

Hidráulica Básica [2015961]
Tema # 2: Análisis de sistemas de tuberías

Luis Alejandro Morales (Ph.D)
Profesor Asistente

Universidad Nacional de Colombia-Bogotá
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola

Contents

1	Sistemas de tuberías simples	2
1.1	Tipos de problema en sistemas de tuberías	2
1.2	Ecuaciones para la solución de problemas	3
1.3	Solución de la ecuación de Colebrook-White	4
1.3.1	Método de punto fijo	4
1.3.2	Método de Newton-Raphson	5
1.4	Comprobación de diseño	6
1.5	Cálculo de la potencia requerida	6
1.6	Diseño de la tubería	6
2	Sistemas de tuberías en serie	7
2.1	Ecuaciones para la solución de problemas	7
2.2	Comprobación de diseño	8
2.3	Cálculo de la potencia requerida	9
2.4	Diseño de la tubería	10
3	Tuberías con pérdida uniforme de caudal por unidad de longitud (Tubos porosos)	11
4	Sistemas de tuberías en paralelo	14
4.1	Ecuaciones para la solución de problemas	14
4.2	Comprobación de diseño	16
4.3	Cálculo de la potencia requerida	16
4.4	Diseño de tuberías en paralelo	17
5	Sistemas de tuberías ramificadas	17
5.1	Ecuaciones para la solución de problemas	18
5.2	Comprobación de diseño	19
6	Redes de distribución: Método de análisis de Cross	20
7	Redes de distribución: Método de análisis lineal	20



Figure 1: Acueductos por gravedad.

1 Sistemas de tuberías simples

Una tubería simple es aquella que tiene un diámetro y esta hecha de un solo material a lo largo de su longitud (ver figura 2). La energía que mueve el flujo dentro de la tubería es gracias a la acción de la gravedad (tanque a la entrada) o a una máquina (sistema de bombeo a la entrada). Dichas tuberías pueden tener cualquier tipo de accesorio a lo largo de su longitud lo que implica unas pérdidas menores. Las ecuaciones de Prandtl, Von-Karman y Darcy-Weisbach vistas en la Unidad 1, son utilizadas para el diseño de tuberías simples. Note que existe cierta dificultad para el diseño teniendo en cuenta que la ecuación de Colebrook-White para calcular el coeficiente de rugosidad f es implícita y requiere un proceso iterativo para su solución. Los algoritmos que aquí se discutirán, constituyen las bases para el análisis y diseño de tuberías más complejos.

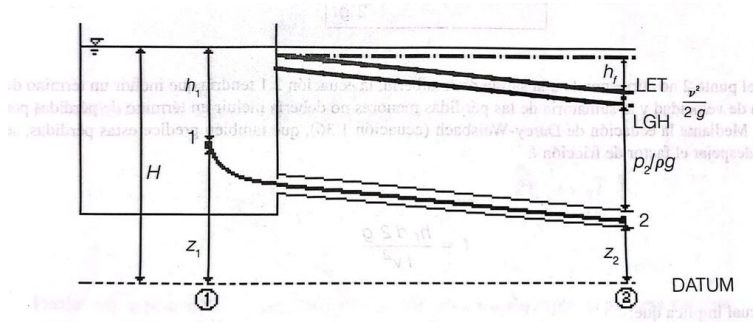


Figure 2: Tubería simple alimentada por un tanque de nivel constante y con descarga a la atmosfera (tomado de [1]).

1.1 Tipos de problema en sistemas de tuberías

Los problemas en sistemas de tuberías se clasifican de acuerdo con las variables desconocidas. Las variables involucradas en estos problemas se pueden clasificar como:

- *Características la tubería:* Diámetro (D), longitud (L), rugosidad absoluta (ϵ).
- *Propiedades del fluido:* Densidad (ρ) y viscosidad dinámica (μ) o cinemática (ν).
- *Variables relacionadas con el esquema del sistema:* Coeficientes de pérdidas menores (K) de todos los accesorios en el sistema.
- *Variables relacionadas con la energía impulsora del sistema:* Cabeza de energía ($H = E1-E2$), entre la energía en el embalse de entrada ($E1$) y la energía salida del sistema ($E2$), o potencia de la bomba (P).

- *Propiedades del flujo*: Caudal (Q) y velocidad (V) del flujo.
- *Otras variables*: Aceleración de la gravedad (g).

De acuerdo con las variables involucradas en sistemas de tuberías, existen tres tipos de problemas:

1. **Comprobación de diseño**: En este tipo de problemas la tubería existe y se conoce su longitud, su diámetro, su rugosidad absoluta (material), al igual que todos los accesorios y sus coeficiente de pérdidas menores. También se conoce la energía impulsora, ya sea una cabeza de energía (gravitacional por diferencia de niveles) o una energía mecánica (suministrada por una bomba). Las propiedades del fluido como la densidad y la viscosidad absoluta son también conocidas. La incógnita es entonces el caudal o la velocidad del flujo en el sistema.

Variables conocidas	Incógnita
D, ε , H (o P), $\sum K$, ρ , μ , g, L	Q (o V)

2. **Cálculo de la potencia requerida**: En este tipo de problemas, el sistema existe por lo que se conocen su longitud, su diámetro, su rugosidad absoluta (material), al igual que todos los accesorios y sus coeficiente de pérdidas menores. Las propiedades del fluido como la densidad y la viscosidad dinámica así como el caudal (o velocidad) que fluye por el sistema son también conocidas. La finalidad es determinar la potencia, ya sea mecánica o gravitacional, requerida para mover cierto caudal a través de la tubería dada.

Variables conocidas	Incógnita
D, ε , Q (o V), $\sum K$, ρ , μ , g, L	P (o H)

3. **Diseño de la tubería**: En este tipo de problemas se conoce el caudal o la velocidad de flujo y la potencia disponible (mecánica o gravitacional), algunas características de la tubería como la longitud, los accesorios y sus coeficientes de pérdida y las propiedades del fluido como la densidad y la viscosidad dinámica. Se desconoce el diámetro necesario para permitir el paso de el caudal demandado. En cuanto a la rugosidad absoluta, se debe cambiar el tipo de tubería (rugosidad absoluta) con el fin de obtener la mejor opción.

Variables conocidas	Incógnita
ε , Q (o V), P (o H), $\sum K$, ρ , μ , g, L	D

1.2 Ecuaciones para la solución de problemas

A continuación se presentan las ecuaciones necesarias para resolver los tres problemas ya mencionadas. Estas ecuaciones fueron discutidas en el capítulo anterior.

Si se tiene una tubería simple cuya entrada es en la sección 1 y cuya salida es en la sección, aplicando la ecuación de Bernoulli entre 1 y 2, de manera general, se tiene:

$$\frac{V_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + h_f + \sum h_e - h_b + h_t \quad (1)$$

donde h_b es la cabeza de energía suministrada por la bomba y h_t es la cabeza de energía sustraída por la turbina. La energía total en una sección (e.g. 1 o 2) de flujo se puede expresar como $E = \frac{V^2}{2g} + z + \frac{p}{\gamma}$, por lo tanto la ecuación 1 se puede expresar como:

$$E_1 - E_2 = h_f + h_e - h_b + h_t \quad (2)$$

en donde h_f son las pérdidas por fricción estimadas con la ecuación de Darcy-Weisbach como:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (3)$$

y h_e son las pérdidas por accesorios, las cuales se pueden calcular como:

$$h_e = \sum K \frac{V^2}{2g} \quad (4)$$

El factor de fricción f en la ecuación 3, se calcula usando el diagrama de Moody o numéricamente usando la ecuación Colebrook-White como:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.52}{Re\sqrt{f}} \right) \quad (5)$$

donde el número de Reynolds (Re) se calcula como

$$Re = \frac{VD}{\nu} \quad (6)$$

Si se reemplaza las ecuaciones 3 y 4 en la ecuación 2, se tiene:

$$E_1 - E_2 = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} + \sum K \frac{V^2}{2g} - h_b + h_t \quad (7)$$

despejando V en la ecuación 7, se tiene:

$$V = \sqrt{2g \frac{E_1 - E_2 + h_b - h_t}{f \frac{L}{D} + \sum K}} \quad (8)$$

En los tres tipos de problemas, el objetivo es usar las ecuaciones 3, 4, 5, 6 y 8 para su solución. Note que la ecuación 5 es una ecuación implícita que requiere del uso de algún método iterativo o numérico para su solución. Note que la ecuación 8 se usa en particular para la solución de problemas de *comprobación de diseño* y de *diseño de tuberías*.

1.3 Solución de la ecuación de Colebrook-White

1.3.1 Metodo de punto fijo

Consiste en el siguiente procedimiento:

1. Leer la información de entrada: ε , ρ , μ o ν , V o Q , D
2. Calcular el Re usando la ecuación 6
3. Si $Re < 2000$ (Flujo laminar), calcular f como:

$$f = Re/64 \quad (9)$$

y luego ir a 6. Si $Re > 2000$ continuar.

4. Asumir un valor inicial de f_i (e.g. $f = 0.01$).

5. Usando la siguiente forma de la ecuación 5, calcular un valor f_{i+1} :

$$f_{i+1} = \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.52}{Re\sqrt{f_i}} \right) \right]^{-2} \quad (10)$$

6. Si $|f_i - f_{i+1}| \leq \eta$, donde η es un error (e.g. $\eta = 1 \times 10^{-6}$), ir a 6. Si $|f_i - f_{i+1}| > \eta$, hacer $f_i = f_{i+1}$ e ir a 6, para calcular un nuevo valor f_{i+1} .

7. Imprimir f

1.3.2 Método de Newton-Raphson

El método de Newton-Rapson es un método numérico para la solución de ecuaciones implícitas. Converge más rápido que el método de punto fijo. Algunas condiciones para poder aplicar el método son para un intervalo l del dominio:

- $f(x)$ debe estar definida en l .
- La función de iteración de $f(x)$ deber ser continua en l .
- La función implícita $f(x)$ debe ser diferenciable ($f'(x)$) en l .

En general la ecuación de Colebrook-White cumple estas condiciones. El método consiste en el siguiente procedimiento:

1. Leer la información de entrada: ε , ρ , μ o ν , V o Q , D
2. Calcular el Re usando la ecuación 6
3. Si $Re < 2000$ (Flujo laminar), calcular f como:

$$f = Re/64 \quad (11)$$

y luego ir a 6. Si $Re > 2000$ continuar.

4. Asumir un valor inicial de f_i (e.g. $f = 0.01$).
5. Calcular

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{f}} \quad (12)$$

6. Calcular

$$f(x_i) = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.52x_i}{Re} \right) \quad (13)$$

7. Calcular

$$f'(x_i) = \left[\frac{-2}{\ln 10} \right] \left[\frac{\frac{2.52}{Re}}{\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.52x_i}{Re}} \right] \quad (14)$$

8. Calcular el nuevo valor de x_{i+1} como:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i) - x_i}{f'(x_i) - 1} \quad (15)$$

9. Si $|x_i - x_{i+1}| \leq \eta$, donde η es un error (e.g. $\eta = 1 \times 10^{-6}$), ir a 6. Si $|x_i - x_{i+1}| > \eta$, hacer $x_i = x_{i+1}$ e ir a 6, para calcular un nuevo valor x_{i+1} .

10. Imprimir f , donde:

$$f = \frac{1}{x_{i+1}^2} \quad (16)$$

1.4 Comprobación de diseño

A continuación se describe el proceso para solucionar este tipo de problemas que consiste en determinar el valor de V o Q .

1. Leer la información de entrada: ε, ρ, μ o $\nu, L, D, \sum K, E1, E2, h_b$ y h_t .
2. Aplicar el procedimiento descrito en la sección 1.3.1 o en la sección 1.3.2. Note que lo único que cambia dentro de estos procedimientos es que la velocidad V es calculada usando la ecuación 8; ya no es un dato de entrada.
3. Imprimir V y f .

1.5 Cálculo de la potencia requerida

A continuación se describe el proceso para solucionar este tipo de problemas que consiste en determinar la cabeza de energía de la bomba (h_b) y su potencia (P).

1. Leer la información de entrada: ε, ρ, μ o $\nu, L, D, \sum K, Q, E1, E2, h_t$ y η .
2. Calcular la velocidad como $V = Q/A$.
3. Aplicar el procedimiento descrito en la sección 1.3.1 o en la sección 1.3.2 para calcular f .
4. Calcular h_f usando la ecuación 3.
5. Calcular h_e usando la ecuación 4.
6. Calcular la cabeza de energía de la bomba (h_b) despejándola de la ecuación 2.
7. Calcular la potencia P como:

$$P = \frac{\rho Q g h_b}{\eta} \quad (17)$$

donde η es la eficiencia de la bomba.

8. Imprimir h_b y P .

1.6 Diseño de la tubería

A continuación se describe el proceso para solucionar este tipo de problemas que consiste en determinar el diámetro óptimo comercial de la tubería.

1. Leer la información de entrada: ε, ρ, μ o $\nu, L, D, \sum K, Q, E1, E2, h_t$ y η .
2. Asumir un diámetro comercial inicial D_i para la tubería. El D_i inicial debe ser pequeño (e.g. 1 pulg.) pero no tan pequeño ya que el procedimiento no converge.

3. Aplicar el procedimiento descrito en la sección 1.3.1 o en la sección 1.3.2. Note que lo único que cambia dentro de estos procedimientos es que la velocidad V es calculada usando la ecuación 8; ya no es un dato de entrada. De aquí sale un valor de f y V .
4. Calcular el nuevo caudal $Q_n = VA$ usando D_i , donde $A = \frac{\pi D_i^2}{4}$.
5. Si $Q_n \geq Q$ ir a 6. Si $Q_n < Q$ tomar el siguiente diámetro comercial superior D_{i+1} e ir a 3.
6. Imprimir D .

El diseño óptimo busca, en la mayoría de los casos, la solución más económica. Por lo tanto es necesario muchas veces diseñar con otros materiales (diferente valor de ε) para encontrar la mejor solución.

2 Sistemas de tuberías en serie

Las tuberías en serie son dos o mas tuberías conectadas una tras de otra con diferente diámetro o rugosidad (material) o ambos (ver figura 3). Estas tuberías son muy comunes en sistemas de riego localizado de alta frecuencia o en líneas de coducción para acueductos veredales. Al igual que en la sección 1, aquí se describirán las ecuaciones generales para resolver problemas relacionados con tuberías en serie y se explicarán los procedimientos para resolver los tres problemas en tuberías: 1) Comprobación de diseño, 2) cálculo de la potencia y 3) diseño de las tuberías.

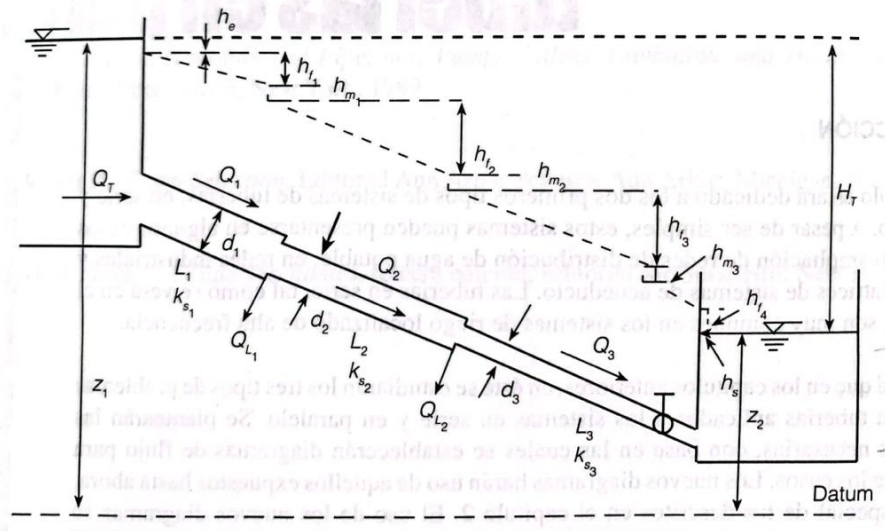


Figure 3: Tres tuberías en serie conectando dos tanques en donde Q_{L_i} representa un caudal lateral de salida al final de la tubería i (tomado de [1]).

2.1 Ecuaciones para la solución de problemas

Teniendo en cuenta las tuberías en serie de la figura 3, se plantean las siguientes ecuaciones:

- Conservación de la energía

$$\Delta E = E1 - E2 = H_T = z_1 - z_2 = h_e + h_{f1} + h_{m1} + h_{f2} + h_{m2} + h_{f3} + h_{m3} + h_s \quad (18)$$

donde H_T es la diferencia de niveles entre los dos tanque (la energía total disponible en el sistema), h_e pérdidas menores de entrada, h_{f_i} pérdidas por fricción en el tubo i , h_{m_i} pérdidas menores (por válvulas, uniones, etc) en la tubería i y h_s pérdidas por salida.

Para un numero n de tuberías en serie la ecuación 18 se puede escribir como:

$$H_T = h_e + \sum_{i=1}^n h_{f_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h_{m_{i,j}} + h_s \quad (19)$$

donde m es numero de accesorios en la tubería i ; m puede ser variable. La ecuación 19 establece que la energía disponible en el sistema se disipa en pérdidas a lo largo de la tubería. Puede haber el caso en el cual tengamos, por ejemplo, una tubería horizontal por lo cual una bomba sería necesaria para impulsar el flujo por lo que en la parte izquierda de la ecuación 18 tendríamos $H_T = h_b$. También se puede dar el caso de una turbina en alguna sección de la tubería por lo que habría que sumarle a la derecha de la ecuación h_t .

Desarrollando la ecuación 19, se tiene:

$$H_T = K_e \left(\frac{V^2}{2g} \right)_1 + \sum_{i=1}^n \left(f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \right)_i + \sum_{i=1}^n \left(\frac{V^2}{2g} \right)_i \sum_{j=1}^m K_j + K_s \left(\frac{V^2}{2g} \right)_n \quad (20)$$

- Conservación de la masa o ecuación de continuidad:

$$Q_T = Q_1 = Q_2 + Q_{L_1} = Q_3 + Q_{L_1} + Q_{L_2} \quad (21)$$

Donde Q_i es el caudal que viaja por la tubería i y Q_{L_i} es el caudal derivado de la tubería i . La ecuación 21 se puede expresar de forma mas compacta como:

$$Q_T = Q_i + \sum_{j=1}^{i-1} Q_{L_j} \quad (22)$$

En caso de que no existiera derivaciones ($Q_{L_i} = 0$) la ecuación 22 queda como:

$$Q_T = Q_1 = \dots = Q_i = \dots = Q_n \quad (23)$$

2.2 Comprobación de diseño

Se desea calcular el valor de $Q_T = Q_1$. Antes de describir el proceso de cálculo, deduciremos una ecuación que se utilizará para resolver este tipo de problemas.

De la ecuación de Darcy-Weisbach, despejando el factor de fricción se tiene que:

$$f = \frac{h_f D 2g}{LV^2} \quad (24)$$

Sacando raíz cuadrada e invirtiendo los términos a ambos lados se tiene:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{V\sqrt{L}}{\sqrt{h_f D 2g}} \quad (25)$$

Igualando a la ecuación de Colebrook-White, se tiene:

$$\frac{V\sqrt{L}}{\sqrt{h_f D 2g}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.52}{Re\sqrt{f}} \right) \quad (26)$$

Reemplazando $Re = \frac{VD}{\nu}$ y la ecuación 25 en la ecuación 26 y despejando la velocidad, se tiene:

$$V = \frac{-2\sqrt{2gDh_f}}{\sqrt{L}} \log \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.52\nu\sqrt{L}}{D\sqrt{2gDh_f}} \right) \quad (27)$$

Note que la ecuación 27 es explícita para la velocidad V .

A continuación se describe el proceso para solucionar este tipo de problemas que consiste en determinar $Q_T = Q_1$.

1. Leer: ρ , μ o ν , K_e (coef. de pérdidas a la entrada), K_s (coef. de pérdidas a la salida), $E1$ y $E2$. También, para cada tubería i , leer: $\varepsilon_i, L_i, D_i, \sum K_i, Q_{L_i}, h_{b_i}, h_{t_i}$ y η_i (eficiencia de la bomba o turbina). Esta lectura se debe hacer para las n tuberías del sistema.
2. Para llevar a cabo este proceso es necesario, para la primera iteración, asumir un valor inicial de h_{f_1} . Se ha encontrado que $h_f \propto \frac{L}{D^5}$, de acuerdo con esto, [1] ha establecido que este valor inicial de h_{f_1} se puede expresar como:

$$h_{f_1} = H_T \frac{L_1/D_1^5}{\sum_{i=1}^n L_i/D_i^5} \quad (28)$$

3. Para la tubería $i = 1$: calcular el valor de V_1 usando la ecuación 27, calcular el caudal $Q_T = Q_1 = V_1 A_1$, calcular el valor de f_1 usando uno de los dos procedimientos descritos en la secciones 1.3.1 y 1.3.2, calcular h_{f_1} utilizando la ecuación 3 y h_{m_1} utilizando la ecuación 4.
4. Para el resto de tuberías $i = 2 \dots n$: calcular el caudal Q_i usando la ecuación 22, calcular la velocidad $V_i = Q_i/A_i$, f_i usando uno de los dos procedimientos descritos en la secciones 1.3.1 y 1.3.2, calcular h_{f_i} utilizando la ecuación 3 y h_{m_i} utilizando la ecuación 4.
5. Calcular la pérdida de energía total estimada \hat{H}_T usando la ecuación 19. Si $|\hat{H}_T - H_T| \leq \eta$ donde η es un error (e.g. $\eta = 1 \times 10^{-6}$), ir a 6. Si $|\hat{H}_T - H_T| > \eta$, actualizar el valor de h_{f_1} , como:

$$h_{f_1}^t = h_{f_1}^{t-1} + \Delta h_{f_1} \quad (29)$$

donde Δh_{f_1} , se calcula como

$$\Delta h_{f_i} = (H_T - \hat{H}_T) \frac{L_1/D_1^5}{\sum_{i=1}^n L_i/D_i^5} \quad (30)$$

Una vez calculado el nuevo h_{f_1} ir a 3.

6. Imprimir Q_i donde $i = 1 \dots n$.

2.3 Cálculo de la potencia requerida

A continuación se describe el proceso para solucionar este tipo de problemas que consiste en determinar la cabeza de energía de la bomba (h_b) y su potencia (P).

1. Leer: ρ , μ o ν , K_e (coef. de pérdidas a la entrada), K_s (coef. de pérdidas a la salida), $E1$, $E2$ y $Q_T = Q_1$. También, para cada tubería i , leer: $\varepsilon_i, L_i, D_i, \sum K_i, Q_{L_i}, h_{t_i}$ y η_i (eficiencia de la bomba o turbina). Esta lectura se debe hacer para las n tuberías del sistema.
2. Utilizando la ecuación 22, calcular el valor de Q_i para $i = 2 \dots n$.

3. Para cada una de las tuberías $i = 1...n$, calcular: la velocidad como $V_i = Q_i/A_i$, f_i usando uno de los dos procedimientos descritos en la secciones 1.3.1 y 1.3.2, calcular h_{f_i} utilizando la ecuación 3 y h_{m_i} utilizando la ecuación 4.
4. Calcular la cabeza de energía de la bomba (h_b) despejandola de la ecuación 2. Note que en esta ecuación, h_f es la sumatoria de todas h_{f_i} y h_m es la sumatoria de todas las h_{m_i} .
5. Calcular la potencia P usando la ecuación 17.
6. Imprimir h_b y P .

2.4 Diseño de la tubería

Como se habia mencionado anteriormente, el diseño, y en este caso, de tuberías en serie es un problema complejo por que eso implica buscar, en la mayoría de los casos, la solución optima desde el punto de vista economico. Por esto, no solo basta con determinar el diametro si no tambien el material de la tubería. A esto hay que sumarle que los coeficiente de perdida dependen del material de la tubería, esta es otra variable que hay que tener en cuenta. Esto quiere decir que pueden existir multiples soluciones para un mismo problema.

A continuación se describe el proceso para solucionar este tipo de problemas que consiste en determinar el diametro óptimo comercial D_i de la tubería para $i = 1...n$. En este proceso se asume que el material es un dato dado.

1. Leer: ρ , μ o ν , K_e (coef. de pérdidas a la entrada), K_s (coef. de pérdidas a la salida), $E1$, $E2$ y $Q_T = Q_1$. También, para cada tubería i , leer: ε_i , L_i , $\sum K_i$, Q_{L_i} , h_{b_i} , h_{t_i} y η_i (eficiencia de la bomba o turbina). Esta lectura se debe hacer para las n tuberías del sistema.
2. Utilizando la ecuación 22, calcular el valor de Q_i para $i = 2...n$.
3. Inicializar h_{f_i} para cada tubería $i = 1...n$. I-pai Wu en 1975 encontró la siguiente ecuación para inicializar h_{f_i} antes de iniciar las iteraciones:

$$h_{f_i} = H_T \frac{L_i \cos \theta_i}{\sum_{i=1}^n L_i \cos \theta_i} \quad (31)$$

donde θ_i es el angulo formado entre la horizontal y la tubería. Usualmente este angulo es el mismo para todas las tuberías ya que todas tienen la misma pendiente, por lo tanto $\theta = \frac{z_1 - z_2}{\sum_{i=1}^n L_i}$, donde z_1 es la altura a la entrada del sistema y z_2 es la altura a la salida del sistema.

4. Para cada tubería $i = 1...n$
 - (a) Asumir un diámetro comercial inicial D_i . El D_i inicial debe ser pequeño (e.g. 1 pulg.) pero no tan pequeño ya que el procedimiento no converge.
 - (b) Aplicar el procedimiento descrito en la sección 1.3.1 o en la sección 1.3.2. Note que lo único que cambia dentro de estos procedimientos es que la velocidad V es calculada usando la ecuación 8; ya no es un dato de entrada. De aqui sale un valor de f y V .
 - (c) Calcular el nuevo caudal $Q_{n_i} = V_i A_i$ usando D_i , donde $A_i = \frac{\pi D_i^2}{4}$.
 - (d) Si $Q_{n_i} > Q_i$ ir a 5. Si $Q_{n_i} < Q_i$ tomar el siguiente diámetro comercial superior D_{i+1} e ir a 4a.
5. Para cada tubería $i = 1...n$, calcular la velocidad real como $V_{R_i} = Q_i/A_i$
6. Para cada tubería $i = 1...n$, y con el D_i y V_{R_i} , calcular f_i usando el procedimiento descrito en la sección 1.3.1 o en la sección 1.3.2.

7. Para cada tubería $i = 1...n$, calcular $h_{f_{Ri}}$ utilizando la ecuación 3 y $h_{m_{Ri}}$ utilizando la ecuación 4. Usar en estas ecuaciones D_i y V_{Ri} .
8. La energía del sistema a la salida de la tubería n suele ser superior a la energía requerida del sistema allí ($E2$), por lo que usualmente se utiliza una valvula para hacer caer la energía a $E2$. Dicha caída h_{m_v} , se calcula como:

$$h_{m_v} = H_T - \sum_{i=1}^n h_{f_{Ri}} - \sum_{i=1}^n h_{m_{Ri}} \quad (32)$$

9. Si $h_{m_v} > 0$ y $h_{m_v} \approx E2$, ir a 10. Si $h_{m_v} \gg E2$, para cada tubería $i = 1...n$, actualizar el valor de h_{f_i} para la siguiente iteración como:

$$h_{f_i} = h_{f_{Ri}} + h_{m_v} \quad (33)$$

Luego ir a 4.

10. Imprimir D_i para $i = 1...n$.

Es importante revisar que h_{m_v} sea positivo, de lo contrario esto supondría presiones negativas que podrían generar cavitación en el sistema. El procedimiento anterior puede ser repetido para diferentes materiales de tubería (diferentes valores de ε) con el fin de escoger el diseño más económico.

3 Tuberías con pérdida uniforme de caudal por unidad de longitud (Tubos porosos)

En sistemas de riego moderno existen sistemas de tuberías que estan diseñados para entregar un caudal por unidad de longitud con el objetivo de lograr uniformidad en el riego (ver figura 5). Estas tuberías se conocen como *tubos porosos* o *mangueras exudantes*.



Figure 4: Sistema de riego con tubería porosa.

Si se analiza la tubería de la figura 5, se sabe que la presión disminuye a lo largo de la tubería debido a las pérdidas así como la velocidad ya que el caudal disminuye por unidad de longitud. De la figura 5, tenemos:

- Conservación de la masa

$$Q_x = Q_1 - qx \quad (34)$$

donde Q_x es el caudal en la tubería a una distancia x de la sección de entrada 1, q es el caudal descargado por la tubería por unidad de longitud, Q_1 es el caudal a la entrada (1) de la tubería.

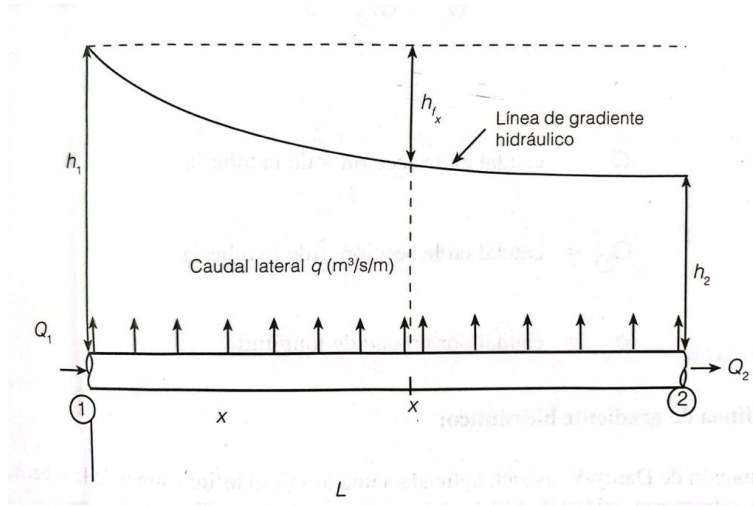


Figure 5: Tubería porosa con entrega de caudal por unidad de longitud (q) y su línea de gradiente hidráulico (tomado de [1]).

- Pendiente de la línea de gradiente hidráulico Aplicando la ecuación de Darcy-Weisbach (para pérdidas por fricción), e ignorando pérdidas menores, para una longitud infinitesimal de tubería dx , en donde no existe salida de caudal, se tiene:

$$dh_f = f_x \frac{dx}{D} \frac{V_x^2}{2g} \quad (35)$$

donde dh_f es la pérdida de energía a lo largo de dx , f_x es el factor de fricción en dx y V_x es la velocidad en dx . Expresando la ecuación 35 en términos del caudal Q_x , se tiene:

$$\frac{dh_f}{dx} = \frac{f_x}{2g} \frac{Q_x^2}{DA^2} \quad (36)$$

o

$$\frac{dh_f}{dx} = \frac{8f_x Q_x^2}{\pi^2 g D^5} \quad (37)$$

reemplazando la ecuación 34 en la ecuación 37, se tiene:

$$\frac{dh_f}{dx} = \frac{8}{\pi^2 g D^5} f_x (Q_1 - qx)^2 \quad (38)$$

Integrando la ecuación 38 para calcular las pérdidas a lo largo de la longitud de la tubería (L), se tiene:

$$h_f = \frac{8}{\pi^2 g D^5} \int_0^L f_x (Q_1 - qx)^2 dx \quad (39)$$

donde f_x esta dado por la ecuación de Colebrook-White:

$$\frac{1}{\sqrt{f_x}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.52\nu}{V_x D \sqrt{f_x}} \right) \quad (40)$$

Note que la ecuación 39 no se puede resolver analíticamente ya que el valor de f_x , coeficiente de fricción a una distancia x , se calcula a través de la ecuación implícita 40. Sin embargo la ecuación 39 se puede resolver aproximadamente utilizando los métodos siguientes:

1. Factor de fricción constante

Si se supone que f_x es constante y se calcula como el promedio del factor de fricción a la entrada (f_1) y a la salida (f_L):

$$f_x = \frac{f_1 + f_L}{2} \quad (41)$$

integrando la ecuación 39 para x , se tiene:

$$h_f = \frac{8f_x}{\pi^2 g D^5} \left(Q_1^2 x - Q_1 q x^2 + \frac{q^2 x^3}{3} \right) \Bigg|_{x=0}^{x=L} \quad (42)$$

en donde se obtiene:

$$h_f = \frac{8f_x}{\pi^2 g D^5} \left(Q_1^2 L - Q_1 q L^2 + \frac{q^2 L^3}{3} \right) \quad (43)$$

2. Factor de fricción constante tramo a tramo

Para utilizar este método se supone que la tubería de longitud L está dividida en n tramos de igual longitud $l = L/n$. Por lo tanto se calculan las pérdidas para cada tramo de la tubería suponiendo que f_x es constante en el tramo, y luego se suman. Las pérdidas de energía h_{f_i} para un tramo i donde $i = 1 \dots n$ son:

$$h_{f_i} = \frac{8f_{x_i}}{\pi^2 g D^5} \left(Q_{1_i}^2 l - Q_{1_i} q l^2 + \frac{q^2 l^3}{3} \right) \quad (44)$$

donde Q_{1_i} es el caudal transportado por el tramo i e igual a $Q_{1_i} = Q_1 - ql(i-1)$. Note que f_{x_i} es el promedio entre tramos:

$$f_{x_i} = \frac{f_i + f_{i+1}}{2} \quad (45)$$

Las pérdidas totales a lo largo de la tubería se calculan como:

$$h_f = \sum_{i=1}^n h_{f_i} \quad (46)$$

El procedimiento para el cálculo de la pérdida de energía en una tubería porosa se describe a continuación.

1. Calcular el caudal de entrada a la tubería (Q_1) de longitud L como:

$$Q_1 = qL \quad (47)$$

2. Cálculo de la zona laminar. Debido a que la manguera o tubería va perdiendo caudal su velocidad disminuye y el flujo, en algún punto, se convierte en laminar. Para calcular ese punto, se asume un número de Reynolds crítico (donde cambia a laminar) igual a $Re_c = 2000$. Dicho caudal, para el cual ocurre Re_c , se calcula como:

$$Q_c = \frac{Re_c \pi D \nu}{4} \quad (48)$$

la distancia desde el final de la tubería en donde el flujo cambia a laminar, se calcula como:

$$L_c = \frac{L_c Q_c}{Q_1} \quad (49)$$

Teniendo en cuenta que en los últimos tramos de la tubería ($x < x_c$) el número de Reynolds tiende a cero, el f tiende a infinito. Por esto, es necesario dejar cierta longitud de la tubería en donde no se calculan pérdidas. En estos últimos tramos, las pérdidas son muy pequeñas por lo tanto no influyen en el resultado final. Dicho valor puede ser el 0.3% de L .

3. Implementar cualquiera de los dos métodos descritos: 1) factor de fricción constante para la tubería y 2) factor de fricción constante tramo a tramo.

4 Sistemas de tuberías en paralelo

Las tuberías en paralelo son un conjunto de dos tuberías o mas las cuales se derivan de un nodo común (nodo de entrada) y convergen hacia otro nodo (nodo de salida). Esto implica que, de acuerdo a la *ley de conservación de la masa*, la suma de los caudales que viajan por cada una de las tuberías debe ser igual aguas arriba del nodo de entrada y aguas abajo del nodo de salida; esto implica que el caudal de entrada y de salida de las tuberías es el mismo. En casos prácticos y cotidianos, los sistemas de tuberías en paralelo están limitados a máximo 3 o 4 tuberías, y son mas comunes los sistemas de dos tuberías. En estos sistemas, cada tubería puede tener longitudes, diámetros, accesorios y materiales diferentes.



Figure 6: Aumento de la capacidad de un acueducto veredal mediante la construcción de una tercera tubería.

4.1 Ecuaciones para la solución de problemas

Teniendo en cuenta las tuberías en paralelo de la figura 7, se plantean las siguientes ecuaciones:

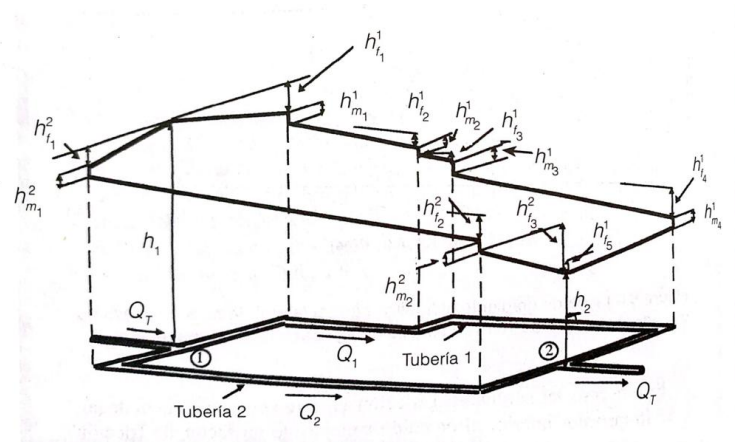


Figure 7: Esquema tridimensional de dos tuberías en paralelo y sus líneas de energía, con un nodo de entrada 1 y un nodo de salida 2. (tomado de [1]).

Conservación de la energía

$$\Delta E = E1 - E2 = H_T = h_{f_1}^1 + h_{m_1}^1 + h_{f_2}^1 + h_{m_2}^1 + h_{f_3}^1 + h_{m_3}^1 + h_{f_4}^1 + h_{m_4}^1 + h_{f_5}^1 \quad (50)$$

donde H_T es la diferencia de energía entre el nodo de entrada (E1) y el nodo de salida (E2); la energía total disponible en el sistema, $h_{f_i}^j$ son las pérdidas por fricción en el tramo $i = 1 \dots 5$ de la tubería $j = 1$ y $h_{m_i}^j$ son las pérdidas menores (por válvulas, uniones, etc) en el tramo $i = 1 \dots 4$ de la tubería $j = 1$.

La ecuación 50 puede expresarse de forma más compacta como:

$$H_T = \sum_{i=1}^{n_j} h_{f_i}^j + \sum_{i=1}^{m_j} h_{m_i}^j \quad (51)$$

donde n_j es el número de tramos de la tubería $j = 1$ y m_j es el número de accesorios en la tubería $j = 1$. Note que la ecuación 51 aplica también para la tubería $j = 2$.

De acuerdo con la *ley de conservación de la energía*, esto implica que las pérdidas de energía en la dirección del flujo a través de la tubería 1 y 2 es la misma. De acuerdo con esto, la ecuación 51, se escribe como:

$$H_T = \sum_{i=1}^{n_1} h_{f_i}^1 + \sum_{i=1}^{m_1} h_{m_i}^1 = \sum_{i=1}^{n_2} h_{f_i}^2 + \sum_{i=1}^{m_2} h_{m_i}^2 \quad (52)$$

Conservación de la masa

De acuerdo con la *ley de conservación de la masa*, el caudal que entra al nodo de entrada (Q_T), debe ser igual a la suma de los caudales que se distribuyen en las tuberías e igual al caudal en el nodo de salida. Para el esquema de la figura 7, se tiene que:

$$Q_T = Q_1 + Q_2 \quad (53)$$

donde Q_1 es el caudal que transporta la tubería 1 y Q_2 es el caudal que transporta la tubería 2. En general para un numero n de tuberías en paralelo, se tiene:

$$Q_T = \sum_{i=1}^n Q_i \quad (54)$$

4.2 Comprobación de diseño

Para este caso se conocen las características físicas de n tuberías, los accesorios en cada una de ellas, la energía disponible en el sistema y las propiedades del fluido circulante. Se desea entonces conocer los caudales individuales en cada tubería (Q_i). A continuación se presenta el procedimiento de cálculo:

1. Leer: ρ , μ o ν , h_b (Cabeza de la bomba), $E1$ y $E2$. También, para cada tubería i , leer: ε_i , L_i , D_i , $\sum K_i$, h_{t_i} y η_i (eficiencia de la turbina). Esta lectura se debe hacer para las n tuberías del sistema.
2. Para cada una de las n tuberías en paralelo, hacer la comprobación de diseño para tuberías simples descrito en la sección 1.4. Se obtendrán n caudales Q y n velocidades V para cada tubería.
3. El caudal total Q_T se obtendra usando la ecuación 54.

4.3 Cálculo de la potencia requerida

A continuación se describe el proceso para solucionar este tipo de problemas que consiste en determinar la presión en el nodo de entrada (1) o en el nodo de salida (2) de las tuberías en paralelo. Con esto es posible calcular la potencia consumida por el flujo a través de las tuberías en paralelo.

Uno de los problemas es que, a pesar de que el caudal total Q_T es un dato dado en el problema, no se sabe como éste se distribuye a través de las tuberías. Para esto se ha encontrado la siguiente ecuación a partir de la ecuación de Darcy-Weisbach:

$$Q_1^k = Q_T \frac{d_1^{5/2}/\sqrt{l_1}}{\sum_{i=1}^n d_i^{5/2}/\sqrt{l_i}} \quad (55)$$

en donde l_1 es la longitud de la tubería 1 y d_1 es el diámetro de la tubería 1. La ecuación 55 sirve para inicializar el caudal Q_1^k en la tubería 1. Con este caudal Q_1^k es posible calcular la energía (presión) en el nodo 1 o nodo 2 siguiendo el algoritmo de la sección 1.5. Una vez se tiene la energía disponible en el sistema ($E_1 - E_2$), es posible calcular el caudal en cada una de las otras $n - 1$ tuberías siguiendo el algoritmo de la sección 1.4. Sin embargo, es posible que la sumatoria de los n caudales no se sea igual a Q_T , por lo que es necesario corregir la suposición inicial de Q_1 como:

$$Q_1^{k+1} = Q_1^k \frac{Q_T}{Q_T^*} \quad (56)$$

donde

$$Q_T^* = \sum_{i=1}^n Q_i^k \quad (57)$$

es el caudal total estimado para la iteración k . El proceso de iteración termina cuando $Q_T = Q_T^*$.

A continuación se describe el algoritmo para encontrar la presión (energía) en el nodo de entrada o de salida al sistema y la potencia disipada.

1. Leer: ρ , μ o ν , h_b (Cabeza de la bomba), Q_T y $E1$ o $E2$. También, para cada tubería i , leer: ε_i , L_i , D_i , $\sum K_i$, h_{t_i} y η_i (eficiencia de la turbina). Esta lectura se debe hacer para las n tuberías del sistema.
2. Inicializar el caudal transportado por la tubería 1 (Q_1) usando la ecuación 55.
3. Con base en el caudal Q_1 determinar la energía en el nodo 1 (E_1) o en el nodo 2 (E_2) siguiendo el algoritmo de la sección 1.5.
4. Una vez calculada la energía en el nodo 1 (E_1) o en el nodo 2 (E_2) para cada una de las $n - 1$ tuberías restantes, calcular el caudal Q siguiendo el procedimiento descrito en la sección 1.4.

5. Una vez calculado el caudal Q en cada tubería, calcular el caudal total estimado Q_T^* para la iteración k . Si $|Q_T - Q_T^*| \leq \eta$, donde η es un error (e.g. $\eta = 1 \times 10^{-6}$), ir a 6. Si $|Q_T - Q_T^*| > \eta$, corregir Q_1 usando la ecuación 56 e ir a 3.
6. Imprimir $E1$ o $E2$ y Q_i donde $i = 1 \cdots n$. Con base en las pérdidas a lo largo de la tubería i , calcular la potencia disipada en el sistema.

4.4 Diseño de tuberías en paralelo

En la practica en ingeniería no es común diseñar sistemas de tuberías en paralelo debido a su ineficiencia a nivel hidráulico ya que el perímetro mojado de 2 o mas tuberías es mayor que el perímetro mojado de una sola tubería. Este diseño solo se justifica si el diámetro de diseño es mayor al diámetro comercial disponible. De ser así, cada tubería se diseña como una tubería simple para un caudal Q_T/n , donde n es el número de tuberías en paralelo. Sin embargo, lo que si es común es la ampliación de un sistema conformado por una tubería simple ya existente debido a un incremento en la demanda, lo cual es común en acueductos y sistemas de riego. Para esta ampliación se diseña y se construye una tubería paralela a la ya existen para la cual se conocen sus características. Para este diseño se conoce el nuevo caudal total Q_T , la energía en el nodo de entrada al sistema y las características de las tuberías. Las incógnitas son el diámetro de la nueva tubería y la energía en el nodo de salida del sistema. Note que la energía en el nodo final será diferente a la energía inicial para este nodo (antes de la ampliación) ya que la hidráulica de la tubería existente se modifica también.

A continuación se presenta un algoritmo para el diseño de la nueva tubería (número 2), en donde la tubería 1 es existente.

1. Leer: ρ , μ o ν , h_b (Cabeza de la bomba), Q_1 , Q_T , $E1$ (energía del nodo a la entrada) y $E2$ (energía del nodo a la salida. Esta energía cambia durante el proceso). También, para cada tubería i , leer: ε_i , L_i , $\sum K_i$, h_{t_i} y η_i (eficiencia de la turbina) donde $i = 1 \cdots 2$.
2. Calcular el caudal por la tubería 2: $Q_2 = Q_T - Q_1$.
3. Diseñar la tubería 2 como una tubería simple siguiendo el procedimiento descrito en la sección 1.6. Teniendo en cuenta que, debido a que el diámetro comercial siempre deja pasar mas caudal, Q_2 es mayor al caudal deseado (caudal inicial), la energía en el nodo 2 aumenta y por lo tanto el caudal Q_1 cambia también.
4. De aquí en adelante se vuelve un problema de cálculo de la potencia requerida para dos tuberías en paralelo partiendo del numeral 2 en el procedimiento descrito en la sección 4.3.

5 Sistemas de tuberías ramificadas

En la practica, los sistemas de tuberías suelen ser mas complejos que tuberías simples, en serie o en paralelo, por lo que las tuberías suelen estar conectadas unas con otras formando diferentes configuraciones. Las tuberías ramificadas o *redes abiertas de tuberías* suelen ser las tuberías principales (líneas madres o expresas) en sistemas de acueductos, sistemas de irrigación o sistemas de tratamiento de agua, que están compuestas ademas por tanques de almacenamiento, desarenadores, plantas de tratamiento y obras de captación (ver 8). En muchos casos estas redes abiertas están conectadas a redes cerradas.

Los problemas que se estudiaran para redes cerradas son el problema de comprobación de diseño, el cual busca determinar los caudales en cada una de las tuberías, y el de diseño de la red en donde se determina el diámetro de cada tubería. Note que el problema de calculo de la potencia no es pertinente ya que la energía del sistema siempre es un dato dado que es determinado por la localización topográfica de la red o por la la energía suministrada por un bomba en una tubería.

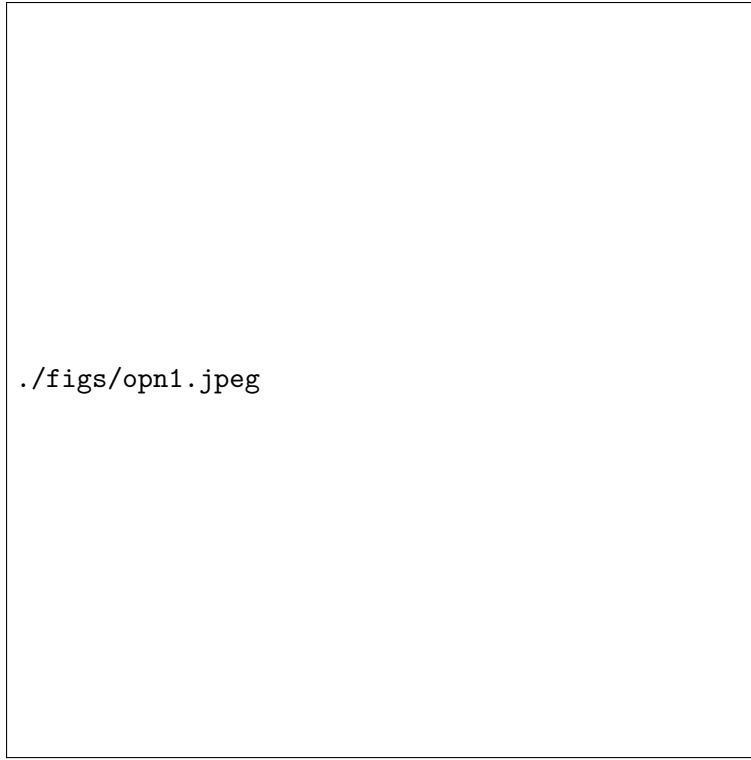


Figure 8: Red abierta compuesta por tuberías, tanques de almacenamiento y nodos (tomado de [1]).

5.1 Ecuaciones para la solución de problemas

Teniendo en cuenta la figura 9, se plantean las siguientes leyes de conservación para la solución de problemas de redes abiertas.

Conservación de la masa

En una red abierta es necesario conservar la masa a lo largo de toda la red. Se plantea entonces que en cada nodo se conserva la masa, teniendo en cuenta las posibles demandas desde los tanques de almacenamiento y desde los nodos. Analizando la red de la figura 9 se tiene que el tanque de distribución A conduce el caudal total demandado a través de la tubería madre AU hacia el nodo U de donde se distribuye el caudal hacia los tanques B, C y D, de donde se derivan unas demandas. De acuerdo con esto, la ecuación de conservación de la masa en el nodo U es:

$$\sum_{i=1}^n Q_{iU} - Q_{LU} = 0 \quad (58)$$

donde Q_{iU} es el caudal en la tubería iU , Q_{LU} es el caudal demandado en el nodo U que puede ser cero, y n es el número de tuberías conectadas con el nodo U .

Conservación de la energía

De acuerdo con la figura 9, la ecuación de conservación de la energía entre un tanque $i = A, B, C, D$ y un nodo U , se expresa como:

$$|Z_i - Z_U| = H_{t_{iU}} = \left(f_{iU} \frac{L_{iU}}{D_{iU}} + \sum K_{iU} \right) \frac{V_{iU}^2}{2g} \quad (59)$$

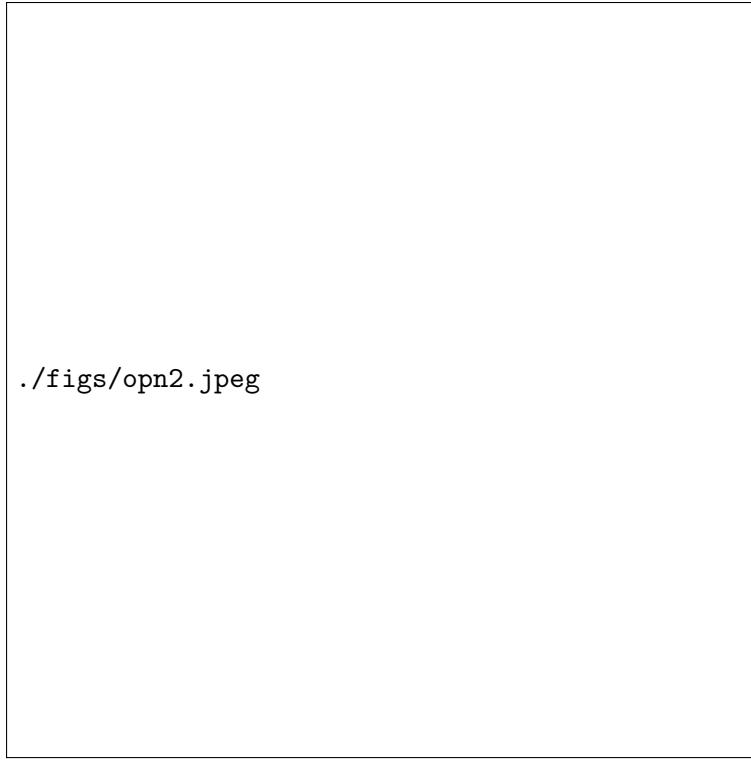


Figure 9: Red abierta conectando un tanque de suministro A, al cual llega un caudal total demandado, con los tanques de almacenamiento B,C y D, de los cuales se demandan caudales (tomado de [1]).

donde Ht_{iU} es la energía disponible entre iU , Z_U es la cabeza piezométrica en la unión (siempre es desconocida), Z_i es la cabeza piezométrica en el tanque i , V_{iU} es la velocidad de flujo en la tubería iU , d_{iU} es el diámetro en la tubería iU , L_{iU} es la longitud de la tubería iU , f_{iU} es el factor de fricción de Darcy en la tubería iU y $\sum K_{iU}$ es el coeficiente de global de pérdidas menores en la tubería iU .

La ecuación 59 se puede expresar en términos del caudal como:

$$|Z_i - Z_U| = Ht_{iU} = \left(f_{iU} \frac{L_{iU}}{2gD_{iU}} + \frac{\sum K_{iU}}{2g} \right) \frac{Q_{iU}^2}{A_{iU}^2} \quad (60)$$

5.2 Comprobación de diseño

En este caso se conocen las características del fluido transportado, las características de las tuberías (diámetros, rugosidades y longitudes), las cotas de los tanques que integran el sistema y las posibles demandas de caudal en los nodos. Se desea conocer el caudal total demandado y las demandas de caudal en cada uno de los tanques Q_{L_i} . El proceso iterativo se base en el proceso de comprobación de diseño para tuberías simples aplicado a cada tubería del sistema. Sin embargo como las cabeza de energía (Z_{U_j}) en los nodos no son conocidas estas se deben ir corrigiendo en el proceso de iteración hasta cumplir (aproximadamente) con la ecuación 58 en cada nodo. A continuación se presenta un algoritmo para resolver este tipo de problemas:

1. Leer: ρ y μ o ν . Para cada tubería $i = 1 \cdots n$, leer: ε_i , L_i , D_i , $\sum K_i$, h_{p_i} y η_i (eficiencia de la bomba). Para cada embalse o tanque de almacenamiento i leer la cota piezométrica Z_i . Para cada nodo $j = 1 \cdots m$, leer la demanda de caudal en el nodo $Q_{L_{U_j}}$.
2. Estimar los valores iniciales de Z_{U_j} . Esta estimación se debe hacer cuidadosamente ya que el algoritmo puede converger hacia una solución errada (quedar atrapado en un mínimo local de la función

objetivo). En el caso en donde no existan bombas en las tuberías los valores de Z_{U_j} pueden asumirse por debajo del tanque principal y por encima de los tanques a los que se distribuye el flujo. En el caso de un tramo con un sistema de bombeo Z_{U_j} puede asumirse por debajo del tanque al cual se esta bombeando.

3. Para cada tubería $i = 1 \cdots n$, calcular el caudal siguiendo el algoritmo de comprobación de diseño para tuberías simples descrito en la sección 1.4.
4. Para cada nodo $j = 1 \cdots m$ comprobar que $|\sum_{i=1}^n Q_{ij} - Q_{L_{U_j}}| \leq \eta$, donde η es un error (e.g. $\eta = 1 \times 10^{-6}$), ir a ???. Note que Q_{ij} es positivo si entra al nodo y es negativo si sale del nodo. Si esta condición no se cumple se debe corregir Z_{U_j} de la siguiente manera:

$$Z_{U_j}^t = Z_{U_j}^{t+1} + \Delta Z_{U_j} \quad (61)$$

donde ΔZ_{U_j} es la corrección que se debe calcular siguiendo la metodologían de R.J. Cornish (1940) como:

$$\Delta Z_{U_j} = \frac{2 \left(\sum_{i=1}^n Q_{ij} - Q_{L_{U_j}} \right)}{\sum_{i=1}^n \frac{Q_{ij}}{Z_i - Z_{U_j}}} \quad (62)$$

Note que en la medida que la condicioón $|\sum_{i=1}^n Q_{ij} - Q_{L_{U_j}}|$ se va acercando a cero, el valor de ΔZ_{U_j} también se acerca a cero. El proceso terminar cuando $\sum_{j=1}^m |\Delta Z_{U_j}| \leq \eta$.

5. Imprimir Q_{ij} , donde $i = 1 \cdots n$ y $j = 1 \cdots m$. También es conveniente imprimir Z_{U_j} .

6 Redes de distribución: Método de análisis de Cross

7 Redes de distribución: Método de análisis lineal

References

- [1] Juan Guillermo Saldarriaga Valderrama. Hidráulica de tuberías. abastecimiento de agua, redes, riego. Editorial Alfaomega, Ediciones Uniandes, 2007.