

Tema # 1: Flujo real y disipación de energía [HB]

Luis Alejandro Morales (Ph.D)

Profesor Asistente

Universidad Nacional de Colombia-Bogotá

Facultad de Ingeniería

Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola

Periodo 2022-II

Contents

1	Fluido ideal y fluido real	1
1.1	Flujo ideal	1
1.2	Flujo real	2
2	Capa limite en flujo a presión	2
3	Esfuerzo de corte y perdidas de cabeza de energía	3
4	Experimentos de Reynolds	5

1 Fluido ideal y fluido real

1.1 Flujo ideal

Un **fluido ideal** es un fluido hipotético en donde se asume que el fluido no tiene viscosidad por lo tanto la *ley de viscosidad de newton*

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1)$$

en donde τ es el esfuerzo de corte, μ es la viscosidad dinámica y $u = f(y)$ es la velocidad del flujo, no es aplicable. Esto quiere decir que la fricción en el flujo es despreciable por lo tanto no existen esfuerzos de corte entre capas ni con los contornos, lo que implica que no hay disipación de energía debido a la fricción ni formación de remolinos. En un fluido ideal las partículas se mueven unas sobre otras sin ningún tipo de resistencia, sometidas a fuerzas hidrostáticas aplicadas sobre su superficie. El movimiento y la aceleración de dichas partículas se presenta gracias al desbalance de fuerzas actuantes de acuerdo con la *segunda ley de Newton*. La suposición de fluido ideal es de gran ayuda para el análisis de problemas prácticos en ingeniería en donde las fuerzas viscosas son despreciables dando resultados precisos. Por ejemplo si se quiere determinar la fuerza de levantamiento del ala de un avión es posible asumir un fluido ideal, sin embargo, dicha suposición no sería correcta si se quisiera determinar la fuerza de arrastre sobre el ala de un avión. Asumiendo el flujo de partículas de fluido ideal e *incompresible* (en donde la densidad no cambia) y de acuerdo con la *segunda ley de Newton*, se deduce la *ecuación de Bernoulli*:

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z = H = \text{Constante} \quad (2)$$

donde p es la presión (absoluta o manométrica), V es la velocidad media del flujo, z es la altura del sistema con respecto a un nivel de referencia y H es la cabeza de energía total en una sección del flujo la cual es constante ($H_1 = H_2$) y equivale a la suma de la *cabeza de energía de presión* (p/γ), *cabeza de energía cinética* ($V^2/2g$) y *cabeza de energía potencial* (z). Note que al término $\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}$ se le conoce como *cabeza de presión dinámica* la cual se

puede medir usando un *tubo Pitot*. La ecuacion de Bernoulli, puede ser expresada graficamente a traves de la *línea de energía* ($LE=H$) y *línea de gradiente hidraulico* ($LGH = p/\gamma + z$).

La inclusion (a travez de una *bomba*) o la extraccion (a traves de una *turbina*) de energia a un flujo de un fluido ideal da lugar a una forma mas completa de la ecuacion de Bernoulli conocida tambien como la *ecuacion de trabajo-energia*:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_B = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_T \quad (3)$$

donde h_B es la energia suministrada por una bomba y h_T es la enegia sustraída por una turbina. La potencia hidraulica (P_H) suministrada (bomba) al flujo o extraída (turbina) del flujo, se calculda como:

$$P_H = \gamma h Q \quad (4)$$

donde h es la cabeza de energia mecanica (h_B o h_T) y Q es el caudal. La *potencia nominal (o mecanica)* (P_n) es:

$$P_n = \frac{P_H}{\nu} \quad (5)$$

donde ν es la eficiencia de la bomba.

1.2 Flujo real

En un **flujo real** su movimiento es controlado por las *fuerzas de friccion* y las *fuerzas turbulentas*. Esto quiere decir que para mover un flujo real, es necesario realizar trabajo sobre el flujo para vencer estos esfuerzos y dicha energía se convierte en calor. Es por esto que en un *flujo laminar* las capas de fluido adyacentes se mueven a velocidades diferentes en funcion de la transmision de esfuerzos de corte en la interface. Lo mismo ocurre en las fronteras solidas en donde las fricción de las paredes son transmitidas a las capas de flujo haciendo que su velocidad aumente a medida que se alejan de las paredes. El grado de "pegajosidad" depende de la viscosidad del fluido. Los fluidos reales tambien se conocen como *flujos Newtonianos* por que siguen la ley de visosidad de Newton (ver Ecuación 1). En el caso de *flujos turbulentos*, flujos a velocidades altas generalmente, los esfuerzos viscosos generan vortices en el flujo. Si a las ecuaciones de *Euler* se le adicionan los terminos debido a los esfuerzos de corte, se optienen las *ecuaciones de Navier-Stokes* las cuales son un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales y de segundo grado que describen el movimiento de flujos reales, compresibles o incompresibles y permanentes o no permanentes.

Los efectos de los esfuerzos viscosos, son mas notorios en cercanias a las fronteras solidas (e.g fondo del canal o paredes de una tuberia); dicha region es conocida como *capa límite*.

2 Capa limite en flujo a presión

En un flujo real la **capa límite** es una porcion de la seccion de flujo en donde los esfuerzos debido a la fricción (viscosos) estan confinados o cobran gran importancia y en donde el flujo es *rotacional* $\vec{\nabla} \times \vec{U} \neq 0$. Esto quiere decir por fuera de la capa límite la viscosidad del fluido es inoperativa y el flujo es *irrotacional* $\vec{\nabla} \times \vec{U} \neq 0$.

Un *flujo a presion* o flujo interno es aquel que viaja por un conducto y ocupa toda su seccion transversal (ver figura 1). El movimiento del flujo en el conducto se da por el gradiente de presión entre dos puntos en el conducto separadas una distancia L . Dicho gradiente se presenta gracias a la perdida de energia a lo largo de L debido a los esfuerzos de fricción y separación del flujo.

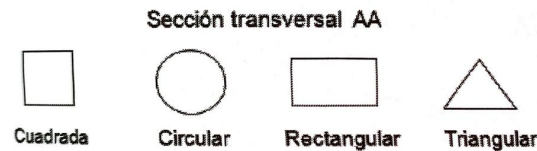


Figure 1: Tipos comunes de secciones transversales de tuberías (tomado de [1]).

Si se tiene un tanque grande del cual se conecta en la parte baja una tubería (ver figura 2), los esfuerzos viscosos empiezan a crecer una vez el fluido ingresa a la tubería y por tanto la capa limite (δ) tambien empieza a crecer a lo largo de la tubería. La zona inicial es una zona de flujo ideal en donde los esfuerzos viscosos son despreciales y por lo

tanto la velocidades son uniformes. Una vez, el flujo sale de zona inicial, la capa limite crece en una zona de *flujo no establecido* en donde se desarrollan los esfuerzos de corte. Es posible que cuando la entrada a la tubería no se hace a través de una transición suave, se presente separación del flujo de las paredes de la tubería generandose remolinos que viajan y desaparecen a lo largo de la zona de flujo no establecido generandoe *presiones negativas* a velocidades muy altas. Una vez las capas limites alderdor y crecientes en direccion del flujo se encuentran es cuando se tiene un *flujo establecido* o flujo real gobernado por los esfuerzos de corte con una districión no uniforme de velocidades.

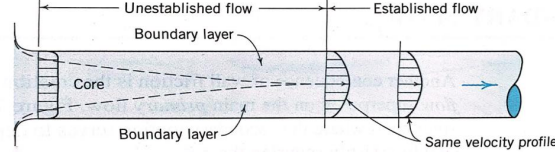


Figure 2: Desarrollo de la capa limite a lo largo de una tubería (tomado de [3]).

El mecanismo de crecimiento de la capa limite se puede describir como sigue. Cuando el fluido entra a la tubería se desarrollan altos valores de dv/dy , donde y es la dirección vertical. Estos altos gradientes ocurren dentro de la capa límite y son debido a los esfuerzos debido a la fricción los cuales tratan de frenar el flujo. Dicha capa crece en la dirección del flujo hasta el punto en el que se encuentran. A partir de este punto de encuentro la fricción de fuerzas de fricción influncian el flujo y es toda sección rotacional.

El flujo dentro de la capa límite puede ser laminar o turbulento. Si el numero de Reynolds $Re = \frac{Vd}{\nu}$, donde V es la velocidad media del flujo, d es el diámetro de la tubería y ν es la viscosidad cinemática, es $Re < 2100$, se puede inferir que el *flujo laminar establecido* resulta del crecimiento de la capa límite laminar. En este caso la longitud que toma el establecimiento de este flujo es $\frac{x}{d} \approx \frac{Re}{20}$. Si el Re aumenta levemente el flujo será laminar a lo largo de $\frac{x}{d} \approx \frac{Re}{20}$ y luego será transicional antes de que el flujo este establecido. Si $Re \gg 2100$ la capa límite será turbulenta. Para Re altos, en casos prácticos se puede decir que la longitud x de la zona de flujo puede ser hasta $x \approx 100d$. Sin embargo el flujo es establecido para valores mayores a $\frac{x}{d} \approx 20$. De acuerdo con esto, es posible notar que la energía en un flujo establecido disminuye a lo largo de la tubería. Note que la energía debido a la cabeza de presión disminuye a lo largo de la tubería debido a los esfuerzos de corte generados por la fricción dentro del flujo establecido.

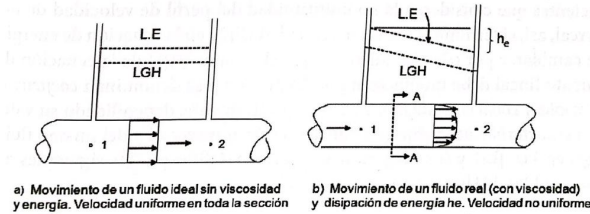


Figure 3: Línea de gradiente hidráulico (LGH) y de energía (LE) en un a) fluido ideal y en un b) fluido real (tomado de [1]).

3 Esfuerzo de corte y pérdidas de cabeza de energía

Los esfuerzos de corte son producidos debido a la turbulencia del flujo o la viscosidad del fluido lo que con lleva a una resistencia al flujo que se traduce en pérdidas de energía. Una pregunta clave, que se derivaría es ¿Cuáles son los efectos de las fuerzas de fricción sobre la superficie de un volumen de control, por ejemplo, en una tubería?. Para esto analizaremos los esfuerzos de corte (τ) en un flujo 1D compresible y permanente a través de la tubería inclinada de la figura 4.

Aplicando la *ecuación de conservación de cantidad de movimiento lineal* para las fuerzas actuantes en la dirección del flujo sobre el volumen de control entre las secciones 1 y 2 en la figura 4, tenemos que las fuerzas fundamentales que actúan son las *fuerzas de presión*, las *fuerzas gravitacionales* y las *fuerzas viscosas*. Por esto se tiene:

$$pA - (p + dp)A - \tau_o P dl - \left(\gamma + \frac{d\gamma}{2} \right) A dl \frac{dz}{dl} = (V + dV)^2 A (\rho + d\rho) - V^2 A \rho \quad (6)$$

donde V es la velocidad del flujo, p es la presión en la sección, P es el perímetro de la sección, A es el área de la sección transversal, τ_o es el esfuerzo de corte en la superficie de control, dl es la longitud del volumen de control, dV

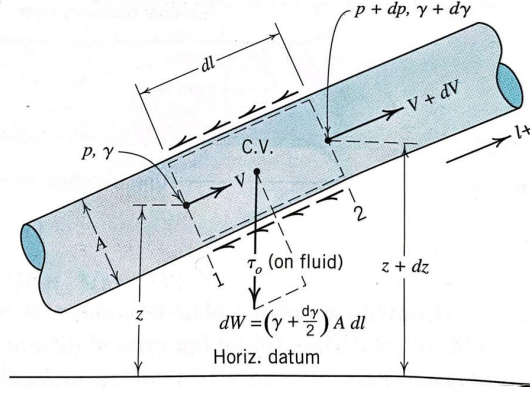


Figure 4: Fuerzas actuantes sobre el volumen de control en la tubería inclinada (tomado de [3]).

es un cambio en la velocidad a través de dl , dz es la diferencia de alturas entre las secciones 1 y 2, ρ es la densidad del fluido, γ es el peso específico del fluido, $d\rho$ es un cambio de ρ a través de dl y $d\gamma$ es el cambio del peso específico a lo largo de dl . Note que $(\gamma + \frac{d\gamma}{2}) A dl \frac{dz}{dl} = dW \frac{dz}{dl}$, donde $dW \frac{dz}{dl}$ es el peso del fluido en el volumen de control en la dirección contraria del flujo, donde $\frac{dz}{dl} = \sin \theta$ y θ es el ángulo de inclinación de la tubería. Teniendo en cuenta que entre 1 y 2 los efectos de turbinas y bombas son despreciables, dividiendo por $A\gamma$, donde $\gamma = \rho g$ y despreciando los términos que contengan productos de diferenciales, la ecuación 6 queda:

$$\frac{dp}{\gamma} + d\left(\frac{V^2}{2g}\right) + dz = -\frac{\tau_o dl}{\gamma R_h} \quad (7)$$

donde $R_h = \frac{A}{P}$ es el radio hidráulico de la sección. Para *flujo incompresible* en la tubería de la figura 4 y suponiendo que la tubería es de sección constante, significa que τ_o no es función de l y que γ es constante por lo que $d\left(\frac{1}{\gamma}\right) = 0$. Por lo tanto la ecuación 7 queda:

$$d\left(\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z\right) = -\frac{\tau_o dl}{\gamma R_h} \quad (8)$$

Integrando la ecuación 8 entre las secciones 1 y 2, queda:

$$\left(\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1\right) - \left(\frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2\right) = \frac{\tau_o(l_2 - l_1)}{\gamma R_h} \quad (9)$$

Note que la diferencia de energía entre las secciones 1 y 2 (término izquierdo de la ecuación 9) es la caída de energía entre las dos secciones, por lo que la ecuación 9 se expresa como:

$$\left(\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1\right) - \left(\frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2\right) = \Delta(EL) = h_{L_{1-2}} \quad (10)$$

donde $\Delta(LE)$ es la caída de la línea de energía o la pérdida de energía entre 1 y 2 ($h_{L_{1-2}}$). Las pérdidas de energía se pueden expresar como:

$$h_{L_{1-2}} = \frac{\tau_o(l_2 - l_1)}{\gamma R_h} \quad (11)$$

Note que en la ecuación 11 quiere decir que las pérdidas de energía en el volumen de control son directamente proporcionales a la longitud del volumen de control ya los esfuerzos cortantes ejercidos por las paredes de la tubería sobre las paredes del volumen de control. Las pérdidas de energía son además inversamente proporcionales al radio hidráulico del volumen de control. Si la tubería es de sección circular de radio R , $R_h = \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2}$, la ecuación 11 quedaría:

$$h_{L_{1-2}} = \frac{2\tau_o(l_2 - l_1)}{\gamma r} \quad (12)$$

En terminos generales, τ se puede expresar a parti de la ecuación 12:

$$\tau = \left(\frac{\gamma h_L}{2l} \right) r \quad (13)$$

donde r es una distancia radial y l es la longitud de la tubería. Note que τ varia linealmente con r (ver figura 5) donde le $\tau_{max} = \tau_o$ se logra cuando $r = R$ (paredes de la tubería). Note que las ecuaciones anteriores fueron deducidas independiente si el flujo es laminar o turbulento.

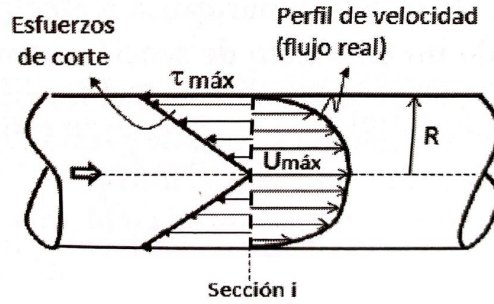


Figure 5: Perfil de velocidades y esfuerzos de corte (tomado de [1]).

Example 1. Agua fluye en un conducto rectangular de sección 0.9 m de ancho por 0.6 m de alto. La perdida de cabeza de energía en este conducto de 60 m de longitud fue determinada experimentalmente e igual 10 m. a) Calcular el esfuerzo de corte en las paredes del conducto. Si el conducto es de sección circular de diametro $D = 0.6m$, b) ¿cual es el esfuerzo cortante en las paredes? y c) ¿dentro del flujo en un punto a 200 mm de las paredes?

4 Experimentos de Reynolds

Osborne Reynolds en 1883 mediante un experimento el cual consistio en establecer un flujo de agua a través de una tubería de vidrio en el que la velocidad era controlada por una valvula a la salida de la tuberia (ver figura 6). A la entrada de la tubeía se inyecta una tinta que tiene un peso específico igual al del agua. Reynolds encontró que cuando la valvula esta ligeramente abierta, las particulas de tinta se mueven de forma ordenada formando un filamento y a manera de capas que se deslizan una sobre otra sin mezclarse. Sin embargo, a medida que la valvula se va abriendo, se alcanza una condicion en la cual la tinta presenta un movimiento fluctuante a medida que avanza en la tubería, en donde las particulas de la tinta se mueven caoticamente mezclandose. Al primer tipo de flujo se le llamo *laminar* y al segundo *turbulento*.

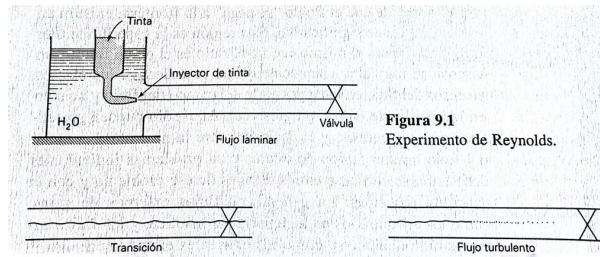


Figure 6: Experimento de Reynolds (tomado de [2]).

Reynolds encontro que el comportamiento de flujo se podia correlacionar con un parametro adimensional que relacionaba las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas, el cual es conocido como el *numero de Reynolds* (Re):

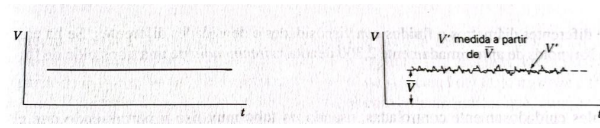


Figure 7: Velocidad para flujo laminar y flujo turbulento (tomado de [2]).

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{1.273Q}{\nu D} \quad (14)$$

donde D es el diametro de la tubería.

Reynolds encontro que flujo laminar se obtenia para valores de $Re < 12000$, mientras que el flujo turbulento se lograba con $Re > 50000$. Sin embargo estos valores encontrados por Reynolds se obtuvieron para condiciones alejadas de lo que es un sistema de conducción real y que ocurren comunmente en ingeniería. Para propositos practicos en tuberías comerciales se ha encontrado que:

$$Re < 2000 \rightarrow \text{flujo laminar}$$

$$2000 < Re < 4000 \rightarrow \text{flujo de transición}$$

$$Re > 4000 \rightarrow \text{flujo de turbulento}$$

References

- [1] CA Duarte Agudelo. *Mecánica de fluidos e hidráulica*. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ingeniería., 2011.
- [2] I Shames. *Fluid mechanics and application*. editorial graw hill, 2010.
- [3] RL Street, GZ Watters, and JK Vennard. *Elementary fluid mechanics*, (1995). *John Wiley and Sons, New York, ISBN 0, 471(01310):3*.