Clase # 3: Presion y estatica de los fluidos

Luis Alejandro Morales
Profesor Asistente

Universidad Nacional de Colombia-Bogotá
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingenieria Civil y Agrícola

Periodo 2022-II

Contents

1 Presión

En mecanica de fluidos, la **presión** es definida como la fuerza normal ejercida por un fluido por unidad de area. En otras areas, la presion ejercida sobre un solido se conoce como el **esfuerzo normal**. En SI, las unidades de la presión son el **pascal**(Pa) donde 1 $Pa = 1\ N/m^2$. Otras unidades de presion usadas comunmente son:

$$\begin{aligned}
1\ bar &= 10^5\ Pa\ =\ 0.1\ MPa\ =\ 100\ kPa \\
1\ atm &= 101325\ Pa\ =\ 101.325\ kPa\ =\ 1.01325\ bars \\
1\ kgf/cm^2 &= 9.807\ N/cm^2\ =\ 9.807E4\ N/m^2\ =\ 9.807E4\ Pa \\
&= 0.9807\ bar \\
&= 0.9679\ atm
\end{aligned}$$

En sistema ingles, las unidade de la presión son libra fuerza por puldaga cuadrada (lbf/in^2 o psi). Algunas equivalencias entre los dos sistemas son:

$$\begin{aligned}
1\ atm &= 14.696\ psi \\
1\ kgf/cm^2 &= 14.223\ psi
\end{aligned}$$

Algunas definiciones son:

- **presion absoluta** P_{abs}: Es la presion actual sobre un cuerpo y es medida con respecto al vacio absoluto (presion cero). La mayoria de los medidores de presion son calibrados para medir la presion tomando como cero la presión atmosferica local.
- **presion de manometro** P_{gage}: Es la diferencia entre la presion absoluta y la presion atmosferica local.
- **presion de vacio** P_{vac}: Se presenta cuando una presion esta por debajo de la presion atmosferica ($P_{gage} < 0$).

La relacion entre estas presiones es (ver figura 1):

$$P_{gage} = P_{abs} - P_{atm} \tag{1}$$

$$P_{vac} = P_{atm} - P_{abs} \tag{2}$$

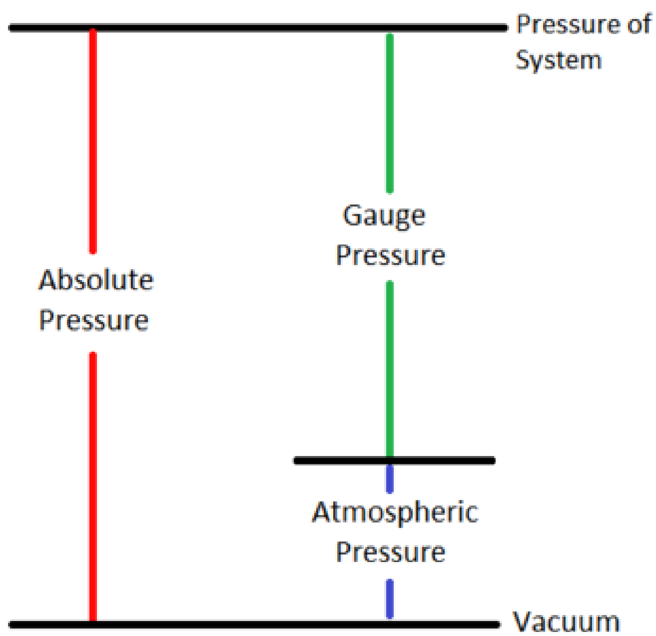

Figure 1: Presión atmosferica, de manometro y de vacio

Es comun encontrar por ejemplo que la presion de manometro tipica de una llanta de un carro es 32.0 *psi*, la cual es tomada con respecto a la presion atmosferica. Si la presion atmosferica en el sitio en donde se encuentra el carro es de 14.3 *psi*, la presion absoluta seria $32.0 + 14.3 = 46.3$ *psi*. Note que en algunos problemas las unidades *psig* hacen referencia a presion de manometro mientras que las unidades *psia* hacen referencia a presion absoluta.

1.1 Presión en un punto

Por definicion, la presion en un punto en un fluido es la misma en todas las direcciones, por lo tanto la presion no puede considerarse como una cantidad vectorial y es entonces una cantidad scalar. Esto se puede demostrar si se hace un analisis de fuerzas sobre el elemento en equilibrio de la figura 2 en donde la profundidad del elemento es $\Delta y = 1$. Aplicando la segunda ley de Newton y haciendo un analisis de fuerzas sobre las superficies del elemento:

$$\begin{aligned} \sum F_x = ma_x = 0: &\quad P_1 \Delta y \Delta z - P_3 \Delta y l \sin\theta = 0 \\ \sum F_z = ma_z = 0: &\quad P_2 \Delta y \Delta x - P_3 \Delta y l \cos\theta - \frac{1}{2}\rho g \Delta x \Delta y \Delta z = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

donde ρ es la densidad y $W = mg = \frac{1}{2}\rho g \Delta x \Delta y \Delta z$ es el peso del elemento. Teniendo en cuenta que $\Delta x = l\cos\theta$ y $\Delta z = l \sin\theta$, reemplazando en la ecuacion 3 y simplificando:

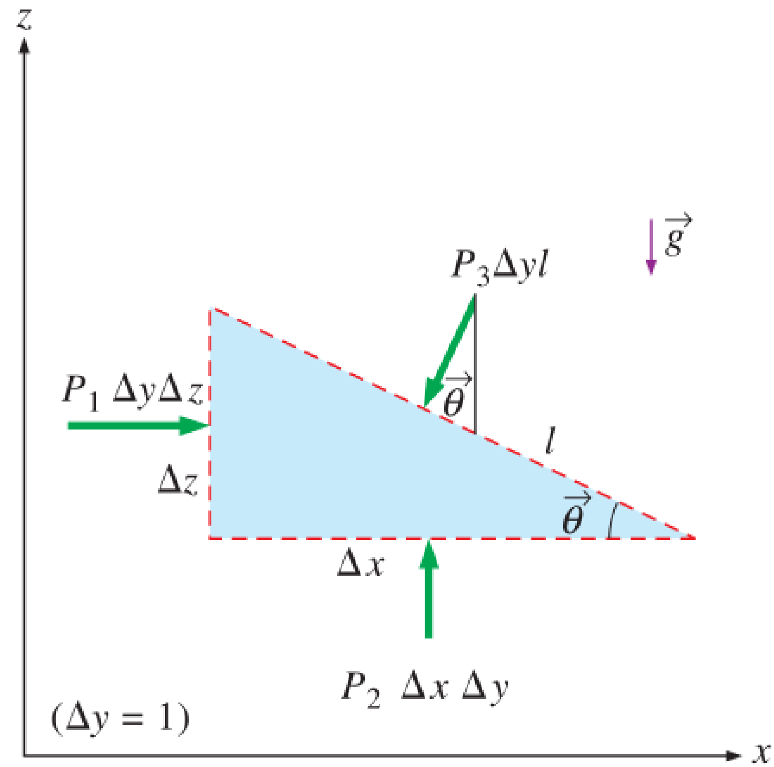

Figure 2: Fuerzas actuantes sobre un elemento de fluido en equilibrio.

$$\begin{aligned} P_1 - P_3 &= 0 \\ P_2 - P_3 - \frac{1}{2}\rho g \Delta z &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

El ultimo termino de la ecuación 4 se elimina teniendo en cuenta que cuando el elemento se vulve infinitesimal y se reduce a un punto $\Delta z \to 0$. Por tanto:

$$P_1 = P_2 = P_3 = P \tag{5}$$

Con esto concluimos que la presion P en un punto en un fluido tiene la misma magnitud en todas las direcciones. Esto se aplica para un fluido en moviento o en reposo teniendo en cuenta que la presion es un escalar.

1.2 Variación de la presión con la profundidad

Es conocido que la presion de un fluido en reposo no cambia en direccion horizontal y su cambio es en direccion vertical. Por esto, la presion en un fluido incrementa con la profundidad ya que este incremento implica mayor cantidad de fluido y por tanto mayor peso lo cual es balanceado con un incremento de la presión.

Para obtener una relacion de la variación de la presion con la profundidad, analicemos las fuerzas actuantes sobre el elemento en equilibrio de la figura 3 cuya profundidad es $\Delta y = 1$.

Asumiendo que la densidad ρ del fluido es constante, el balance de fuerzas en la direccion z es:

$$\sum F_z = ma_z = 0: \quad P_1 \Delta x \Delta y - P_2 \Delta x \Delta y - \rho g \Delta x \Delta y \Delta z = 0$$

donde $W = mg = \frac{1}{2}\rho g \Delta x \Delta y \Delta z$ es el peso del elemento y $\Delta z = z_2 - z_1$. Dividiendo por $\Delta x \Delta y$, tenemos:

$$\Delta P = P_2 - P_1 = -\rho g \Delta z = -\gamma_s \Delta z \tag{6}$$

donde $\gamma_s = \rho g$ es el peso especifico del fluido. Otra manera de expresar la ecuacion 6anterior es:

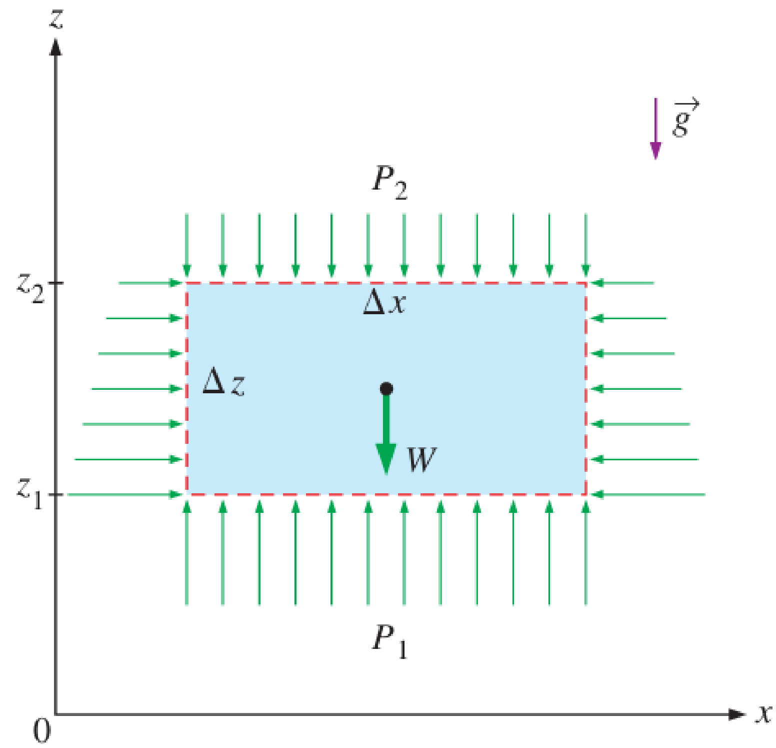

Figure 3: Diagrama de cuerpo libre de un elemento rectangular de fluido en equilibrio.

$$\Delta P_{below} = P_{above} + \gamma_s |\Delta z| \tag{7}$$

donde "below" indica el punto mas bajo mientras que "above" indica el punto mas alto. Debido a que la densidad de los gases $\approx$ 0, por ejemplo, la presion en una habitacion es uniforme ya que el peso del gas es muy bajo por lo que la ecuacion 6 se convierte en $\Delta P = 0$. Si tomamos el punto "above" sobre la superficie de el liquido a superficie abierta, cuya presion es la atmosferica P_{atm}, la presion a una profundidad h (medida desde la superficie), la presion es:

$$P = P_{atm} + \rho g h \quad \text{or} P_{gage} = \rho g h \tag{8}$$

Como los fluidos son esencialmente inconpresibles, la variación de ρ es despreciable con respecto a la profundidad. Cuando se requiere una alta precision en el calculo de P debido a cambios fuertes de temperature en fluidos, es necesario saber como ρ cambia con la temperatura. Ademas, cuando se requiere calcular P a grandes profundidades en el oceano, es importante determinar como cambia a la densidad con la profundidad.

Para fluidos cuya densidad cambia significantemente con la elevacion, una relacion de la variacion de la presion con respecto a la elevacion es obtenida dividiendo la ecuacion 6 por $\Delta z \to 0$, es:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \tag{9}$$

Noten que dP es negativa cuando dz es positiva teniendo en cuenta que la presion decrease hacia arriba.Si ρ es conocida con la elevacion, la diferencia de presion entre dos puntos 1 y 2 (ver figura 3 se determina como:

$$\Delta P = P_2 - P_1 = -\int_1^2 \rho g dz \tag{10}$$

Como lo habiamos mencionado anteriormente, en un fluido en reposo la presion sobre cualquier tipo de superficie cambia unicamente con la profundidad. En la figura 4 vemos que la presion en los puntos A, B, C, D, E, F y G sobre superficies de diferentes formas es la misma, ya que estan conectados por el mismo liquido y estan a la misma profundidad h. Es ademas importante recordar que la presion es siempre normal a la superficie. Por otro lado la presion sobre los puntos H e I no es la misma porque estan a diferente profundidad y ademas no estan conectados por el mismo fluido.

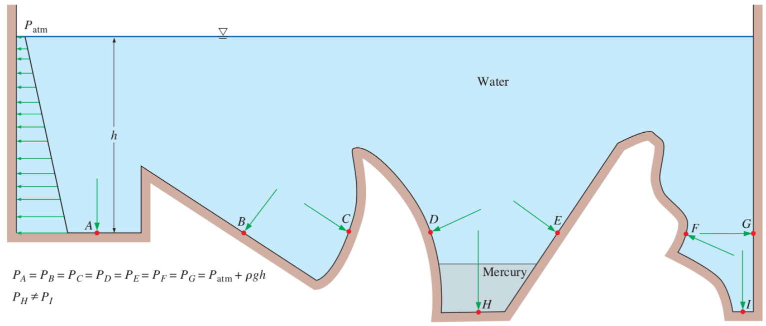

Figure 4: Presion sobre puntos sobre superficies de diferentes formas y a diferentes profundidades.

Como consecuencia de que la presion es constante en direccion horizontal, tenemos que *la presion aplicada sobre un fluido confinado en un contenedor, es transmitida igualmente a todas las partes del contenedor y actua perpendicular a las paredes del mismo.* Esto es conocido como la **Ley de Pascal**. Dicho de otra manera *un cambio en la presion en cualquier punto de un fluido en reposo es transmitido igualmente a todos los puntos del fluido.* La ley de pascal tiene muchas aplicaciones como por ejemplo el sistema de frenos en vehiculos, los elevadores hidraulicos para levantar cargas pesadas, entre otros. Si analisamos la figura 5, tenemos que $P_1 = P_2$ ya que estan a un mismo nivel, esto con lleva a la siguiente relacion de fuerzas:

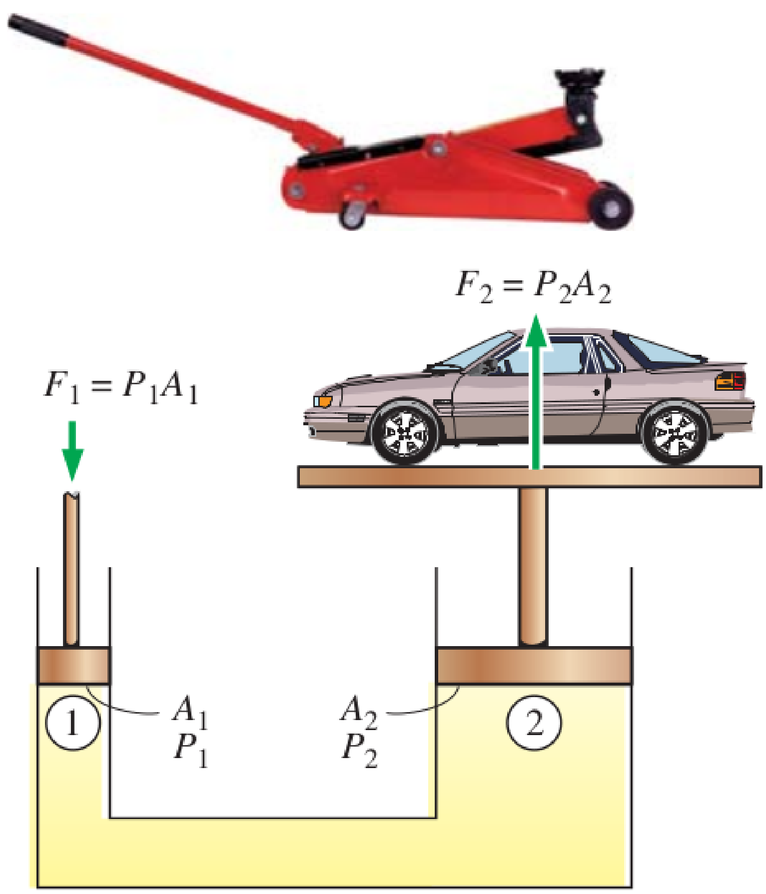

Figure 5: Ley de Pascal en un elevador hidraulico.

$$P_1 = P_2 \quad \rightarrow \quad \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad \rightarrow \quad \frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1} \tag{11}$$

donde la relacion A_2/A_1 es conocida como la *ventaja mecanica* de un elevador hidraulico.

2 Medidores de presión

2.1 Barometro

La presión atmospherica es medida por un aparato llamado **barometro** por lo que la presion atmosferica es usualmente conocida como la presion baramometrica. El barometro fue inventado por Evangelista Torricelli (1608-1647) y consiste en invertir un tubo de ensayo lleno de mercurio dentro de un recipiente con mercurio abierto a la atmosfera (ver figura 6). La presion en el punto B es igual a la presion atmoferica, mientras la presion en el punto C puede considerarse igual zero. Escribiendo el balance de fuerzas sobre la columna de mercurio:

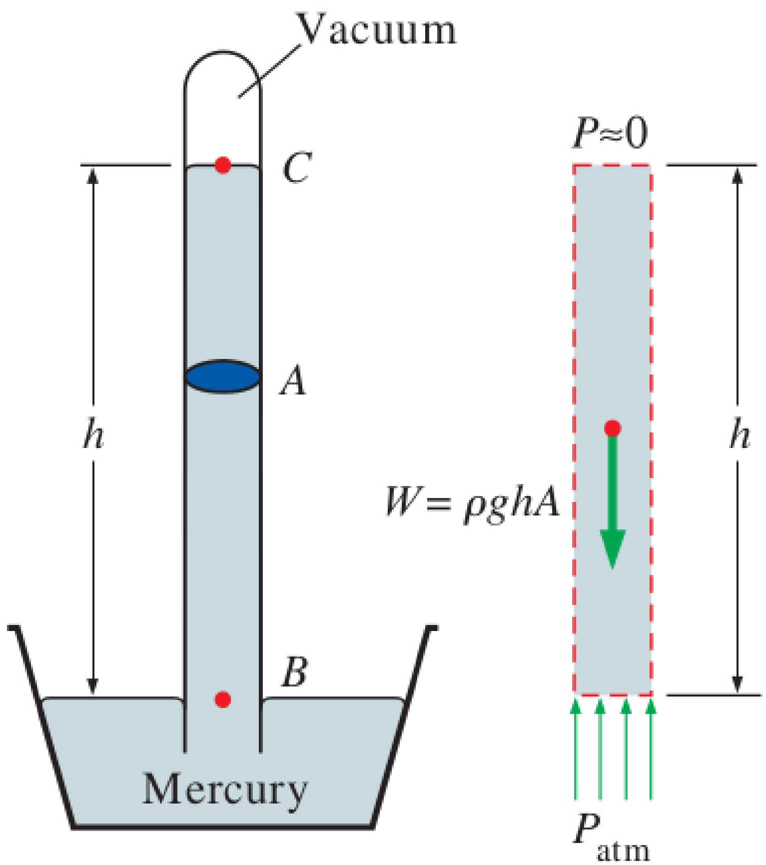

Figure 6: El barometro

$$P = \rho g h \tag{12}$$

donde ρ es la densidad del mercurio. Note que la altura h de la columns es siempre la misma independiente del diametro del tubo.

Algunas definiciones:

- **atmosfera estandard**: Presion producida por una columna de mercurio de 760 mm de $\rho_{Hg} = 13595\ kg/m^3$ a 0^oC bajo estandard $g = 9.807\ m/s^2$. El equivalente en columna de agua seria de 10.3 m.

- **Torr**: En honor a Torricelli, la unidad $mmHg$ es conocida como $torr$. Por esto, 1 $atm = 760\ torr$ y 1 $torr = 133.3\ Pa$.

Algunas ideas importantes:

- La P_{atm} disminuye con la altura. Por eso mientras que $P_{atm} = 101.325kPa$, la presion a altitudes como 1000, 2000, 5000 y 10000 y 20000 metros es 89.88, 79.50, 54.05, 26.5 and 5.53 kPa, respectivamente.

- Si P_{atm} depende del peso del aire arriba de una posicion determinada, esta no solo cambia con la altitud, tambien con las condiciones climaticas.

- Como la temperatura y la presion disminuyen con la altura, cocinar hervir agua en sitios en altas altitudes toma mayor tiempo.
- Es comun el sangrado nasal en altas altitudes porque la diferencia entre la presion sanguinea y la presion atmosferica se hace mayor por lo que los vasos sanquineos de la nariz son incapaces de soportar este esfuerzo adicional y terminan rompiendose.
- Como en altas altitudes la densidad del aire es mas baja, la cantidad de oxigeno por unidad de volumen es menor, por eso nos cansamos mas rapidamente en estos lugares y experimenmos dificultad al respirar.

2.2 El manometro

De acuerdo con la ecuación 6, el cambio de elevacion $-\Delta z$ en un fluido en reposo es igual a $\Delta P/\rho g$, lo cual sugiere que la columna de un fluido puede ser usada para calcular las diferencias de presion. El **manometro** es un aparato que esta basado en este principio y por lo tanto es usado para medir differencias de presion. Un manometro es un tubo de plastico o vidrio en forma de U el cual contiene usualmente agua, mercurio, alcohol o aceite (ver figura 7). Cuando las diferencias de presion son muy altas, se prefiere un fluido pesado como el mercurio.

Figure 7: Manometro en forma de U

Consideremos el manometro conectado al tanque con gas de la figura 8. Teniendo en cuenta que los efectos gravitaciones sobre los gases son despreciables, la presion en cualquier punto del tanque es la misma incluyendo la presion en 1 P_1. Se sabe ademas que la presion no varia en direccion horizontal en un fluido, por lo tando, $P_2 = P_1$. Como la altura h de fluido esta en equilibrio estatico y esta abierta a la atmosfera:

$$P_2 = P_{atm} + \rho g h \tag{13}$$

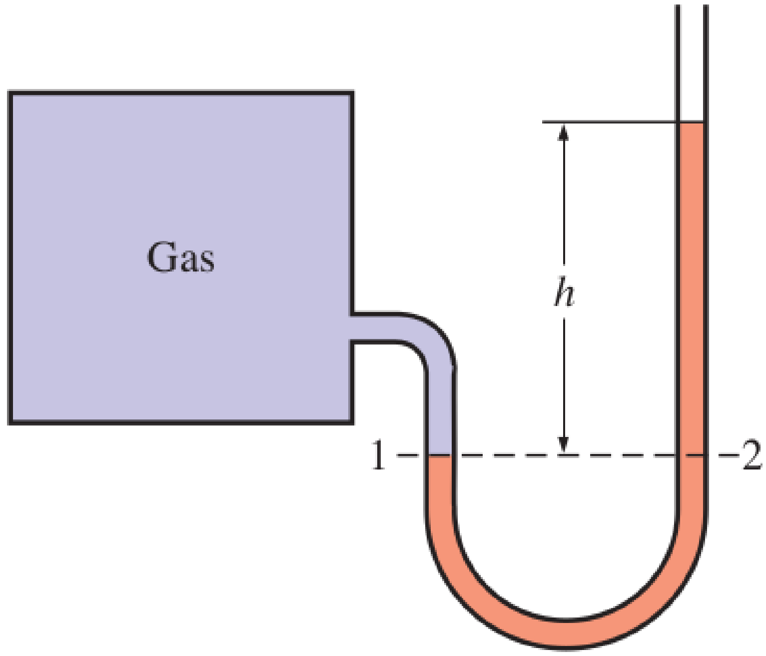

Figure 8: Manometro básico.

donde ρ es la densidad del fluido del manometro. A pesar que el area transversal del manometro no cambia h, el diametos del tubo debe ser lo suficientemente grande para reducir el efecto capilar.

Algunos problemas en ingenieria involucran manometros con multiples fluidos de diferentes densidades ubicados uno sobre otro. Recuerde que para resolver cualquier problema de manometros:

1. El cambio de presion en una columna de fluido h es: $\Delta P = \rho g h$.
2. La presion en un fluido incrementa hacia abajo y disminuye hacia arriba ($P_{down} > P_{top}$).
3. Dos puntos conectados por un fluido continuo en reposo sobre el mismo plano horizontal tienen la misma presion.

Cuando existen differentes tipos de fluidos conectados continuamente y en reposo se puede calcular la presion en un punto determinado partiendo del punto cuya presion es conocida e ir adicionando o substrayendo el termino $\rho g h$ en la direccion al punto de presion desconocida. Por ejemplo si tenemos los fluidos de la figura 9 y queremos calcular la presion en el punto 1, empezamos desde la presion conocida P_{atm} y vamos avanzando hasta el punto 1, lo cual da:

$$P_{atm} + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 + \rho_3 g h_3 = P_1$$

En el caso en que los tres fluidos tuvieran la misma densidad, la ecuacion anterior quedaria: $P_{atm} + \rho g(h_1 + h_2 + h_3) = P_1$

Los manometros son utilizado para medir los cambios presion (generalmente debido a valvulas o accesorios) entre dos secciones de una tuberia con flujo a presion. Dicho manometro se conecta entre dos secciones de una tuberia (ver figura 10 que transporta liquido o gas cuya densidad es ρ_1. La densidad del liquido en el manometro ρ_2 debe ser mayor que ρ_1 y ambos fluidos deben ser inmisibles. La diferencia de presion $P_1 - P_2$ puede ser calculada iniciando en el punto 1 y moviendose a lo largo del manometro adicionando o restando $\rho g h$ hasta alcanzar el punto 2, lo cual quedaria:

$$P_1 + \rho_1 g(a + h) - \rho_2 g h - \rho_1 g a = P_2$$

Note que los puntos a una distancia a tienen una misma presion por estar al mismo nivel en el manometro, simplificando:

$$P_1 - P_2 = (\rho_1 - \rho_2) g h$$

Si el fluido que fluye a lo largo de la tuberia es gas, $\rho_1 \ll \rho_2$ por lo que la ecuacion anterior se convierte en $P_1 - P_2 \cong \rho_2 g h$.

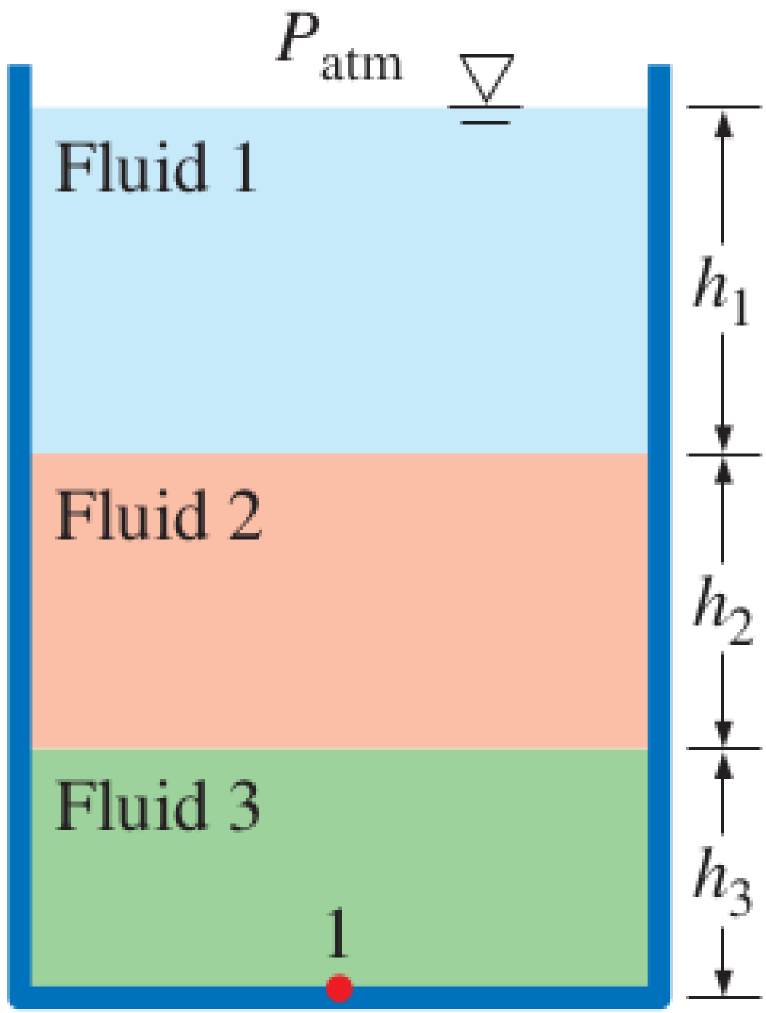

Figure 9: Tres tipos de fluido en reposo de diferente ρ ubicados unos sobre el otro.

2.3 Otros medidores de presion

- Tubo de Bourdon
- Transductor de presion

3 Estatica de fluidos

La **estatica de fluidos** trabaja con fluidos en **reposo** y es conocida como **hidroestatica** cuando el fluido es un liquido y **aeroestatica** cuando el fluido es un gas. En un fluido en reposo no se deforma porque no existen esfuerzos cortantes tangenciales entre capas. El only esfuerzo actuante sobre un fluido en reposo es el **esfuerzo normal** o la presion la cual varia con el peso del fluido que a su vez es función de la gravedad. La estatica de fluidos es importante para el diseño de objetos y estructuras flotantes o subermegidas como presas, submarinos y tanques de almacenamiento de agua.

3.1 Fuerza hidroestática sobre superficies planas sumergidas

Una placa sumergida (e.g. compuerta de una presa, pared de un tanque) esta sujeta a una presion ejercida por el fluido sobre su superficie. En una superficie plana, las fuerzas hidroestaticas actuan paralelas y es importante determinar su magnitud y su punto de aplicacion (**centro de presión**) sobre la superficie. En algunos casos, la superficie esta parcialmente suemergica y mientras que un lado esta en contacto con un fluido, en el otro esta en

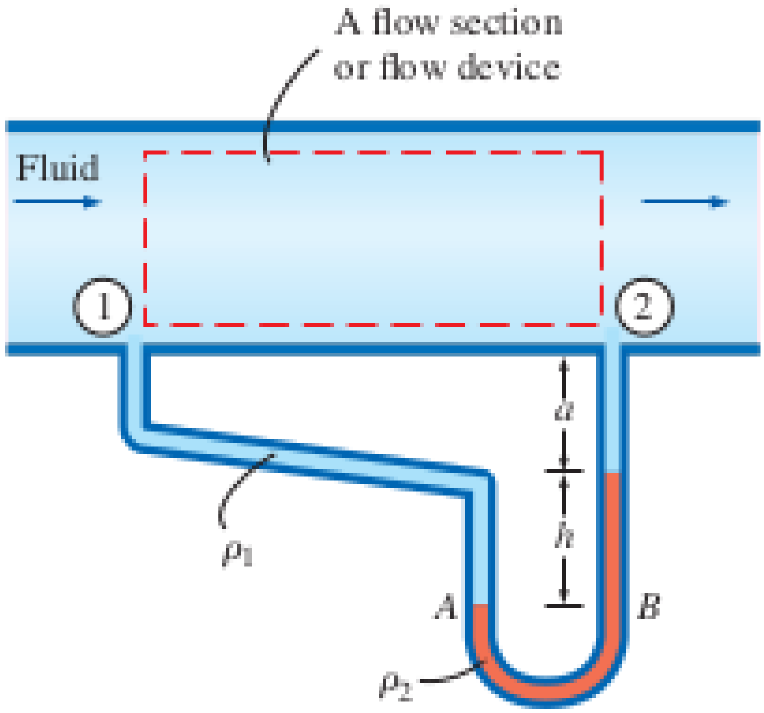

Figure 10: Medicion de la diferencia de presion en un tuberia con un manometro.

contacto con al atmosfera por lo tanto la P_{atm} se anula y la presion resultante es la presion hidroestatica $P_{gage} = \rho g h$ como se muestra en la figura 11.

Un caso mas general es el ilustrado en la figura 12 en donde tenemos una placa irregular sumergida e inclinada un angulo θ con respecto a la horizontal. La presion absoluta ejercida sobre cualquier punto sobre la placa es:

$$P = P_0 + \rho g h = P_0 + \rho g y \sin\theta$$

en donde P_0 es la presion arriba de el fluido ($= P_{atm}$ si el fluido esta abierto a la atmosfera), y es la distancia a lo largo del mismo eje desde el origen O y h es la distancia vertical desde la superficie del agua hasta la placa en donde $h = y\sin\theta$.

La fuerza hidroestatica resultante F_R que actua sobre la placa es:

$$F_R = \int_A P dA = \int_A (P_0 + \rho g y \sin\theta) dA = P_0 A + \rho g \sin\theta \int_A y dA$$

en donde dA es el diferencial de area sobre la la placa. Como el `primer momento de area` $\int_A y dA$ se relaciona con la coordenada y del **centroide** $y_C = \frac{1}{a}\int_A y dA$ de la placa, reemplazando en la ecuacion anterior:

$$F_R = (P_0 + \rho g y_C \sin\theta)A = (P_0 + \rho g h_C)A = P_C A = P_{avg} A \tag{14}$$

en donde P_C es la presion sobre el centroide de la placa la cual es equivalente a la presion promedio P_{avg}, y h_C es la distance vertical desde la superficie hasta el centroide.

Cuando $P_0 = P_{atm}$, esta puede ser ignorada en el calculo de F_R ya que actua en ambas caras de la placa. Cuando esto no es asi, la fuerza adicional ejercida debido a P_0 se calcula adicionando $h_{equiv} = P_0/\rho g$ a h_C, lo cual asume la presencia de una capa adicional de liquido en la superficie.

La linea de accion de F_R no pasa por el centroide de la placa; esta pasa por el **centro de presion**. Para determinar la posicion del centro de presion, estimamos el momento de F_R con respecto al eje x:

$$y_p F_R = \int_A y P dA = \int_A y(P_0 \rho g y \sin\theta) dA = P_0 \int_A y dA + \rho g \sin\theta \int_A y^2 dA$$

o

$$y_p F_R = P_0 y_C A + \rho g \sin\theta I_{xx,O} \tag{15}$$

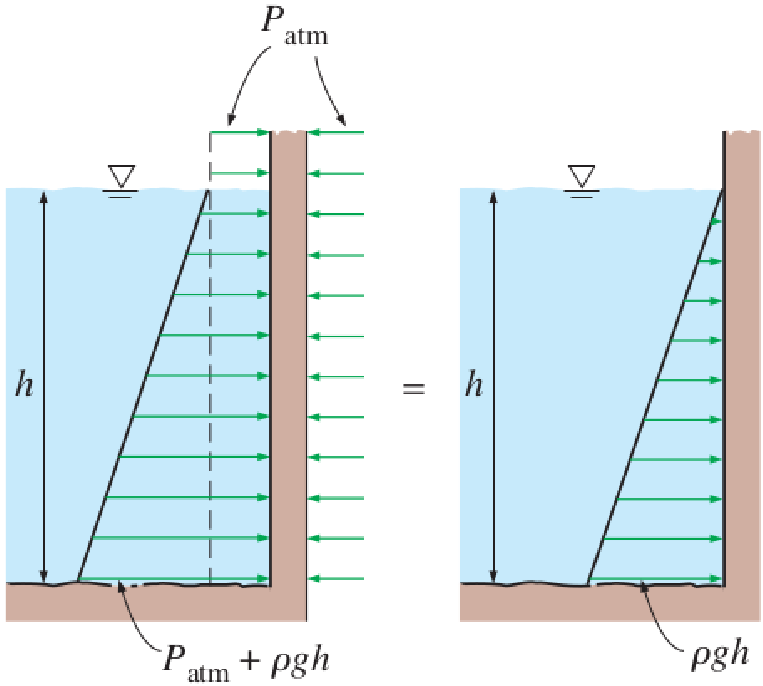

Figure 11: Fuerzas hidroestaticas sobre una superficie plana parcialmente sumergida.

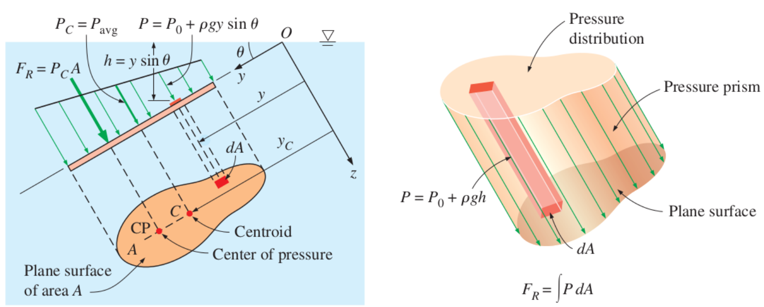

Figure 12: Fuerza hidroestatica sobre una placa inclinada y sumergida.

donde y_p es la distancia al centro de presion desde el eje x, y $I_{xx,O} = \int_A y^2 dA$ es el `segundo momento de area o de inercia` con respecto al eje x. Por el teorema de `ejes parelelos` el $I_{xx,O}$ puede ser calculado con respecto al eje x que pasa por por centroide como:

$$I_{xx,O} = I_{xx,C} + y_C^2 A \tag{16}$$

donde $I_{xx,C}$ es el segundo momento de area con respecto al eje x que pasa por el centroide y y_C es la distancia entre los dos ejes paralelos. Reemplazando las ecuaciones 14 y 16 en la ecuacion 15:

$$y_p(P_0 + \rho g y_C \sin\theta)A = P_0 y_C A + \rho g \sin\theta(I_{xx,C} + y_C^2 A)$$

despejando para y_p:

$$\begin{aligned}
y_p &= \frac{P_0 y_C A + \rho g \sin\theta(I_{xx,C} + y_C^2 A)}{(P_0 + \rho g y_C \sin\theta)A} \\
&= \frac{P_0 y_C A + \rho g \sin\theta I_{xx,C} + \rho g \sin\theta y_C^2 A}{(P_0 + \rho g y_C \sin\theta)A} \\
&= \frac{y_C A(P_0 + \rho g \sin\theta y_C) + \rho g \sin\theta I_{xx,C}}{(P_0 + \rho g y_C \sin\theta)A} \\
&= y_C + \frac{\rho g \sin\theta I_{xx,C}}{(P_0 + \rho g y_C \sin\theta)A}
\end{aligned}$$

$$y_p = y_C + \frac{I_{xx,C}}{\left[y_C + \frac{P_0}{\rho g \sin\theta}\right] A} \tag{17}$$

Cuando $P_0 = P_{atm}$ y es ignorada, y_p es:

$$y_p = y_C + \frac{I_{xx,C}}{y_C A} \tag{18}$$

Por lo tanto la distancia vertical desde la superficie hasta el centro de presion es: $h_p = y_p \sin\theta$.

Valores de $I_{xx,C}$ para diferentes areas comunes son mostrados en la figura 13. Para areas simetricas con respecto al eje y, el centro de presion esta debajo del centroide y sobre el eje y.

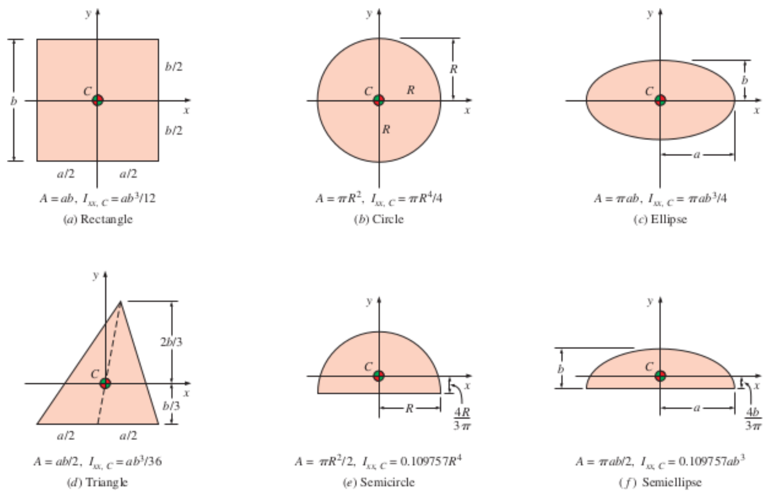

Figure 13: El centroide y el momento de inercia con respecto al centroide para figuras geometricas comunes.

3.2 Fuerza hidroestática sobre superficies curvas sumergidas

En superficies curvas sumergidas, la fuerza hidroestatica cambia de direccion dependiendo de la posicion sobre la superficie. Para facilitar el calculo, es necesario estimar las componentes horizontal F_H y vertical F_V de F_R. Si consideramos la superficie curva de la figura 14, el calculo de F_H y F_V se hace calculando las fuerzas actuantes sobre la proyeccion horizontal y vertical de la superficie curva. Tenemos entonces que:

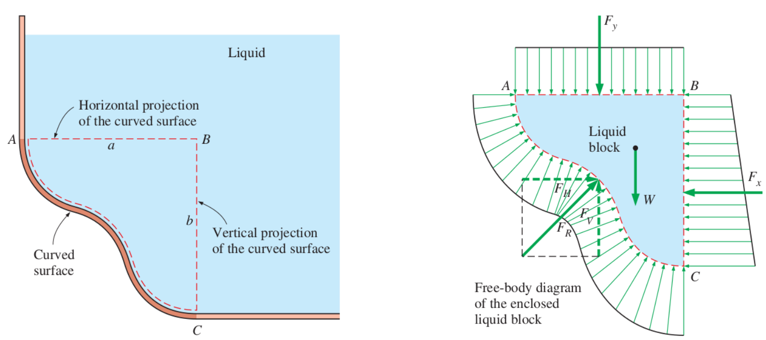

Figure 14: Determinación de la fuerza hidroestatica actuante sobre una superficie curva sumergida.

$$F_H = F_x$$

$$F_V = F_y \pm W$$

donde F_x se calcula como la resultante de la fuerza hidroestatica sobre una superficie plana vertical (ver seccion 3.1), F_y es la fuerza en y ejercida sobre el fluido (e.g. fluido superior y aire) y $W = \rho g V$ es el peso del volumen (V) de fluido. Note que F_y y W se suman si actuan en la misma direccion y se restan si van en direcciones opuestas. De lo anterior:

$$F_R = \sqrt{F_H^2 + F_V^2}$$

y el angulo que hace F_R con la horizontal es $\alpha = \arctan \frac{F_V}{F_H}$.

3.3 Fuerzas hidroestaticas en diferentes fluidos

Las ecuaciones vistas en las secciones 3.1 y 3.2 son validas para fluidos de densidad uniforme. Si el fluido esta conformado por capas de fluidos de diferentes densidades (ver figura 15) la distribucion lineal de presiones cambia en cada capa. Sin embargo las ecuaciones vistas anteriormente pueden ser aplicadas a cada capa i y las $F_{R,i}$ pueden ser adicionadas para calcular la F_R:

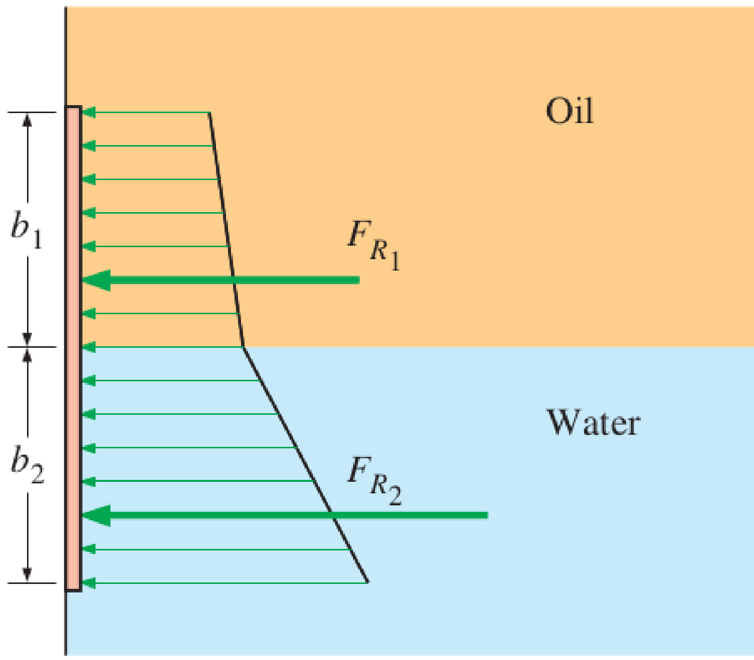

Figure 15: Fuerzas hidroestaticas sobre placa sumergida en dos fluidos.

$$F_R = \sum F_{R,i} = \sum P_{C,i} A_i$$

donde $P_{C,i} = P_0 + \rho_i h h_{C,i}$ es la presion en el centroide de la porcion de la superficie en el fluido i, y A_i es el area de la superficie en ese fluido. El centro de presion de F_R puede ser encontrado calculando la suma de los momentos de cada fuerza $F_{R,i}$ con respecto a un punto determinado (e.g. la superficie de agua.).

4 Flotación y estabilidad