

# Clase # 3: Presion y estatica de los fluidos

**Luis Alejandro Morales**

Profesor Asistente

Universidad Nacional de Colombia-Bogotá

Facultad de Ingeniería

Departamento de Ingenieria Civil y Agrícola

Periodo 2022-II

## Contents

<b>1</b>	<b>Presión</b>	<b>1</b>
1.1	Presión en un punto . . . . .	2
1.2	Variación de la presión con la profundidad . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Medidores de presión</b>	<b>5</b>
2.1	Barometro . . . . .	5
2.2	El manometro . . . . .	6
2.3	Otros medidores de presion . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Estatica de fluidos</b>	<b>8</b>
3.1	Fuerza hidroestática sobre superficies planas sumergidas . . . . .	9
3.2	Fuerza hidroestática sobre superficies curvas sumergidas . . . . .	11
3.3	Fuerzas hidroestaticas en diferentes fluidos . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Flotación y estabilidad</b>	<b>13</b>
4.1	Estabilidad de cuerpos sumergidos y flotantes . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Fluidos en moviento de cuerpo rigido</b>	<b>15</b>
5.1	Aceleración en linea recta . . . . .	17
5.2	Rotación de un container cilindrico . . . . .	17

## 1 Presión

En mecanica de fluidos, la **presión** es definida como la fuerza normal ejercida por un fluido por unidad de area. En otras areas, la presion ejercida sobre un solido se conoce como el **esfuerzo normal**. En SI, las unidades de la presión son el **pascal**(Pa) donde  $1 Pa = 1 N/m^2$ . Otras unidades de presion usadas comunmente son:

$$\begin{aligned}1 bar &= 10^5 Pa = 0.1 MPa = 100 kPa \\1 atm &= 101325 Pa = 101.325 kPa = 1.01325 bars \\1 kgf/cm^2 &= 9.807 N/cm^2 = 9.807E4 N/m^2 = 9.807E4 Pa \\&= 0.9807 bar \\&= 0.9679 atm\end{aligned}$$

En sistema ingles, las unidades de la presión son libra fuerza por pulgada cuadrada ( $lbf/in^2$  o  $psi$ ). Algunas equivalencias entre los dos sistemas son:

$$1 \text{ atm} = 14.696 \text{ psi}$$

$$1 \text{ kgf}/\text{cm}^2 = 14.223 \text{ psi}$$

Algunas definiciones son:

- **presión absoluta**  $P_{abs}$ : Es la presión actual sobre un cuerpo y es medida con respecto al vacío absoluto (presión cero). La mayoría de los medidores de presión son calibrados para medir la presión tomando como cero la presión atmosférica local.
- **presión de manómetro**  $P_{gage}$ : Es la diferencia entre la presión absoluta y la presión atmosférica local.
- **presión de vacío**  $P_{vac}$ : Se presenta cuando una presión está por debajo de la presión atmosférica ( $P_{gage} < 0$ ).

La relación entre estas presiones es (ver figura 1):

$$P_{gage} = P_{abs} - P_{atm} \quad (1)$$

$$P_{vac} = P_{atm} - P_{abs} \quad (2)$$

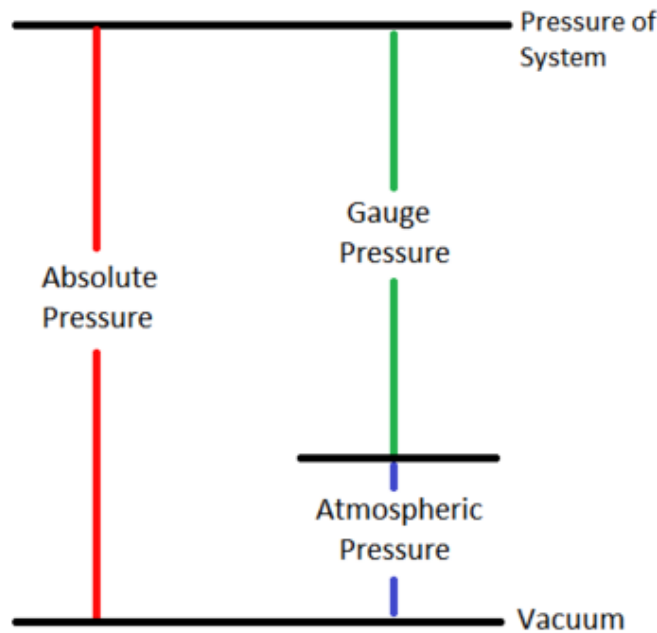


Figure 1: Presión atmosférica, de manómetro y de vacío

Es común encontrar por ejemplo que la presión de manómetro típica de una llanta de un carro es  $32.0 \text{ psi}$ , la cual es tomada con respecto a la presión atmosférica. Si la presión atmosférica en el sitio en donde se encuentra el carro es de  $14.3 \text{ psi}$ , la presión absoluta sería  $32.0 + 14.3 = 46.3 \text{ psi}$ . Note que en algunos problemas las unidades  $psig$  hacen referencia a presión de manómetro mientras que las unidades  $psia$  hacen referencia a presión absoluta.

## 1.1 Presión en un punto

Por definición, la presión en un punto en un fluido es la misma en todas las direcciones, por lo tanto la presión no puede considerarse como una cantidad vectorial y es entonces una cantidad scalar. Esto se puede demostrar si se hace un análisis de fuerzas sobre el elemento en equilibrio de la figura 2 en donde la profundidad del elemento es  $\Delta y = 1$ . Aplicando la segunda ley de Newton y haciendo un análisis de fuerzas sobre las superficies del elemento:

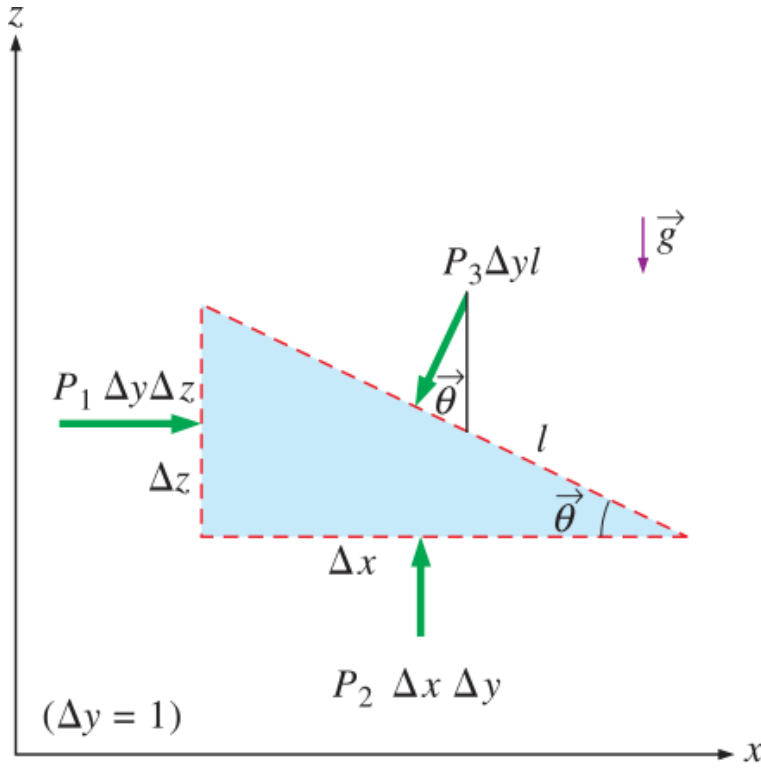


Figure 2: Fuerzas actuantes sobre un elemento de fluido en equilibrio.

$$\begin{aligned} \sum F_x = ma_x = 0 : \quad P_1 \Delta y \Delta z - P_3 \Delta y l \sin \theta &= 0 \\ \sum F_z = ma_z = 0 : \quad P_2 \Delta y \Delta x - P_3 \Delta y l \cos \theta - \frac{1}{2} \rho g \Delta x \Delta y \Delta z &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $\rho$  es la densidad y  $W = mg = \frac{1}{2} \rho g \Delta x \Delta y \Delta z$  es el peso del elemento. Teniendo en cuenta que  $\Delta x = l \cos \theta$  y  $\Delta z = l \sin \theta$ , reemplazando en la ecuación 3 y simplificando:

$$\begin{aligned} P_1 - P_3 &= 0 \\ P_2 - P_3 - \frac{1}{2} \rho g \Delta z &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

El ultimo termino de la ecuación 4 se elimina teniendo en cuenta que cuando el elemento se vuelve infinitesimal y se reduce a un punto  $\Delta z \rightarrow 0$ . Por tanto:

$$P_1 = P_2 = P_3 = P \quad (5)$$

Con esto concluimos que la presión  $P$  en un punto en un fluido tiene la misma magnitud en todas las direcciones. Esto se aplica para un fluido en movimiento o en reposo teniendo en cuenta que la presión es un escalar.

## 1.2 Variación de la presión con la profundidad

Es conocido que la presión de un fluido en reposo no cambia en dirección horizontal y su cambio es en dirección vertical. Por esto, la presión en un fluido incrementa con la profundidad ya que este incremento implica mayor cantidad de fluido y por tanto mayor peso lo cual es balanceado con un incremento de la presión.

Para obtener una relación de la variación de la presión con la profundidad, analicemos las fuerzas actuantes sobre el elemento en equilibrio de la figura 3 cuya profundidad es  $\Delta y = 1$ .

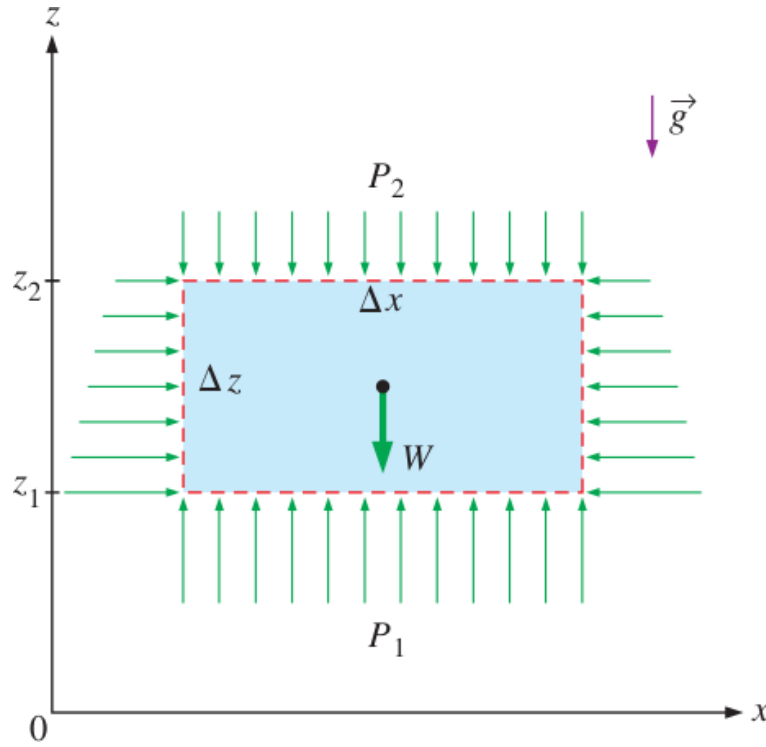


Figure 3: Diagrama de cuerpo libre de un elemento rectangular de fluido en equilibrio.

Asumiendo que la densidad  $\rho$  del fluido es constante, el balance de fuerzas en la direccion  $z$  es:

$$\sum F_z = ma_z = 0 : \quad P_1 \Delta x \Delta y - P_2 \Delta x \Delta y - \rho g \Delta x \Delta y \Delta z = 0$$

donde  $W = mg = \frac{1}{2} \rho g \Delta x \Delta y \Delta z$  es el peso del elemento y  $\Delta z = z_2 - z_1$ . Dividiendo por  $\Delta x \Delta y$ , tenemos:

$$\Delta P = P_2 - P_1 = -\rho g \Delta z = -\gamma_s \Delta z \quad (6)$$

donde  $\gamma_s = \rho g$  es el peso especifico del fluido. Otra manera de expresar la ecuacion 6anterior es:

$$\Delta P_{below} = P_{above} + \gamma_s |\Delta z| \quad (7)$$

donde "below" indica el punto mas bajo mientras que "above" indica el punto mas alto. Debido a que la densidad de los gases  $\approx 0$ , por ejemplo, la presion en una habitacion es uniforme ya que el peso del gas es muy bajo por lo que la ecuacion 6 se convierte en  $\Delta P = 0$ . Si tomamos el punto "above" sobre la superficie de el liquido a superficie abierta, cuya presion es la atmosferica  $P_{atm}$ , la presion a una profundidad  $h$  (medida desde la superficie), la presion es:

$$P = P_{atm} + \rho g h \quad \text{or } P_{gage} = \rho g h \quad (8)$$

Como los fluidos son esencialmente incompresibles, la variaci3n de  $\rho$  es despreciable con respecto a la profundidad. Cuando se requiere una alta precision en el calculo de  $P$  debido a cambios fuertes de temperature en fluidos, es necesario saber como  $\rho$  cambia con la temperatura. Ademias, cuando se requiere calcular  $P$  a grandes profundidades en el oceano, es importante determinar como cambia la densidad con la profundidad.

Para fluidos cuya densidad cambia significanamente con la elevacion, una relacion de la variacion de la presion con respecto a la elevacion es obtenida dividiendo la ecuacion 6 por  $\Delta z \rightarrow 0$ , es:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad (9)$$

Noten que  $dP$  es negativa cuando  $dz$  es positiva teniendo en cuenta que la presion decaiga hacia arriba. Si  $\rho$  es conocida con la elevacion, la diferencia de presion entre dos puntos 1 y 2 (ver figura 3 se determina como:

$$\Delta P = P_2 - P_1 = - \int_1^2 \rho g dz \quad (10)$$

Como lo habiamos mencionado anteriormente, en un fluido en reposo la presion sobre cualquier tipo de superficie cambia unicamente con la profundidad. En la figura 4 vemos que la presion en los puntos A, B, C, D, E, F y G sobre superficies de diferentes formas es la misma, ya que estan conectados por el mismo liquido y estan a la misma profundidad  $h$ . Es ademas importante recordar que la presion es siempre normal a la superficie. Por otro lado la presion sobre los puntos H e I no es la misma porque estan a diferente profundidad y ademas no estan conectados por el mismo fluido.

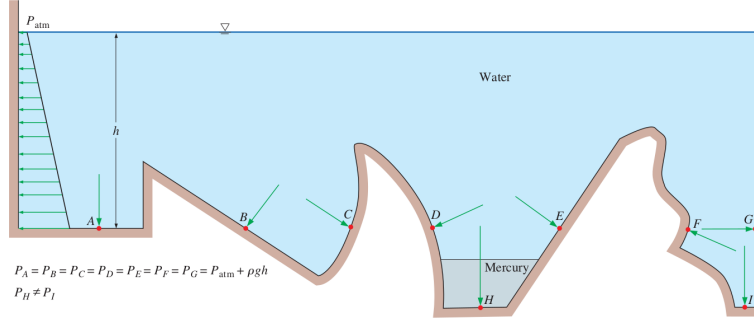


Figure 4: Presion sobre puntos sobre superficies de diferentes formas y a diferentes profundidades.

Como consecuencia de que la presion es constante en direccion horizontal, tenemos que *la presion aplicada sobre un fluido confinado en un contenedor, es transmitida igualmente a todas las partes del contenedor y actua perpendicular a las paredes del mismo*. Esto es conocido como la **Ley de Pascal**. Dicho de otra manera *un cambio en la presion en cualquier punto de un fluido en reposo es transmitido igualmente a todos los puntos del fluido*. La ley de pascal tiene muchas aplicaciones como por ejemplo el sistema de frenos en vehiculos, los elevadores hidraulicos para levantar cargas pesadas, entre otros. Si analisamos la figura 5, tenemos que  $P_1 = P_2$  ya que estan a un mismo nivel, esto con lleva a la siguiente relacion de fuerzas:

$$P_1 = P_2 \quad \rightarrow \quad \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad \rightarrow \quad \frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1} \quad (11)$$

donde la relacion  $A_2/A_1$  es conocida como la *ventaja mecanica* de un elevador hidraulico.

## 2 Medidores de presión

### 2.1 Barometro

La presión atmosferica es medida por un aparato llamado **barometro** por lo que la presion atmosferica es usualmente conocida como la presion barametrica. El barometro fue inventado por Evangelista Torricelli (1608-1647) y consiste en invertir un tubo de ensayo lleno de mercurio dentro de un recipiente con mercurio abierto a la atmosfera (ver figura 6). La presion en el punto B es igual a la presion atmoferica, mientras la presion en el punto C puede considerarse igual zero. Escribiendo el balance de fuerzas sobre la columna de mercurio:

$$P = \rho gh \quad (12)$$

donde  $\rho$  es la densidad del mercurio. Note que la altura  $h$  de la columns es siempre la misma independiente del diametro del tubo.

Algunas definiciones:

- **atmosfera estandard:** Presion producida por una columna de mercurio de 760 mm de  $\rho_{Hg} = 13595 \text{ kg/m}^3$  a  $0^\circ\text{C}$  bajo estandard  $g = 9.807 \text{ m/s}^2$ . El equivalente en columna de agua seria de 10.3 m.
- **Torr:** En honor a Torricelli, la unidad  $\text{mmHg}$  es conocida como *torr*. Por esto,  $1 \text{ atm} = 760 \text{ torr}$  y  $1 \text{ torr} = 133.3 \text{ Pa}$ .

Algunas ideas importantes:

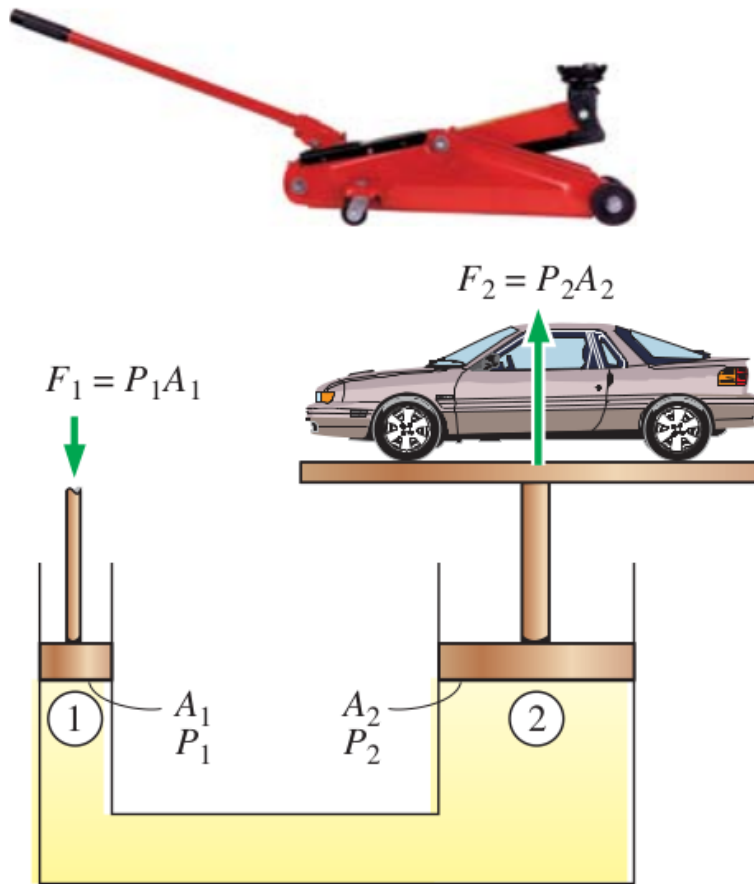


Figure 5: Ley de Pascal en un elevador hidraulico.

- La  $P_{atm}$  disminuye con la altura. Por eso mientras que  $P_{atm} = 101.325 kPa$ , la presión a altitudes como 1000, 2000, 5000 y 10000 y 20000 metros es 89.88, 79.50, 54.05, 26.5 and 5.53  $kPa$ , respectivamente.
- Si  $P_{atm}$  depende del peso del aire arriba de una posición determinada, esta no solo cambia con la altitud, también con las condiciones climáticas.
- Como la temperatura y la presión disminuyen con la altura, cocinar hervir agua en sitios en altas altitudes toma mayor tiempo.
- Es común el sangrado nasal en altas altitudes porque la diferencia entre la presión sanguínea y la presión atmosférica se hace mayor por lo que los vasos sanguíneos de la nariz son incapaces de soportar este esfuerzo adicional y terminan rompiéndose.
- Como en altas altitudes la densidad del aire es más baja, la cantidad de oxígeno por unidad de volumen es menor, por eso nos cansamos más rápidamente en estos lugares y experimentamos dificultad al respirar.

## 2.2 El manómetro

De acuerdo con la ecuación 6, el cambio de elevación  $-\Delta z$  en un fluido en reposo es igual a  $\Delta P/\rho g$ , lo cual sugiere que la columna de un fluido puede ser usada para calcular las diferencias de presión. El **manómetro** es un aparato que está basado en este principio y por lo tanto es usado para medir diferencias de presión. Un manómetro es un tubo de plástico o vidrio en forma de U el cual contiene usualmente agua, mercurio, alcohol o aceite (ver figura 7). Cuando las diferencias de presión son muy altas, se prefiere un fluido pesado como el mercurio.

Consideremos el manómetro conectado al tanque con gas de la figura 8. Teniendo en cuenta que los efectos gravitacionales sobre los gases son despreciables, la presión en cualquier punto del tanque es la misma incluyendo la presión en 1  $P_1$ . Se sabe además que la presión no varía en dirección horizontal en un fluido, por lo tanto,  $P_2 = P_1$ . Como la altura  $h$  de fluido está en equilibrio estático y está abierta a la atmósfera:

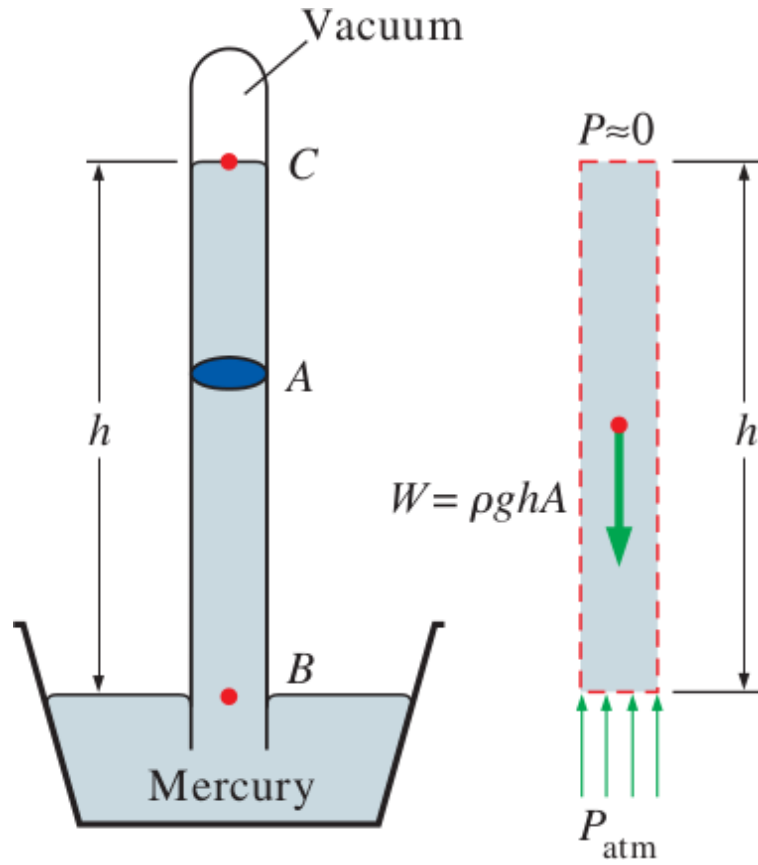


Figure 6: El barometro

$$P_2 = P_{atm} + \rho gh \quad (13)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido del manometro. A pesar que el area transversal del manometro no cambia  $h$ , el diámetro del tubo debe ser lo suficientemente grande para reducir el efecto capilar.

Algunos problemas en ingeniería involucran manómetros con múltiples fluidos de diferentes densidades ubicados uno sobre otro. Recuerde que para resolver cualquier problema de manómetros:

1. El cambio de presión en una columna de fluido  $h$  es:  $\Delta P = \rho gh$ .
2. La presión en un fluido incrementa hacia abajo y disminuye hacia arriba ( $P_{down} > P_{top}$ ).
3. Dos puntos conectados por un fluido continuo en reposo sobre el mismo plano horizontal tienen la misma presión.

Cuando existen diferentes tipos de fluidos conectados continuamente y en reposo se puede calcular la presión en un punto determinado partiendo del punto cuya presión es conocida e ir adicionando o substrayendo el término  $\rho gh$  en la dirección al punto de presión desconocida. Por ejemplo si tenemos los fluidos de la figura 9 y queremos calcular la presión en el punto 1, empezamos desde la presión conocida  $P_{atm}$  y vamos avanzando hasta el punto 1, lo cual da:

$$P_{atm} + \rho_1 gh_1 + \rho_2 gh_2 + \rho_3 gh_3 = P_1$$

En el caso en que los tres fluidos tuvieran la misma densidad, la ecuación anterior quedaría:  $P_{atm} + \rho g(h_1 + h_2 + h_3) = P_1$

Los manómetros son utilizados para medir los cambios de presión (generalmente debido a válvulas o accesorios) entre dos secciones de una tubería con flujo a presión. Dicho manómetro se conecta entre dos secciones de una tubería (ver figura 10 que transporta líquido o gas cuya densidad es  $\rho_1$ ). La densidad del líquido en el manómetro  $\rho_2$  debe ser mayor que  $\rho_1$  y ambos fluidos deben ser inmiscibles. La diferencia de presión  $P_1 - P_2$  puede ser calculada iniciando en el punto 1 y moviéndose a lo largo del manómetro adicionando o restando  $\rho gh$  hasta alcanzar el punto 2, lo cual quedaría:



Figure 7: Manometro en forma de U

$$P_1 + \rho_1 g(a + h) - \rho_2 gh - \rho_1 ga = P_2$$

Note que los puntos a una distancia  $a$  tienen una misma presión por estar al mismo nivel en el manómetro, simplificando:

$$P_1 - P_2 = (\rho_1 - \rho_2)gh$$

Si el fluido que fluye a lo largo de la tubería es gas,  $\rho_1 \ll \rho_2$  por lo que la ecuación anterior se convierte en  $P_1 - P_2 \cong \rho_2 gh$ .

### 2.3 Otros medidores de presión

- Tubo de Bourdon
- Transductor de presión

## 3 Estática de fluidos

La **estática de fluidos** trabaja con fluidos en **reposo** y es conocida como **hidroestática** cuando el fluido es un líquido y **aeroestática** cuando el fluido es un gas. En un fluido en reposo no se deforma porque no existen esfuerzos cortantes tangenciales entre capas. El único esfuerzo actuante sobre un fluido en reposo es el **esfuerzo normal** o la presión la cual varía con el peso del fluido que a su vez es función de la gravedad. La estática de fluidos es



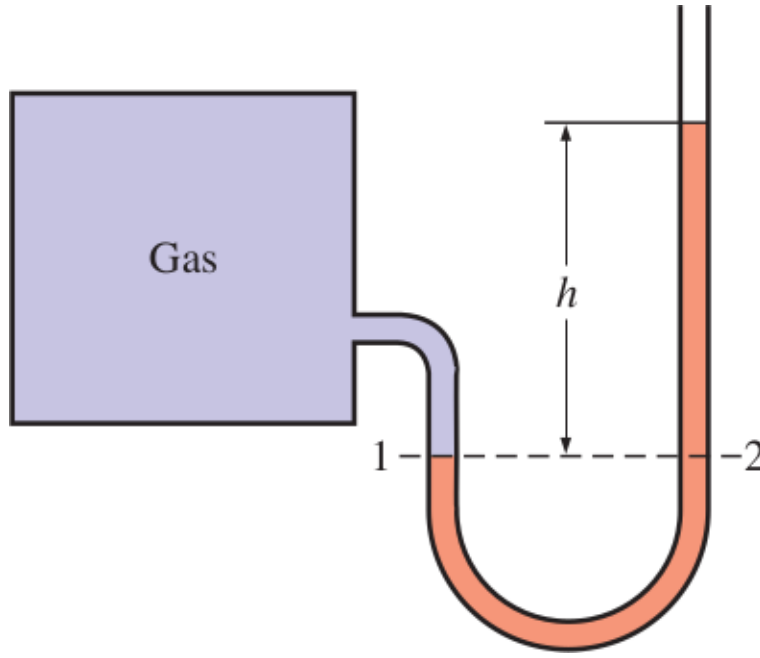


Figure 8: Manometro básico.

importante para el diseño de objetos y estructuras flotantes o submergidas como presas, submarinos y tanques de almacenamiento de agua.

### 3.1 Fuerza hidroestática sobre superficies planas sumergidas

Una placa sumergida (e.g. compuerta de una presa, pared de un tanque) esta sujeta a una presión ejercida por el fluido sobre su superficie. En una superficie plana, las fuerzas hidroestáticas actúan paralelas y es importante determinar su magnitud y su punto de aplicación (**centro de presión**) sobre la superficie. En algunos casos, la superficie esta parcialmente sumergida y mientras que un lado esta en contacto con un fluido, en el otro esta en contacto con la atmósfera por lo tanto la  $P_{atm}$  se anula y la presión resultante es la presión hidroestática  $P_{gag} = \rho gh$  como se muestra en la figura 11.

Un caso más general es el ilustrado en la figura 12 en donde tenemos una placa irregular sumergida e inclinada un ángulo  $\theta$  con respecto a la horizontal. La presión absoluta ejercida sobre cualquier punto sobre la placa es:

$$P = P_0 + \rho gh = P_0 + \rho gy \sin \theta$$

en donde  $P_0$  es la presión arriba del fluido ( $= P_{atm}$  si el fluido esta abierto a la atmósfera),  $y$  es la distancia a lo largo del mismo eje desde el origen  $O$  y  $h$  es la distancia vertical desde la superficie del agua hasta la placa en donde  $h = y \sin \theta$ .

La fuerza hidroestática resultante  $F_R$  que actúa sobre la placa es:

$$F_R = \int_A P dA = \int_A (P_0 + \rho gy \sin \theta) dA = P_0 A + \rho g \sin \theta \int_A y dA$$

en donde  $dA$  es el diferencial de área sobre la placa. Como el **primer momento de área**  $\int_A y dA$  se relaciona con la coordenada  $y$  del **centroide**  $y_C = \frac{1}{A} \int_A y dA$  de la placa, reemplazando en la ecuación anterior:

$$F_R = (P_0 + \rho gy_C \sin \theta) A = (P_0 + \rho gh_C) A = P_C A = P_{avg} A \quad (14)$$

en donde  $P_C$  es la presión sobre el centroide de la placa la cual es equivalente a la presión promedio  $P_{avg}$ , y  $h_C$  es la distancia vertical desde la superficie hasta el centroide.

Cuando  $P_0 = P_{atm}$ , esta puede ser ignorada en el cálculo de  $F_R$  ya que actúa en ambas caras de la placa. Cuando esto no es así, la fuerza adicional ejercida debido a  $P_0$  se calcula adicionando  $h_{equiv} = P_0 / \rho g$  a  $h_C$ , lo cual asume la presencia de una capa adicional de líquido en la superficie.

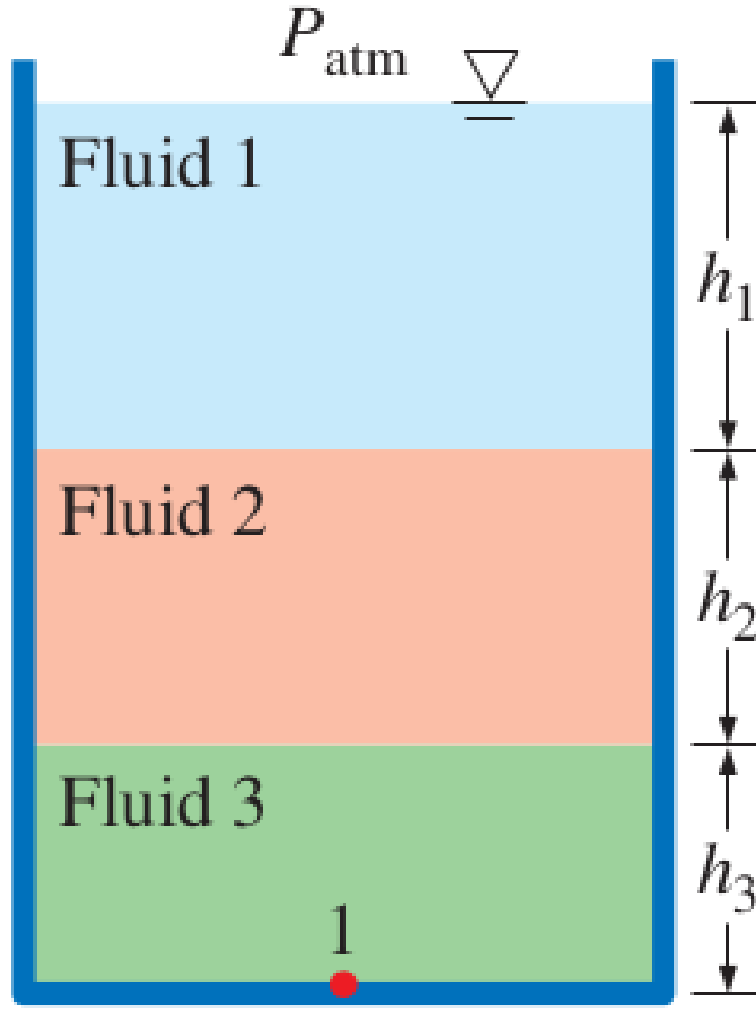


Figure 9: Tres tipos de fluido en reposo de diferente  $\rho$  ubicados unos sobre el otro.

La linea de accion de  $F_R$  no pasa por el centroide de la placa; esta pasa por el **centro de presion**. Para determinar la posicion del centro de presion, estimamos el momento de  $F_R$  con respecto al eje  $x$ :

$$y_p F_R = \int_A y P dA = \int_A y (P_0 \rho g y \sin \theta) dA = P_0 \int_A y dA + \rho g \sin \theta \int_A y^2 dA$$

o

$$y_p F_R = P_0 y_C A + \rho g \sin \theta I_{xx,O} \quad (15)$$

donde  $y_p$  es la distancia al centro de presion desde el eje  $x$ , y  $I_{xx,O} = \int_A y^2 dA$  es el **segundo momento de area o de inercia** con respecto al eje  $x$ . Por el teorema de **ejes paralelos** el  $I_{xx,O}$  puede ser calculado con respecto al eje  $x$  que pasa por el centroide como:

$$I_{xx,O} = I_{xx,C} + y_C^2 A \quad (16)$$

donde  $I_{xx,C}$  es el segundo momento de area con respecto al eje  $x$  que pasa por el centroide y  $y_C$  es la distancia entre los dos ejes paralelos. Reemplazando las ecuaciones 14 y 16 en la ecuacion 15:

$$y_p (P_0 + \rho g y_C \sin \theta) A = P_0 y_C A + \rho g \sin \theta (I_{xx,C} + y_C^2 A)$$

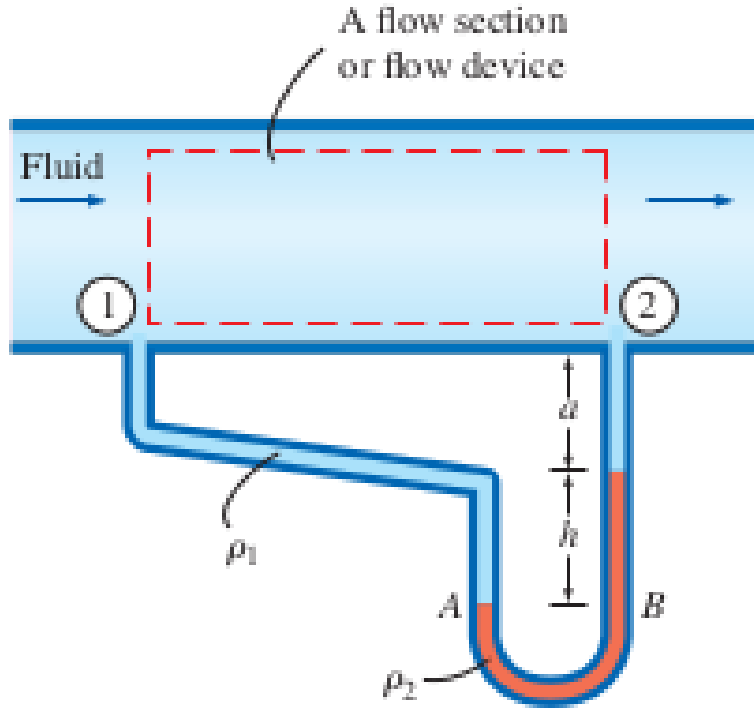


Figure 10: Medicion de la diferencia de presion en un tuberia con un manometro.

despejando para  $y_p$ :

$$\begin{aligned}
 y_p &= \frac{P_0 y_C A + \rho g \sin \theta (I_{xx,C} + y_C^2 A)}{(P_0 + \rho g y_C \sin \theta) A} \\
 &= \frac{P_0 y_C A + \rho g \sin \theta I_{xx,C} + \rho g \sin \theta y_C^2 A}{(P_0 + \rho g y_C \sin \theta) A} \\
 &= \frac{y_C A (P_0 + \rho g \sin \theta y_C) + \rho g \sin \theta I_{xx,C}}{(P_0 + \rho g y_C \sin \theta) A} \\
 &= y_C + \frac{\rho g \sin \theta I_{xx,C}}{(P_0 + \rho g y_C \sin \theta) A} \\
 y_p &= y_C + \frac{I_{xx,C}}{\left[ y_C + \frac{P_0}{\rho g \sin \theta} \right] A} \tag{17}
 \end{aligned}$$

Cuando  $P_0 = P_{atm}$  y es ignorada,  $y_p$  es:

$$y_p = y_C + \frac{I_{xx,C}}{y_C A} \tag{18}$$

Por lo tanto la distancia vertical desde la superficie hasta el centro de presion es:  $h_p = y_p \sin \theta$ .

Valores de  $I_{xx,C}$  para diferentes areas comunes son mostrados en la figura 13. Para areas simetricas con respecto al eje  $y$ , el centro de presion esta debajo del centroide y sobre el eje  $y$ .

### 3.2 Fuerza hidroestática sobre superficies curvas sumergidas

En superficies curvas sumergidas, la fuerza hidroestatica cambia de direccion dependiendo de la posicion sobre la superficie. Para facilitar el calculo, es necesario estimar las componentes horizontal  $F_H$  y vertical  $F_V$  de  $F_R$ . Si consideramos la superficie curva de la figura 14, el calculo de  $F_H$  y  $F_V$  se hace calculando las fuerzas actuantes sobre la proyeccion horizontal y vertical de la superficie curva. Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
 F_H &= F_x \\
 F_V &= F_y \pm W
 \end{aligned}$$

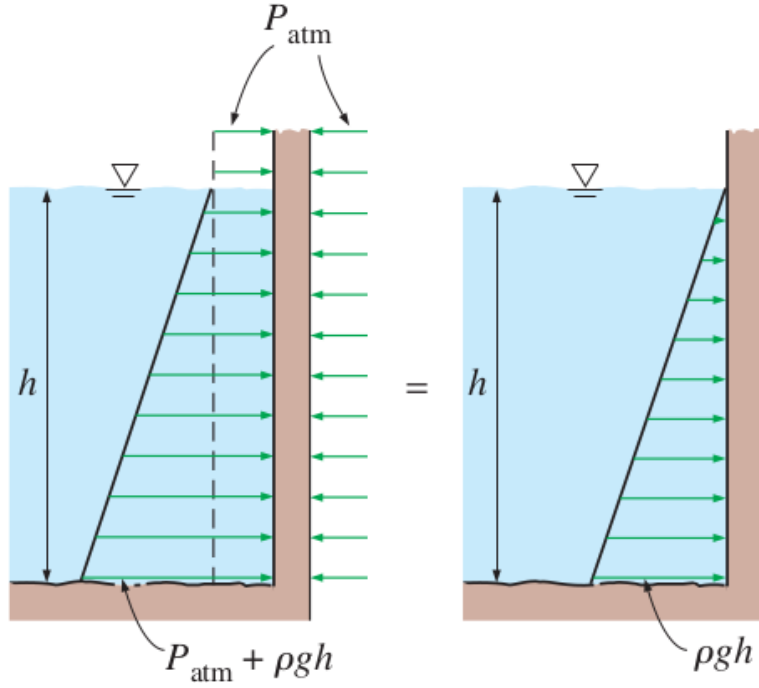


Figure 11: Fuerzas hidrostaticas sobre una superficie plana parcialmente sumergida.

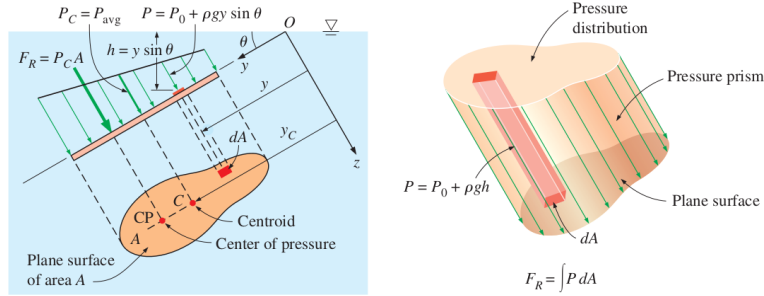


Figure 12: Fuerza hidrostatica sobre una placa inclinada y sumergida.

donde  $F_x$  se calcula como la resultante de la fuerza hidrostatica sobre una superficie plana vertical (ver seccion 3.1),  $F_y$  es la fuerza en  $y$  ejercida sobre el fluido (e.g. fluido superior y aire) y  $W = \rho g V$  es el peso del volumen ( $V$ ) de fluido. Note que  $F_y$  y  $W$  se suman si actuan en la misma direccion y se restan si van en direcciones opuestas. De lo anterior:

$$F_R = \sqrt{F_H^2 + F_V^2}$$

y el angulo que hace  $F_R$  con la horizontal es  $\alpha = \arctan \frac{F_V}{F_H}$ .

### 3.3 Fuerzas hidrostaticas en diferentes fluidos

Las ecuaciones vistas en las secciones 3.1 y 3.2 son validas para fluidos de densidad uniforme. Si el fluido esta conformado por capas de fluidos de diferentes densidades (ver figura 15) la distribucion lineal de presiones cambia en cada capa. Sin embargo las ecuaciones vistas anteriormente pueden ser aplicadas a cada capa  $i$  y las  $F_{R,i}$  pueden ser adicionadas para calcular la  $F_R$ :

$$F_R = \sum F_{R,i} = \sum P_{C,i} A_i$$

donde  $P_{C,i} = P_0 + \rho_i h_{C,i}$  es la presion en el centroide de la porcion de la superficie en el fluido  $i$ , y  $A_i$  es el area de la superficie en ese fluido. El centro de presion de  $F_R$  puede ser encontrado calculando la suma de los momentos de cada fuerza  $F_{R,i}$  con respecto a un punto determinado (e.g. la superficie de agua.).

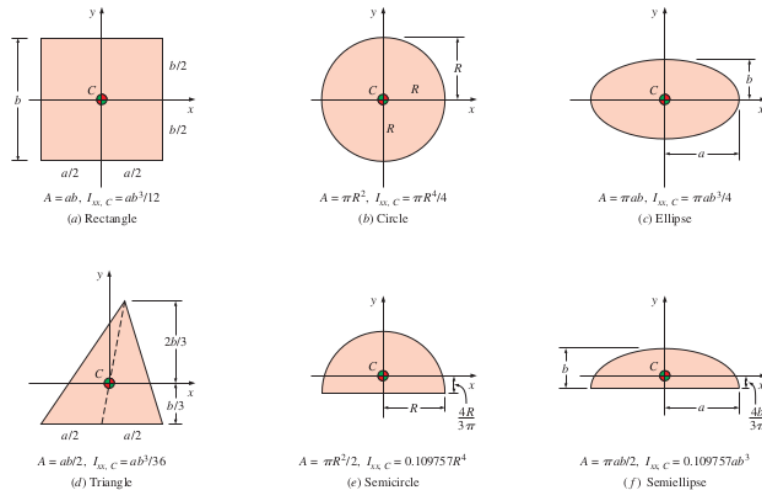


Figure 13: El centroide y el momento de inercia con respecto al centroide para figuras geometricas comunes.

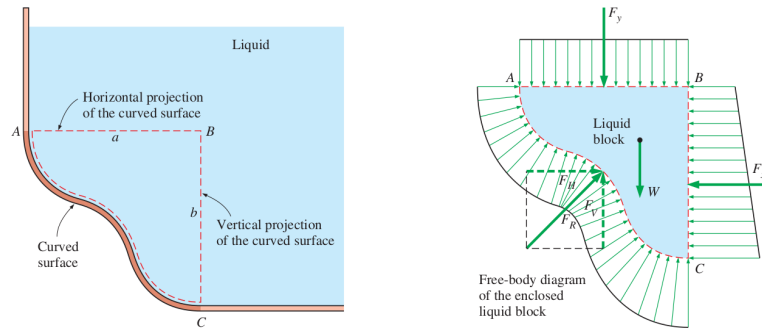


Figure 14: Determinación de la fuerza hidroestatica actuante sobre una superficie curva sumergida.

## 4 Flotación y estabilidad

Es comun sentir como un cuerpo determinado pesa menos cuando este esta en un fluido; dicha sensacion se explica debido a que el fluido ejerce una fuerza vertical hacia arriba que tiende a levantar el objeto la cual es denominada **fuerza de flotación**,  $F_B$ . La fuerza de flotación es causada por el incremento de presion con la profundidad dentro del fluido. Para su analisis, consideremos la placa de la figura 16 de espesor  $h$  y area  $A$  sumergida en un liquido de densidad  $\rho_f$  y que es paralela a la superficie libre. El balance de fuerzas sobre la placa, con base en presiones manometricas es:

$$F_B = F_{bottom} - F_{top} = \rho_f g(s + h)A - \rho_f g s A = \rho_f g h A = \rho_f g V \quad (19)$$

donde  $V = hA$  es el volumen de la placa. Teniendo en cuenta que  $\rho_f g V$  es el peso del liquido cuyo volumen es igual al volumen de la placa, tenemos que *la fuerza de flotación actuante sobre una placa es igual al peso del liquido desplazado por la placa*. Note que si el fluido es de densidad constante, la fuerza de flotacion es independiente de la profundidad  $h$  y de la densidad de la placa. En terminos generales y para cualquier objeto se afirma que *la fuerza de flotación actuante sobre un cuerpo de densidad uniforme inmerso en un fluido es igual al peso del fluido desplazado por el cuerpo, y que actual vertical a travez del centroide del volumen desplazado*, esto es conocido como el **principio de Arquimides** gracias al matematico Griego Arquimides.

Para objetos flotantes, el peso del cuerpo debe ser igual a la fuerza de flotacion, la cual es el peso del fluido cuyo volumen es igual a el volumen de la porción sumergida del cuerpo flotante. Esto es:

$$F_B = W \rightarrow \rho_f g V_{sub} = \rho_{avg,body} g V_{total} \rightarrow \frac{V_{sub}}{V_{total}} = \frac{\rho_{avg,body}}{\rho_f} \quad (20)$$

De la ecuación 20 tenemos que la fraccion de volumen del objeto flotante es igual a la relación entre la densidad promedio del cuerpo y la densidad del fluido. Analizando la ecuacion 20 (ver figura 17), un objeto inmerso en un

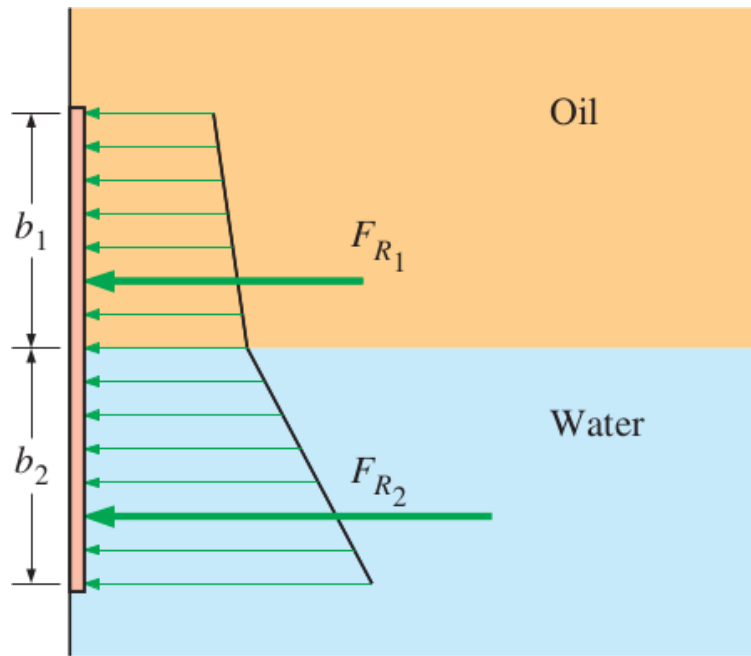


Figure 15: Fuerzas hidroestáticas sobre placa sumergida en dos fluidos.

fluido: 1) permanece en reposo dentro del fluido cuando  $\rho = \rho_f$ , 2) se hunde y cae hasta el fondo dentro de el fluido cuando  $\rho > \rho_f$  y 3) flota cuando  $\rho < \rho_f$ .

Como es sabido,  $F_B$  es proporcional a  $\rho_f$ . En el caso de los gases, la densidad generalmente es mucho menor que la densidad de un líquido. Sin embargo, las fuerzas de flotación son notorias en el ascenso de aire caliente en ambientes fríos, la circulación de aire en la atmósfera y el ascenso de globos y de bombas con helio.

#### 4.1 Estabilidad de cuerpos sumergidos y flotantes

Una importante aplicación del concepto de flotación es el análisis de la estabilidad de un cuerpo flotante o sumergido, lo cual es fundamental en el diseño de embarcaciones y submarinos. Existen tres casos que describen la estabilidad de un cuerpo: 1) Un cuerpo permanece **estable** si cualquier pequeña perturbación genera un movimiento que es contrarrestado por una fuerza que hace que el cuerpo retorne a su posición inicial, 2) un cuerpo es **neutralmente estable** si después de ser perturbado cambia su posición inicial, y 3) un cuerpo es **inestable** si al ser perturbado este no retorna a su posición inicial y continúa en movimiento. Estos tres estados son aplicables a objetos flotantes o sumergidos. Por ejemplo, un cuerpo sumergido o flotante en equilibrio estático cuyo peso es balanceado por la fuerza de flotación permanece estable en la **dirección vertical**.

La **estabilidad de rotación** de un cuerpo sumergido depende de la localización relativa de el **centro de gravedad**  $G$  de el cuerpo y el centro de flotación  $B$ , el cual es el centroide del volumen desplazado. Un cuerpo sumergido permanece estable si su fondo es más pesado lo que hace que  $G$  esté por debajo de  $B$ . Esta es la razón por la cual en el diseño de submarinos, los motores están en la parte más baja con el fin de localizar el mayor peso posible en las partes bajas del submarino. Lo mismo ocurre con los globos, el cual es un cuerpo inmerso en aire, cuyo mayor peso es la canasta que transporta a las personas está en la parte baja mientras el aire caliente y liviano se ubica en la parte alta. Si  $G$  está por encima de  $B$ , el cuerpo sumergido es inestable y cualquier perturbación hace que el cuerpo se voltee. En el caso en el que  $G$  y  $B$  coinciden, el cuerpo sumergido es neutralmente estable, lo cual es el caso de cuerpos cuya densidad es uniforme (ver figura 18).

Si en un cuerpo  $G$  no está verticalmente alineado con  $B$  no es apropiado hablar de estabilidad ya que el cuerpo no está en un estado de equilibrio y trataría de rotar o moverse por sí solo para alcanzar su estado estable (ver figura 19). El momento restaurador que actúa en contra de las manecillas del reloj, trataría de rotar el cuerpo en la misma dirección con el fin de alinear  $G$  y  $B$  verticalmente.

La estabilidad de rotación es similar para cuerpos flotantes. Sin embargo, a diferencia de un cuerpo sumergido, un cuerpo flotante puede permanecer estable incluso cuando  $G$  está arriba de  $B$  (ver figura 20). Esto se logra gracias a que  $B$  se desplaza hacia  $B'$  generando un momento restaurador entre las dos fuerzas para retornar el objeto a su posición original.

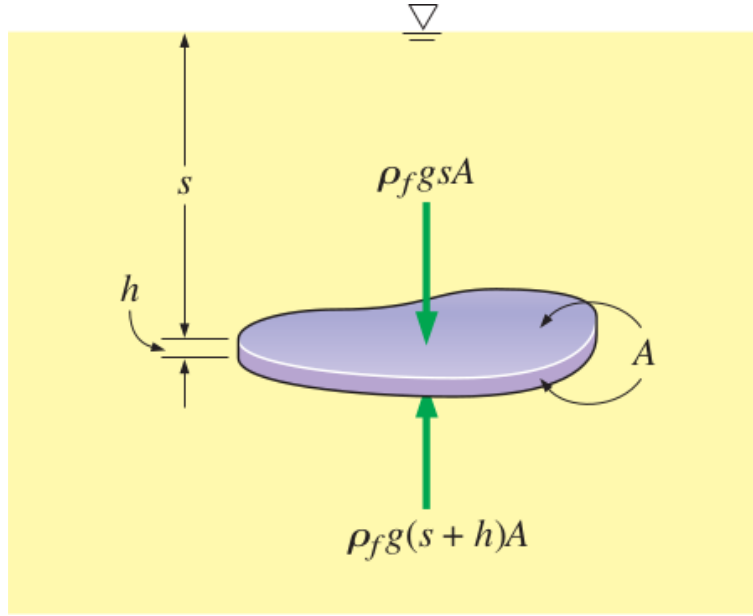


Figure 16: Fuerzas actuantes sobre una placa sumergida paralela a la superficie.

Una medida de la estabilidad de un cuerpo flotante es la **altura metacentrica**  $GM$ , la cual es la distancia entre  $G$  y el *metacentro*  $M$  (punto de intersección entre la línea de acción de las fuerza flotante antes y después de la rotación). Con base en la posición de  $M$ , un cuerpo flotante es estable si  $M$  está arriba de  $G$  por lo que  $GM$  es positiva y es inestable si  $M$  está abajo de  $G$  por lo que  $GM$  es negativa. Si es inestable, el peso y la fuerza de flotación actuando sobre el cuerpo inclinado genera un momento de volcamiento en lugar de un momento restaurador. Entre más grande es  $GM$ , más estable es el cuerpo flotante. Note que un bote puede inclinarse hasta cierto ángulo máximo sin volcarse, sin embargo, si dicho ángulo es excedido el bote se volteará y se hundirá.

## 5 Fluidos en movimiento de cuerpo rígido

En esta sección se analiza la variación de presiones en un fluido que se mueve como un cuerpo sólido con o sin aceleración y sin la presencia de esfuerzos cortantes. Por ejemplo un carro tanque que transporta líquido en su interior, al acelerar y alcanzar una velocidad, hace que la superficie libre de el fluido se incline en la parte trasera haciendo que el volumen se mueva como un cuerpo rígido. De manera similar, cuando un cilindro que contiene un fluido rota a una velocidad determinada, su superficie se transforma haciendo que todo el fluido se comporte como un cuerpo rígido.

Si analizamos un elemento diferencial de fluido cuyas dimensiones son  $dx$ ,  $dy$  y  $dz$  (ver figura 21) el cual se comporta como un cuerpo rígido, la fuerza neta actuante sobre el elemento según la *segunda ley de Newton* se expresa como:

$$\delta \vec{F} = \delta m \cdot \vec{a} \quad (21)$$

donde  $\delta m = \rho dV = \rho dx dy dz$  es la masa del elemento de fluido y  $\vec{a}$  es la aceleración del elemento. Si hacemos un balance de fuerzas sobre el elemento, las fuerzas actuantes sobre este son las fuerzas hidrostáticas sobre las caras del elemento ejercidas por el fluido alrededor las cuales tratan de comprimir el elemento de fluido, y el peso del elemento en dirección  $z$  negativo. El balance de las fuerzas de presión en la dirección  $z$  es:

$$\delta F_{S,z} = \left( P - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy - \left( P + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy = - \frac{\partial P}{\partial z} dx dy dz$$

De manera similar, el balance en la dirección  $x$  y  $y$  es:

$$\delta F_{S,x} = - \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz \quad \delta F_{S,y} = - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy dz$$

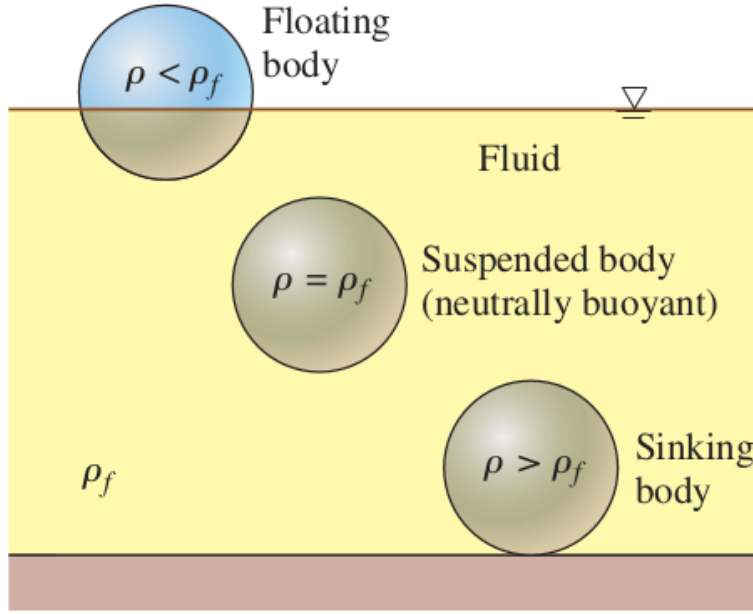


Figure 17: Diferentes estados de un cuerpo inmerso en un fluido dependiendo de su densidad ( $\rho$ ) y de la del fluido ( $\rho_f$ ).

La fuerza de presión actuando sobre el elemento en forma vectorial, es expresada como:

$$\delta \vec{F}_S = \delta F_{S,x} \vec{i} + \delta F_{S,y} \vec{j} + \delta F_{S,z} \vec{k} = - \left( \frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{k} \right) dx dy dz = - \vec{\nabla} P dx dy dz$$

donde  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  y  $\vec{k}$  son los vectores unitarios en  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente, y  $\vec{\nabla} = \frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{k}$  es el gradiente de presión. Note que  $\vec{\nabla}$  es un operador vectorial que actúa sobre una función escalar como lo es  $P$ .

La otra fuerza actuante sobre el elemento de fluido es el peso, la cual se expresa como:

$$\delta \vec{F}_{B,z} = -g \delta m \vec{k} = -\rho g dx dy dz \vec{k}$$

La fuerza total actuante sobre el elemento de fluido es:

$$\delta \vec{F} = \delta \vec{F}_S + \delta \vec{F}_B = - \left( \vec{\nabla} P + \rho g \vec{k} \right) dx dy dz \quad (22)$$

De acuerdo con la segunda ley de Newton,  $\delta \vec{F} = \delta m \cdot \vec{a} = \rho dx dy dz$  y substituyendo en la ecuación anterior tenemos que la ecuación general de movimiento de un fluido que actúa como un cuerpo rígido (sin esfuerzos cortantes) es:

$$\vec{\nabla} P + \rho g \vec{k} = -\rho \vec{a} \quad (23)$$

Descomponiendo la ecuación 23 vectorial, tenemos:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a_x \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho a_y \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho(g + a_z) \quad (24)$$

donde  $a_x$ ,  $a_y$  y  $a_z$  son las componentes del vector  $\vec{a}$  en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente.

Existen dos casos especiales:

**Caso 1: Fluido en reposo o en movimiento a velocidad constante:** En un fluido en reposo o en movimiento con velocidad constante,  $a_x = 0$ ,  $a_y = 0$  y  $a_z = 0$ , por lo tanto la ecuación 24 se reduce a:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad (25)$$

La ecuación 25 confirma que un fluido en reposo la presión permanece constante en cualquier dirección horizontal y solo varía en la dirección vertical.



**Caso 2: Caida libre de un elemento fluido:** Para un cuerpo en caida libre cuya aceleracion es  $a_x = 0$ ,  $a_y = 0$  y  $a_z = -g$  y en donde la resistencia del aire despreciable, la ecuación 24 se convierte en:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \rightarrow P = \text{constant} \rightarrow a_z = -g \quad (26)$$

Si el cuerpo es acelerado hacia arriba (e.g. un elemento de fluido en un ascensor) hasta alcanzar  $a_z = g$ , el gradiente de presion en direccion  $z$ , de acuerdo con la ecuación 24, es  $\partial P / \partial z = -2\rho g$ .

## 5.1 Aceleración en linea recta

Consideremos un container parcialmente lleno moviendose en linea recta con una aceleracion constante (e.g. carrotanque con combustible en moviemo). De acuerdo con la figura 22 y con la ecuacion 24 las ecuaciones de movimiento se reducen a:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a_x \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho(g + a_z)$$

en donde  $P$  es independiente de  $y$  por lo cual  $P = P(x, z)$ . De acuerdo con la definicion de diferencial total,  $dP = (\partial P / \partial x)dx + (\partial P / \partial z)dz$ , la ecuacion anterior se convierte en:

$$dP = -\rho a_x dx - \rho(g + a_z)dz \quad (27)$$

Para determinar la diferencia de presion entre los puntos 1 y 2 (ver figura 22), integramos la ecuación 27 para  $x$  y  $z$ :

$$P_2 - P_1 = -\rho a_x(x_2 - x_1) - \rho(g + a_z)(z_2 - z_1) \quad (28)$$

Si tomamos como origen el punto  $x = 0$  y  $z = 0$  en donde la presion  $P = P_0$ , la variacion de presion en cualquier punto del fluido es:

$$P = P_0 - \rho a_x x - \rho(g + a_z)z \quad (29)$$

Si deseamos calcular el cambio de elevacion de la superficie libre del fluido, el cambio de nivel del punto 2 con respecto a 1 de acuerdo a la ecuacion 28 y asumiendo que  $P_1 = P_2$  es:

$$\Delta z_s = z_{s2} - z_{s1} = -\frac{a_x}{g + a_z}(x_2 - x_1) \quad (30)$$

donde  $z_s$  indicate la localizacion sobre la superficie.

De manera similar a la ecuación 30, las superficies con presion constante conocidas como **isobaras** pueden ser descritas como:

$$\frac{dz_{isobar}}{dx} = -\frac{a_x}{g + a_z} = \text{constante} \quad (31)$$

De acuerdo con lo anterior, las isobaras son superficies paralelas (ver figura 22) cuya pendiente es  $m = \frac{dz_{isobar}}{dx} = -\frac{a_x}{g + a_z} = \tan \theta$ .

## 5.2 Rotación de un container cilindrico

Si hacemos rotar un vaso lleno de agua alrededor de su eje vertical, el agua tiende a apartarse desde el centro hacia las paredes formando una superficie libre concava; todo esto gracias a la *fuerza centrifuga* (o a la *aceleracion centripeta*). Si analizamos el cilindro de la figura 23, el cual rota a velocidad angular  $\omega$ , cada partícula del fluido se movera a la misma velocidad y todo el fluido se movera como un cuerpo rigido que no se deforma, una vez se alcance una condicion permanente. Para analizar este caso, es conveniente el analisis en coordenadas polares  $(r, \theta, z)$ , en donde  $z$  represente el eje de rotacion del fluido. Por definicion, la aceleracion centripeta es  $r\omega^2$  y positiva hacia el centro; note que la aceleracion no depende de  $\theta$  ya que es simetrica con respecto a  $z$ . Aplicando la ecuación 23:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho r \omega^2 \quad \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad (32)$$

De acuerdo con la definicion de diferencial total,  $dP = (\partial P / \partial r)dr + (\partial P / \partial z)dz$ , la ecuación 32 se convierte en:

$$dP = \rho r \omega^2 dr - \rho g dz \quad (33)$$

Para superficies con presion constante ( $dP = 0$ ), la distancia vertical  $z$  se convierte en una funcion de  $r$  como:

$$\frac{dz_{isobar}}{dr} = \frac{r\omega^2}{g}$$

integrando la ecuacion anterior:

$$z_{isobar} = \frac{\omega^2}{2g}r^2 + C_1 \quad (34)$$

en donde la ecuación 34 es la ecuacion de la parabola por lo que las superficies de presion constante forman un paraboloide de revolucion. La ecuación 34 representa una familia de curvas. Por lo tanto, para la superficie libre, cuya altura es conocida e igual a  $h_c$ ,  $C_1 = h_c$  cuando  $r = 0$  y la ecuación 34 para la superficie libre se convierte en:

$$z_s = \frac{\omega^2}{2g}r^2 + h_c \quad (35)$$

en donde  $z_s$  es la distancia desde el fondo hasta la superficie.

Teniendo en cuenta que el volumen de un anillo es  $dV = 2\pi r z_s dr$ , el volumen del parabolodide fomado por la superficie libre es:

$$V = \int_{r=0}^R 2\pi z_s r dr = 2\pi \int_{r=0}^R \left( \frac{\omega^2}{2g}r^2 + h_c \right) r dr = \pi R^2 \left( \frac{\omega^2}{2g}R^2 + h_c \right) \quad (36)$$

De acuerdo con el principio de conservacion de la masa, el volumen del cilindro es

$$V = \pi R^2 h_0 \quad (37)$$

en donde  $h_0$  es la altura del fluido en el container antes de rotar. Igualando las ecuaciones 36 y 37,  $h_c$  se convierte en:

$$h_c = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} \quad (38)$$

reemplazando en la ecuación 35, la altura de la superficie libre seria:

$$z_s = h_0 - \frac{\omega^2}{4g}(R^2 - 2r^2) \quad (39)$$

La diferencia de altura entre el centro y el borde del contenedor se obtiene evaluando la ecuación 39 cuando  $r = 0$  y  $r = R$ :

$$\Delta z_{s,max} = z_s(R) - z_s(0) = \frac{\omega^2}{2g}R^2 \quad (40)$$

Por otro lado, si la densidad  $\rho$  es constante, la diferencia de presion entre dos puntos 1 y 2 se determina integrando la ecuación 33, lo cual queda:

$$P_2 - P_1 = \frac{\rho\omega^2}{2}(r_2^2 - r_1^2) - \rho g(z_2 - z_1) \quad (41)$$

Si tomamos como punto 1  $r = 0$  y  $z = 0$  donde la presión es igual  $P_0$ , la presion en cualquier punto (e.g.  $P_2$ ) es:

$$P = P_0 + \frac{\rho\omega^2}{2}r^2 - \rho g z \quad (42)$$

Segun la ecuación 42, para un radio conocido,  $P$  varia hidroestaticamente en la dirección vertical como un fluido en reposo. Por otro lado, para una distancia  $z$  conocida,  $P$  cambia con el cuadrado de  $r$  e incrementa desde el centro hacia los bordes. La diferencia de presion entre el centro y el borde del contenedor es:

$$\Delta P = \frac{\rho\omega^2}{2}R^2$$

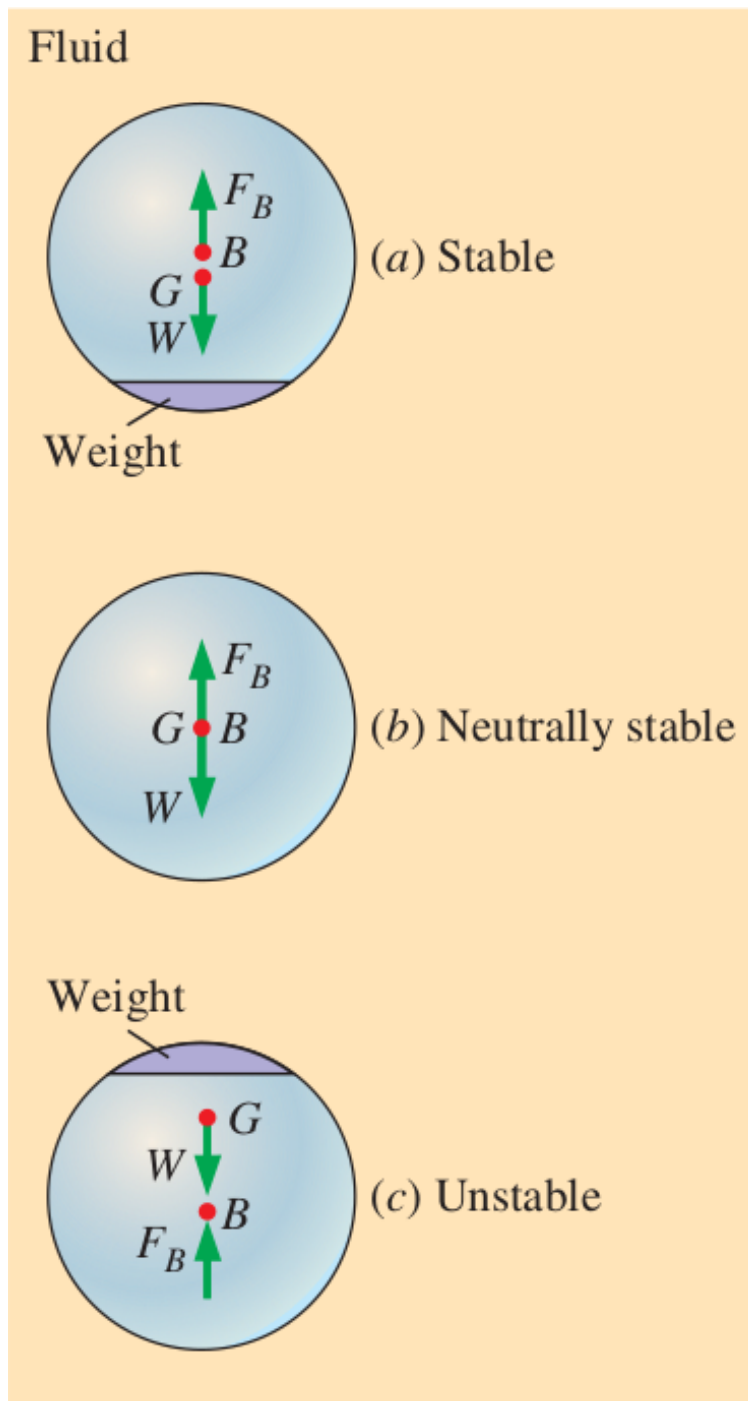


Figure 18: Estabilidad de un cuerpo sumergido.

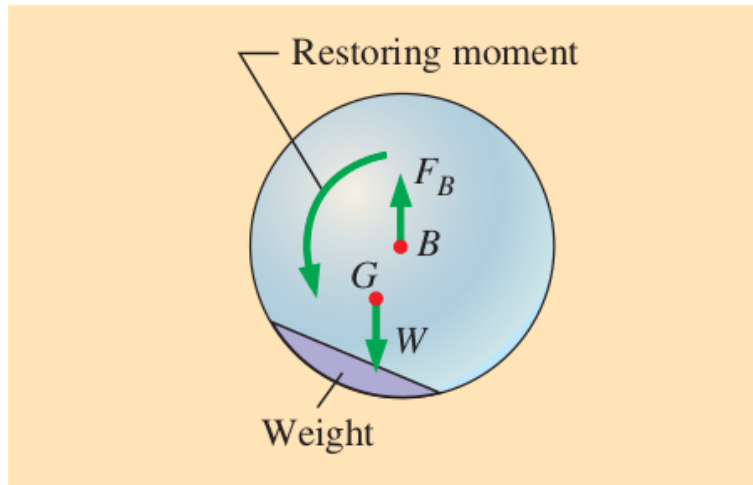


Figure 19: Cuerpo sumergido en desequilibrio en donde  $G$  no esta alineado verticalmente con  $B$ .

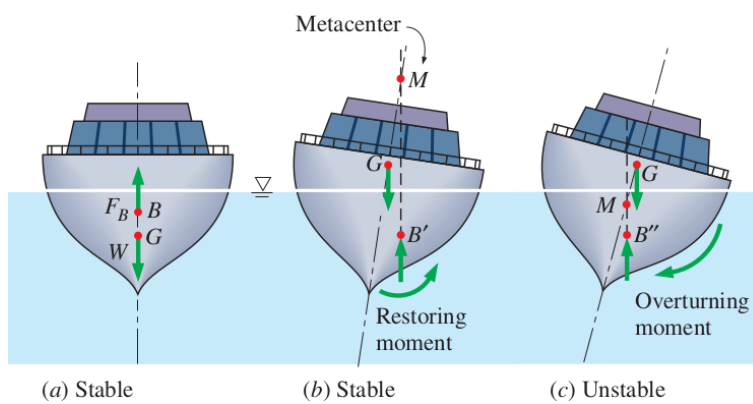


Figure 20: Estabilidad de un cuerpo flotante.

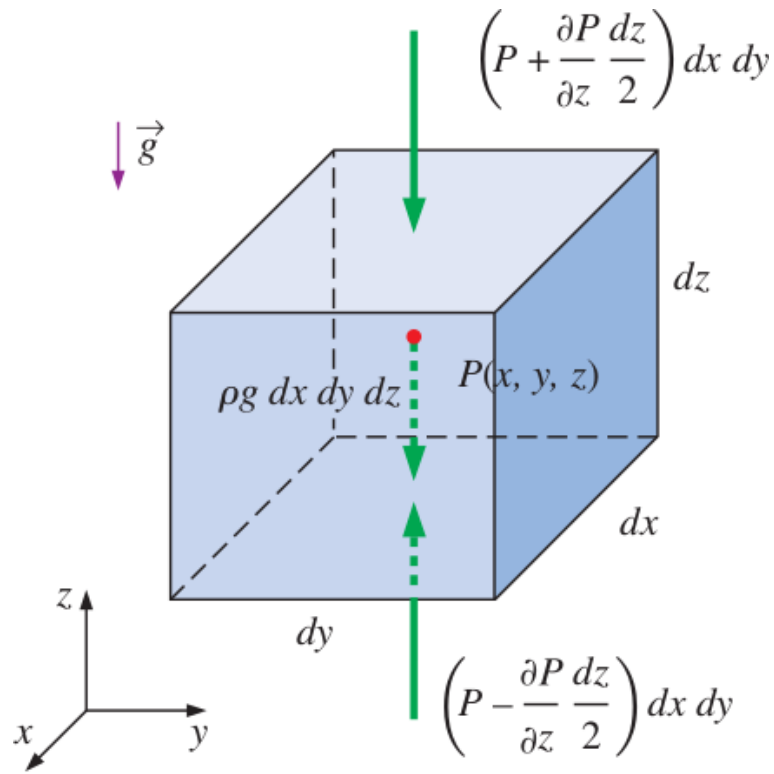


Figure 21: Fuerzas actuantes sobre un elemento diferencial de fluido en direcci3n vertical.

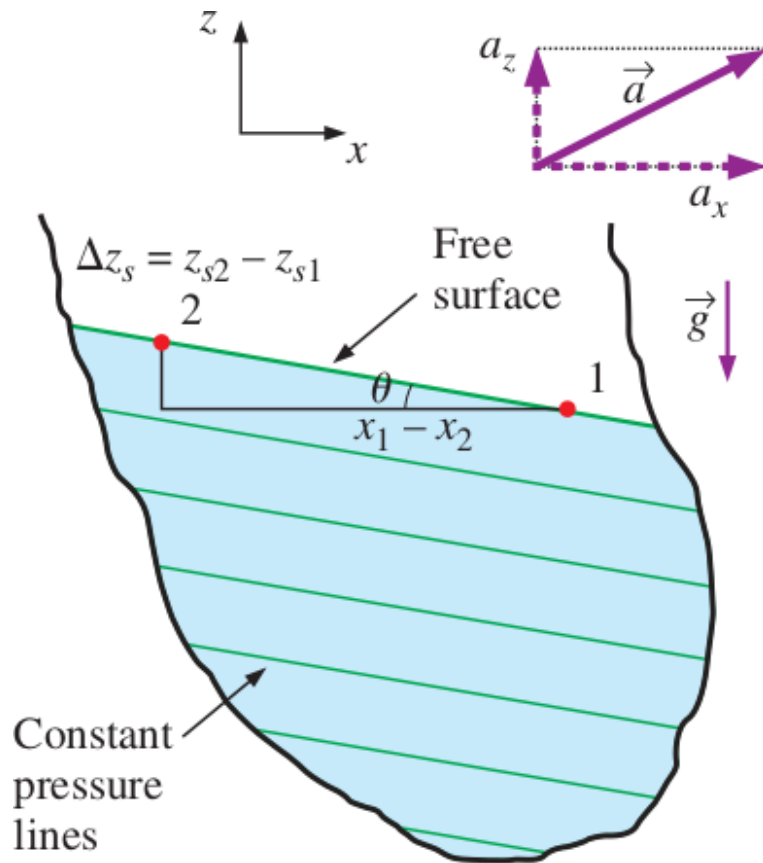


Figure 22: Elemento de fluido acelerado linealmente.

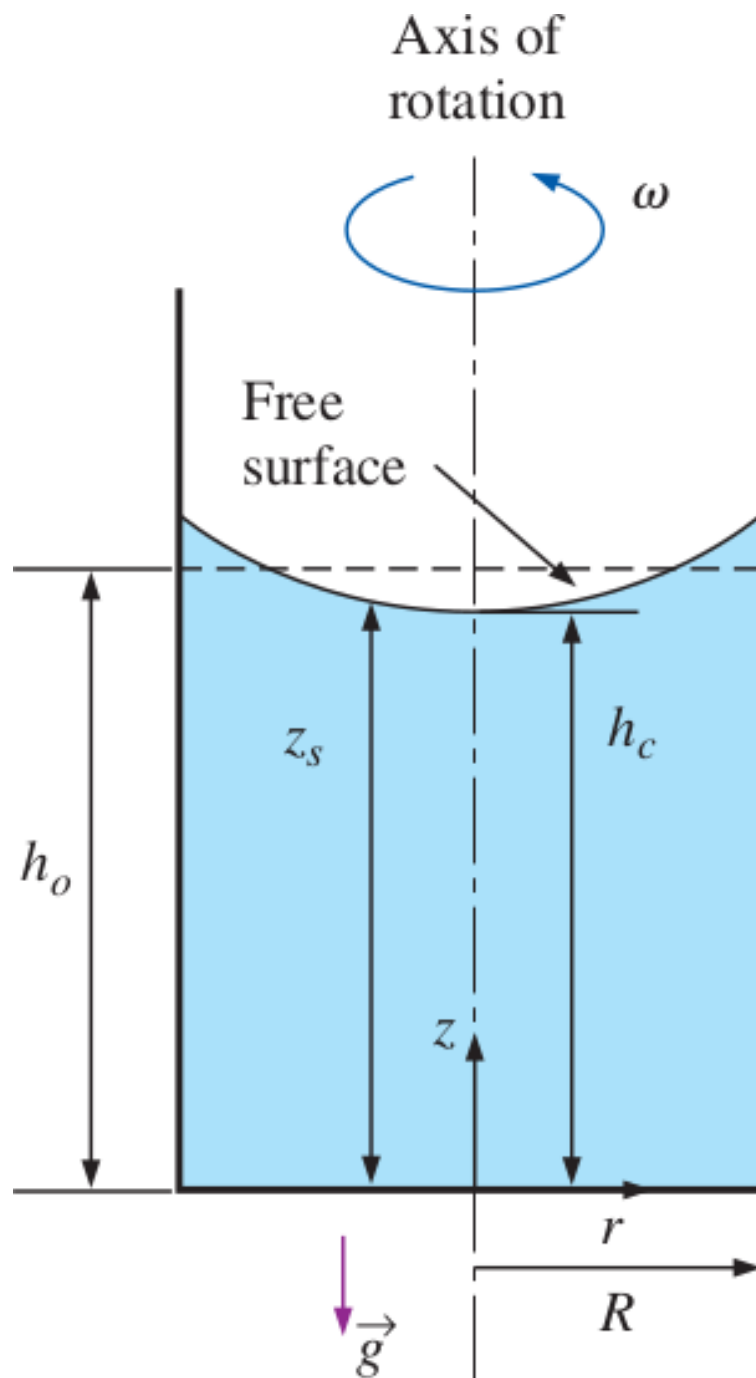


Figure 23: Rotacion de un fluido con respecto a su eje vertical.