

Clase No.20: Cinemática de los fluidos

Propiedades cinemáticas de los fluidos

Luis Alejandro Morales
<https://lamhydro.github.io>

Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Colombia - Sede Bogotá

October 10, 2022

UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Table of Contents

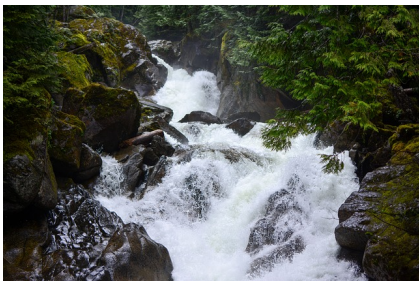
- 1 Introducción
- 2 Definiciones
- 3 Teorema de Gauss de la divergencia
- 4 Teorema de Stokes

Introducción

Introducción

Cinemática de los fluidos

Estudia el movimiento de las partículas de fluido o del fluido como un continuo sin considerar las fuerzas o los momentos actuantes; caracteriza dicho movimiento en función del espacio y del tiempo.



Definiciones

Algunas definiciones importantes del análisis vectorial son:

Escalar

Se define por la magnitud que adquiere la cantidad física. Ejemplos: presión P , temperatura T , densidad ρ

$$P = f(x, y, z, t) \quad T = f(x, y, z, t) \quad \rho = f(x, y, z, t)$$

donde x , y y z son las coordenadas del espacio 3D y t es el tiempo.

Vector

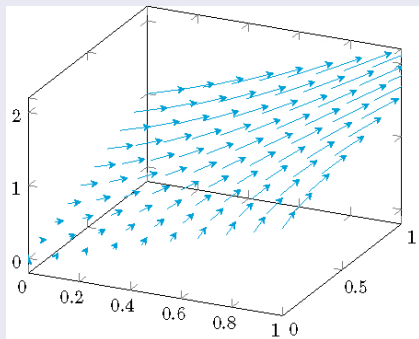
Vector: Definición

Es una cantidad que tiene magnitud, dirección y sentido. Ejemplos: velocidad \vec{U} , aceleración \vec{a} , fuerza \vec{F} .

Un campo de velocidades para un $t = t_1$, puede estar expresado como:

$$\vec{U}(x, y, z) = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$$

donde u_x , u_y y u_z son las componentes en x , y y z del vector \vec{U} respectivamente, en donde cada componente es una $f(x, y, z, t)$. \vec{i} , \vec{j} y \vec{k} son los vectores unitarios (de magnitud 1) para x , y y z , respectivamente.



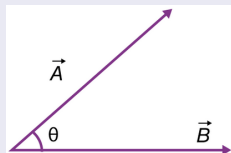
Vector

Vector: Operaciones

Entre dos vectores \vec{A} y \vec{B} es posible efectuar dos tipos de productos:

① *Producto escalar o punto*

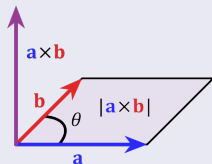
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$



donde θ es el ángulo formado por los dos vectores. De acuerdo con esto $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$, mientras, por ejemplo, $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$.

② *Producto vectorial o cruz*

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{n} AB \sin \theta$$



donde \vec{n} es el vector unitario perpendicular al plano definido por \vec{A} y \vec{B} . De este producto se deriva que $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$, $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$.

Vector: Operadores vectoriales

Operador nablá ∇

Vector simbólico que se aplica a cantidades *escalares* y *vectoriales*, se define como:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (1)$$

Gradiente de una función

Si el operador ∇ se aplica a una función escalar ϕ , se obtiene un vector gradiente definido como:

$$\vec{\nabla} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k} \quad (2)$$

Vector: Operadores vectoriales

Divergencia

Si el operador ∇ aplica a un vector \vec{U} mediante producto punto, se obtiene un escalar conocido como la divergencia de \vec{U} , que se expresa como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right] [u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}] = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3)$$

Note que $\vec{\nabla} \cdot \vec{U} \neq \vec{U} \cdot \vec{\nabla}$, entonces:

$$\vec{U} \cdot \vec{\nabla} = [u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}] \left[\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right] = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

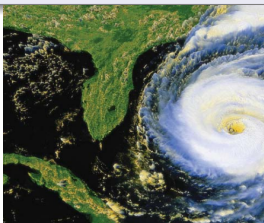
Vector: Operadores vectoriales

Rotacional

Es el producto cruz entre el operador ∇ y un vector \vec{U} , se obtiene un vector conocido como el rotacional de \vec{U} , que se expresa como:

$$\vec{\nabla} \times \vec{U} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right] \times [u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{U} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (4)$$



Vector: Operadores vectoriales

Laplaciano

Se define como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2 = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \quad (5)$$

Si ∇^2 se aplica sobre una función escalar ϕ , se obtiene el escalar:

$$\nabla^2 \phi = \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] \quad (6)$$

Si ∇^2 se aplica sobre un vector \vec{U} (e.g. velocidad), se obtiene el vector:

$$\nabla^2 \vec{U} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] [u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}]$$

$$\nabla^2 \vec{U} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \vec{i} + \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \vec{j} + \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \vec{k}$$

$$\nabla^2 \vec{U} = \vec{i} \nabla^2 u + \vec{j} \nabla^2 v + \vec{k} \nabla^2 w \quad (7)$$

Campo vectorial y potencial

Campo vectorial

Si un vector \vec{A} es función de su posición (x, y, z) en el espacio, se puede escribir que:

$$\vec{A} = \vec{A}(x, y, z) = \vec{A}(P) = \vec{A}(\vec{r}) = a(x, y, z)\vec{i} + b(x, y, z)\vec{j} + c(x, y, z)\vec{k}$$

donde a b y c son las componentes de \vec{A} . Por lo tanto un **campo vectorial** esta definido si existe un valor de \vec{A} en cada punto $P(x, y, z)$. La velocidad de un fluido \vec{U} es un ejemplo de un campo vectorial.

Campo potencial

Un campo potencial es aquel en el que:

$$\vec{U} = \vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$$

en donde \vec{U} es la velocidad y ϕ es una función escalar.

Concepto de flujo de un campo vectorial y de circulación de un vector

Concepto de flujo de un campo vectorial

Supóngase que existe un campo vectorial $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$ y una superficie S delimitada por una línea L . Un diferencial dS está definido por el vector unitario \vec{n} perpendicular a dS . Así el flujo del vector A a través de la superficie S es:

$$\psi = \int_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Concepto de circulación de un vector

La circulación de un vector \vec{A} a lo largo de la línea L está definida como:

$$\Gamma = \int_L \vec{A} \cdot d\vec{L}$$

Si \vec{A} representa un campo de fuerza \vec{F} , Γ representa el trabajo mecánico realizado por \vec{F} .

Teorema de Gauss de la divergencia

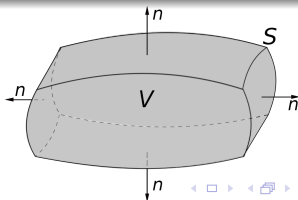
Teorema de Gauss de la divergencia

Teorema de Gauss de la divergencia

La integral de la divergencia de un campo escalar o vectorial A tomada sobre un volumen V es igual a la integral de la componente normal de este campo tomada sobre la superficie S que encierra el volumen V . Esto se expresa como:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot A dV = \int_S \vec{A} \vec{n} dS \quad (8)$$

El teorema permite transformar integrales de volumen en integrales de superficie o viceversa. Su importancia física radica en que sirve para calcular el flujo neto a través de una superficie cerrada de una cantidad escalar o vectorial.



Teorema de Stokes

Teorema de Stokes

Teorema de Stokes

La integral de línea de la componente tangencial de un vector A a lo largo de una curva cerrada C es igual a la integral de superficie de la componente normal del rotacional de A extendida a una superficie cualquiera que tenga por contorno la curva C . Esto se expresa como:

$$\int_C A \cdot dl = \int_S \vec{n}(\nabla \times A) dS \quad (9)$$

donde dl es un pequeño desplazamiento a lo largo de la curva C y dS es un pequeño vector de área.

