 - qx \quad (34)$$

donde  $Q_x$  es el caudal en la tubería a una distancia  $x$  de la sección de entrada 1,  $q$  es el caudal descargado por la tubería por unidad de longitud,  $Q_1$  es el caudal a la entrada (1) de la tubería.

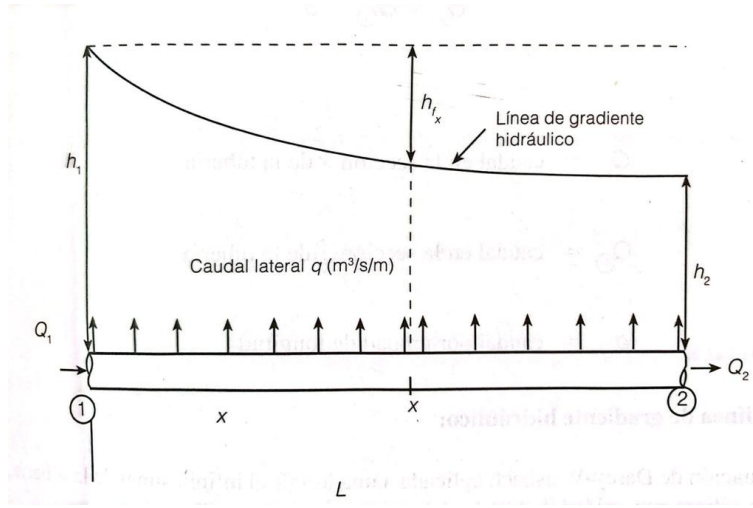


Figure 5: Tubería porosa con entrega de caudal por unidad de longitud ( $q$ ) y su línea de gradiente hidráulico (tomado de [1]).

- Pendiente de la línea de gradiente hidráulico Aplicando la ecuación de Darcy-Weisbach (para pérdidas por fricción), e ignorando pérdidas menores, para una longitud infinitesimal de tubería  $dx$ , en donde no existe salida de caudal, se tiene:

$$dh_f = f_x \frac{dx}{D} \frac{V_x^2}{2g} \quad (35)$$

donde  $dh_f$  es la pérdida de energía a lo largo de  $dx$ ,  $f_x$  es el factor de fricción en  $dx$  y  $V_x$  es la velocidad en  $dx$ . Expresando la ecuación 35 en términos del caudal  $Q_x$ , se tiene:

$$\frac{dh_f}{dx} = \frac{f_x}{2g} \frac{Q_x^2}{DA^2} \quad (36)$$

o

$$\frac{dh_f}{dx} = \frac{8f_x Q_x^2}{\pi^2 g D^5} \quad (37)$$

reemplazando la ecuación 34 en la ecuación 37, se tiene:

$$\frac{dh_f}{dx} = \frac{8}{\pi^2 g D^5} f_x (Q_1 - qx)^2 \quad (38)$$

Integrando la ecuación 38 para calcular las pérdidas a lo largo de la longitud de la tubería ( $L$ ), se tiene:

$$h_f = \frac{8}{\pi^2 g D^5} \int_0^L f_x (Q_1 - qx)^2 dx \quad (39)$$

donde  $f_x$  esta dado por la ecuación de Colebrook-White:

$$\frac{1}{\sqrt{f_x}} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.52\nu}{V_x D \sqrt{f_x}} \right) \quad (40)$$

Note que la ecuación 39 no se puede resolver analíticamente ya que el valor de  $f_x$ , coeficiente de fricción a una distancia  $x$ , se calcula a través de la ecuación implícita 40. Sin embargo la ecuación 39 se puede resolver aproximadamente utilizando los métodos siguientes:

1. Factor de fricción constante

Si se supone que  $f_x$  es constante y se calcula como el promedio del factor de fricción a la entrada ( $f_1$ ) y a la salida ( $f_L$ ):

$$f_x = \frac{f_1 + f_L}{2} \quad (41)$$

integrando la ecuación 39 para  $x$ , se tiene:

$$h_f = \frac{8f_x}{\pi^2 g D^5} \left( Q_1^2 x - Q_1 q x^2 + \frac{q^2 x^3}{3} \right) \Bigg|_{x=0}^{x=L} \quad (42)$$

en donde se obtiene:

$$h_f = \frac{8f_x}{\pi^2 g D^5} \left( Q_1^2 L - Q_1 q L^2 + \frac{q^2 L^3}{3} \right) \quad (43)$$

2. Factor de fricción constante tramo a tramo

Para utilizar este método se supone que la tubería de longitud  $L$  está dividida en  $n$  tramos de igual longitud  $l = L/n$ . Por lo tanto se calculan las pérdidas para cada tramo de la tubería suponiendo que  $f_x$  es constante en el tramo, y luego se suman. Las pérdidas de energía  $h_{f_i}$  para un tramo  $i$  donde  $i = 1 \dots n$  son:

$$h_{f_i} = \frac{8f_{x_i}}{\pi^2 g D^5} \left( Q_{1_i}^2 l - Q_{1_i} q l^2 + \frac{q^2 l^3}{3} \right) \quad (44)$$

donde  $Q_{1_i}$  es el caudal transportado por el tramo  $i$  e igual a  $Q_{1_i} = Q_1 - ql(i-1)$ . Note que  $f_{x_i}$  es el promedio entre tramos:

$$f_{x_i} = \frac{f_i + f_{i+1}}{2} \quad (45)$$

Las pérdidas totales a lo largo de la tubería se calculan como:

$$h_f = \sum_{i=1}^n h_{f_i} \quad (46)$$

El procedimiento para el cálculo de la pérdida de energía en una tubería porosa se describe a continuación.

1. Calcular el caudal de entrada a la tubería ( $Q_1$ ) de longitud  $L$  como:

$$Q_1 = qL \quad (47)$$

2. Cálculo de la zona laminar. Debido a que la manguera o tubería va perdiendo caudal su velocidad disminuye y el flujo, en algún punto, se convierte en laminar. Para calcular ese punto, se asume un número de Reynolds crítico (donde cambia a laminar) igual a  $Re_c = 2000$ . Dicho caudal, para el cual ocurre  $Re_c$ , se calcula como:

$$Q_c = \frac{Re_c \pi D \nu}{4} \quad (48)$$

la distancia desde el final de la tubería en donde el flujo cambia a laminar, se calcula como:

$$L_c = \frac{L_c Q_c}{Q_1} \quad (49)$$

Teniendo en cuenta que en los últimos tramos de la tubería ( $x < x_c$ ) el número de Reynolds tiende a cero, el  $f$  tiende a infinito. Por esto, es necesario dejar cierta longitud de la tubería en donde no se calculan pérdidas. En estos últimos tramos, las pérdidas son muy pequeñas por lo tanto no influyen en el resultado final. Dicho valor puede ser el 0.3% de  $L$ .

3. Implementar cualquiera de los dos métodos descritos: 1) factor de fricción constante para la tubería y 2) factor de fricción constante tramo a tramo.

## 4 Sistemas de tuberías en paralelo

Las tuberías en paralelo son un conjunto de dos tuberías o mas las cuales se derivan de un nodo común (nodo de entrada) y convergen hacia otro nodo (nodo de salida). Esto implica que, de acuerdo a la *ley de conservación de la masa*, la suma de los caudales que viajan por cada una de las tuberías debe ser igual aguas arriba del nodo de entrada y aguas abajo del nodo de salida; esto implica que el caudal de entrada y de salida de las tuberías es el mismo. En casos prácticos y cotidianos, los sistemas de tuberías en paralelo están limitados a máximo 3 o 4 tuberías, y son mas comunes los sistemas de dos tuberías. En estos sistemas, cada tubería puede tener longitudes, diámetros, accesorios y materiales diferentes.



Figure 6: Aumento de la capacidad de un acueducto veredal mediante la construcción de una tercera tubería.

### 4.1 Ecuaciones para la solución de problemas

Teniendo en cuenta las tuberías en paralelo de la figura 7, se plantean las siguientes ecuaciones:

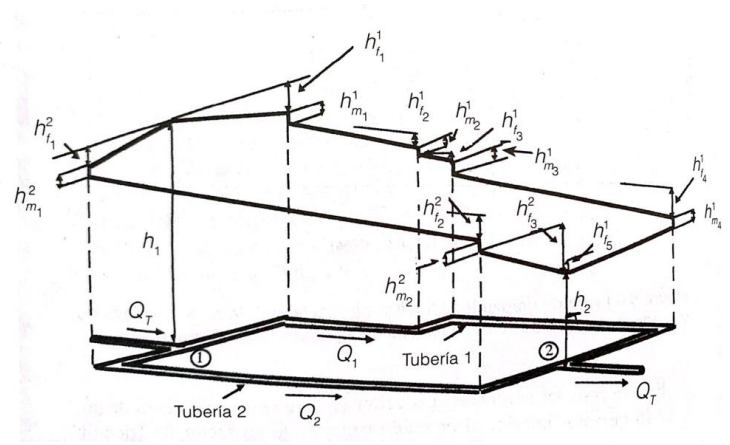


Figure 7: Esquema tridimensional de dos tuberías en paralelo y sus líneas de energía, con un nodo de entrada 1 y un nodo de salida 2. (tomado de [1]).

### Conservación de la energía

$$\Delta E = E1 - E2 = H_T = h_{f1}^1 + h_{m1}^1 + h_{f2}^1 + h_{m2}^1 + h_{f3}^1 + h_{m3}^1 + h_{f4}^1 + h_{m4}^1 + h_{f5}^1 \quad (50)$$

donde  $H_T$  es la diferencia de energía entre el nodo de entrada (E1) y el nodo de salida (E2); la energía total disponible en el sistema,  $h_{f_i}^j$  son las pérdidas por fricción en el tramo  $i = 1 \dots 5$  de la tubería  $j = 1$  y  $h_{m_i}^j$  son las pérdidas menores (por válvulas, uniones, etc) en el tramo  $i = 1 \dots 4$  de la tubería  $j = 1$ .

La ecuación 50 puede expresarse de forma más compacta como:

$$H_T = \sum_{i=1}^{n_j} h_{f_i}^j + \sum_{i=1}^{m_j} h_{m_i}^j \quad (51)$$

donde  $n_j$  es el número de tramos de la tubería  $j = 1$  y  $m_j$  es el número de accesorios en la tubería  $j = 1$ . Note que la ecuación 51 aplica también para la tubería  $j = 2$ .

De acuerdo con la *ley de conservación de la energía*, esto implica que las pérdidas de energía en la dirección del flujo a través de la tubería 1 y 2 es la misma. De acuerdo con esto, la ecuación 51, se escribe como:

$$H_T = \sum_{i=1}^{n_1} h_{f_i}^1 + \sum_{i=1}^{m_1} h_{m_i}^1 = \sum_{i=1}^{n_2} h_{f_i}^2 + \sum_{i=1}^{m_2} h_{m_i}^2 \quad (52)$$

### Conservación de la masa

De acuerdo con la *ley de conservación de la masa*, el caudal que entra al nodo de entrada ( $Q_T$ ), debe ser igual a la suma de los caudales que se distribuyen en las tuberías e igual al caudal en el nodo de salida. Para el esquema de la figura 7, se tiene que:

$$Q_T = Q_1 + Q_2 \quad (53)$$

donde  $Q_1$  es el caudal que transporta la tubería 1 y  $Q_2$  es el caudal que transporta la tubería 2. En general para un numero  $n$  de tuberías en paralelo, se tiene:

$$Q_T = \sum_{i=1}^n Q_i \quad (54)$$



## 4.2 Comprobación de diseño

Para este caso se conocen las características físicas de  $n$  tuberías, los accesorios en cada una de ellas, la energía disponible en el sistema y las propiedades del fluido circulante. Se desea entonces conocer los caudales individuales en cada tubería ( $Q_i$ ). A continuación se presenta el procedimiento de cálculo:

1. Leer:  $\rho$ ,  $\mu$  o  $\nu$ ,  $h_b$  (Cabeza de la bomba),  $E1$  y  $E2$ . También, para cada tubería  $i$ , leer:  $\varepsilon_i$ ,  $L_i$ ,  $D_i$ ,  $\sum K_i$ ,  $h_{t_i}$  y  $\eta_i$  (eficiencia de la turbina). Esta lectura se debe hacer para las  $n$  tuberías del sistema.
2. Para cada una de las  $n$  tuberías en paralelo, hacer la comprobación de diseño para tuberías simples descrito en la sección 1.4. Se obtendrán  $n$  caudales  $Q$  y  $n$  velocidades  $V$  para cada tubería.
3. El caudal total  $Q_T$  se obtendra usando la ecuación 54.

## 4.3 Cálculo de la potencia requerida

A continuación se describe el proceso para solucionar este tipo de problemas que consiste en determinar la presión en el nodo de entrada (1) o en el nodo de salida (2) de las tuberías en paralelo. Con esto es posible calcular la potencia consumida por el flujo a través de las tuberías en paralelo.

Uno de los problemas es que, a pesar de que el caudal total  $Q_T$  es un dato dado en el problema, no se sabe como éste se distribuye a través de las tuberías. Para esto se ha encontrado la siguiente ecuación a partir de la ecuación de Darcy-Weisbach:

$$Q_1^k = Q_T \frac{d_1^{5/2}/\sqrt{l_1}}{\sum_{i=1}^n d_i^{5/2}/\sqrt{l_i}} \quad (55)$$

en donde  $l_1$  es la longitud de la tubería 1 y  $d_1$  es el diámetro de la tubería 1. La ecuación 55 sirve para inicializar el caudal  $Q_1^k$  en la tubería 1. Con este caudal  $Q_1^k$  es posible calcular la energía (presión) en el nodo 1 o nodo 2 siguiendo el algoritmo de la sección 1.5. Una vez se tiene la energía disponible en el sistema ( $E_1 - E_2$ ), es posible calcular el caudal en cada una de las otras  $n - 1$  tuberías siguiendo el algoritmo de la sección 1.4. Sin embargo, es posible que la sumatoria de los  $n$  caudales no se sea igual a  $Q_T$ , por lo que es necesario corregir la suposición inicial de  $Q_1$  como:

$$Q_1^{k+1} = Q_1^k \frac{Q_T}{Q_T^*} \quad (56)$$

donde

$$Q_T^* = \sum_{i=1}^n Q_i^k \quad (57)$$

es el caudal total estimado para la iteración  $k$ . El proceso de iteración termina cuando  $Q_T = Q_T^*$ .

A continuación se describe el algoritmo para encontrar la presión (energía) en el nodo de entrada o de salida al sistema y la potencia disipada.

1. Leer:  $\rho$ ,  $\mu$  o  $\nu$ ,  $h_b$  (Cabeza de la bomba),  $Q_T$  y  $E1$  o  $E2$ . También, para cada tubería  $i$ , leer:  $\varepsilon_i$ ,  $L_i$ ,  $D_i$ ,  $\sum K_i$ ,  $h_{t_i}$  y  $\eta_i$  (eficiencia de la turbina). Esta lectura se debe hacer para las  $n$  tuberías del sistema.
2. Inicializar el caudal transportado por la tubería 1 ( $Q_1$ ) usando la ecuación 55.
3. Con base en el caudal  $Q_1$  determinar la energía en el nodo 1 ( $E_1$ ) o en el nodo 2 ( $E_2$ ) siguiendo el algoritmo de la sección 1.5.
4. Una vez calculada la energía en el nodo 1 ( $E_1$ ) o en el nodo 2 ( $E_2$ ) para cada una de las  $n - 1$  tuberías restantes, calcular el caudal  $Q$  siguiendo el procedimiento descrito en la sección 1.4.



5. Una vez calculado el caudal  $Q$  en cada tubería, calcular el caudal total estimado  $Q_T^*$  para la iteración  $k$ . Si  $|Q_T - Q_T^*| \leq \eta$ , donde  $\eta$  es un error (e.g.  $\eta = 1 \times 10^{-6}$ ), ir a 6. Si  $|Q_T - Q_T^*| > \eta$ , corregir  $Q_1$  usando la ecuación 56 e ir a 3.
6. Imprimir  $E1$  o  $E2$  y  $Q_i$  donde  $i = 1 \cdots n$ . Con base en las pérdidas a lo largo de la tubería  $i$ , calcular la potencia disipada en el sistema.

#### 4.4 Diseño de tuberías en paralelo

En la practica en ingeniería no es común diseñar sistemas de tuberías en paralelo debido a su ineficiencia a nivel hidráulico ya que el perímetro mojado de 2 o mas tuberías es mayor que el perímetro mojado de una sola tubería. Este diseño solo se justifica si el diámetro de diseño es mayor al diámetro comercial disponible. De ser así, cada tubería se diseña como una tubería simple para un caudal  $Q_T/n$ , donde  $n$  es el número de tuberías en paralelo. Sin embargo, lo que si es común es la ampliación de un sistema conformado por una tubería simple ya existente debido a un incremento en la demanda, lo cual es común en acueductos y sistemas de riego. Para esta ampliación se diseña y se construye una tubería paralela a la ya existen para la cual se conocen sus características. Para este diseño se conoce el nuevo caudal total  $Q_T$ , la energía en el nodo de entrada al sistema y las características de las tuberías. Las incógnitas son el diámetro de la nueva tubería y la energía en el nodo de salida del sistema. Note que la energía en el nodo final será diferente a la energía inicial para este nodo (antes de la ampliación) ya que la hidráulica de la tubería existente se modifica también.

A continuación se presenta un algoritmo para el diseño de la nueva tubería (número 2), en donde la tubería 1 es existente.

1. Leer:  $\rho$ ,  $\mu$  o  $\nu$ ,  $h_b$  (Cabeza de la bomba),  $Q_1$ ,  $Q_T$ ,  $E1$  (energía del nodo a la entrada) y  $E2$  (energía del nodo a la salida. Esta energía cambia durante el proceso). También, para cada tubería  $i$ , leer:  $\varepsilon_i$ ,  $L_i$ ,  $\sum K_i$ ,  $h_{t_i}$  y  $\eta_i$  (eficiencia de la turbina) donde  $i = 1 \cdots 2$ . Leer el diametro  $D$  de la tubería existente.
2. Calcular el caudal por la tubería 2:  $Q_2 = Q_T - Q_1$ .
3. Diseñar la tubería 2 como una tubería simple siguiendo el procedimiento descrito en la sección 1.6. Teniendo en cuenta que, debido a que el diámetro comercial siempre deja pasar mas caudal,  $Q_2$  es mayor al caudal deseado (caudal inicial), la energía en el nodo 2 aumenta y por lo tanto el caudal  $Q_1$  cambia también.
4. De aquí en adelante se vuelve un problema de cálculo de la potencia requerida para dos tuberías en paralelo partiendo del numeral 2 en el procedimiento descrito en la sección 4.3.

### 5 Redes abiertas de tuberías

En la practica, los sistemas de tuberías suelen ser mas complejos que tuberías simples, en serie o en paralelo, por lo que las tuberías suelen estar conectadas unas con otras formando diferentes configuraciones. Las tuberías ramificadas o *redes abiertas de tuberías* suelen ser las tuberías principales (líneas madres o expresas) en sistemas de acueductos, sistemas de irrigación o sistemas de tratamiento de agua, que están compuestas ademas por tanques de almacenamiento, desarenadores, plantas de tratamiento y obras de captación (ver 9). En muchos casos estas redes abiertas están conectadas a redes cerradas.

Los problemas que se estudiaran para redes cerradas son el problema de comprobación de diseño, el cual busca determinar los caudales en cada una de las tuberías, y el de diseño de la red en donde se determina el diámetro de cada tubería. Note que el problema de cálculo de la potencia no es pertinente ya que la energía del sistema siempre es un dato dado que es determinado por la localización topográfica de la red o por la energía suministrada por un bomba en una tubería.

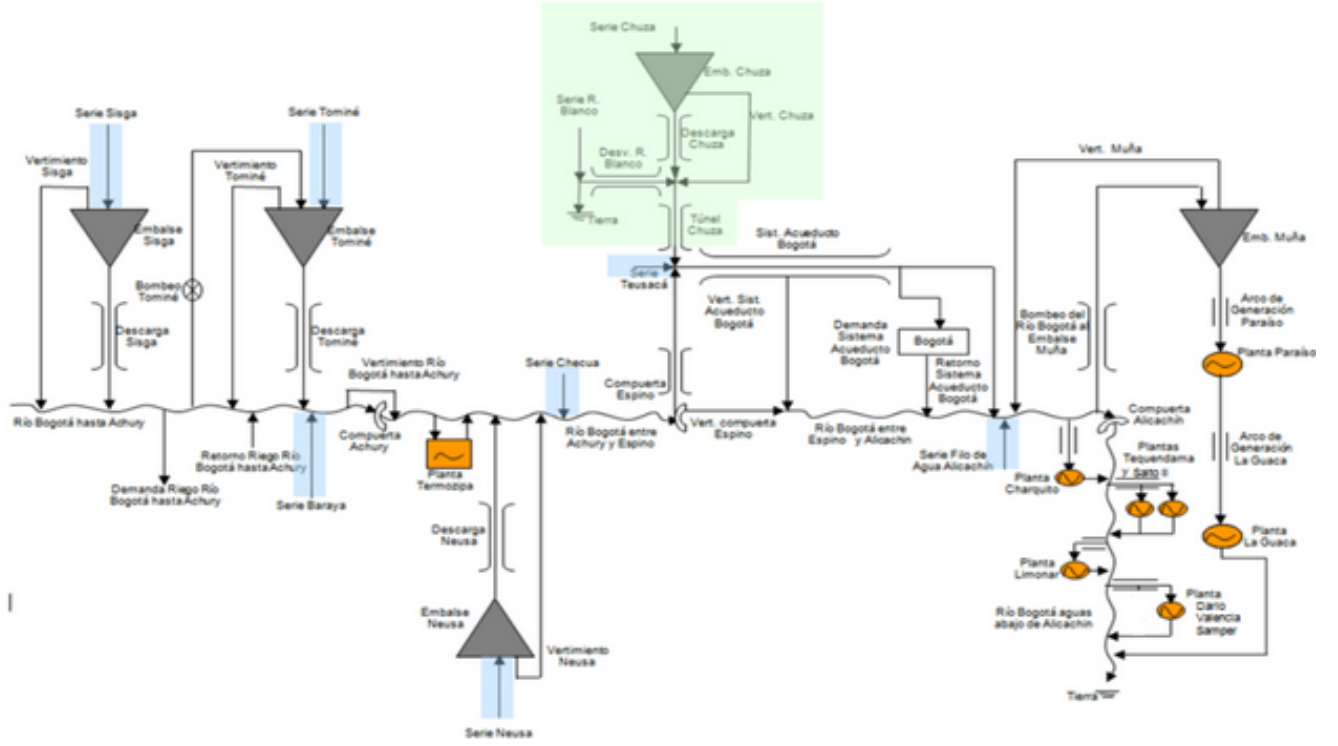


Figure 8: Red de embalses de para el sumunistro de agua en Bogotá D.C.

## 5.1 Ecuaciones para la solución de problemas

Teniendo en cuenta la figura 10, se plantean las siguientes leyes de conservación para la solución de problemas de redes abiertas.

### Conservación de la masa

En una red abierta es necesario conservar la masa a lo largo de toda la red. Se plantea entonces que en cada nodo se conserva la masa, teniendo en cuenta las posibles demandas desde los tanques de almacenamiento y desde los nodos. Analizando la red de la figura 10 se tiene que el tanque de distribución A conduce el caudal total demandado a través de la tubería madre AU hacia el nodo U de donde se distribuye el caudal hacia los tanques B,C y D, de donde se derivan unas demandas. De acuerdo con esto, la ecuación de conservación de la masa en el nodo U es:

$$\sum_{i=1}^n Q_{iU} - Q_{LU} = 0 \quad (58)$$

donde  $Q_{iU}$  es el caudal en la tubería  $iU$ ,  $Q_{LU}$  es el caudal demandado en el nodo  $U$  que puede ser cero, y  $n$  es el número de tuberías conectadas con el nodo  $U$ .

### Conservación de la energía

De acuerdo con la figura 10, la ecuacion de conservación de la energía entre un tanque  $i = A, B, C, D$  y un nodo  $U$ , se expresa como:

$$|Z_i - Z_U| = H_{t_{iU}} = \left( f_{iU} \frac{L_{iU}}{D_{iU}} + \sum K_{iU} \right) \frac{V_{iU}^2}{2g} \quad (59)$$

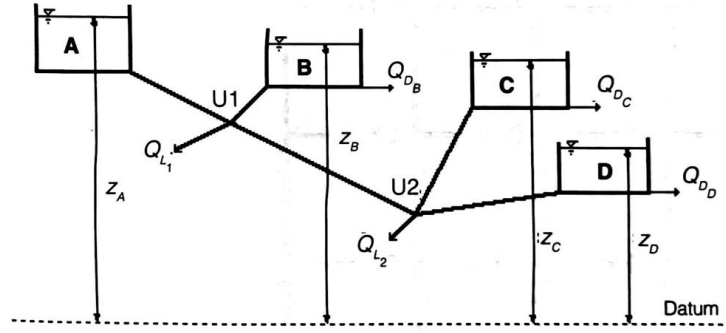


Figure 9: Red abierta compuesta por tuberías, tanques de almacenamiento y nodos (tomado de [1]).

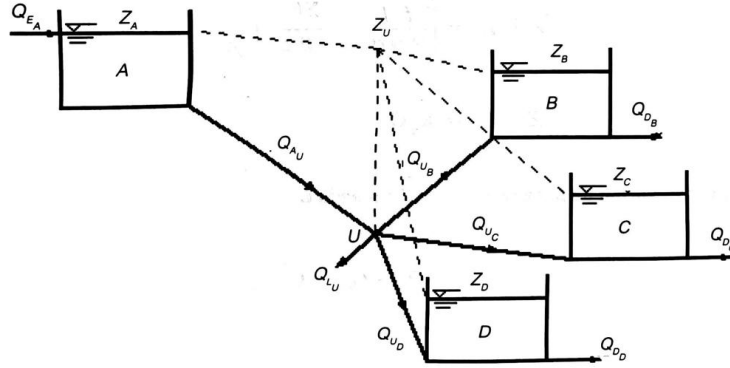


Figure 10: Red abierta conectando un tanque de suministro A, al cual llega un caudal total demandado, con los tanques de almacenamiento B,C y D, de los cuales se demandan caudales (tomado de [1]).

donde  $Ht_{iU}$  es la energía disponible entre  $iU$ ,  $Z_U$  es la cabeza piezométrica en la unión (siempre es desconocida),  $Z_i$  es la cabeza piezométrica en el tanque  $i$ ,  $V_{iU}$  es la velocidad de flujo en la tubería  $iU$ ,  $d_{iU}$  es el diámetro en la tubería  $iU$ ,  $L_{iU}$  es la longitud de la tubería  $iU$ ,  $f_{iU}$  es el factor de fricción de Darcy en la tubería  $iU$  y  $\sum K_{iU}$  es el coeficiente de global de pérdidas menores en la tubería  $iU$ .

La ecuación 59 se puede expresar en términos del caudal como:

$$|Z_i - Z_U| = Ht_{iU} = \left( f_{iU} \frac{L_{iU}}{2gD_{iU}} + \frac{\sum K_{iU}}{2g} \right) \frac{Q_{iU}^2}{A_{iU}^2} \quad (60)$$

## 5.2 Comprobación de diseño

En este caso se conocen las características del fluido transportado, las características de las tuberías (diámetros, rugosidades y longitudes), las cotas de los tanques que integran el sistema y las posibles demandas de caudal en los nodos. Se desea conocer el caudal total demandado y las demandas de caudal en cada uno de los tanques  $Q_{L_i}$ . El proceso iterativo se basa en el proceso de comprobación de diseño para tuberías simples aplicado a cada tubería del sistema. Sin embargo como las cabeza de energía ( $Z_{U_j}$ ) en los nodos no son conocidas estas se deben ir corrigiendo en el proceso de iteración hasta cumplir (aproximadamente) con la ecuación 58 en cada nodo. A continuación se presenta un algoritmo para resolver este tipo de problemas:

1. Leer:  $\rho$  y  $\mu$  o  $\nu$ . Para cada tubería  $i = 1 \cdots n$ , leer:  $\varepsilon_i$ ,  $L_i$ ,  $D_i$ ,  $\sum K_i$ ,  $h_{p_i}$  y  $\eta_i$  (eficiencia de la bomba). Para cada embalse o tanque de almacenamiento  $i$  leer la cota piezométrica  $Z_i$ . Para cada nodo  $j = 1 \cdots m$ , leer la demanda de caudal en el nodo  $Q_{L_{U_j}}$ .

2. Estimar los valores iniciales de  $Z_{U_j}$ . Esta estimación se debe hacer cuidadosamente ya que el algoritmo puede converger hacia una solución errada (quedar atrapado en un mínimo local de la función objetivo). En el caso en donde no existan bombas en las tuberías los valores de  $Z_{U_j}$  pueden asumirse por debajo del tanque principal y por encima de los tanques a los que se distribuye el flujo. En el caso de un tramo con un sistema de bombeo  $Z_{U_j}$  puede asumirse por debajo del tanque al cual se esta bombeando.
3. Para cada tubería  $i = 1 \cdots n$ , calcular el caudal siguiendo el algoritmo de comprobación de diseño para tuberías simples descrito en la sección 1.4.
4. Para cada nodo  $j = 1 \cdots m$  comprobar que  $|\sum_{i=1}^n Q_{ij} - Q_{L_{U_j}}| \leq \eta$ , donde  $\eta$  es un error (e.g.  $\eta = 1 \times 10^{-6}$ ). Note que  $Q_{ij}$  es positivo si entra al nodo y es negativo si sale del nodo. Si esta condición no se cumple se debe corregir  $Z_{U_j}$  de la siguiente manera:

$$Z_{U_j}^t = Z_{U_j}^{t+1} + \Delta Z_{U_j} \quad (61)$$

donde  $\Delta Z_{U_j}$  es la corrección que se debe calcular siguiendo la metodología de R.J. Cornish (1940) como:

$$\Delta Z_{U_j} = \frac{2 \left( \sum_{i=1}^n Q_{ij} - Q_{L_{U_j}} \right)}{\sum_{i=1}^n \frac{Q_{ij}}{Z_i - Z_{U_j}}} \quad (62)$$

Note que en la medida que la condición  $|\sum_{i=1}^n Q_{ij} - Q_{L_{U_j}}|$  se va acercando a cero, el valor de  $\Delta Z_{U_j}$  también se acerca a cero. El proceso termina cuando  $\sum_{j=1}^m |\Delta Z_{U_j}| \leq \eta$ .

5. Imprimir  $Q_{ij}$ , donde  $i = 1 \cdots n$  y  $j = 1 \cdots m$ . También es conveniente imprimir  $Z_{U_j}$ .

### 5.3 Diseño de redes abiertas de tuberías

En este caso se conocen las características del fluido transportado, las características de las tuberías (rugosidades y longitudes), las cotas de los tanques que integran el sistema y las posibles demandas de caudal en los nodos. Se desea conocer el diámetro de cada tubería  $D_i$ . El proceso iterativo se basa en el proceso de comprobación de diseño para tuberías simples aplicado a cada tubería del sistema, asumiendo previamente los diámetros de cada tubería. Sin embargo como las cabezas de energía ( $Z_{U_j}$ ) en los nodos no son conocidas estas se deben ir corrigiendo en el proceso de iteración hasta cumplir (aproximadamente) con la ecuación 58 en cada nodo. A continuación se presenta un algoritmo para resolver este tipo de problemas:

1. Leer:  $\rho$  y  $\mu$  o  $\nu$ . Para cada tubería  $i = 1 \cdots n$ , leer:  $\varepsilon_i$ ,  $L_i$ ,  $\sum K_i$ ,  $h_{p_i}$ ,  $\eta_i$  (eficiencia de la bomba) y  $Q_i$ . Para cada embalse o tanque de almacenamiento  $i$  leer la cota piezométrica  $Z_i$ . Para cada nodo  $j = 1 \cdots m$ , leer la demanda de caudal en el nodo  $Q_{L_{U_j}}$ .
2. Estimar los valores iniciales de  $Z_{U_j}$ . Esta estimación se debe hacer cuidadosamente ya que el algoritmo puede converger hacia una solución errada (quedar atrapado en un mínimo local de la función objetivo). En el caso en donde no existan bombas en las tuberías los valores de  $Z_{U_j}$  pueden asumirse por debajo del tanque principal y por encima de los tanques a los que se distribuye el flujo. En el caso de un tramo con un sistema de bombeo  $Z_{U_j}$  puede asumirse por debajo del tanque al cual se esta bombeando.
3. Diseñar cada tubería  $i = 1 \cdots n$  de la red abierta siguiendo el algoritmo de diseño para tuberías simples descrito en la sección 1.6.

4. Para cada nodo  $j = 1 \cdots m$  y con base en los caudales ( $Q_{ij}$ ) calculados (generalmente diferentes a los leídos en el paso 1) para cada tubería en el paso anterior, determinar la corrección de cabeza de energía para cada nodo con base en la ecuación 62.
5. Verificar que la condición  $\sum_{j=1}^m |\Delta Z_{U_j}| \leq \eta$  donde  $\eta$  es un error (e.g.  $\eta = 1 \times 10^{-6}$ ). Note que  $|\Delta Z_{U_j}| = |Z_{U_j}^t - Z_{U_j}^{t+1}|$ . Si la condición anterior se cumple ir a 6. Si la condición no se cumple ir a 3.
6. Imprimir  $D_i$ , donde  $i = 1 \cdots n$ .

## 6 Redes cerradas



Figure 11: Red cerrada del laboratorio de hidráulica.

Las redes cerradas son también conocidas como *redes de distribución* (en sistemas de abastecimiento de agua). Estas redes se caracterizan por tener al menos un circuito cerrado garantizando que cualquier zona de la red sea alcanzada por una tubería, lo cual incrementa la confiabilidad del abastecimiento. Al igual que en los casos de sistemas de tuberías ya vistos, las ecuaciones para el análisis de redes cerradas se basan en las ecuaciones de conservación de la energía y de la masa, así como de las ecuaciones para el cálculo de las pérdidas. Se presentan aquí los diferentes métodos de análisis para la comprobación de diseño, en donde se calculan los caudales en las tuberías y las presiones en los nodos de las redes. Los métodos se presentan en orden cronológico, en donde los métodos más antiguos son menos eficientes desde el punto de vista computacional.

### 6.1 Principios fundamentales del análisis de redes cerradas

#### Ecuaciones de conservación en los nodos

##### Conservación de la masa

Si se considera la red cerrada de la figura 13 en donde  $Q_{D_1}, Q_{D_2}, Q_{D_3}, \dots, Q_{D_{Nu}}$  son los caudales demandados en los nodos y  $Q_{e_1}, Q_{e_2}, \dots, Q_{e_m}$  son los caudales que alimentan la red, la ecuación de continuidad se puede escribir como:

$$\sum_{i=1}^m Q_e = \sum_{i=1}^{Nu} Q_D \quad (63)$$

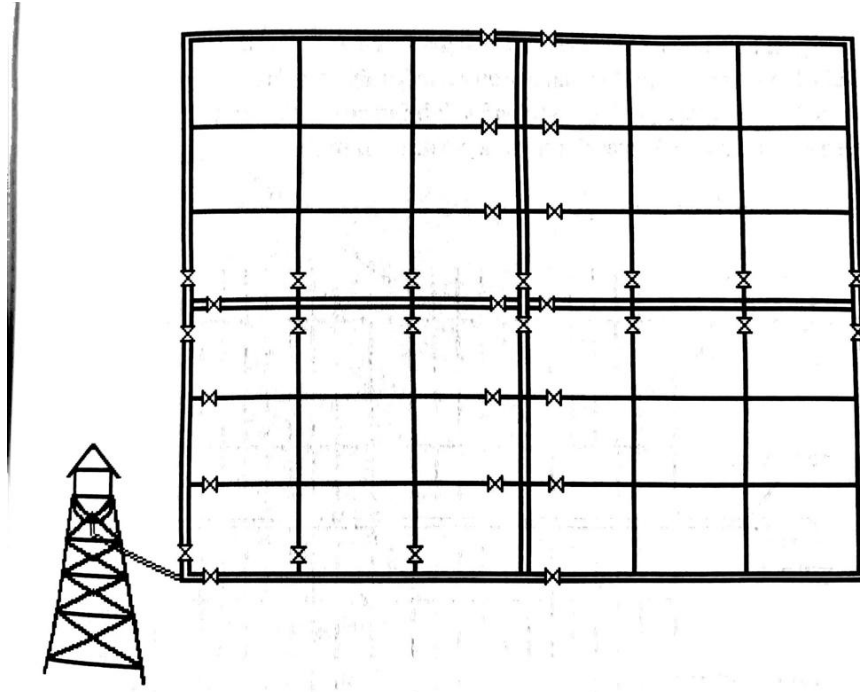


Figure 12: Red cerrada de tuberías de acuerdo con la norma Colombiana (Insfopal) (tomado de [1]).

donde  $m$  es el número de nodos con entrada de caudales a la red y  $Nu$  es el número de nodos con demandas. La ecuación de continuidad para cada nodo, se puede expresar como:

$$\sum_{j=1}^{NT_i} Q_{ij} - Q_{Di} = 0 \quad (64)$$

donde  $NT_i$  es el número de tubos que llegan al nodo  $i$  y  $Q_{ij}$  es el caudal que pasa por la tubería  $ij$  hacia el nodo  $i$  desde el nodo  $j$ .  $Q_{ij}$  es positivo si entra a  $i$  y negativo si sale de este.

### Conservación de la energía

Para cada tramo  $ij$ , se puede expresar la ecuación de conservación de la energía como:

$$H_j - H_i = \sum K_{m_{ij}} \frac{V_{ij}^2}{2g} + h_{f_{ij}} \quad (65)$$

En términos de caudal, la ecuación 65 se expresa como:

$$H_j - H_i = \frac{Q_{ij}^2}{2gA_{ij}^2} \left( \sum K_{m_{ij}} + f_{ij} \frac{L_{ij}}{D_{ij}} \right) \quad (66)$$

despejando  $Q_{ij}$  de la ecuación 66, se tiene:

$$Q_{ij} = \left( \frac{H_j - H_i}{\sum K_{m_{ij}} + f_{ij} \frac{L_{ij}}{D_{ij}}} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2g} A_{ij} \quad (67)$$

Con el fin de tener en cuenta el signo de los caudales, la ecuación anterior se expresa como

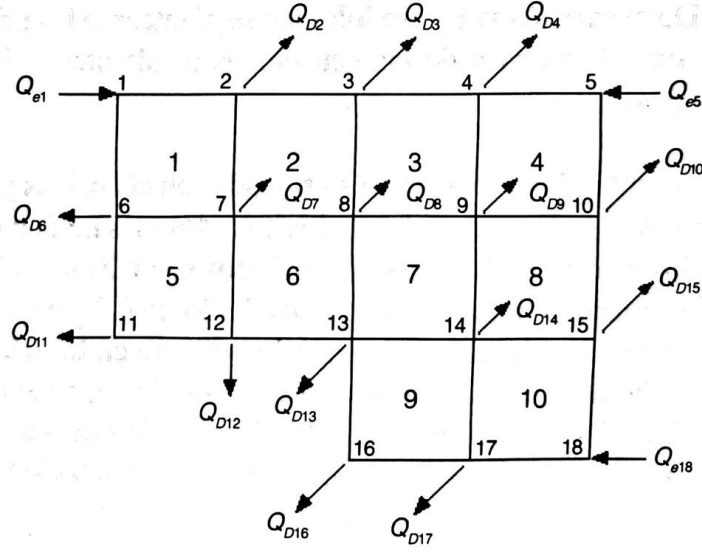


Figure 13: Red cerrada de tuberías en donde se indican los caudales demandados y los caudales que la alimentan (tomado de [1]).

$$Q_{ij} = \left( \frac{H_j - H_i}{\sum K_{m_{ij}} + f_{ij} \frac{L_{ij}}{D_{ij}}} \right) |H_j - H_i|^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2g} A_{ij} \quad (68)$$

Reemplazando la ecuación 67 en la ecuación 64, se tiene:

$$\sum_{j=1}^{NT_i} \left( \frac{H_j - H_i}{\sum K_{m_{ij}} + f_{ij} \frac{L_{ij}}{D_{ij}}} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2g} A_{ij} - Q_{Di} \quad (69)$$

Las ecuaciones 69 se conocen como las *ecuaciones de cabeza*. Como generalmente se conoce una cabeza de energía en uno de los nodos, se tienen  $Nu - 1$  ecuaciones de cabeza en la red, donde  $Nu$  es el numero de nodos de la red.

### Ecuaciones de conservación en los circuitos

Para los circuitos que conforman la red, se deben cumplir las leyes de conservación.

#### Conservación de la masa

Para cada nodo que conforma el circuito se debe cumplir la ecuación 64.

#### Conservación de la energía

Para cada circuito, las pérdidas alrededor del circuito deben ser iguales a cero, es decir:

$$\sum_{j=1}^{NT'_i} h_{f_{ij}} + \sum_{j=1}^{NT'_i} h_{m_{ij}} = 0 \quad (70)$$

donde  $NT'_i$  es el número de tuberías en el circuito  $i$ . La ecuación anterior se puede expresar como:

$$\sum_{j=1}^{NT'_i} \frac{Q_{ij}^2}{2g A_{ij}^2} \left( \sum K_{ij} + f_{ij} \frac{L_{ij}}{D_{ij}} \right) \quad (71)$$

Con el fin de tener en cuenta los signos de los caudales en las tuberías, la ecuación 71 se convierte en:

$$\sum_{j=1}^{NT'_i} \frac{Q_{ij}|Q_{ij}|}{2gA_{ij}^2} \left( \sum K_{ij} + f_{ij} \frac{L_{ij}}{D_{ij}} \right) \quad (72)$$

Las ecuaciones 71 son conocidas como las *ecuaciones de caudal*. Se tienen entonces  $NC$  ecuaciones de caudal, donde  $NC$  es el numero de circuitos en la red. Note que pueden existir circuitos que contienen otros y en todos ellos se deben cumplir las ecuaciones de caudal. Sin embargo el análisis se hace para circuitos independientes.

En total se tienen entonces  $NC + (NU - 1)$  ecuaciones no lineales las cuales sirven para encontrar los caudales en las tuberías y las cabezas de energía en los  $NU - 1$  nodos de la red dadas las características de las tuberías y de fluido circulante. Esto quiere decir que el problema se convierte entonces en una comprobación de diseño más que en un diseño de la red. Es posible para diferentes combinaciones de diámetros y mediante métodos de optimización de los costos de la red obtener los diámetros en la red.

## 6.2 Método de Hardy-Cross con corrección de caudales

Este método desarrollado por H. Cross en 1936, resuelve las ecuaciones 69 y 71 para una red cerrada de tuberías dadas las características de las tuberías y del fluido. Este método corrige en cada iteración los caudales en las tuberías. Si se supone un error  $\Delta Q_i$  en el circuito  $i$ , las perdidas para un tubo se expresan como:

$$h_{f_{ij}} + h_{m_{ij}} = \left( f_{ij} \frac{L_{ij}}{D_{ij}} + \sum K_{m_{ij}} \right) \frac{(Q_{ij} + \Delta Q_i)^2}{2gA_{ij}^2} \quad (73)$$

Si la cabeza de energía en la tubería  $ij$  se define como  $h_{ij} = h_{f_{ij}} + h_{m_{ij}}$ , la ecuación 73 se expresa como:

$$h_{ij} = \left( f_{ij} \frac{L_{ij}}{D_{ij}} + \sum K_{m_{ij}} \right) \frac{(Q_{ij}^2 + 2Q_{ij}\Delta Q_i + \Delta Q_i^2)}{2gA_{ij}^2} \quad (74)$$

Despreciando el término  $\Delta Q_i^2$  en la ecuación 74 ya que es pequeño en relación con los otros dos términos, se tiene:

$$h_{ij} = \left( f_{ij} \frac{L_{ij}}{D_{ij}} + \sum K_{m_{ij}} \right) \frac{(Q_{ij}^2 + 2Q_{ij}\Delta Q_i)}{2gA_{ij}^2} \quad (75)$$

Para el numero de tubos en el circuito  $i$   $NT'_i$ , se tiene:

$$\sum_{j=1}^{NT'_i} \frac{Q_{ij}^2}{2gA_{ij}^2} \left( \sum K_{ij} + f_{ij} \frac{L_{ij}}{D_{ij}} \right) + 2\Delta Q_i \sum_{j=1}^{NT'_i} \frac{Q_{ij}}{2gA_{ij}^2} \left( \sum K_{ij} + f_{ij} \frac{L_{ij}}{D_{ij}} \right) \quad (76)$$

Despejando  $\Delta Q_i$  y simplificando la ecuación 76, tenemos:

$$\Delta Q_i = - \frac{\sum (h_{f_{ij}} + h_{m_{ij}})}{2 \sum \left( \frac{h_{f_{ij}} + h_{m_{ij}}}{Q_{ij}} \right)} \quad (77)$$



## Comprobación de diseño y diseño

Pasos para la comprobación de diseño y para el diseño usando el método de Hardy-Cross con corrección de caudales.

1. Definición de la topología de la red. Los circuitos están conformados por tuberías y la conexión de las tuberías en los circuitos es positiva siguiendo las manecillas del reloj y negativo en sentido contrario. Todos los tubos deben quedar incluidos en al menos un circuito. Definir los nodos con cabeza conocida.
2. Si existe más de un nodo con cabeza conocida es necesario conectarlos a través de una tubería imaginaria formando un circuito que los una. En estas tuberías imaginarias se deben suponer sus características con el fin de calcular el caudal hipotético que circularía por ellas. Sin embargo en las correcciones de caudal, los tubos imaginarios no deben ser incluidos.
3. Se suponen unos caudales iniciales en cada una de las tuberías de la red. Recuerde que los caudales que van en el sentido de las manecillas del reloj son positivos, de lo contrario son negativos. Recuerde además que los caudales que entran a un nodo son positivos y los que salen son negativos.
4. Para cada circuito, calcular las pérdidas a lo largo de cada tubería utilizando la ecuación 71.
5. Se calcula la sumatoria de las pérdidas a lo largo del circuito, teniendo en cuenta que los flujos en sentido de las manecillas del reloj arrojan pérdidas positivas y los flujos en sentido contrario dan pérdidas negativas. Si la sumatoria es diferente de cero, se procede a calcular la corrección de caudal para las tuberías del circuito con la ecuación 77. Note que al balance de pérdidas se deben restar las cabezas de bombas que existiesen en alguna tubería del circuito.
6. Los pasos 4 y 5 se repiten para el número de circuitos. Note que hay tubos comunes en circuitos lo que implica que el caudal por ellos debe estar corregido para el siguiente circuito en la iteración.
7. Los pasos 4,5 y 6 se repiten hasta que las ecuaciones de cabeza (ecuación 69) en los nodos que conforman el circuito se cumplan, es decir, cuando su valor sea muy cercano a 0.

### 6.3 Método de Hardy-Cross con corrección de cabezas

Este método se utiliza para resolver las ecuaciones de cabeza (ecuación 69) para los nodos de la red. Las ecuaciones del método son las ecuaciones 67. Por lo tanto en lugar de suponer caudales en las tuberías, se supone la cabeza en cada uno de los  $(Nu - 1)$  nodos de la red. Note que la cabeza en al menos uno de los nodos debe ser conocida. Luego, se ajustan las cabezas en cada uno de los nodos y el proceso de ajuste se repite hasta que la ecuación de continuidad en los nodos (ecuación 64) se cumpla.

Si se considera que la cabeza  $H_i$  en un nodo  $i$  está sobrestimada o subestimada, el factor de ajuste de cabeza en un nodo  $i$  es  $\Delta H_i$ , la ecuación 67 se convierte en:

$$Q_{ij} = \left( \frac{(H_j - H_i) - \Delta H_i}{\sum K_{m_{ij}} + f_{ij} \frac{L_{ij}}{D_{ij}}} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2g} A_{ij} \quad (78)$$

Analizando el término  $((H_j - H_i) - \Delta H_i)^{1/2}$  y utilizando el teorema del binomio, la ecuación 78 se expresa como:

$$Q_{ij} = \frac{\sqrt{2g} A_{ij}}{\left( \sum K_{m_{ij}} + f_{ij} \frac{L_{ij}}{D_{ij}} \right)^{\frac{1}{2}}} \left( (H_j - H_i)^{1/2} - \frac{1}{2} (H_j - H_i)^{-1/2} \Delta H_i \right) \quad (79)$$

Teniendo en cuenta la ecuación 67 y reemplazando la ecuación 79 en la ecuación de continuidad para un nodo  $i$  (ecuación 64), se tiene que:

$$\sum_{j=1}^{NT_i} Q_{ij} - Q_{Di} - \frac{\Delta H_i}{2} \sum_{j=1}^{NT_i} \frac{Q_{ij}}{H_j - H_i} = 0 \quad (80)$$

Despejando el factor de corrección de cabezas ( $\Delta H_i$ ) para el nodo  $i$ , se tiene que:

$$\Delta H_i = \frac{2(\sum Q_{ij} - Q_{Di})}{\sum \frac{Q_{ij}}{H_j - H_i}} \quad (81)$$

Note que en un nodo  $i$ , en la sumatoria de  $Q_{ij}$  se debe incluir la entrada (posible) de caudal externo  $Q_e$ . Cuando se asumen las primeras cabezas en todo los nodos se calcula  $Q_{ij}$  (utilizando la ecuación 67) y a su vez se corrige la cabeza de tal forma que los próximos caudales se calculan con cabezas corregidas. La cabeza para la iteración siguiente en el nodo  $i$  se calcula como:

$$H_i^{t+1} = H_i^t + \Delta H_i \quad (82)$$

Si en alguna de las tuberías de la red se tiene una bomba rotodinamica, la cabeza de la bomba expresada, por ejemplo, de la siguiente manera:

$$H_B = AQ_{ij}^2 + BQ_{ij} + C \quad (83)$$

afecta el calculo del caudal. Teniendo en cuenta esta adición de energía  $H_B$ , la ecuación 66, queda expresada como:

$$H_B = AQ_{ij}^2 + BQ_{ij} + CH_j - H_i = \frac{Q_{ij}^2}{2gA_{ij}^2} \left( \sum K_{m_{ij}} + f_{ij} \frac{L_{ij}}{D_{ij}} \right) - (AQ_{ij}^2 + BQ_{ij} + C) \quad (84)$$

Teniendo en cuenta que la ecuación 84 tiene la forma de una polinomio de grado 2,  $aQ_{ij}^2 + bQ_{ij} + c = 0$ , la solución es encontrar las raíces reales del polinomio.

### Comprobación de diseño y diseño

Pasos para la comprobación de diseño y para el diseño usando el método de Hardy-Cross con corrección de cabezas.

1. Definición de la topología de la red. Los circuitos están conformados por tuberías y la conexión de las tuberías en los circuitos es positiva siguiendo las manecillas del reloj y negativo en sentido contrario. Todos los tubos deben quedar incluidos en al menos un circuito. Definir los nodos con cabeza conocida.
2. Suponer la cabeza de energía en cada uno de los nodos de la red. Note que al menos un nodo es de cabeza conocida y constante en el tiempo. Entre mejor la estimación de cabezas iniciales, más rápido convergerá el método.
3. Calcular el caudal en cada una de las tuberías utilizando la ecuación 67.
4. Utilizando la ecuación 64, comprobar la conservación de la masa en el nodo  $i$ . Si esta ecuación no se cumple ( $> \eta = 1 \times 10^{-6}$ ), se debe corregir la cabeza del nodo utilizando la ecuación 81.
5. Se repiten los pasos 3 y 4 para cada nodo.
6. El algoritmo se detendrá una vez la ecuación 64 se cumpla (con un margen de error muy pequeño) en todos los nodos de la red.

## 6.4 Comparación de los métodos de Hardy-Cross

- El método de H-C con corrección de caudales converge mas rápido ya que la corrección de caudales en todas las tuberías de circuito se hace de manera simultánea en cada iteración, a diferencia del método de corrección de cabezas en donde la corrección se hace nodo por nodo.
- El método de H-C con corrección de cabezas tiene la ventaja de que inicializar la energía en los nodos es más sensillo, por lo tanto el paso previo al proceso iterativo es más rápido. Esto contrasta con la suposición de caudales iniciales en la red, lo cual es más lento ya que es necesario que se cumpla la conservación de la masa en cada nodo.
- El diseño de redes de tuberías cerradas se hace mediante prueba y error. Esto quiere decir que se asumen diferentes combinaciones de diámetros en la red hasta llegar al diseño más adecuado (óptimo) para la cual hay que correr la red tantas veces como combinaciones de diámetros en la red tengamos. Es por esto que el método de H-C con corrección de cabezas, teniendo en cuenta la rapidez para calcular las cabezas iniciales en los nodos, es más apropiado en general.

## 6.5 Método de análisis lineal

Este método fue desarrollado por D.J Wood y C.O. Charles entre 1970 y 1972. Se basa en la linearización de las ecuaciones de conservación de la energía de cada una de las tuberías de la red. Este conjunto de ecuaciones linealizadas junto con las ecuaciones lineales de conservación de la masa en los nodos de la red, forman un sistema de ecuaciones lineales que se resuelve a traves del algebra lineal. El problema consiste en formar la matriz que contiene los términos de las ecuaciones e invertirla para solucionar el sistema de ecuaciones que son los caudales por cada tubería. Se ha demostrado que este método converge más rápido que los métodos ya explicados.

### Ecuaciones usadas en el método

1. **Conservación de la masa en el nodo:** Para cada nodo de la red, se debe cumplir la ecuación de continuidad:

$$\sum_{j=1}^{NT_i} Q_{ij} - Q_{Di} = 0 \quad (85)$$

Note que los caudales entrantes a la red ( $Q_{ei}$ ) en un nodo  $i$  deben tenerse en cuenta en la ecuación 85. Recuerde que los caudales que entran al nodo son positivos y que los que salen son negativos. Si  $Nu$  es el número de nodos habrá  $Nu$  ecuaciones 85 y una redundante.

2. **Conservación de la energía en el circuito:** Para cada uno de los circuitos de la red se debe cumplir la ecuación de la energía:

$$\sum_{j=1}^{NT_i} h_{f_{ij}} + h_{m_{ij}} = 0 \quad (86)$$

donde  $NT_i$  es el numero de tubos conectados en el circuito  $i$ . Si el numero de circuitos es  $NC$ , se tendrán  $NC$  ecuaciones 86. La ecuación 86 se puede expresar como:

$$\sum_{j=1}^{NT_i} \frac{Q_{ij}}{2gA_{ij}^2} \left( \sum K_{m_{ij}} + f_{ij} \frac{L_{ij}}{D_{ij}} \right) = 0 \quad (87)$$

Note que la ecuación 87 es una ecuación no lineal. Para la solución de las  $NC$  ecuaciones no lineales, las ecuaciones 87, se puede expresar como:

$$\sum_{j=1}^{NT_i} k_{ij} Q_{ij}^2 = 0 \quad (88)$$

$$\text{donde } k_{ij} = \frac{K_{m_{ij}} + f_{ij} \frac{L_{ij}}{D_{ij}}}{2gA_{ij}^2}.$$

Para resolver el sistema de ecuaciones 85 y 88, el método de teoría lineal propone que para un tramo  $ij$ :

$$h_{f_{ij}} + h_{m_{ij}} = k'_{ij} Q_{ij} \quad (89)$$

donde  $k'_{ij} = k_{ij} Q_{0_{ij}}$ . El caudal  $Q_{0_{ij}}$  es el caudal estimado para la primera iteración, o el caudal corregido en la iteración previa para las demás iteraciones. Al reemplazar la ecuación 89 en la ecuación 88, se tiene:

$$\sum_{j=1}^{NT_i} k'_{ij} Q_{ij}^2 = 0 \quad (90)$$

En el caso de existir una bomba en una de las tuberías del circuito, la cual suministra una cabeza de energía  $H_B$ , la ecuación 90 queda:

$$\sum_{j=1}^{NT_i} k'_{ij} Q_{ij}^2 = H_B \quad (91)$$

El número total de ecuaciones a resolver es  $NT = (NU - 1) + NC$ ;  $NU - 1$  ecuaciones 85 y  $NC$  ecuaciones 90. En  $NT$  coincide con el número de tuberías en la red y lo que se desea es encontrar  $Q_{ij}$  para cada tubería.

Para utilizar el método, es necesario estimar caudales iniciales en las tuberías ( $Q_{0_{ij}}$ ). Una de las ventajas del método es que al suponer estos caudales iniciales no es necesario que se conserve la masa en los nodos; los caudales pueden ser los mismos en todas las tuberías. Este método propone que el caudal en la iteración siguiente es igual a:

$$Q_{0_{ij}}^{t+1} = \frac{Q_{0_{ij}}^t + Q_{ij}^t}{2} \quad (92)$$

Las  $NT$  ecuaciones se pueden expresar matricialmente, y el método consiste en invertir la matriz  $NTxNT$  para determinar los caudales  $Q_{ij}$ . Si se tiene la red de la figura 14, se tiene las siguientes ecuaciones que forman el sistema de ecuaciones:

- **Ecuaciones de continuidad en los nodos:** Las siguientes ecuaciones se deducen teniendo en cuenta que los caudales entrantes al nodo son positivos y los caudales salientes son negativos.

$$\begin{aligned} -Q_{12} + Q_{16} &= -Q_E \\ Q_{12} - Q_{23} - Q_{25} &= Q_{D2} \\ Q_{23} - Q_{34} &= Q_{D3} \\ Q_{34} - Q_{45} &= Q_{D4} \\ Q_{25} + Q_{45} - Q_{56} &= Q_{D5} \\ Q_{56} - Q_{61} &= Q_{D6} \quad \text{Redundante} \end{aligned} \quad (93)$$

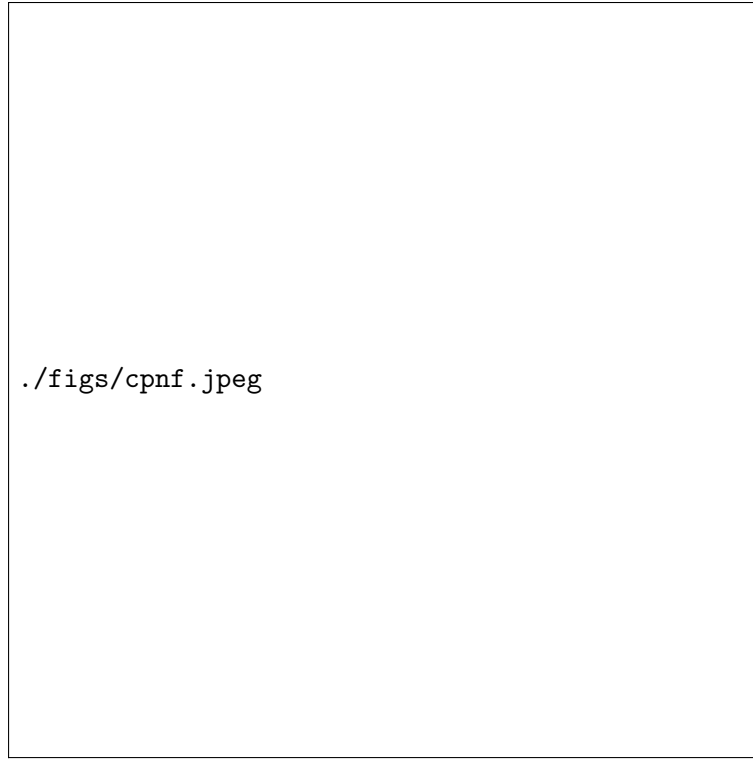


Figure 14: Red cerrada que ilustra el uso del método de programación lineal (tomado de [1]).

- **Ecuaciones de conservación de la energía en los circuitos:** Las siguientes ecuaciones se deducen teniendo en cuenta que las pérdidas de energía en el circuito que siguen las manecillas del reloj son positivas mientras que las pérdidas en sentido contrario son negativas.

$$\begin{aligned} k'_{12}Q_{12} + k'_{25}Q_{25} + k'_{56}Q_{56} + k'_{16}Q_{16} &= 0 \\ k'_{23}Q_{23} + k'_{34}Q_{34} + k'_{45}Q_{45} - k'_{25}Q_{25} &= 0 \end{aligned} \quad (94)$$

Ordenando las ecuaciones 93 y 94 en forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ k'_{12} & 0 & 0 & 0 & k'_{25} & k'_{56} & k'_{61} \\ 0 & k'_{23} & k'_{34} & k'_{45} & -k'_{25} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{12} \\ Q_{23} \\ Q_{34} \\ Q_{45} \\ Q_{25} \\ Q_{56} \\ Q_{61} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_E \\ Q_{D2} \\ Q_{D3} \\ Q_{D4} \\ Q_{D5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (95)$$

La ecuación 95 en la forma compacta, se expresa como:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} \quad (96)$$

La incognita es el vector  $\mathbf{B}$ , el cual contiene los caudales de cada tubería. La solución del sistema es:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{C} \quad (97)$$

Note que los valores de  $k'_{ij}$  se calculan en función de  $Q_{0ij}$  para la primera iteración. Para las iteraciones siguientes  $Q_{0ij}$  es calculado con la ecuación 92.

El algoritmo para solucionar la ecuación 96 utilizando el método de programación lineal es el siguiente:

1. Se suponen todos los caudales en cada una de las tuberías así como la dirección del caudal (siguiendo las manecillas del reloj o en sentido contrario). No es necesario cumplir con ecuación de continuidad en los nodos.
2. Con estos caudales se calculan los valores de  $k'_{ij}$ .
3. Se plantean las ecuaciones lineales de continuidad (ecuación 85) y de conservación de energía (ecuación 90).
4. Se construye la matriz  $\mathbf{A}$  de la ecuación 96.
5. Se encuentran los caudales  $Q_{ij}$  al solucionar la ecuación 97.
6. Utilizando la ecuación 92, se corrigen los caudales  $Q_{0ij}$ .
7. Se calculan de nuevo los valores de  $k'_{ij}$  para los caudales corregidos.
8. Se repiten los pasos 3 al 7 hasta que los caudales  $Q_{ij}$  cambien muy poco entre dos iteraciones sucesivas.

## References

- [1] Juan Guillermo Saldarriaga Valderrama. Hidráulica de tuberías. abastecimiento de agua, redes, riegos. *Editorial Alfaomega, Ediciones Uniandes*, 2007.