

# Hidráulica Básica [2015961]

## Tema # 2: Análisis de sistemas de tuberías

Luis Alejandro Morales (Ph.D)

Profesor Asistente

Universidad Nacional de Colombia-Bogotá

Facultad de Ingeniería

Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola

### Contents

<b>1</b>	<b>Sistemas de tuberías simples</b>	<b>1</b>
1.1	Tipos de problema en sistemas de tuberías . . . . .	2
1.2	Ecuaciones para la solución de problemas . . . . .	3
1.3	Solución de la ecuación de Colebrook-White . . . . .	4
1.3.1	Método de punto fijo . . . . .	4
1.3.2	Método de Newton-Raphson . . . . .	4
1.4	Comprobación de diseño . . . . .	5
1.5	Cálculo de la potencia requerida . . . . .	5
1.6	Diseño de la tubería . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Sistemas de tuberías en serie</b>	<b>6</b>
2.1	Ecuaciones para la solución de problemas . . . . .	6
2.2	Comprobación de diseño . . . . .	7
2.3	Cálculo de la potencia requerida . . . . .	8
2.4	Diseño de la tubería . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Sistemas de tuberías en paralelo</b>	<b>10</b>
3.1	Ecuaciones para la solución de problemas . . . . .	10
3.2	Comprobación de diseño . . . . .	11
3.3	Cálculo de la potencia requerida . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Sistemas de tuberías ramificadas</b>	<b>12</b>
<b>5</b>	<b>Redes de distribución: Método de análisis de Cross</b>	<b>12</b>
<b>6</b>	<b>Redes de distribución: Método de análisis lineal</b>	<b>12</b>

### 1 Sistemas de tuberías simples

Una tubería simple es aquella que tiene un diámetro y esta hecha de un solo material a lo largo de su longitud (ver figura 2). La energía que mueve el flujo dentro de la tubería es gracias a la acción de la gravedad (tanque a la entrada) o a una máquina (sistema de bombeo a la entrada). Dichas tuberías pueden tener cualquier tipo de accesorio a lo largo de su longitud lo que implica unas pérdidas menores. Las ecuaciones de Prandtl, Von-Karman y Darcy-Weisbach vistas en la Unidad 1, son utilizadas para el diseño de tuberías simples. Note que existe cierta dificultad para el diseño teniendo en cuenta que la ecuación de Colebrook-White para calcular el coeficiente de rugosidad  $f$  es implícita y requiere un proceso iterativo para su solución. Los algoritmos que aquí se discutirán, constituyen las bases para el análisis y diseño de tuberías más complejas.



Figure 1: Acueductos por gravedad.

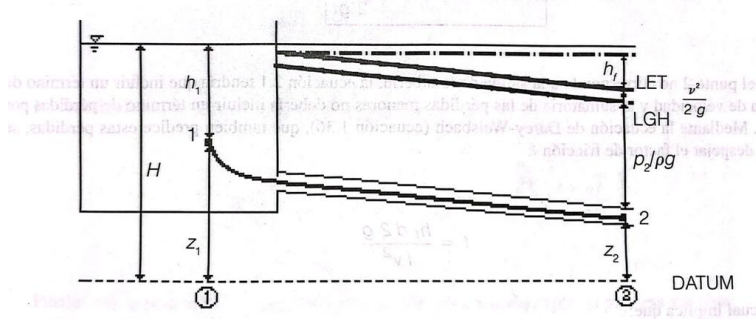


Figure 2: Tubería simple alimentada por un tanque de nivel constante y con descarga a la atmosfera (tomado de [1]).

## 1.1 Tipos de problema en sistemas de tuberías

Los problemas en sistemas de tuberías se clasifican de acuerdo con las variables desconocidas. Las variables involucradas en estos problemas se pueden clasificar como:

- *Características la tubería:* Diámetro ( $D$ ), longitud ( $L$ ), rugosidad absoluta ( $\varepsilon$ ).
- *Propiedades del fluido:* Densidad ( $\rho$ ) y viscosidad dinámica ( $\mu$ ) o cinemática ( $\nu$ ).
- *Variables relacionadas con el esquema del sistema:* Coeficientes de pérdidas menores ( $K$ ) de todos los accesorios en el sistema.
- *Variables relacionadas con la energía impulsora del sistema:* Cabeza de energía ( $H = E_1 - E_2$ ), entre la energía en el embalse de entrada ( $E_1$ ) y la energía salida del sistema ( $E_2$ ), o potencia de la bomba ( $P$ ).
- *Propiedades del flujo:* Caudal ( $Q$ ) y velocidad ( $V$ ) del flujo.
- *Otras variables:* Aceleración de la gravedad ( $g$ ).

De acuerdo con las variables involucradas en sistemas de tuberías, existen tres tipos de problemas:

1. **Comprobación de diseño:** En este tipo de problemas la tubería existe y se conoce su longitud, su diámetro, su rugosidad absoluta (material), al igual que todos los accesorios y sus coeficiente de pérdidas menores. También se conoce la energía impulsora, ya sea una cabeza de energía (gravitacional por diferencia de niveles) o una energía mecánica (suministrada por una bomba). Las propiedades del fluido como la densidad y la viscosidad absoluta son también conocidas. La incógnita es entonces el caudal o la velocidad del flujo en el sistema.

Variables conocidas	Incógnita
$D, \varepsilon, H$ (o $P$ ), $\sum K, \rho, \mu, g, L$	$Q$ (o $V$ )

2. **Cálculo de la potencia requerida:** En este tipo de problemas, el sistema existe por lo que se conocen su longitud, su diámetro, su rugosidad absoluta (material), al igual que todos los accesorios y sus coeficiente de pérdidas menores. Las propiedades del fluido como la densidad y la viscosidad dinámica así como el caudal

Variables conocidas	Incógnita
D, $\varepsilon$ , Q (o V), $\sum K$ , $\rho$ , $\mu$ , g, L	P (o H)

(o velocidad) que fluye por el sistema son también conocidas. La finalidad es determinar la potencia, ya sea mecánica o gravitacional, requerida para mover cierto caudal a través de la tubería dada.

3. **Diseño de la tubería:** En este tipo de problemas se conoce el caudal o la velocidad de flujo y la potencia disponible (mecánica o gravitacional), algunas características de la tubería como la longitud, los accesorios y sus coeficientes de pérdida y las propiedades del fluido como la densidad y la viscosidad dinámica. Se desconoce el diámetro necesario para permitir el paso de el caudal demandado. En cuanto a la rugosidad absoluta, se debe cambiar el tipo de tubería (rugosidad absoluta) con el fin de obtener la mejor opción.

Variables conocidas	Incógnita
$\varepsilon$ , Q (o V), P (o H), $\sum K$ , $\rho$ , $\mu$ , g, L	D

## 1.2 Ecuaciones para la solución de problemas

A continuación se presentan las ecuaciones necesarias para resolver los tres problemas ya mencionadas. Estas ecuaciones fueron discutidas en el capítulo anterior.

Si se tiene una tubería simple cuya entrada es en la sección 1 y cuya salida es en la sección, aplicando la ecuación de Bernoulli entre 1 y 2, de manera general, se tiene:

$$\frac{V_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + h_f + \sum h_e - h_b + h_t \quad (1)$$

donde  $h_b$  es la cabeza de energía suministrada por la bomba y  $h_t$  es la cabeza de energía sustraída por la turbina. La energía total en una sección (e.g. 1 o 2) de flujo se puede expresar como  $E = \frac{V^2}{2g} + z + \frac{p}{\gamma}$ , por lo tanto la ecuación 1 se puede expresar como:

$$E_1 - E_2 = h_f + h_e - h_b + h_t \quad (2)$$

en donde  $h_f$  son las pérdidas por fricción estimadas con la ecuación de Darcy-Weisbach como:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (3)$$

y  $h_e$  son las perdidas por accesorios, las cuales se pueden calcular como:

$$h_e = \sum K \frac{V^2}{2g} \quad (4)$$

El factor de fricción  $f$  en la ecuación 3, se calcula usando el diagrama de Moody o numéricamente usando la ecuación Colebrook-White como:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.52}{Re\sqrt{f}} \right) \quad (5)$$

donde el número de Reynolds ( $Re$ ) se calcula como

$$Re = \frac{VD}{\nu} \quad (6)$$

Si se reemplaza las ecuaciones 3 y 4 en la ecuación 2, se tiene:

$$E_1 - E_2 = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} + \sum K \frac{V^2}{2g} - h_b + h_t \quad (7)$$

despejando  $V$  en la ecuación 7, se tiene:

$$V = \sqrt{2g \frac{E_1 - E_2 + h_b - h_t}{f \frac{L}{D} + \sum K}} \quad (8)$$

En los tres tipos de problemas, el objetivo es usar las ecuaciones 3, 4, 5, 6 y 8 para su solución. Note que la ecuación 5 es una ecuación implícita que requiere del uso de algún método iterativo o numérico para su solución. Note que la ecuación 8 se usa en particular para la solución de problemas de *comprobación de diseño* y de *diseño de tuberías*.

### 1.3 Solución de la ecuación de Colebrook-White

#### 1.3.1 Metodo de punto fijo

Consiste en el siguiente procedimiento:

1. Leer la información de entrada:  $\varepsilon$ ,  $\rho$ ,  $\mu$  o  $\nu$ ,  $V$  o  $Q$ ,  $D$
2. Calcular el  $Re$  usando la ecuación 6
3. Si  $Re < 2000$  (Flujo laminar), calcular  $f$  como:

$$f = Re/64 \quad (9)$$

y luego ir a 6. Si  $Re > 2000$  continuar.

4. Asumir un valor inicial de  $f_i$  (e.g.  $f = 0.01$ ).
5. Usando la siguiente forma de la ecuación 5, calcular un valor  $f_{i+1}$ :

$$f_{i+1} = \left[ -2 \log \left( \frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.52}{Re \sqrt{f_i}} \right) \right]^{-2} \quad (10)$$

6. Si  $|f_i - f_{i+1}| \leq \eta$ , donde  $\eta$  es un error (e.g.  $\eta = 1 \times 10^{-6}$ ), ir a 6. Si  $|f_i - f_{i+1}| > \eta$ , hacer  $f_i = f_{i+1}$  e ir a 6, para calcular un nuevo valor  $f_{i+1}$ .
7. Imprimir  $f$

#### 1.3.2 Método de Newton-Raphson

El método de Newton-Rapson es un método numérico para la solución de ecuaciones implícitas. Converge más rápido que el método de punto fijo. Algunas condiciones para poder aplicar el método son para un intervalo  $l$  del dominio:

- $f(x)$  debe estar definida en  $l$ .
- La función de iteración de  $f(x)$  deber ser continua en  $l$ .
- La función implícita  $f(x)$  debe ser diferenciable ( $f'(x)$ ) en  $l$ .

En general la ecuación de Colebrook-White cumple estas condiciones. El método consiste en el siguiente procedimiento:

1. Leer la información de entrada:  $\varepsilon$ ,  $\rho$ ,  $\mu$  o  $\nu$ ,  $V$  o  $Q$ ,  $D$
2. Calcular el  $Re$  usando la ecuación 6
3. Si  $Re < 2000$  (Flujo laminar), calcular  $f$  como:

$$f = Re/64 \quad (11)$$

y luego ir a 6. Si  $Re > 2000$  continuar.

4. Asumir un valor inicial de  $f_i$  (e.g.  $f = 0.01$ ).
5. Calcular

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{f}} \quad (12)$$

6. Calcular

$$f(x_i) = -2 \log \left( \frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.52x_i}{Re} \right) \quad (13)$$

7. Calcular

$$f'(x_i) = \left[ \frac{-2}{\ln 10} \right] \left[ \frac{\frac{2.52}{Re}}{\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.52x_i}{Re}} \right] \quad (14)$$

8. Calcular el nuevo valor de  $x_{i+1}$  como:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i) - x_i}{f'(x_i) - 1} \quad (15)$$

9. Si  $|x_i - x_{i+1}| \leq \eta$ , donde  $\eta$  es un error (e.g.  $\eta = 1 \times 10^{-6}$ ), ir a 6. Si  $|x_i - x_{i+1}| > \eta$ , hacer  $x_i = x_{i+1}$  e ir a 6, para calcular un nuevo valor  $x_{i+1}$ .
10. Imprimir  $f$ , donde:

$$f = \frac{1}{x_{i+1}^2} \quad (16)$$

## 1.4 Comprobación de diseño

A continuación se describe el proceso para solucionar este tipo de problemas que consiste en determinar el valor de  $V$  o  $Q$ .

1. Leer la información de entrada:  $\varepsilon$ ,  $\rho$ ,  $\mu$  o  $\nu$ ,  $L$ ,  $D$ ,  $\sum K$ ,  $E1$ ,  $E2$ ,  $h_b$  y  $h_t$ .
2. Aplicar el procedimiento descrito en la sección 1.3.1 o en la sección 1.3.2. Note que lo único que cambia dentro de estos procedimientos es que la velocidad  $V$  es calculada usando la ecuación 8; ya no es un dato de entrada.
3. Imprimir  $V$  y  $f$ .

## 1.5 Cálculo de la potencia requerida

A continuación se describe el proceso para solucionar este tipo de problemas que consiste en determinar la cabeza de energía de la bomba ( $h_b$ ) y su potencia ( $P$ ).

1. Leer la información de entrada:  $\varepsilon$ ,  $\rho$ ,  $\mu$  o  $\nu$ ,  $L$ ,  $D$ ,  $\sum K$ ,  $Q$ ,  $E1$ ,  $E2$ ,  $h_t$  y  $\eta$ .
2. Calcular la velocidad como  $V = Q/A$ .
3. Aplicar el procedimiento descrito en la sección 1.3.1 o en la sección 1.3.2 para calcular  $f$ .
4. Calcular  $h_f$  usando la ecuación 3.
5. Calcular  $h_e$  usando la ecuación 4.
6. Calcular la cabeza de energía de la bomba ( $h_b$ ) despejándola de la ecuación 2.
7. Calcular la potencia  $P$  como:

$$P = \frac{\rho Q g h_b}{\eta} \quad (17)$$

donde  $\eta$  es la eficiencia de la bomba.

8. Imprimir  $h_b$  y  $P$ .

## 1.6 Diseño de la tubería

A continuación se describe el proceso para solucionar este tipo de problemas que consiste en determinar el diámetro óptimo comercial de la tubería.

1. Leer la información de entrada:  $\varepsilon, \rho, \mu$  o  $\nu, L, D, \sum K, Q, E1, E2, h_t$  y  $\eta$ .
2. Asumir un diámetro comercial inicial  $D_i$  para la tubería. El  $D_i$  inicial debe ser pequeño (e.g. 1 pulg.) pero no tan pequeño ya que el procedimiento no converge.
3. Aplicar el procedimiento descrito en la sección 1.3.1 o en la sección 1.3.2. Note que lo único que cambia dentro de estos procedimientos es que la velocidad  $V$  es calculada usando la ecuación 8; ya no es un dato de entrada. De aquí sale un valor de  $f$  y  $V$ .
4. Calcular el nuevo caudal  $Q_n = VA$  usando  $D_i$ , donde  $A = \frac{\pi D_i^2}{4}$ .
5. Si  $Q_n \geq Q$  ir a 4a. Si  $Q_n < Q$  tomar el siguiente diámetro comercial superior  $D_{i+1}$  e ir a 4a.
6. Imprimir  $D$ .

El diseño óptimo busca, en la mayoría de los casos, la solución más económica. Por lo tanto es necesario muchas veces diseñar con otros materiales (diferente valor de  $\varepsilon$ ) para encontrar la mejor solución.

## 2 Sistemas de tuberías en serie

Las tuberías en serie son dos o mas tuberías conectadas una tras de otra con diferente diámetro o rugosidad (material) o ambos (ver figura 3). Estas tuberías son muy comunes en sistemas de riego localizado de alta frecuencia o en líneas de conducción para acueductos veredales. Al igual que en la sección 1, aquí se describirán las ecuaciones generales para resolver problemas relacionados con tuberías en serie y se explicarán los procedimientos para resolver los tres problemas en tuberías: 1) Comprobación de diseño, 2) cálculo de la potencia y 3) diseño de las tuberías.

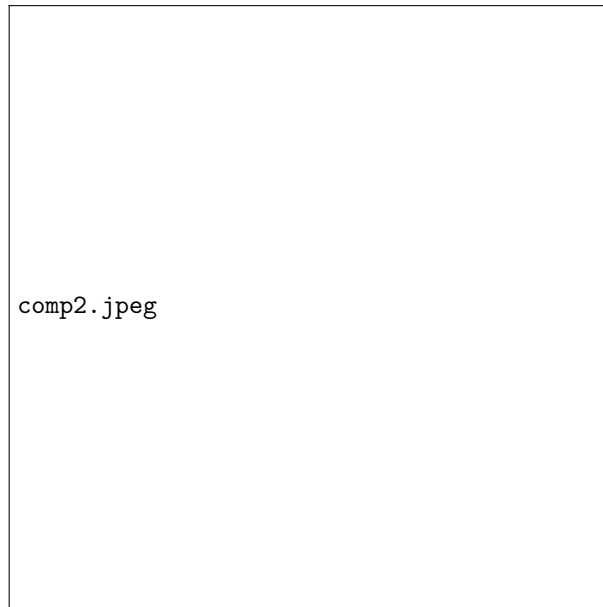


Figure 3: Tres tuberías en serie conectando dos tanques en donde  $Q_{L_i}$  representa un caudal lateral de salida al final de la tubería  $i$  (tomado de [1]).

### 2.1 Ecuaciones para la solución de problemas

Teniendo en cuenta las tuberías en serie de la figura 3, se plantean las siguientes ecuaciones:

- Conservación de la energía

$$\Delta E = E1 - E2 = H_T = z_1 - z_2 = h_e + h_{f_1} + h_{m_1} + h_{f_2} + h_{m_2} + h_{f_3} + h_{m_3} + h_s \quad (18)$$

donde  $H_T$  es la diferencia de niveles entre los dos tanque; la energía total disponible en el sistema,  $h_e$  pérdidas menores de entrada,  $h_{f_i}$  pérdidas por fricción en el tubo  $i$ ,  $h_{m_i}$  pérdidas menores (por válvulas, uniones, etc) en la tubería  $i$  y  $h_s$  pérdidas por salida.

Para un numero  $n$  de tuberías en series la ecuación 18 se puede excribir como:

$$H_T = h_e + \sum_{i=1}^n h_{f_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h_{m_{i,j}} + h_s \quad (19)$$

donde  $m$  es numero de accesorios en la tubería  $i$ ;  $m$  puede ser variable. La ecuación 19 establece que la energía disponible en el sistema se disipa en pérdidas a lo largo de la tubería. Puede haber el caso en el cual tengamos, por ejemplo, una tubería horizontal por lo cual una bomba sería necesaria para impulsar el flujo por lo que en la parte izquierda de la ecuación 18 tendríamos  $H_T + h_b$ . También se puede dar el caso de una turbina en alguna sección de la tubería por lo que habria que sumarle a la derecha de la ecuación  $h_t$ .

Desarrollando la ecuación 19, se tiene:

$$H_T = K_e \left( \frac{V^2}{2g} \right)_1 + \sum_{i=1}^n \left( f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \right)_i + \sum_{i=1}^n \left( \frac{V^2}{2g} \right)_i \sum_{j=1}^m K_j + K_s \left( \frac{V^2}{2g} \right)_n \quad (20)$$

- Conservación de la masa o ecuación de continuidad:

$$Q_T = Q_1 = Q_2 + Q_{L_1} = Q_3 + Q_{L_1} + Q_{L_2} \quad (21)$$

Donde  $Q_i$  es el caudal que viaja por la tubería  $i$  y  $Q_{L_i}$  es el caudal derivado de la tubería  $i$ . La ecuación 21 se puede expresar de forma mas compacta como:

$$Q_T = Q_i + \sum_{j=1}^{i-1} Q_{L_j} \quad (22)$$

En caso de que no existiera derivaciones ( $Q_{L_i} = 0$ ) la ecuación 22 queda como:

$$Q_T = Q_1 = \dots = Q_i = \dots = Q_n \quad (23)$$

## 2.2 Comprobación de diseño

Se desea calcular el valor de  $Q_T = Q_1$ . Antes de describir el proceso de cálculo, deduciremos una ecuación que se utilizará para resolver este tipo de problemas.

De la ecuación de Darcy-Weisbach, despejando el factor de fricción se tiene que:

$$f = \frac{h_f D 2g}{L V^2} \quad (24)$$

Sacando raíz cuadrada e invirtiendo los términos a ambos lados se tiene:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{V \sqrt{L}}{\sqrt{h_f D 2g}} \quad (25)$$

Igualando a la ecuación de Colebrook-White, se tiene:

$$\frac{V \sqrt{L}}{\sqrt{h_f D 2g}} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.52}{Re \sqrt{f}} \right) \quad (26)$$

Reemplazando  $Re = \frac{VD}{\nu}$  y la ecuación 25 en la ecuación 26 y despejando la velocidad, se tiene:

$$V = \frac{-2\sqrt{2gDh_f}}{\sqrt{L}} \log \left( \frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.52\nu\sqrt{L}}{D\sqrt{2gDh_f}} \right) \quad (27)$$

Note que la ecuación 27 es explícita para la velocidad  $V$ .

A continuación se describe el proceso para solucionar este tipo de problemas que consiste en determinar  $Q_T = Q_1$ .

1. Leer:  $\rho$ ,  $\mu$  o  $\nu$ ,  $K_e$  (coef. de pérdidas a la entrada),  $K_s$  (coef. de pérdidas a la salida),  $E1$  y  $E2$ . También, para cada tubería  $i$ , leer:  $\varepsilon_i$ ,  $L_i$ ,  $D_i$ ,  $\sum K_i$ ,  $Q_{L_i}$ ,  $h_{b_i}$ ,  $h_{t_i}$  y  $\eta_i$  (eficiencia de la bomba o turbina). Esta lectura se debe hacer para las  $n$  tuberías del sistema.
2. Para llevar a cabo este proceso es necesario, para la primera iteración, asumir un valor inicial de  $h_{f_1}$ . Se ha encontrado que  $h_f \propto \frac{L}{D^5}$ , de acuerdo con esto, [1] ha establecido que este valor inicial de  $h_{f_1}$  se puede expresar como:

$$h_{f_1} = E1 - E2 = H_T \frac{L_1/D_1^5}{\sum_{i=1}^n L_i/D_i^5} \quad (28)$$

3. Para la tubería  $i = 1$ : calcular el valor de  $V_1$  usando la ecuación 27, calcular el caudal  $Q_T = Q_1 = V_1 A_1$ , calcular el valor de  $f_1$  usando uno de los dos procedimientos descritos en la secciones 1.3.1 y 1.3.2, calcular  $h_{f_1}$  utilizando la ecuación 3 y  $h_{m_1}$  utilizando la ecuación 4.
4. Para el resto de tuberías  $i = 2 \dots n$ : calcular el caudal  $Q_i$  usando la ecuación 22, calcular la velocidad  $V_i = Q_i/A_i$ ,  $f_i$  usando uno de los dos procedimientos descritos en la secciones 1.3.1 y 1.3.2, calcular  $h_{f_i}$  utilizando la ecuación 3 y  $h_{m_i}$  utilizando la ecuación 4.
5. Calcular la pérdida de energía total estimada  $\hat{H}_T$  usando la ecuación 19. Si  $|\hat{H}_T - H_T| \leq \eta$  donde  $\eta$  es un error (e.g.  $\eta = 1 \times 10^{-6}$ ), ir a 6. Si  $|\hat{H}_T - H_T| > \eta$ , actualizar el valor de  $h_{f_1}$ , como:

$$h_{f_1}^t = h_{f_1}^{t-1} + \Delta h_{f_1} \quad (29)$$

donde  $\Delta h_{f_1}$ , se calcula como

$$\Delta h_{f_i} = (H_T - \hat{H}_T) \frac{L_1/D_1^5}{\sum_{i=1}^n L_i/D_i^5} \quad (30)$$

Una vez calculado el nuevo  $h_{f_1}$  ir a 3.

6. Imprimir  $Q_i$  donde  $i = 1 \dots n$ .

## 2.3 Cálculo de la potencia requerida

A continuación se describe el proceso para solucionar este tipo de problemas que consiste en determinar la cabeza de energía de la bomba ( $h_b$ ) y su potencia ( $P$ ).

1. Leer:  $\rho$ ,  $\mu$  o  $\nu$ ,  $K_e$  (coef. de pérdidas a la entrada),  $K_s$  (coef. de pérdidas a la salida),  $E1$ ,  $E2$  y  $Q_T = Q_1$ . También, para cada tubería  $i$ , leer:  $\varepsilon_i$ ,  $L_i$ ,  $D_i$ ,  $\sum K_i$ ,  $Q_{L_i}$ ,  $h_{t_i}$  y  $\eta_i$  (eficiencia de la bomba o turbina). Esta lectura se debe hacer para las  $n$  tuberías del sistema.
2. Utilizando la ecuación 22, calcular el valor de  $Q_i$  para  $i = 2 \dots n$ .
3. Para cada una de las tuberías  $i = 1 \dots n$ , calcular: la velocidad como  $V_i = Q_i/A_i$ ,  $f_i$  usando uno de los dos procedimientos descritos en la secciones 1.3.1 y 1.3.2, calcular  $h_{f_i}$  utilizando la ecuación 3 y  $h_{m_i}$  utilizando la ecuación 4.
4. Calcular la cabeza de energía de la bomba ( $h_b$ ) despejandola de la ecuación 2. Note que en esta ecuación,  $h_f$  es la sumatoria de todas  $h_{f_i}$  y  $h_m$  es la sumatoria de todas las  $h_{m_i}$ .
5. Calcular la potencia  $P$  usando la ecuación 17.
6. Imprimir  $h_b$  y  $P$ .



## 2.4 Diseño de la tubería

Como se habia mencionado anteriormente, el diseño, y en este caso, de tuberías en serie es un problema complejo por que eso implica buscar, en la mayoría de los casos, la solución optima desde el punto de vista economico. Por esto, no solo basta con determinar el diametro si no tambien el material de la tubería. A esto hay que sumarle que los coeficiente de perdida dependen del material de la tubería, esta es otra variable que hay que tener en cuenta. Esto quiere decir que pueden existir multiples soluciones para un mismo problema.

A continuación se describe el proceso para solucionar este tipo de problemas que consiste en determinar el diametro óptimo comercial  $D_i$  de la tubería para  $i = 1...n$ . En este proceso se asume que el material es un dato dado.

1. Leer:  $\rho$ ,  $\mu$  o  $\nu$ ,  $K_e$  (coef. de pérdidas a la entrada),  $K_s$  (coef. de pérdidas a la salida),  $E1$ ,  $E2$  y  $Q_T = Q_1$ . También, para cada tubería  $i$ , leer:  $\varepsilon_i$ ,  $L_i$ ,  $\sum K_i$ ,  $Q_{L_i}$ ,  $h_{b_i}$ ,  $h_{t_i}$  y  $\eta_i$  (eficiencia de la bomba o turbina). Esta lectura se debe hacer para las  $n$  tuberías del sistema.
2. Utilizando la ecuación 22, calcular el valor de  $Q_i$  para  $i = 2...n$ .
3. Inicializar  $h_{f_i}$  para cada tubería  $i = 1...n$ . I-pai Wu en 1975 encontró la siguiente ecuación para inicializar  $h_{f_i}$  antes de iniciar las iteraciones:

$$h_{f_i} = H_T \frac{L_i \cos \theta_i}{\sum_{i=1}^n L_i \cos \theta_i} \quad (31)$$

donde  $\theta_i$  es el angulo formado entre la horizontal y la tubería. Usualmente este angulo es el mismo para todas las tuberías ya que todas tienen la misma pendiente, por lo tanto  $\theta = \frac{z_1 - z_2}{L} \sum_{i=1}^n L_i$ , donde  $z_1$  es la altura a la entrada del sistema y  $z_2$  es la altura a la salida del sistema.

4. Para cada tubería  $i = 1...n$ 
  - (a) Asumir un diámetro comercial inicial  $D_i$ . El  $D_i$  inicial debe ser pequeño (e.g. 1 pulg.) pero no tan pequeño ya que el procedimiento no converge.
  - (b) Aplicar el procedimiento descrito en la sección 1.3.1 o en la sección 1.3.2. Note que lo único que cambia dentro de estos procedimientos es que la velocidad  $V$  es calculada usando la ecuación 8; ya no es un dato de entrada. De aqui sale un valor de  $f$  y  $V$ .
  - (c) Calcular el nuevo caudal  $Q_{n_i} = V_i A_i$  usando  $D_i$ , donde  $A_i = \frac{\pi D_i^2}{4}$ .
  - (d) Si  $Q_{n_i} > Q_i$  ir a 5. Si  $Q_{n_i} < Q_i$  tomar el siguiente diámetro comercial superior  $D_{i+1}$  e ir a 4a.
5. Para cada tubería  $i = 1...n$ , calcular la velocidad real como  $V_{R_i} = Q_i / A_i$
6. Para cada tubería  $i = 1...n$ , y con el  $D_i$  y  $V_{R_i}$ , calcular  $f_i$  usando el procedimiento descrito en la sección 1.3.1 o en la sección 1.3.2.
7. Para cada tubería  $i = 1...n$ , calcular  $h_{f_{R_i}}$  utilizando la ecuación 3 y  $h_{m_{R_i}}$  utilizando la ecuación 4. Usar en estas ecuaciones  $D_i$  y  $V_{R_i}$ .
8. La energía del sistema a la salida de la tubería  $n$  suele ser superior a la energía requerida del sistema allí ( $E2$ ), por lo que usualmente se utiliza una valvula para hacer caer la energía a  $E2$ . Dicha caída  $h_{m_v}$ , se calcula como:

$$h_{m_v} = H_T - \sum_{i=1}^n h_{f_{R_i}} - \sum_{i=1}^n h_{m_{R_i}} \quad (32)$$

9. Si  $h_{m_v} > 0$  y  $h_{m_v} \approx E2$ , ir a 10. Si  $h_{m_v} >> E2$ , para cada tubería  $i = 1...n$ , actualizar el valor de  $h_{f_i}$  para la siguiente iteración como:

$$h_{f_i} = h_{f_{R_i}} + h_{m_v} \quad (33)$$

Luego ir a 4.

10. Imprimir  $D_i$  para  $i = 1...n$ .

Es importante revisar que  $h_{m_v}$  sea positivo, de lo contrario esto supondría presiones negativas que podrían generar cavitación en el sistema. El procedimiento anterior puede ser repetido para diferentes materiales de tubería (diferentes valores de  $\varepsilon$ ) con el fin de escoger el diseño más económico.

### 3 Sistemas de tuberías en paralelo

Las tuberías en paralelo son un conjunto de dos tuberías o mas las cuales se derivan de un nodo común (nodo de entrada) y convergen hacia otro nodo (nodo de salida). Esto implica que, de acuerdo a la *ley de conservación de la masa*, la suma de los caudales que viajan por cada una de las tuberías debe ser igual aguas arriba del nodo de entrada y aguas abajo del nodo de salida; esto implica que el caudal de entrada y de salida de las tuberías es el mismo. En casos prácticos y cotidianos, los sistemas de tuberías en paralelo están limitados a máximo 3 o 4 tuberías, y son mas comunes los sistemas de dos tuberías. En estos sistemas, cada tubería puede tener longitudes, diámetros, accesorios y materiales diferentes.

#### 3.1 Ecuaciones para la solución de problemas

Teniendo en cuenta las tuberías en paralelo de la figura 4, se plantean las siguientes ecuaciones:

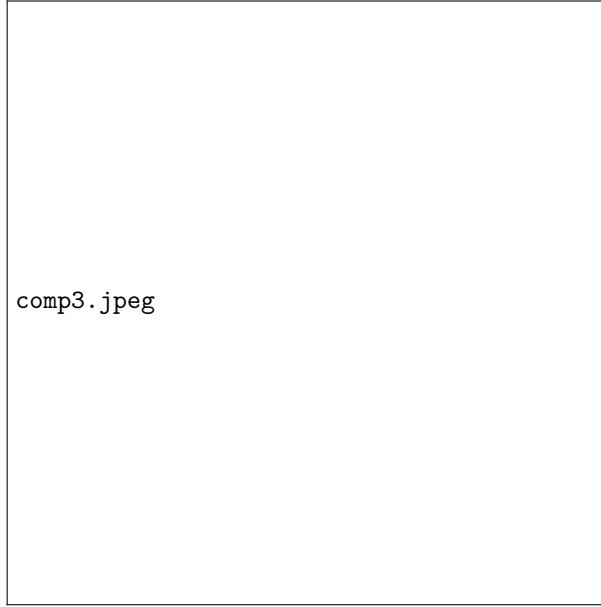


Figure 4: Esquema tridimensional de dos tuberías en paralelo y sus líneas de energía, con un nodo de entrada 1 y un nodo de salida 2. (tomado de [1]).

- Conservación de la energía

$$\Delta E = E1 - E2 = H_T = h_{f_1}^1 + h_{m_1}^1 + h_{f_2}^1 + h_{m_2}^1 + h_{f_3}^1 + h_{m_3}^1 + h_{f_4}^1 + h_{m_4}^1 + h_{f_5}^1 \quad (34)$$

donde  $H_T$  es la diferencia de energía entre el nodo de entrada (E1) y el nodo de salida (E2); la energía total disponible en el sistema,  $h_{f_i}^j$  son las pérdidas por fricción en el tramo  $i = 1...5$  de la tubería  $j = 1$  y  $h_{m_i}^j$  son las pérdidas menores (por válvulas, uniones, etc) en el tramo  $i = 1...4$  de la tubería  $j = 1$ .

La ecuación 34 puede expresarse de forma más compacta como:

$$H_T = \sum_{i=1}^{n_j} h_{f_i}^j + \sum_{i=1}^{m_j} h_{m_i}^j \quad (35)$$

donde  $n_j$  es el número de tramos de la tubería  $j = 1$  y  $m_j$  es el número de accesorios en la tubería  $j = 1$ . Note que la ecuación 35 aplica también para la tubería  $j = 2$ .

De acuerdo con la *ley de conservación de la energía*, esto implica que las pérdidas de energía en la dirección del flujo a través de la tubería 1 y 2 es la misma. De acuerdo con esto, la ecuación 35, se escribe como:

$$H_T = \sum_{i=1}^{n_1} h_{f_i}^1 + \sum_{i=1}^{m_1} h_{m_i}^1 = \sum_{i=1}^{n_2} h_{f_i}^2 + \sum_{i=1}^{m_2} h_{m_i}^2 \quad (36)$$

- Conservación de la masa De acuerdo con la *ley de conservación de la masa*, el caudal que entra al nodo de entrada ( $Q_T$ ), debe ser igual a la suma de los caudales que se distribuyen en las tuberías e igual al caudal en el nodo de salida. Para el esquema de la figura 4, se tiene que:

$$Q_T = Q_1 + Q_2 \quad (37)$$

donde  $Q_1$  es el caudal que transporta la tubería 1 y  $Q_2$  es el caudal que transporta la tubería 2. En general para un numero  $n$  de tuberías en paralelo, se tiene:

$$Q_T = \sum_{i=1}^n Q_i \quad (38)$$

### 3.2 Comprobación de diseño

Para este caso se conocen las características físicas de  $n$  tuberías, los accesorios en cada una de ellas, la energía disponible en el sistema y las propiedades del fluido circulante. Se desea entonces conocer los caudales individuales en cada tubería ( $Q_i$ ). A continuación se presenta el procedimiento de cálculo:

1. Leer:  $\rho$ ,  $\mu$  o  $\nu$ ,  $h_b$  (Cabeza de la bomba),  $E1$  y  $E2$ . También, para cada tubería  $i$ , leer:  $\varepsilon_i$ ,  $L_i$ ,  $D_i$ ,  $\sum K_i$ ,  $h_{t_i}$  y  $\eta_i$  (eficiencia de la turbina). Esta lectura se debe hacer para las  $n$  tuberías del sistema.
2. Para cada una de las  $n$  tuberías en paralelo, hacer la comprobación de diseño para tuberías simples descrito en la sección 1.4. Se obtendrán  $n$  caudales  $Q$  y  $n$  velocidades  $V$  para cada tubería.
3. El caudal total  $Q_T$  se obtendra usando la ecuación 38.

### 3.3 Cálculo de la potencia requerida

A continuación se describe el proceso para solucionar este tipo de problemas que consiste en determinar la presión en el nodo de entrada (1) o en el nodo de salida (2) de las tuberías en paralelo. Con esto es posible calcular la potencia consumida por el flujo a través de las tuberías en paralelo.

Uno de los problemas es que, a pesar de que el caudal total  $Q_T$  es un dato dado en el problema, no se sabe como éste se distribuye a través de las tuberías. Para esto se ha encontrado la siguiente ecuación a partir de la ecuación de Darcy-Weisbach:

$$Q_1^k = Q_T \frac{d_1^{5/2}/\sqrt{l_1}}{\sum_{i=1}^n d_i^{5/2}/\sqrt{l_i}} \quad (39)$$

en donde  $l_1$  es la longitud de la tubería 1 y  $d_1$  es el diámetro de la tubería 1. La ecuación 39 sirve para inicializar el caudal  $Q_1^k$  en la tubería 1. Con este caudal  $Q_1^k$  es posible calcular la energía (presión) en el nodo 1 o nodo 2 siguiendo el algoritmo de la sección 1.5. Una vez se tiene la energía disponible en el sistema ( $E_1 - E_2$ ), es posible calcular el caudal en cada una de las otras  $n - 1$  tuberías siguiendo el algoritmo de la sección 1.4. Sin embargo, es posible que la sumatoria de los  $n$  caudales no se sea igual a  $Q_T$ , por lo que es necesario corregir la suposición inicial de  $Q_1$  como:

$$Q_1^{k+1} = Q_1^k \frac{Q_T}{Q_T^*} \quad (40)$$

donde  $Q_T^* = \sum_{i=1}^n Q_i^k$  es el caudal total para la iteración  $k$ . El proceso de iteración termina cuando  $Q_T = Q_T^*$ .

1. Leer:  $\rho$ ,  $\mu$  o  $\nu$ ,  $h_b$  (Cabeza de la bomba),  $E1$  y  $E2$ . También, para cada tubería  $i$ , leer:  $\varepsilon_i$ ,  $L_i$ ,  $D_i$ ,  $\sum K_i$ ,  $h_{t_i}$  y  $\eta_i$  (eficiencia de la turbina). Esta lectura se debe hacer para las  $n$  tuberías del sistema.
- 2.

**4    Sistemas de tuberías ramificadas**

**5    Redes de distribución: Método de análisis de Cross**

**6    Redes de distribución: Método de análisis lineal**

## **References**

- [1] Juan Guillermo Saldarriaga Valderrama. Hidráulica de tuberías. abastecimiento de agua, redes, riegos. *Editorial Alfaomega, Ediciones Uniandes*, 2007.