Clase No.20: Cinemática de los fluidos

Propiedades cinemáticas de los fluidos

Luis Alejandro Morales
https://lamhydro.github.io

Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Colombia - Sede Bogotá

October 9, 2022

Table of Contents

Introduccion

Introduccion

Cinemática de los fluidos

Estudia el movimiento de las particulas de fluido sin considerar las fuerzas que actuan sobre las mismas; caracteriza dicho movimiento en funcion del espacio y del tiempo.

Definiciones

Definiciones

Algunas definiciones importantes del analisis vectorial son:

Escalar

Se define por la magnitud que acquiere la magnitud física. Ejemplos: temperatura, presion, densidad

Vector

Vector: Definicion

Es una cantidad que tiene magnitud, dirección y sentido. Ejemplos: velocidad, aceleración, fuerza. Un campo de velocidades para un $t = t_1$, puede estar expresado como:

$$\vec{U}(x, y, z) = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$$

donde u_x, u_y y u_z son las componentes en x, y y z, respectivamente, del vector $\vec{U}$ en donde cada componente es una $f(x, y, z)$. $\vec{i}$ $\vec{j}$ $\vec{z}$ son los vectores unitarios (magnitud 1) para x, y y z, respectivamente. Entre dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es posible efectuar dos tipos de productos:

1. *Producto scalar o punto*

$$\vec{A}\vec{B} = ABcos\theta$$

donde θ es el angulo formado por los dos vectores. De acuerdo con esto $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$ mientras, por ejemplo

Vector: Operadores vectoriales

Operador ∇

Vector simbolico que se aplica a cantidades *escalares* y *vectoriales*, se define como:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \tag{1}$$

Gradiente de una función

Si el operador ∇ se aplica a una funcion escalar ϕ, se obtiene un vector gradiente definido como:

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k} \tag{2}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Divergencia

El producto punto entre el operador ∇ y un vector $\vec{U}$, se obtiene un escalar conocido como la divergencia de $\vec{U}$, que se expresa como:

$$\nabla \cdot \vec{U} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right][u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}] = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3)$$

Note que $\nabla \cdot \vec{U} \neq \vec{U} \cdot \nabla$, entonces:

$$\vec{U} \cdot \nabla = [u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}]\left[\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right] = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

Vector: Operadores vectoriales

Rotacional

Es el producto cruz entre el operador ∇ y un vector $\vec{U}$, se obtiene un vector conocido como el rotacional de $\vec{U}$, que se expresa como:

$$\nabla \cdot \vec{U} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right] x[u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}] = XXXX \tag{4}$$

Vector: Operadores vectoriales

Laplaciano

Se define como:

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] \tag{5}$$

Si ∇^2 se aplica sobre una funcion escalar ϕ, se obtiene:

$$\nabla^2 \phi = \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\right] \tag{6}$$

Si ∇^2 se aplica sobre un vector $\vec{U}$ (e.g. velocidad), se obtiene:

$$\nabla^2 \vec{U} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] [u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}]$$

$$\nabla^2 \vec{U} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] \vec{i} + \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right] \vec{j} + \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right] \vec{k} \tag{7}$$

$$\nabla^2 \vec{U} = \vec{i}\nabla^2 u + \vec{j}\nabla^2 v + \vec{k}\nabla^2 w \tag{8}$$

Campo escalar

Campo escalar

Un escalar ϕ es funcion de las coordenadas espaciales x, y y z o del vector de posición $\vec{r}$ del punto $P(x, y, z)$; $\vec{r}$ une al origen del sistema de referencia con P. Es posible entonces escribir:

$$\phi = \phi(x, y, z) = \phi(P) = \phi(\vec{r})$$

Por lo tanto un campo escalar queda definido si para cada punto P existe un único valor de ϕ exigiendose que la funcion $\phi(x, y, z)$ sea continua y derivable en el espacio. El espacio geométrico para el cual multiple puntos (x, y, z) tienen el mismo valor de ϕ se denomina superficie equipotencial. Si $\phi = f(x, y)$, el lugar geometrico de todos los punto con igual valor ϕ es una linea equipotencial. La presion en un fluido es un ejemplo de un campo escalar.

Campo vectorial y potencial

Campo vectorial

Si un vector $\vec{A}$ es función de su posición (x, y, z) en el espacio, se puede escribir que:

$$\vec{A} = \vec{A}(x, y, z) = \vec{A}(P) = \vec{A}(\vec{r}) = a(x, y, z)\vec{i} + b(x, y, z)\vec{j} + c(x, y, z)\vec{k}$$

Por lo tanto un campo vectorial esta definido si existe un valor de $\vec{A}$ en capa punto $P(x, y, z)$. La velocidad de un fluido $\vec{U}$ es un ejemplo de un campo vectorial.

Campo potencial

Un campo potencial es aquel en el que:

$$\vec{U} = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$$

en donde $\vec{U}$ es la velocidad y ϕ es una función escalar.

Concepto de flujo de un campo vectorial y de circulación de un vector

Concepto de flujo de un campo vectorial

Supongase que existe un campo vetorial $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$ y una superficie S delimitada por una linea L. Un diferencial dS esta definida por el vector unitario $\vec{n}$ perpendicular a dS. Asi el flujo del vector A a través de la superficie S es:

$$\psi = \int_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \int_S \vec{A} \cdot dS$$

Concepto de circulación de un vector

La circulación de un vector $\vec{A}$ a lo largo de la linea L está definida como:

$$\Gamma = \int_L \vec{A} \cdot d\vec{L}$$

Si $\vec{A}$ representa un campo de fuerza $\vec{F}$, Γ representa el trabajo mecánico realizado por $\vec{F}$.