

# Clase # 2: Propiedades de los fluidos [MF100]

**Luis Alejandro Morales**

Profesor Asistente

Universidad Nacional de Colombia-Bogotá

Facultad de Ingeniería

Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola

Periodo 2022-II

## Contents

<b>1</b>	<b>Introduccion</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Propiedades de los campos de velocidad</b>	<b>2</b>
2.1	Descripción Euleriana y Lagrangiana . . . . .	2
2.2	El campo de velocidad . . . . .	2
2.3	El campo de aceleracion . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Propiedades termodinamicas de un fluido</b>	<b>3</b>
3.1	Presion . . . . .	3
3.2	Temperatura . . . . .	3
3.3	Densidad y gravedad especifica . . . . .	3
3.4	Energias potencial y cinematica . . . . .	4
3.5	Ecuacion de estado de un gas ideal . . . . .	4
3.6	Relacion de estado para los luquidos . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Viscosidad</b>	<b>6</b>
4.1	El Numero de Reynolds . . . . .	7
4.2	Variacion de la viscosidad con la temperatura . . . . .	8
4.3	Fluidos no newtonianos . . . . .	8
4.4	Tensión superficial . . . . .	9
4.4.1	Efecto capilar . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Presión de vapor</b>	<b>11</b>
<b>6</b>	<b>Velocidad del sonido</b>	<b>12</b>

## 1 Introduccion

Cualquier característica de un sistema se denomina **propiedad**. Las propiedades se clasifican en:

- **Intensivas:** Aquellas independientes de la masa del sistema como la presión  $P$ , la temperatura  $T$  y la densidad  $\rho$ .
- **Extensivas:** Aquellas que dependen del tamaño o extensión del sistema como la masa total, el volumen total y el momentum total.

Un ejemplo para entender la clasificación de las propiedades es si por ejemplo tenemos un sistema cuyas propiedades son  $m$ ,  $V$ ,  $T$ ,  $P$  y  $\rho$ . Si dividimos en dos partes iguales las propiedades de una de las partes serían  $\frac{1}{2}m$ ,  $\frac{1}{2}V$ ,  $T$ ,  $P$  y  $\rho$ . Note que mientras  $T$ ,  $P$  y  $\rho$  no cambian al dividir el sistema en dos,  $m$  y  $V$  son reducidas a la mitad.

Aquellas propiedades extensivas dadas en unidades de masa son llamadas **propiedades específicas**. El volumen específico,  $v = V/m$ , es una propiedad específica.

Como ya lo sabemos, un fluido está compuesto por moléculas las cuales pueden estar muy separadas, particularmente los gases. Sin embargo, para el estudio que nos concierne aquí, esa naturaleza atómica de los gases es irrelevante por lo que un fluido es considerado como un medio continuo (sin huecos) y con una homogénea distribución de la materia, a esto se le denomina el **continuo**. Esto implica que las propiedades pueden ser analizadas en un punto del espacio y que dichas propiedades varían en el espacio continuamente.

## 2 Propiedades de los campos de velocidad

### 2.1 Descripción Euleriana y Lagrangiana

Existen dos aproximaciones para analizar problemas en mecánica. La primera se centra en el análisis de los campos de flujo y es conocido como el método **euleriano**. En el método euleriano, se calcula la presión del campo de flujo  $p(x, y, z, t)$  (e.g. en un punto del espacio  $x, y, z$  o sección) más no los cambios de presión que experimentaría una partícula moviéndose en el flujo. Aquí, la posición del sistema de coordenadas es constante para un intervalo de tiempo (ver Figura 1). La segunda aproximación se centra en seguir partículas individualmente moviéndose a través del flujo, esto es conocido como el método **lagrangiano**. En este, el sistema de coordenadas se mueve con el flujo. El método lagrangiano es más apropiado para el análisis de sólidos, mientras que el método euleriano es ampliamente usado en mecánica de fluidos. En mediciones en fluidos, un sensor de presión introducido en un canal de laboratorio determina la presión del flujo en un punto  $(x, y, z)$  y en un instante  $(t)$  determinado. Dicha medición es acorde con el método euleriano. De acuerdo con el método lagrangiano, el mismo sensor arrojado al flujo y moviéndose a la misma velocidad permitiría medir la presión de una partícula que se mueve con el flujo.

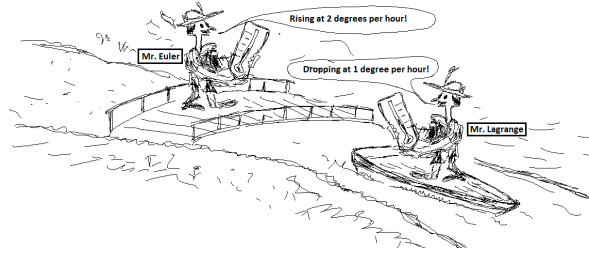


Figure 1: Sistema euleriano y lagrangiano (<http://www.flowillustrator.com/fluid-dynamics/basics/lagrangian-eulerian-viewpoints.php>)

### 2.2 El campo de velocidad

La propiedad más conocida de un flujo es el campo de velocidad  $\mathbf{V}(x, y, z, t)$ , de la cual se derivan otras propiedades. La velocidad es un vector en función de la posición y del tiempo y por lo tanto tiene tres componentes escalares  $u$ ,  $v$  y  $w$ :

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \mathbf{i}u(x, y, z, t) + \mathbf{j}v(x, y, z, t) + \mathbf{k}w(x, y, z, t)$$

### 2.3 El campo de aceleración

El vector de aceleración,  $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt}$  es importante en flujos sometidos a algún tipo de fuerza según la segunda ley de Newton. El campo de aceleración de un fluido con respecto a un marco de referencia Euleriano, se define como:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt}$$

Si tenemos una  $y = f(u)$  donde  $u = g(x)$ ,  $y$  es una función compuesta  $y = f(g(x))$  y derivable en  $x$ . De acuerdo con la **regla de la cadena**, la  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$ . Aplicando dicha regla a la ecuación anterior tenemos:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}$$

### 3 Propiedades termodinamicas de un fluido

La **V** velocidad es la propiedad mas importante de los fluidos, la cual interactua con las propiedades termodinamicas. Las propiedades mas importantes son:

- Pressure  $p$
- Density  $\rho$
- Temperature  $T$

Cuando el balance de calor y energia en un fluido son considerados, las siguientes propiedades son analizadas:

- Internal energy  $\hat{u}$
- Enthalpy  $h = \hat{u} + p/\rho$
- Entropy  $s$
- Specific heats  $c_p$  and  $c_v$

Por otra parte, los efectos de la fricción y la conducción de calor por dos propiedades del transporte:

- Coeficiente de viscosidad  $\mu$
- Conductividad térmica  $k$

Todas estas nueve propiedades describen el estado del sistema, el cual se entiende como el conjunto de materia que interactúa con sus alrededores.

#### 3.1 Presion

La presión es el esfuerzo en un punto del espacio en un fluido estático. Después, de la velocidad, la presión es la propiedad más dinámica en la mecánica de fluidos. Un gradiente de presión usualmente causa el flujo de un fluido, particularmente en tuberías. La presión en un fluido a baja velocidad puede no ser importante a no ser que esta baje considerablemente causando la formación de burbujas en el líquido.

#### 3.2 Temperatura

La temperatura  $T$  está relacionada con el nivel de energía interna de un fluido. La temperatura en SI se mide en la **escala de Kelvin** y la unidades de la temperatura en esta escala es el **kelvin** ( $K$ ). En el sistema inglés es la **escala de Rankine** cuyas unidades son el **rankine** ( $R$ ). Las escalas de la temperatura están relacionadas como sigue:

$$T(K) = T(^{\circ}C) + 273.15 = T(R)/1.8 \quad (1)$$

$$T(R) = T(^{\circ}F) + 459.67 = 1.8T(K) \quad (2)$$

#### 3.3 Densidad y gravedad especifica

La **densidad** está definida como la masa ( $m$ ) por unidad de volumen ( $V$ ):

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (kg/m^3) \quad (3)$$

El recíproco de la densidad es el **volumen específico**,  $v$ , el cual es definido como el volumen por unidad de masa  $v = V/m = 1/\rho$ . La densidad de una sustancia depende de la temperatura y de la presión. En la mayoría de los gases  $\rho$  es proporcional a la presión e inversamente proporcional a la temperatura. En líquidos y sólidos, los cuales son considerados incompresibles, la variación de  $\rho$  con respecto a  $P$  es despreciable. Algunas veces la densidad de un fluido es dada con respecto a una densidad de una sustancia bien conocida. De acuerdo con esto, la **gravedad específica** o **densidad relativa** se define como la proporción entre la densidad de una sustancia y la densidad de una sustancia conocida a una temperatura específica (usualmente agua a  $4^{\circ}C$  para la cual  $\rho_{H_2O} = 1000 kg/m^3$ ):

$$SG = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}} \quad (4)$$

Substancia	SG
Agua	1.0
Sangre (a 37°C)	1.06
Agua de mar	1.025
Gasolina	0.68
Alcohol etílico	0.790
Mercurio	13.6
Madera de balsa	0.17
Madera de roble	0.93
Oro	19.3
Hueso	1.7-2.0
Hielo (a 0°C)	0.916
Aire	0.001204

Table 1: Gravedad especifica de algunas sustancias a 20°C y 1atm

La gravedad especifica de algunas sustancias es dada en la Tabla 1.

El peso de una unidad de volumen es denominado **peso específico** y si es expresa como:

$$\gamma_s = \rho g \quad (N/m^3) \quad (5)$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad.

### 3.4 Energias potencial y cinematica

En termoestatica, la energia en una sustancia es aquella almacenada en el sistema de acuerdo con la actividad molecular y las fuerzas de atraccion molecular. Esto es denominado comom la **energia interna**  $\hat{u}$  del sistema. Dicha energia interna molecular es funcion de  $T$  y  $p$  en una sustancia. En un fluido en movimiento y de acuerdo con la mecaninca newtoniana, es necesario considerar ademas la energia potencial y la energia cinematica. La energia potencial es igual al trabajo requerido para mover un sistema de masa  $m$  desde su origen a una posicion determinada por el vector  $\mathbf{r} = ix + jy + kz$  contrarestando el campo gravitacional  $\mathbf{g}$ . Su valor es  $m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}$ . La energia cinematica es el trabajo requerido para cambiar la velocidad de un sistema de masa  $m$  desde zero a una velocidad  $V$ . Su valor es  $\frac{1}{2}mV^2$ . Por lo tanto, la energia total  $e$  almacenada en un sistema por unidad de masa en mecanica de fluidos es:

$$e = \hat{u} + \frac{1}{2}V^2 + (-g \cdot r)$$

Teniendo en cuenta que  $z$  es definido hacia arriba, por lo tanto  $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$  y  $\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} = -gz$ , la ecuacion anterior se convierte en:

$$e = \hat{u} + \frac{1}{2}V^2 + gz$$

### 3.5 Ecuacion de estado de un gas ideal

Una ecuacion que relaciona la presión, la temperatura y la densidad (o el volumen específico) de una sustancia de denomina **ecuación de estado**. La ecuación de estado para sustancias en fase gaseosa se conoce como **ecuación de estado de un gas ideal** expresada como:

$$Pv = RT \quad P = \rho RT \quad (6)$$

donde  $P$  es la presión absoluta,  $v$  es el volumen específico,  $T$  es la temperatura,  $\rho$  es la densidad y  $R$  es la constante de los gases.  $R$  es diferente para cada gas y se calcula como  $R = R_u/M$  donde  $R_u$  es la **constante universal de los gases** igual a  $8.314 \text{ kJ/kmol.K} = 1.986 \text{ Btu/lbmol.R}$ , y  $M$  es la masa molar (peso molecular) de un gas. Valores de  $R$  y  $M$  para varias sustancias estan dados en Tabla A-1. Un gas que obedezca la Ecuación 6 se llama un **gas ideal**. En un gas ideal el numero de moles es calculado como  $N = m/M$  de donde la Ecuación 6 puede escribirse como  $PV = mRT$  o  $PV = NR_uT$ , donde  $V$  es el volumen del gas. Para dos gases ideales de masa  $m$ , el estado de los dos gases se relaciona como  $P_1V_1/T_1 = P_2V_2/T_2$ .

Considerando la relación entre  $P$ ,  $\rho$  y  $T$  que describe un gas ideal, si  $\downarrow P \quad \uparrow T \Rightarrow \downarrow \rho$  y el gas se comporta como un gas ideal. Gases de baja densidad como el aire, el nitrogeno, el oxígeno, el hidrogeno, el helio, el argon, el neon y

el kriptón pueden ser analizados como gases ideales. Gases densos como el vapor de agua y aires acondicionados no pueden ser tratados como gases ideales por que están cerca a un estado de saturación.

La constante de los gases  $R$  también puede ser expresada como  $R = c_p - c_v$ , donde  $c_p$  and  $c_v$  son los calores específicos. El calor específico se define como las unidades de calor necesarias para aumentar en  $n$  unidades la temperatura de un gas de masa  $m$ .  $c_p$  es el calor específico a una presión constante mientras que  $c_v$  es el calor específico en un volumen constante. Las unidades de calor específico en SI son  $J.kg^{-1}.K^{-1}$ . Para que la Ecuación 6 sea posible, se requiere que la energía molecular interna  $\hat{u}$  de un gas perfecto varía solo como función de la temperatura:  $\hat{u} = \hat{u}(T)$ . Por lo tanto el calor específico  $c_v$  varía solo en función de la temperatura:

$$c_v = \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial T} \right)_\rho = \frac{d\hat{u}}{dT} = c_v(T) \quad d\hat{u} = c_v(T)dT$$

De manera similar,  $h$  y  $c_p$  de un gas perfecto varía en función de la temperatura:

$$h = \hat{u} + \frac{p}{\rho} = \hat{u} + RT = h(T)$$

$$c_p = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = \frac{dh}{dT} = c_p(T) \quad dh = c_p(T)dT$$

El ratio de los calores específicos de un gas perfecto es un parámetro adimensional importante en el análisis de flujo compresible:

$$k = \frac{c_p}{c_v} = k(T) \geq 1$$

Como una primera aproximación en problemas de flujo de aire,  $c_p$ ,  $c_v$  y  $k$  son tomadas como constantes:

$$k \approx 1.4$$

$$c_v = \frac{R}{k-1} \approx 4293 \text{ ft}^2/(s^2 \cdot ^\circ R) = 718 \text{ m}^2/(s^2 \cdot K)$$

$$c_p = \frac{kR}{k-1} \approx 6010 \text{ ft}^2/(s^2 \cdot ^\circ R) = 1005 \text{ m}^2/(s^2 \cdot K)$$

Para todos los gases,  $c_p$  y  $c_v$  aumentan gradualmente con la temperatura mientras  $k$  decrece gradualmente.

### 3.6 Relación de estado para los líquidos

Líquidos son considerados incompresibles por lo que su calor específico es constante. Por lo tanto una relación de estado ideal para un líquido es:

$$\rho \approx \text{const} \quad c_p \approx c_v \approx \text{const} \quad dh \approx c_p dT$$

En un líquido, la densidad decrece un poco con la temperatura e incrementa moderadamente con la presión. Si despreciamos los efectos de la temperatura, se puede establecer la siguiente relación empírica entre la presión y la densidad:

$$\frac{p}{p_a} \approx (B+1) \left( \frac{\rho}{\rho_a} \right)^n - B$$

donde  $B$  y  $n$  son parámetros adimensionales que varían levemente con la temperatura, y  $p_a$  y  $\rho_a$  son valores estándar de la presión y la densidad atmosférica. Para el agua,  $B \approx 3000$  y  $n = 7$ .

En el caso del agua de mar, por ser una mezcla de sal y agua, se requieren tres propiedades termodinámicas para definir su estado: presión, temperatura y salinidad  $\hat{S}$ , esta última calculada como el peso de la sal disuelta dividida por el peso de la mezcla. La salinidad promedio del agua de mar es 0.035 o usualmente escrita como 35 partes por 1000. La densidad promedio de agua de mar es  $2.00 \text{ slugs/ft}^3 \approx 1030 \text{ kg/m}^3$ . El agua de mar tiene tres calores específicos, todos aproximadamente iguales al del agua pura  $25200 \text{ ft}^2/(s^2 \cdot ^\circ R) = 4210 \text{ m}^2/(s^2 \cdot K)$ .

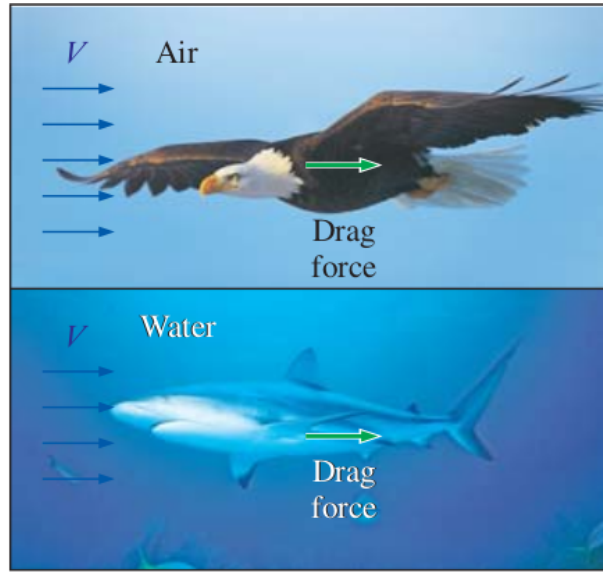


Figure 2: El fluido ejerce una fuerza de atrastre sobre el cuerpo en movimiento debido a la fricción causada por la viscosidad.

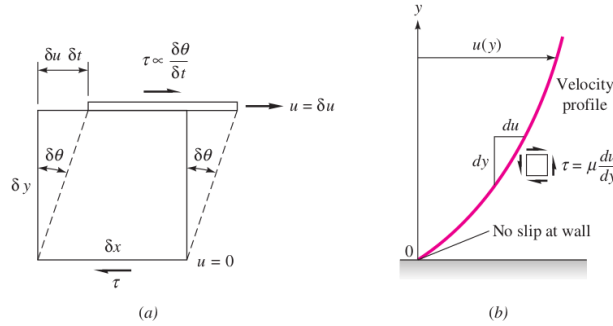


Figure 3: a) Deformación de un fluido que fluye sobre una superficie horizontal a velocidad  $u$  y b) perfil de velocidades de fluido en la capa límite.

## 4 Viscosidad

La **viscosidad** es una medida de la resistencia de un fluido a fluir. Esta determina la tasa de deformación de un fluido que es generada cuando este es sometido a un esfuerzo cortante  $\tau$ . Por ejemplo es mucho más fácil moverse en aire que en el agua, ya que esta última tiene una viscosidad 50 veces más alta (ver Figura 2). Mucho más difícil es el movimiento en aceite que podría tener 300 veces más viscosidad que el agua.

Si consideramos un fluido que se mueve a una velocidad  $u$  en un plano horizontal como resultado de una fuerza horizontal la cual produce un esfuerzo cortante, tenemos que el ángulo de deformación  $\delta\theta$  crece continuamente con el tiempo si  $\tau$  se mantiene (ver Figura 3).

Por lo tanto, en fluidos como el agua, el aceite o el aire, la tasa de deformación se relaciona linealmente con el esfuerzo:

$$\tau \propto \frac{\delta\theta}{\delta t} \quad (7)$$

De la figura 3a:

$$\tan \delta\theta = \frac{\delta u \delta t}{\delta y}$$

En el límite infinitesimal cuando  $\delta\theta$  se hace pequeño,  $\tan \delta\theta \approx \delta\theta$  y la ecuación anterior se convierte en:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{du}{dy}$$

la cual expresa la equivalencia entre la tasa de deformación y el gradiente de velocidad. Reemplazando en la ecuación 7 y teniendo en cuenta que la constante de proporcionalidad es el coeficiente de viscosidad  $\mu$ :

$$\tau = \mu \frac{d\theta}{dt} = \frac{du}{dy} \quad (8)$$

$\mu$  tiene dimensiones  $FT/L^2$  o  $M/(LT)$ , en SI son  $kg/m.s$  y en BG son  $slugs/ft.s$ . Los fluidos que se comportan de acuerdo con la ecuacion 8 son denominados **fluidos newtonianos**.

Si analizamos el perfil de velocidades en la **capa limite** (ver Figura3b) la cual es la capa de fluido mas cercana a la placa solida inferior, la velocidad  $u \approx 0$  y  $\tau$  es máximo en cercanias a la placa solida. Dicho fenomeno es conocido como la **condicion de no deslizamiento** en fluidos viscosos.

La viscosidad es una propiedad termodinamica de los fluidos que depende de la presion  $p$  y de la temperatura  $T$ . Sin embargo, la variacion de  $\mu$  con respecto a la presion es menor, mientras qvwue la variacion con respecto a la temperatura es significativa.

Un problema clasico es el flujo inducido entre una placa inferior fija y una placa superior que se mueve a una velocidad  $\mathbf{V}$  (ver Figura 4). La distancia entre las placas es  $h$  y dicho espacio esta ocupado por un fluido newtoniano. Si las placas son grandes, el movimiento permanente induce una distribucion de velocidad  $u(y)$  (ver Figura 4) en donde  $v = w = 0$  y la aceleracion es zero. De acuerdo con lo anterior, a un balance de fuerza sobre un elemento de fluido resulta en un esfuerzo constante en cualquier punto del fluido. Por tanto la Ecuacion 8 se convierte en:

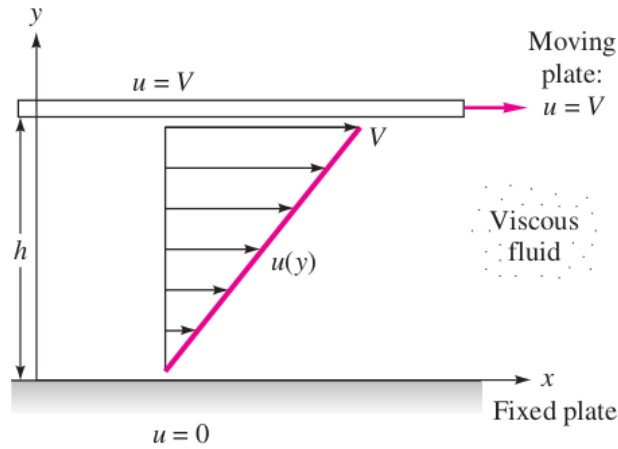


Figure 4: Flujo viscoso inducido por el movimiento relativo de dos placas paralelas.

$$\frac{du}{dy} = \frac{\tau}{\mu} = \text{const}$$

Integrando esta ecuacion para  $u$ , tenemos

$$u = a + by$$

lo cual indica una distribucion lineal de la velocidad tal como se muestra en la Figura 4 en donde  $a$  y  $b$  son constantes que se evaluan como:

$$u = \begin{cases} 0 = a + b(0) & \text{en } y = 0 \\ V = a + b(h) & \text{en } y = h \end{cases}$$

de donde  $a = 0$  y  $b = V/h$ . Reemplazando en la ecuacion, el perfil de velocidades entre las placas esta dato por:

$$u = V \frac{y}{h} \quad (9)$$

## 4.1 El Numero de Reynolds

El numero de Reynolds  $Re$  es un numero adimensional que caracteriza el movimiento de un fluido y se define como:

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{V L}{\nu} \quad (10)$$

donde  $V$  es la velocidad,  $L$  es la longitud caracteristica del flujo y  $\nu = \mu/\rho$  es la **viscosidad cinematica**. La ecuacion 10 indica que  $Re$  es la relacion de las fuerzas convectivas o inerciales y las fuerzas viscosas presentes en el

fluido. De acuerdo con esto,  $Re$  muy bajos significan flujos muy viscosos donde las fuerzas inerciales son despreciables.  $Re$  moderados son flujos **laminares** que se mueven suavemente en capas paralelas. Un  $Re$  alto es característico de un flujo **turbulento**.

## 4.2 Variacion de la viscosidad con la temperatura

La viscosidad de un gas incrementa con la temperature. De acuerdo con esto existen dos leyes al respecto:

$$\frac{\mu}{\mu_0} \approx \begin{cases} \left(\frac{T}{T_0}\right)^n & \text{ley de potencia} \\ \frac{(T/T_0)^{3/2}(T_0+S)}{T+S} & \text{ley de Sutherland} \end{cases} \quad (11)$$

donde  $\mu_0$  es la viscosidad a una temperature absoluta  $T_0$  (usualmente 273 K). Las constantes  $n$  y  $S$  son constantes ajustadas con base en datos. Por ejemplo para aire,  $n \approx 0.7$  y  $S \approx 110$

En liquidos, la viscosidad decrece con la temperatura de una forma casi exponencial  $\mu \approx ae^{-bT}$ . Con base en esta ecuacion esta expresion es derivada:

$$\ln \frac{\mu}{\mu_0} \approx a + b \left(\frac{T_0}{T}\right) + c \left(\frac{T_0}{T}\right)^2 \quad (12)$$

en donde para agua con  $T_0 = 273.16 \text{ K}$  y  $\mu = 0.001792 \text{ kg/(m.s)}$ ,  $a = -1.94$ ,  $b = -4.80$  y  $c = 6.74$  con una exactitud del  $\pm 1 \%$ .

## 4.3 Fluidos no newtonianos

Fluidos que no siguen la equacion lineal 8 son llamados **no newtonianos**. Mientras que en los flujos newtonianos la viscosidad es constante con el aumento del esfuerzo, en los fluidos no newtonianos la viscosidad cambia. Algunos tipos de fluidos no newtonianos son:

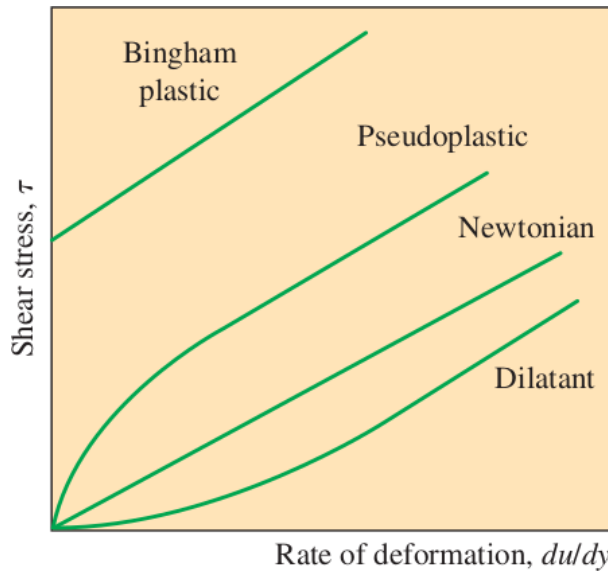


Figure 5: Variacion del esfuerzo con la tasa de deformacion para fluidos newtonianos y no newtonianos.

- **Dilatante:** Increase its resistencia cuando la tasa de deformacion incrementa.
- **Seudoplastico:** La resistencia disminuye a altas tasas de deformacion. Por ejemplo: pintura y soluciones de polimeros. La pintura es gruesa antes de aplicarla pero se hace delgada cuando se aplica a una alta taza de deformacion.
- **Bingham plastico:** Requieren un esfuerzo inicial antes de que inicie a fluir o deformarse. Por ejemplo: mayonesa, crema de dientes, lodos, salsa de tomate. La salsa de tomate no sale del recipiente a menos que se le aplique un esfuerzo inicial (se sacuda o se exprima el recipiente).



## 4.4 Tensión superficial



En una superficie de contacto entre dos fluidos diferentes (e.g aire y agua) se forma una interface en donde fuerzas de tension actuan para mantener la cohesion del fluido. La magnitud de esta fuerza por unidad de longitud es llamada **tensión superficial**. Si cortamos una seccion  $dl$  de la superficie de interface, fuerzas iguales y opuestas cuya magnitud es  $\Upsilon dl$  actuan normal al corte y paralelas a la superficie.  $\Upsilon$  es conocido como el **coeficiente de tensión superficial** y sus dimensiones son  $F/L$ ;  $N/m$  en SI y  $lb/ft$  en BG.

Dos interfaces comunes son: agua-aire y mercurio-aire. Para una superficie limpia a  $20^\circ C$ ,  $\Upsilon$  es estimado igual a:

$$\Upsilon = \begin{cases} 0.0050 \text{ } lb/ft = 0.073 \text{ } N/m & \text{air-water} \\ 0.033 \text{ } lb/ft = 0.48 \text{ } N/m & \text{air-mercury} \end{cases} \quad (13)$$

Estos valores pueden variar considerablemente si por ejemplo la superficie contienen contaminantes como detergentes o si la temperature del fluido cambia (e.g.  $\Upsilon \downarrow$  cuando  $T \uparrow$ ).

Si la interface es curva, el balance mecanico muestra que existe diferencias de presion en diferentes puntos sobre la superficie, en donde las presiones mayores existen sobre la parte concava de la interface (ver figura 6. En la figura 6a, el incremento de presion al interior de la superficie es balanceada por las fuerzas de tensión:

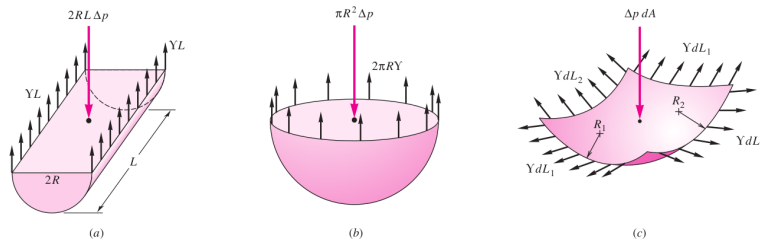


Figure 6: Cambios de presión sobre la interface curva debido a la tensión superficial a) en el interior de un liquido con forma cilindrica, b) al interior de una gota esferica de liquido y c) al interior de una interface curva general.

$$2RL\Delta p = 2\Upsilon L \quad \Delta p = \frac{\Upsilon}{R} \quad (14)$$

en donde el peso del liquido no es considerado. Al interior de una gota esferica de liquido (figura 6b), el balance de fuerzas es:

$$\pi R^2 \Delta p = 2\pi R \Upsilon \quad \Delta p = \frac{2\Upsilon}{R} \quad (15)$$

En el caso de una burbuja de jabon, la cual tiene una interface interna y externa con el aire, cuyos radios son aproximadamente iguales  $R$ , el balance de fuerzas es:

$$\Delta p_{burbuja} \approx 2\Delta p_{gota} = \frac{4\Upsilon}{R} \quad (16)$$

Para el caso general de una interface curva arbitraria, cuyos radios de curvatura principales son  $R_1$  y  $R_2$ , el balance de fuerzas normal a la superficie muestra que el incremento de presion en la parte concava es:

$$\Delta p = \Upsilon(R_1^{-1} + R_2^{-1}) \quad (17)$$

Notara que las ecuaciones anteriores podrian haber sido derivadas a partir de la ecuacion 17 si  $R_1 = R$  y  $R_2 = \text{inf.}$

#### 4.4.1 Efecto capilar

Otra consecuencia interesante de la tension superficial es el **efecto capilar** el cual es el incremento o la reduccion de un liquido en un tubo de diametro pequeno al insertarse en dicho liquido (ver figura 7). La superficie libre del liquido en el tubo se llama **menisco**.



Figure 7: Efecto capilar en un tubo de 4mm de diametro con agua de color.

Gracias al efecto capilar, en un vaso con agua se puede observar que la superficie del agua se curva cerca a las paredes del vaso formando un **angulo de contacto**  $\phi$ . Algo opuesto ocurre con el mercurio (ver figura 8). De acuerdo con esto, un liquido moja las paredes del vaso si  $\phi < 90^\circ$ , para el caso en que no mojaría las paredes  $\phi > 90^\circ$ .

El efecto capilar ocurre debido a que las fuerzas de tension superficial en la interface de contacto (fuerzas adhesivas) tienden a elevar el fluido en cercanías a esta interface. El equilibrio se presenta cuando el peso iguala dicha tensión superficial (fuerzas cohesivas). En el mercurio, las fuerzas cohesivas son mucho mayores que las fuerzas adhesivas en la interface lo cual crea distanciamiento de las paredes.

La magnitud de la elevacion capilar  $h$  en un tubo circular se puede determinar a partir de un balance de fuerzas (ver figura 9). Note que la fuerzas por presion atmosferica son iguales dentro y por fuerza del tubo, dicha fuerzas se anulan.

El peso de la columna de liquido es:

$$W = mg = \rho Vg = \rho g(\pi R^2 h)$$

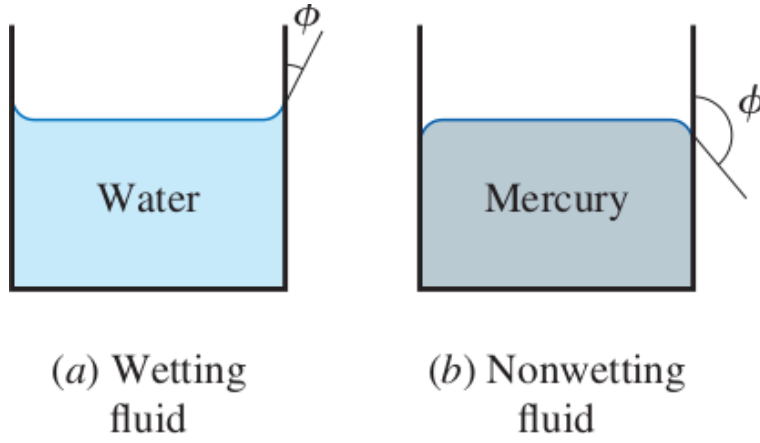


Figure 8: Angulo de contacto en el a) agua y en el b) mercurio.

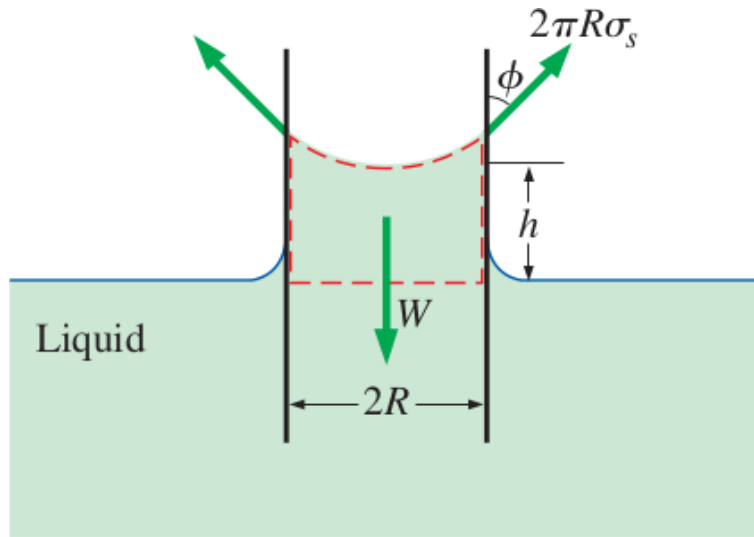


Figure 9: Fuerzas que actuan sobre una column de liquido en un tubo debido al efecto capilar.

Igualando el peso a la componente vertical de la tension superficial:

$$W = F_{surface} \rightarrow \rho g(\pi R^2 h) = 2\pi R \Upsilon \cos \phi$$

Por lo tanto, la elevacion capilar es:

$$h = \frac{2\Upsilon}{\rho g R} \cos \phi \quad (18)$$

Si tenemos mercurio, por ejemplo, tenemos una caída capilar, que es igual a  $-h$  ya que  $\phi > 90^\circ$   $\cos \phi$  es negativo. Notara que en la ecuación 18, cuando  $R$  o  $\rho$  disminuyen  $h$  aumenta.

## 5 Presión de vapor

La **presión de vapor** es la presión a la cual un líquido hierve y está en equilibrio con su propio vapor. Por ejemplo, la presión de vapor del agua a  $68^\circ\text{F}$  es  $49 \text{ lbf/ft}^2$  mientras que la del mercurio es solo  $0.0035 \text{ lbf/ft}^2$ . Si la presión en el líquido es mayor que la presión de vapor, el intercambio entre el líquido y el vapor es por evaporación en la interface. Si la presión del líquido cae por debajo de la presión de vapor, burbujas empiezan a aparecer en el líquido. Si el agua es calentada a  $212^\circ\text{F}$ , su presión de vapor aumenta a  $2116 \text{ lbf/ft}^2$  y el agua a presión atmosférica empieza a hervir. Cuando la presión de líquido cae por debajo de la presión de vapor debido a un fenómeno de flujo, esto es conocido **cavitación**. El número de cavitación es:



Figure 10: Cavitation en una helice en un canal de agua.

$$Ca = \frac{p_a - p_v}{\frac{1}{2}\rho V^2} \quad (19)$$

donde  $p_a$  es la presion ambiental,  $p_v$  es la presion de vapor,  $V$  es la velocidad del flujo y  $\rho$  es la densidad del fluido.

## 6 Velocidad del sonido

Un parametro importante en el estudio de flujo compresible es la **velocidad del sonido**, definida como la velocidad a la cual una pequena onda de presion, creada por una perturbacion local, viaja a traves de un medio (e.g. fluido). En temas futuros, veremos que con base en la termodinamica y el momentum, la velocidad del sonido  $a$  es definida como la derivada de la presion con respecto a la densidad y es proporcional al modulo isentropico  $B$  (el cual mide la compresibilidad del fluido bajo cambios de presion:

$$a^2 = \frac{B}{\rho} = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = k \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T \quad (20)$$

donde  $k = \frac{c_p}{c_v}$  es el radio de calor especifico y los subindices  $s$  y  $T$  indican a entropia y temperatura constante, respectivamente. Note que  $B = \rho \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$ .

Cuando el fluido es un gas ideal ( $P = \rho RT$ ), usando la equacion 20, la velocidad del sonido es:

$$a^2 = k \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T = k \left[ \frac{\partial(\rho RT)}{\partial \rho} \right]_T = kRT \quad (21)$$

o

$$a = \sqrt{kRT} \quad (22)$$

donde  $R$  es la constante de los gases  $T$  es la temperatura absoluta.

Otro importante parametro en fluidos compresibles es el **numero de Match** definido como:

$$Ma = \frac{V}{a} \quad (23)$$

donde  $V$  es la velocidad del fluido. Note que como  $Ma$  depende de  $a$  la cual depende del estado del fluido, para un avion que viaja a una velocidad constante  $Ma$  puede ser diferente a diferentes localizaciones.