

Clase # 3: Presion y estatica de los fluidos

Luis Alejandro Morales

Profesor Asistente

Universidad Nacional de Colombia-Bogotá

Facultad de Ingeniería

Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola

Periodo 2022-II

Contents

1	Presión	1
1.1	Presión en un punto	2
1.2	Variación de la presión con la profundidad	3
2	Medidores de presión	6
2.1	Barometro	6
2.2	El manometro	7
2.3	Otros medidores de presion	9
3	Estatica de fluidos	9
3.1	Fuerza hidroestática sobre superficies planas sumergidas	9
3.2	Fuerza hidroestática sobre superficies curvas sumergidas	12
3.3	Fuerzas hidroestaticas en diferentes fluidos	13
4	Flotación y estabilidad	13
4.1	Estabilidad de cuerpos sumergidos y flotantes	14

1 Presión

En mecanica de fluidos, la **presión** es definida como la fuerza normal ejercida por un fluido por unidad de area. En otras areas, la presion ejercida sobre un solido se conoce como el **esfuerzo normal**. En SI, las unidades de la presión son el **pascal**(Pa) donde $1 Pa = 1 N/m^2$. Otras unidades de presion usadas comunmente son:

$$\begin{aligned}1 bar &= 10^5 Pa = 0.1 MPa = 100 kPa \\1 atm &= 101325 Pa = 101.325 kPa = 1.01325 bars \\1 kgf/cm^2 &= 9.807 N/cm^2 = 9.807E4 N/m^2 = 9.807E4 Pa \\&= 0.9807 bar \\&= 0.9679 atm\end{aligned}$$

En sistema ingles, las unidade de la presión son libra fuerza por puldaga cuadrada (lbf/in^2 o psi). Algunas equivalencias entre los dos sistemas son:

$$\begin{aligned}1 atm &= 14.696 psi \\1 kgf/cm^2 &= 14.223 psi\end{aligned}$$

Algunas definiciones son:

- **presion absoluta** P_{abs} : Es la presion actual sobre un cuerpo y es medida con respecto al vacio absoluto (presion cero). La mayoría de los medidores de presion son calibrados para medir la presion tomando como cero la presión atmosférica local.
- **presion de manometro** P_{gage} : Es la diferencia entre la presion absoluta y la presion atmosférica local.
- **presion de vacio** P_{vac} : Se presenta cuando una presion esta por debajo de la presion atmosférica ($P_{gage} < 0$).

La relacion entre estas presiones es (ver figura 1):

$$P_{gage} = P_{abs} - P_{atm} \quad (1)$$

$$P_{vac} = P_{atm} - P_{abs} \quad (2)$$

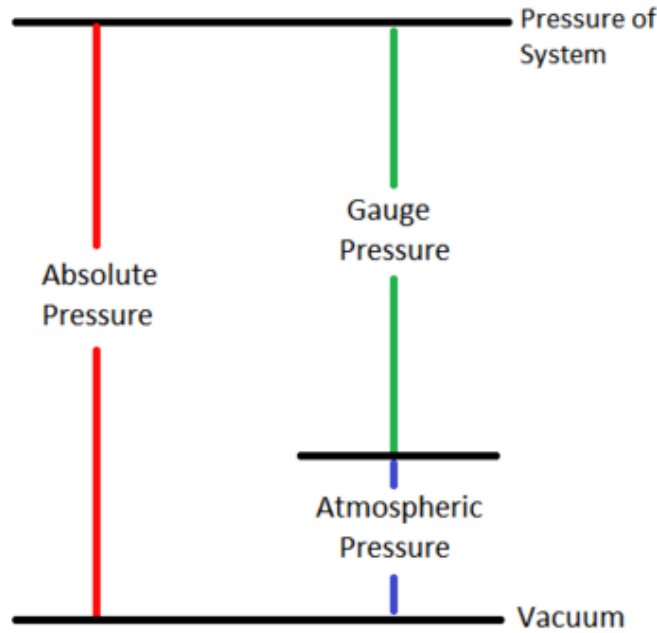


Figure 1: Presión atmosférica, de manometro y de vacio

Es comun encontrar por ejemplo que la presion de manometro tipica de una llanta de un carro es 32.0 psi , la cual es tomada con respecto a la presion atmosférica. Si la presion atmosférica en el sitio en donde se encuentra el carro es de 14.3 psi , la presion absoluta seria $32.0 + 14.3 = 46.3 \text{ psi}$. Note que en algunos problemas las unidades $psig$ hacen referencia a presion de manometro mientras que las unidades $psia$ hacen referencia a presion absoluta.

1.1 Presión en un punto

Por definicion, la presion en un punto en un fluido es la misma en todas las direcciones, por lo tanto la presion no puede considerarse como una cantidad vectorial y es entonces una cantidad scalar. Esto se puede demostrar si se hace un analisis de fuerzas sobre el elemento en equilibrio de la figura 2 en donde la profundidad del elemento es $\Delta y = 1$. Aplicando la segunda ley de Newton y haciendo un analisis de fuerzas sobre las superficies del elemento:

$$\begin{aligned} \sum F_x = ma_x = 0 : \quad & P_1 \Delta y \Delta z - P_3 \Delta y l \sin \theta = 0 \\ \sum F_z = ma_z = 0 : \quad & P_2 \Delta y \Delta x - P_3 \Delta y l \cos \theta - \frac{1}{2} \rho g \Delta x \Delta y \Delta z = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

donde ρ es la densidad y $W = mg = \frac{1}{2} \rho g \Delta x \Delta y \Delta z$ es el peso del elemento. Teniendo en cuenta que $\Delta x = l \cos \theta$ y $\Delta z = l \sin \theta$, reemplazando en la ecuacion 3 y simplificando:

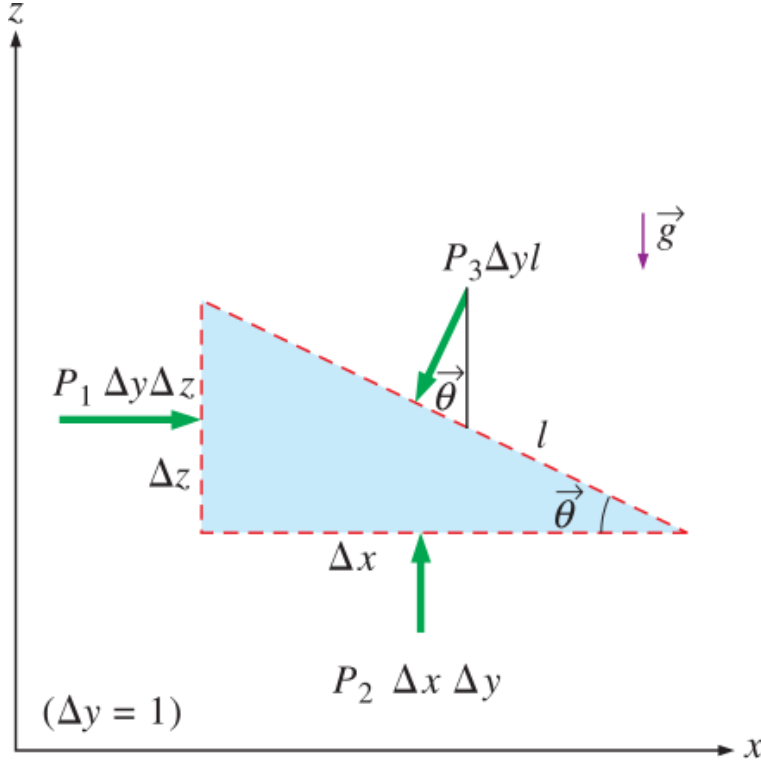


Figure 2: Fuerzas actuantes sobre un elemento de fluido en equilibrio.

$$\begin{aligned} P_1 - P_3 &= 0 \\ P_2 - P_3 - \frac{1}{2}\rho g \Delta z &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

El ultimo termino de la ecuación 4 se elimina teniendo en cuenta que cuando el elemento se vuelve infinitesimal y se reduce a un punto $\Delta z \rightarrow 0$. Por tanto:

$$P_1 = P_2 = P_3 = P \quad (5)$$

Con esto concluimos que la presión P en un punto en un fluido tiene la misma magnitud en todas las direcciones. Esto se aplica para un fluido en movimiento o en reposo teniendo en cuenta que la presión es un escalar.

1.2 Variación de la presión con la profundidad

Es conocido que la presión de un fluido en reposo no cambia en dirección horizontal y su cambio es en dirección vertical. Por esto, la presión en un fluido incrementa con la profundidad ya que este incremento implica mayor cantidad de fluido y por tanto mayor peso lo cual es balanceado con un incremento de la presión.

Para obtener una relación de la variación de la presión con la profundidad, analicemos las fuerzas actuantes sobre el elemento en equilibrio de la figura 3 cuya profundidad es $\Delta y = 1$.

Asumiendo que la densidad ρ del fluido es constante, el balance de fuerzas en la dirección z es:

$$\sum F_z = ma_z = 0 : \quad P_1 \Delta x \Delta y - P_2 \Delta x \Delta y - \rho g \Delta x \Delta y \Delta z = 0$$

donde $W = mg = \frac{1}{2}\rho g \Delta x \Delta y \Delta z$ es el peso del elemento y $\Delta z = z_2 - z_1$. Dividiendo por $\Delta x \Delta y$, tenemos:

$$\Delta P = P_2 - P_1 = -\rho g \Delta z = -\gamma_s \Delta z \quad (6)$$

donde $\gamma_s = \rho g$ es el peso específico del fluido. Otra manera de expresar la ecuación 6 anterior es:

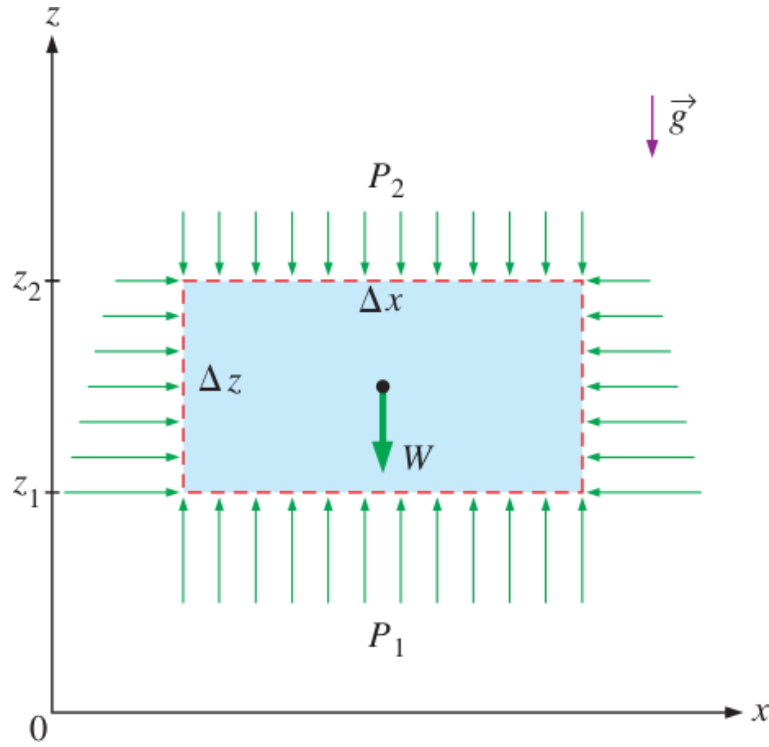


Figure 3: Diagrama de cuerpo libre de un elemento rectangular de fluido en equilibrio.

$$\Delta P_{below} = P_{above} + \gamma_s |\Delta z| \quad (7)$$

donde "below" indica el punto mas bajo mientras que "above" indica el punto mas alto. Debido a que la densidad de los gases ≈ 0 , por ejemplo, la presion en una habitacion es uniforme ya que el peso del gas es muy bajo por lo que la ecuacion 6 se convierte en $\Delta P = 0$. Si tomamos el punto "above" sobre la superficie de el liquido a superficie abierta, cuya presion es la atmosferica P_{atm} , la presion a una profundidad h (medida desde la superficie), la presion es:

$$P = P_{atm} + \rho gh \quad \text{or } P_{gage} = \rho gh \quad (8)$$

Como los fluidos son esencialmente inconpresibles, la variación de ρ es despreciable con respecto a la profundidad. Cuando se requiere una alta precision en el calculo de P debido a cambios fuertes de temperature en fluidos, es necesario saber como ρ cambia con la temperatura. Ademas, cuando se requiere calcular P a grandes profundidades en el oceano, es importante determinar como cambia a la densidad con la profundidad.

Para fluidos cuya densidad cambia significativamente con la elevacion, una relacion de la variacion de la presion con respecto a la elevacion es obtenida dividiendo la ecuacion 6 por $\Delta z \rightarrow 0$, es:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad (9)$$

Noten que dP es negativa cuando dz es positiva teniendo en cuenta que la presion decaiga hacia arriba. Si ρ es conocida con la elevacion, la diferencia de presion entre dos puntos 1 y 2 (ver figura 3 se determina como:

$$\Delta P = P_2 - P_1 = - \int_1^2 \rho g dz \quad (10)$$

Como lo habiamos mencionado anteriormente, en un fluido en reposo la presion sobre cualquier tipo de superficie cambia unicamente con la profundidad. En la figura 4 vemos que la presion en los puntos A, B, C, D, E, F y G sobre superficies de diferentes formas es la misma, ya que estan conectados por el mismo liquido y estan a la misma profundidad h . Es ademas importante recordar que la presion es siempre normal a la superficie. Por otro lado la presion sobre los puntos H e I no es la misma porque estan a diferente profundidad y ademas no estan conectados por el mismo fluido.

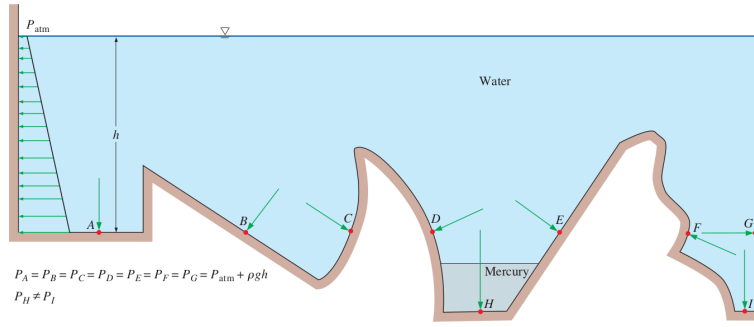


Figure 4: Presion sobre puntos sobre superficies de diferentes formas y a diferentes profundidades.

Como consecuencia de que la presión es constante en dirección horizontal, tenemos que *la presión aplicada sobre un fluido confinado en un contenedor, es transmitida igualmente a todas las partes del contenedor y actúa perpendicular a las paredes del mismo*. Esto es conocido como la **Ley de Pascal**. Dicho de otra manera *un cambio en la presión en cualquier punto de un fluido en reposo es transmitido igualmente a todos los puntos del fluido*. La ley de pascal tiene muchas aplicaciones como por ejemplo el sistema de frenos en vehículos, los elevadores hidraulicos para levantar cargas pesadas, entre otros. Si analizamos la figura 5, tenemos que $P_1 = P_2$ ya que están a un mismo nivel, esto con lleva a la siguiente relacion de fuerzas:

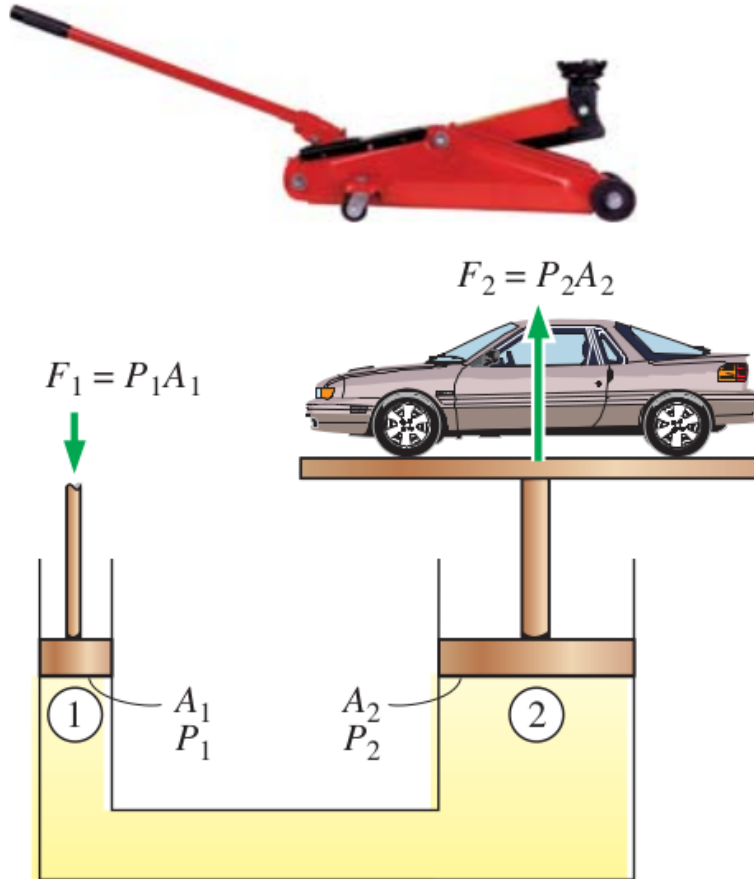


Figure 5: Ley de Pascal en un elevador hidraulico.

$$P_1 = P_2 \quad \rightarrow \quad \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad \rightarrow \quad \frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1} \quad (11)$$

donde la relacion A_2/A_1 es conocida como la *ventaja mecanica* de un elevador hidraulico.

2 Medidores de presión

2.1 Barometro

La presión atmosférica es medida por un aparato llamado **barometro** por lo que la presión atmosférica es usualmente conocida como la presión barométrica. El barometro fue inventado por Evangelista Torricelli (1608-1647) y consiste en invertir un tubo de ensayo lleno de mercurio dentro de un recipiente con mercurio abierto a la atmósfera (ver figura 6). La presión en el punto B es igual a la presión atmosférica, mientras la presión en el punto C puede considerarse igual a cero. Escribiendo el balance de fuerzas sobre la columna de mercurio:

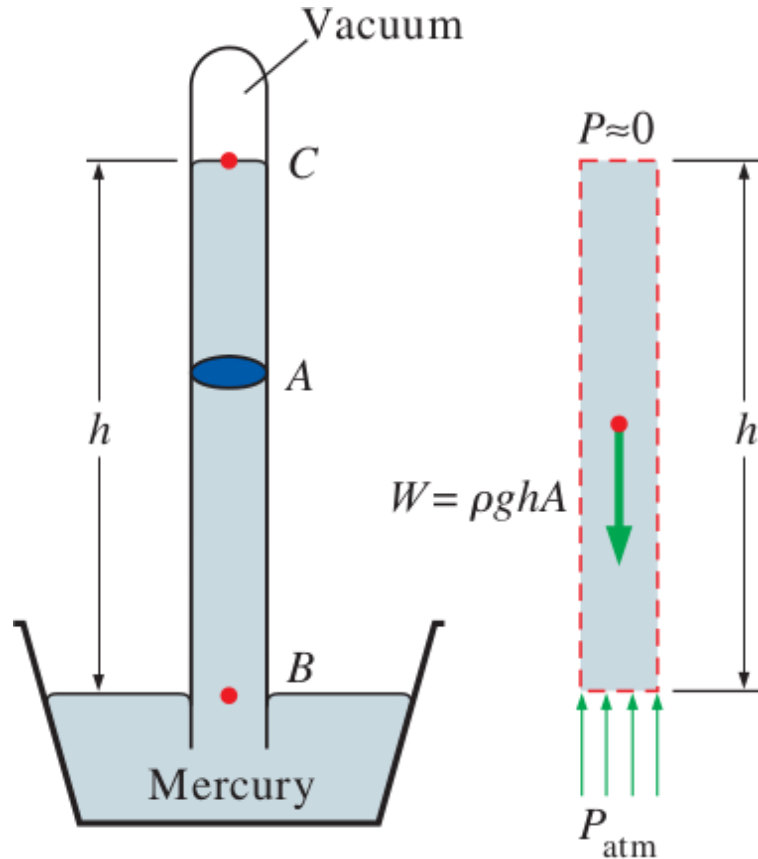


Figure 6: El barometro

$$P = \rho gh \quad (12)$$

donde ρ es la densidad del mercurio. Note que la altura h de la columna es siempre la misma independiente del diámetro del tubo.

Algunas definiciones:

- **atmósfera estándar:** Presión producida por una columna de mercurio de 760 mm de $\rho_{Hg} = 13595 \text{ kg/m}^3$ a 0°C bajo estándar $g = 9.807 \text{ m/s}^2$. El equivalente en columna de agua sería de 10.3 m.
- **Torr:** En honor a Torricelli, la unidad mmHg es conocida como *torr*. Por esto, $1 \text{ atm} = 760 \text{ torr}$ y $1 \text{ torr} = 133.3 \text{ Pa}$.

Algunas ideas importantes:

- La P_{atm} disminuye con la altura. Por eso mientras que $P_{atm} = 101.325 \text{ kPa}$, la presión a altitudes como 1000, 2000, 5000 y 10000 y 20000 metros es 89.88, 79.50, 54.05, 26.5 and 5.53 kPa, respectivamente.
- Si P_{atm} depende del peso del aire arriba de una posición determinada, esta no solo cambia con la altitud, también con las condiciones climáticas.

- Como la temperatura y la presión disminuyen con la altura, cocinar hervir agua en sitios en altas altitudes toma mayor tiempo.
- Es común el sangrado nasal en altas altitudes porque la diferencia entre la presión sanguínea y la presión atmosférica se hace mayor por lo que los vasos sanguíneos de la nariz son incapaces de soportar este esfuerzo adicional y terminan rompiéndose.
- Como en altas altitudes la densidad del aire es más baja, la cantidad de oxígeno por unidad de volumen es menor, por eso nos cansamos más rápidamente en estos lugares y experimentamos dificultad al respirar.

2.2 El manómetro

De acuerdo con la ecuación 6, el cambio de elevación $-\Delta z$ en un fluido en reposo es igual a $\Delta P/\rho g$, lo cual sugiere que la columna de un fluido puede ser usada para calcular las diferencias de presión. El **manómetro** es un aparato que está basado en este principio y por lo tanto es usado para medir diferencias de presión. Un manómetro es un tubo de plástico o vidrio en forma de U el cual contiene usualmente agua, mercurio, alcohol o aceite (ver figura 7). Cuando las diferencias de presión son muy altas, se prefiere un fluido pesado como el mercurio.



Figure 7: Manómetro en forma de U

Consideremos el manómetro conectado al tanque con gas de la figura 8. Teniendo en cuenta que los efectos gravitacionales sobre los gases son despreciables, la presión en cualquier punto del tanque es la misma incluyendo la presión en 1 P_1 . Se sabe además que la presión no varía en dirección horizontal en un fluido, por lo tanto, $P_2 = P_1$. Como la altura h de fluido está en equilibrio estático y está abierta a la atmósfera:

$$P_2 = P_{atm} + \rho gh \quad (13)$$

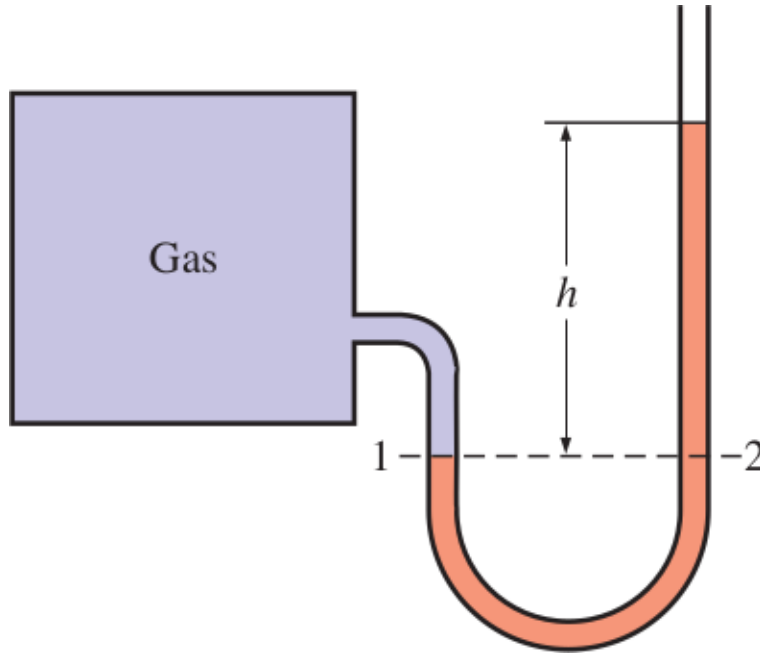


Figure 8: Manometro básico.

donde ρ es la densidad del fluido del manometro. A pesar que el area transversal del manometro no cambia h , el diámetro del tubo debe ser lo suficientemente grande para reducir el efecto capilar.

Algunos problemas en ingeniería involucran manómetros con múltiples fluidos de diferentes densidades ubicados uno sobre otro. Recuerde que para resolver cualquier problema de manómetros:

1. El cambio de presión en una columna de fluido h es: $\Delta P = \rho gh$.
2. La presión en un fluido incrementa hacia abajo y disminuye hacia arriba ($P_{down} > P_{top}$).
3. Dos puntos conectados por un fluido continuo en reposo sobre el mismo plano horizontal tienen la misma presión.

Cuando existen diferentes tipos de fluidos conectados continuamente y en reposo se puede calcular la presión en un punto determinado partiendo del punto cuya presión es conocida e ir adicionando o sustrayendo el término ρgh en la dirección al punto de presión desconocida. Por ejemplo si tenemos los fluidos de la figura 9 y queremos calcular la presión en el punto 1, empezamos desde la presión conocida P_{atm} y vamos avanzando hasta el punto 1, lo cual da:

$$P_{atm} + \rho_1 gh_1 + \rho_2 gh_2 + \rho_3 gh_3 = P_1$$

En el caso en que los tres fluidos tuvieran la misma densidad, la ecuación anterior quedaría: $P_{atm} + \rho g(h_1 + h_2 + h_3) = P_1$

Los manómetros son utilizados para medir los cambios de presión (generalmente debido a válvulas o accesorios) entre dos secciones de una tubería con flujo a presión. Dicho manómetro se conecta entre dos secciones de una tubería (ver figura 10 que transporta líquido o gas cuya densidad es ρ_1). La densidad del líquido en el manómetro ρ_2 debe ser mayor que ρ_1 y ambos fluidos deben ser inmiscibles. La diferencia de presión $P_1 - P_2$ puede ser calculada iniciando en el punto 1 y moviéndose a lo largo del manómetro adicionando o restando ρgh hasta alcanzar el punto 2, lo cual quedaría:

$$P_1 + \rho_1 g(a + h) - \rho_2 gh - \rho_1 ga = P_2$$

Note que los puntos a una distancia a tienen una misma presión por estar al mismo nivel en el manómetro, simplificando:

$$P_1 - P_2 = (\rho_1 - \rho_2)gh$$

Si el fluido que fluye a lo largo de la tubería es gas, $\rho_1 \ll \rho_2$ por lo que la ecuación anterior se convierte en $P_1 - P_2 \cong \rho_2 gh$.

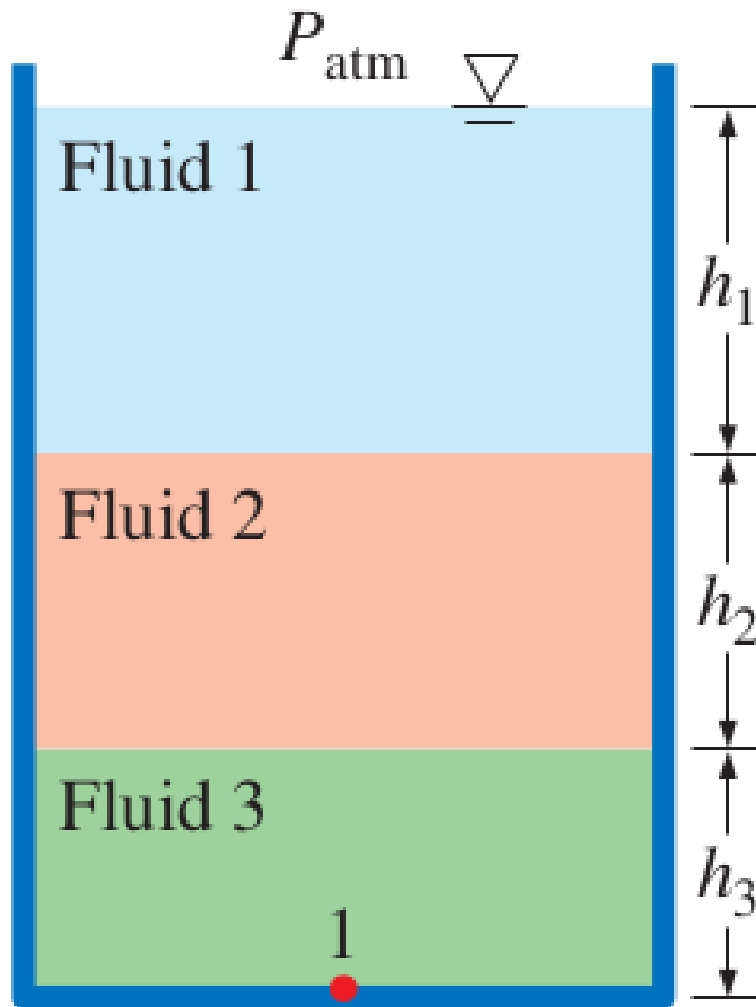


Figure 9: Tres tipos de fluido en reposo de diferente ρ ubicados unos sobre el otro.

2.3 Otros medidores de presión

- Tubo de Bourdon
- Transductor de presión

3 Estática de fluidos

La **estática de fluidos** trabaja con fluidos en **reposo** y es conocida como **hidroestática** cuando el fluido es un líquido y **aeroestática** cuando el fluido es un gas. En un fluido en reposo no se deforma porque no existen esfuerzos cortantes tangenciales entre capas. El only esfuerzo actuante sobre un fluido en reposo es el **esfuerzo normal** o la presión la cual varía con el peso del fluido que a su vez es función de la gravedad. La estática de fluidos es importante para el diseño de objetos y estructuras flotantes o submergidas como presas, submarinos y tanques de almacenamiento de agua.

3.1 Fuerza hidroestática sobre superficies planas sumergidas

Una placa sumergida (e.g. compuerta de una presa, pared de un tanque) está sujeta a una presión ejercida por el fluido sobre su superficie. En una superficie plana, las fuerzas hidroestáticas actúan paralelas y es importante determinar su magnitud y su punto de aplicación (**centro de presión**) sobre la superficie. En algunos casos, la superficie está parcialmente suemergica y mientras que un lado está en contacto con un fluido, en el otro está en

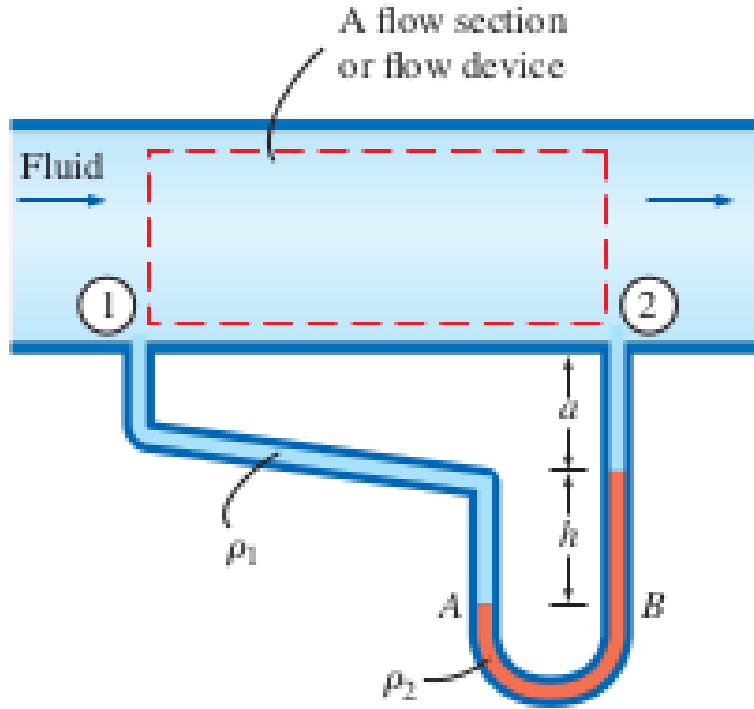


Figure 10: Medicion de la diferencia de presion en un tuberia con un manometro.

contacto con al atmosfera por lo tanto la P_{atm} se anula y la presion resultante es la presion hidroestatica $P_{gage} = \rho gh$ como se muestra en la figura 11.

Un caso mas general es el ilustrado en la figura 12 en donde tenemos una placa irregular sumergida e inclinada un angulo θ con respecto a la horizontal. La presion absoluta ejercida sobre cualquier punto sobre la placa es:

$$P = P_0 + \rho gh = P_0 + \rho gy \sin \theta$$

en donde P_0 es la presion arriba de el fluido ($= P_{atm}$ si el fluido esta abierto a la atmosfera), y es la distancia a lo largo del mismo eje desde el origen O y h es la distancia vertical desde la superficie del agua hasta la placa en donde $h = y \sin \theta$.

La fuerza hidroestatica resultante F_R que actua sobre la placa es:

$$F_R = \int_A P dA = \int_A (P_0 + \rho gy \sin \theta) dA = P_0 A + \rho g \sin \theta \int_A y dA$$

en donde dA es el diferencial de area sobre la la placa. Como el **primer momento de area** $\int_A y dA$ se relaciona con la coordenada y del **centroide** $y_C = \frac{1}{A} \int_A y dA$ de la placa, reemplazando en la ecuacion anterior:

$$F_R = (P_0 + \rho gy_C \sin \theta) A = (P_0 + \rho gh_C) A = P_C A = P_{avg} A \quad (14)$$

en donde P_C es la presion sobre el centroide de la placa la cual es equivalente a la presion promedio P_{avg} , y h_C es la distance vertical desde la superficie hasta el centroide.

Cuando $P_0 = P_{atm}$, esta puede ser ignorada en el calculo de F_R ya que actua en ambas caras de la placa. Cuando esto no es asi, la fuerza adicional ejercida debido a P_0 se calcula adicionando $h_{equiv} = P_0 / \rho g$ a h_C , lo cual asume la presencia de una capa adicional de liquido en la superficie.

La linea de accion de F_R no pasa por el centroide de la placa; esta pasa por el **centro de presion**. Para determinar la posicion del centro de presion, estimamos el momento de F_R con respecto al eje x :

$$y_p F_R = \int_A y P dA = \int_A y (P_0 + \rho gy \sin \theta) dA = P_0 \int_A y dA + \rho g \sin \theta \int_A y^2 dA$$

$$y_p F_R = P_0 y_C A + \rho g \sin \theta I_{xx,O} \quad (15)$$

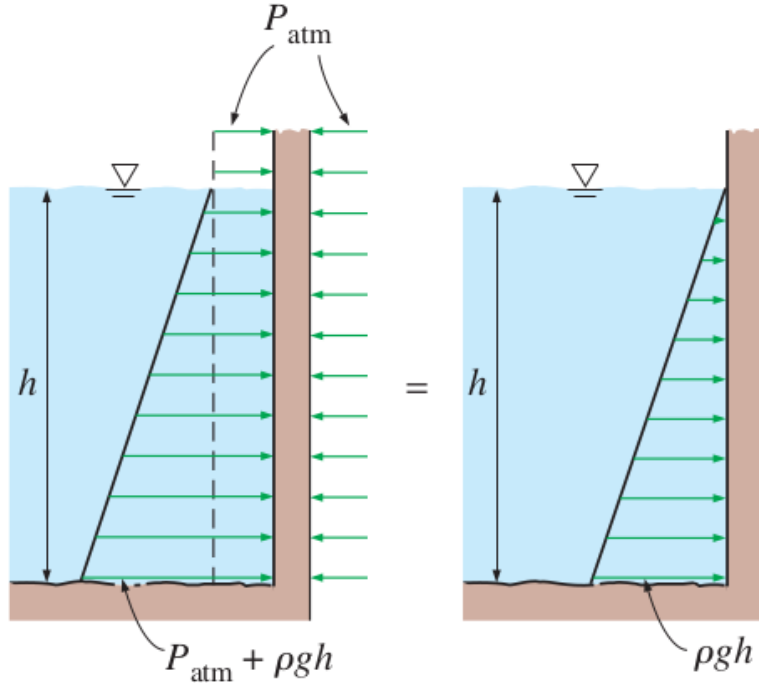


Figure 11: Fuerzas hidrostaticas sobre una superficie plana parcialmente sumergida.

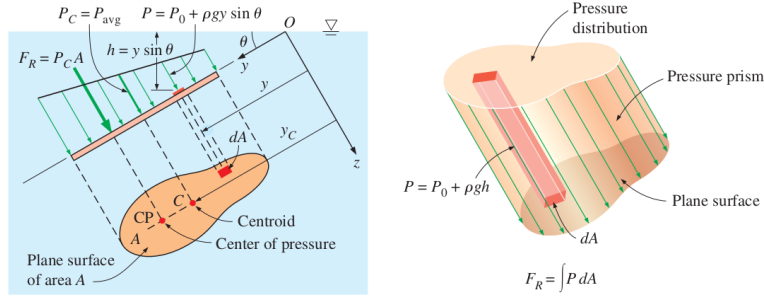


Figure 12: Fuerza hidrostatica sobre una placa inclinada y sumergida.

donde y_p es la distancia al centro de presión desde el eje x , y $I_{xx,O} = \int_A y^2 dA$ es el **segundo momento de area o de inercia** con respecto al eje x . Por el teorema de **ejes paralelos** el $I_{xx,O}$ puede ser calculado con respecto al eje x que pasa por el centroide como:

$$I_{xx,O} = I_{xx,C} + y_C^2 A \quad (16)$$

donde $I_{xx,C}$ es el segundo momento de area con respecto al eje x que pasa por el centroide y y_C es la distancia entre los dos ejes paralelos. Reemplazando las ecuaciones 14 y 16 en la ecuación 15:

$$y_p(P_0 + \rho g y_C \sin \theta) A = P_0 y_C A + \rho g \sin \theta (I_{xx,C} + y_C^2 A)$$

despejando para y_p :

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{P_0 y_C A + \rho g \sin \theta (I_{xx,C} + y_C^2 A)}{(P_0 + \rho g y_C \sin \theta) A} \\ &= \frac{P_0 y_C A + \rho g \sin \theta I_{xx,C} + \rho g \sin \theta y_C^2 A}{(P_0 + \rho g y_C \sin \theta) A} \\ &= \frac{y_C A (P_0 + \rho g \sin \theta y_C) + \rho g \sin \theta I_{xx,C}}{(P_0 + \rho g y_C \sin \theta) A} \\ &= y_C + \frac{\rho g \sin \theta I_{xx,C}}{(P_0 + \rho g y_C \sin \theta) A} \end{aligned}$$

$$y_p = y_C + \frac{I_{xx,C}}{\left[y_C + \frac{P_0}{\rho g \sin \theta} \right] A} \quad (17)$$

Cuando $P_0 = P_{atm}$ y es ignorada, y_p es:

$$y_p = y_C + \frac{I_{xx,C}}{y_C A} \quad (18)$$

Por lo tanto la distancia vertical desde la superficie hasta el centro de presión es: $h_p = y_p \sin \theta$.

Valores de $I_{xx,C}$ para diferentes áreas comunes son mostrados en la figura 13. Para áreas simétricas con respecto al eje y , el centro de presión está debajo del centroide y sobre el eje y .

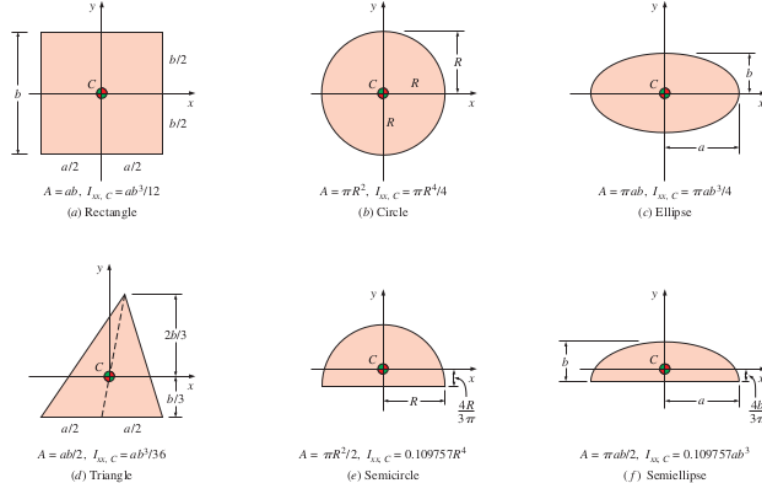


Figure 13: El centroide y el momento de inercia con respecto al centroide para figuras geométricas comunes.

3.2 Fuerza hidroestática sobre superficies curvas sumergidas

En superficies curvas sumergidas, la fuerza hidroestática cambia de dirección dependiendo de la posición sobre la superficie. Para facilitar el cálculo, es necesario estimar las componentes horizontal F_H y vertical F_V de F_R . Si consideramos la superficie curva de la figura 14, el cálculo de F_H y F_V se hace calculando las fuerzas actuantes sobre la proyección horizontal y vertical de la superficie curva. Tenemos entonces que:

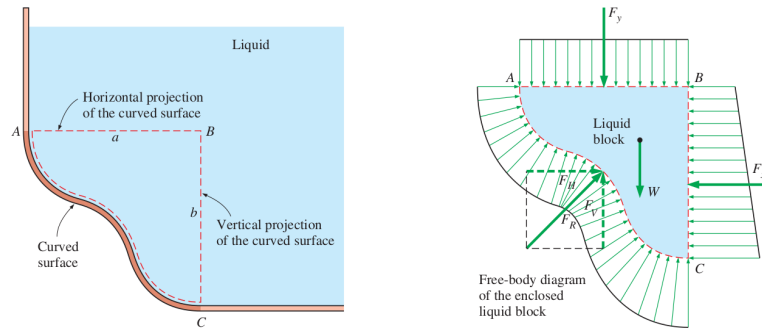


Figure 14: Determinación de la fuerza hidroestática actuante sobre una superficie curva sumergida.

$$F_H = F_x$$

$$F_V = F_y \pm W$$

donde F_x se calcula como la resultante de la fuerza hidroestática sobre una superficie plana vertical (ver sección 3.1), F_y es la fuerza en y ejercida sobre el fluido (e.g. fluido superior y aire) y $W = \rho g V$ es el peso del volumen (V) de

fluido. Note que F_y y W se suman si actúan en la misma dirección y se restan si van en direcciones opuestas. De lo anterior:

$$F_R = \sqrt{F_H^2 + F_V^2}$$

y el ángulo que hace F_R con la horizontal es $\alpha = \arctan \frac{F_V}{F_H}$.

3.3 Fuerzas hidroestáticas en diferentes fluidos

Las ecuaciones vistas en las secciones 3.1 y 3.2 son válidas para fluidos de densidad uniforme. Si el fluido está conformado por capas de fluidos de diferentes densidades (ver figura 15) la distribución lineal de presiones cambia en cada capa. Sin embargo las ecuaciones vistas anteriormente pueden ser aplicadas a cada capa i y las $F_{R,i}$ pueden ser adicionadas para calcular la F_R :

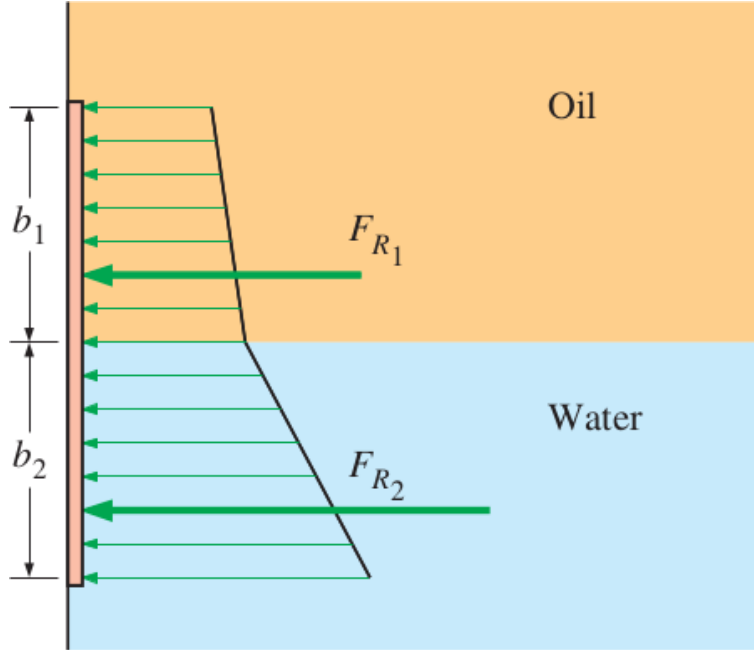


Figure 15: Fuerzas hidroestáticas sobre placa sumergida en dos fluidos.

$$F_R = \sum F_{R,i} = \sum P_{C,i} A_i$$

donde $P_{C,i} = P_0 + \rho_i h h_{C,i}$ es la presión en el centroide de la porción de la superficie en el fluido i , y A_i es el área de la superficie en ese fluido. El centro de presión de F_R puede ser encontrado calculando la suma de los momentos de cada fuerza $F_{R,i}$ con respecto a un punto determinado (e.g. la superficie de agua.).

4 Flotación y estabilidad

Es común sentir como un cuerpo determinado pesa menos cuando está en un fluido; dicha sensación se explica debido a que el fluido ejerce una fuerza vertical hacia arriba que tiende a levantar el objeto la cual es denominada **fuerza de flotación**, F_B . La fuerza de flotación es causada por el incremento de presión con la profundidad dentro del fluido. Para su análisis, consideremos la placa de la figura 16 de espesor h y área A sumergida en un líquido de densidad ρ_f y que es paralela a la superficie libre. El balance de fuerzas sobre la placa, con base en presiones manométricas es:

$$F_B = F_{bottom} - F_{top} = \rho_f g(s + h)A - \rho_f g s A = \rho_f g h A = \rho_f g V \quad (19)$$

donde $V = hA$ es el volumen de la placa. Teniendo en cuenta que $\rho_f g V$ es el peso del líquido cuyo volumen es igual al volumen de la placa, tenemos que *la fuerza de flotación actuante sobre una placa es igual al peso del líquido desplazado por la placa*. Note que si el fluido es de densidad constante, la fuerza de flotación es independiente de la

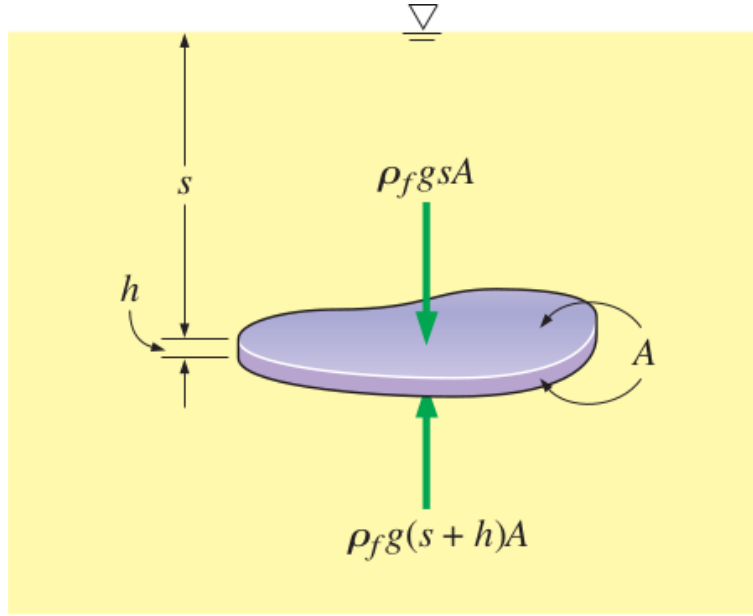


Figure 16: Fuerzas actuantes sobre una placa sumergida paralela a la superficie.

profundidad h y de la densidad de la placa. En terminos generales y para cualquier objeto se afirma que *la fuerza de flotación actuante sobre un cuerpo de densidad uniforme inmerso en un fluido es igual al peso del fluido desplazado por el cuerpo, y que actúa vertical a través del centroide del volumen desplazado*, esto es conocido como el **principio de Arquimides** gracias al matematico Griego Arquimides.

Para objetos flotantes, el peso del cuerpo debe ser igual a la fuerza de flotacion, la cual es el peso del fluido cuyo volumen es igual a el volumen de la porción sumergida del cuerpo flotante. Esto es:

$$F_B = W \rightarrow \rho_f g V_{sub} = \rho_{avg,body} g V_{total} \rightarrow \frac{V_{sub}}{V_{total}} = \frac{\rho_{avg,body}}{\rho_f} \quad (20)$$

De la ecuación 20 tenemos que la fraccion de volumen del objeto flotante es igual a la relación entre la densidad promedio del cuerpo y la densidad del fluido. Analizando la ecuacion 20 (ver figura 17), un objeto inmerso en un fluido: 1) permanece en reposo dentro del fluido cuando $\rho = \rho_f$, 2) se hunde y cae hasta el fondo dentro de el fluido cuando $\rho > \rho_f$ y 3) flota cuando $\rho < \rho_f$.

Como es sabido, F_B es proporcional a ρ_f . En el caso de los gases, la densidad generalmente es mucho menor que la densidad de un liquido. Sin embargo, las fuerzas de flotacion son notorias en el ascenso de aire caliente en ambientes frios, la circulacion de aire en la atmosfera y el ascenso de globos y de bombas con helio.

4.1 Estabilidad de cuerpos sumergidos y flotantes

Una importante aplicacion del concepto de flotacion es el analisis de la estabilidad de un cuerpo flotante o sumergido, lo cual es fundamental en el disenõ de embarcaciones y submarinos. Existen tres casos que describen la estabilidad de un cuerpo: 1) Un cuerpo permanece **estable** si cualquier pequeña perturbacion genera un movimiento que es contrareestado por una fuerza que hace que el cuerpo retorne a su posicion inicial, 2) un cuerpo es **neutralmente estable** si despues de ser perturbado cambia su posicion inicial, y 3) un cuerpo es **inestable** si al ser perturbado este no retorna a su posicion inicial y continua en movimiento. Estos tres estados son aplicables a objetos flotantes o sumergidos. Por ejemplo, un cuerpo sumergido o flotante en equilibrio estatico cuyo peso es balanceado por la fuerza de flotacion permanece estable en la **direccion vertical**.

La **estabilidad de rotacion** de un cuerpo sumergido depende de la localizacion relativa de el **centro de gravedad** G de el cuerpo y el centro de flotacion B , el cual es el centroide del volumen desplazado. Un cuerpo sumergido permanece estable si su fondo es mas pesado lo que hace que G este por debajo de B . Esta es la razon por la cual en el disenõ de submarinos, los motores estan en la parte mas baja con el fin de localizar el mayor peso posible en las partes bajas del submarino. Lo mismo ocurre con los globos, el cual es un cuerpo inmerso en aire, cuyo mayor peso es la canasta que transporta a las personas esta en la parte baja mientras el aire caliente y liviano se hubica en la parte alta. Si G esta por encima de B , el cuerpo sumergido es inestable y cualquier perfturbacion

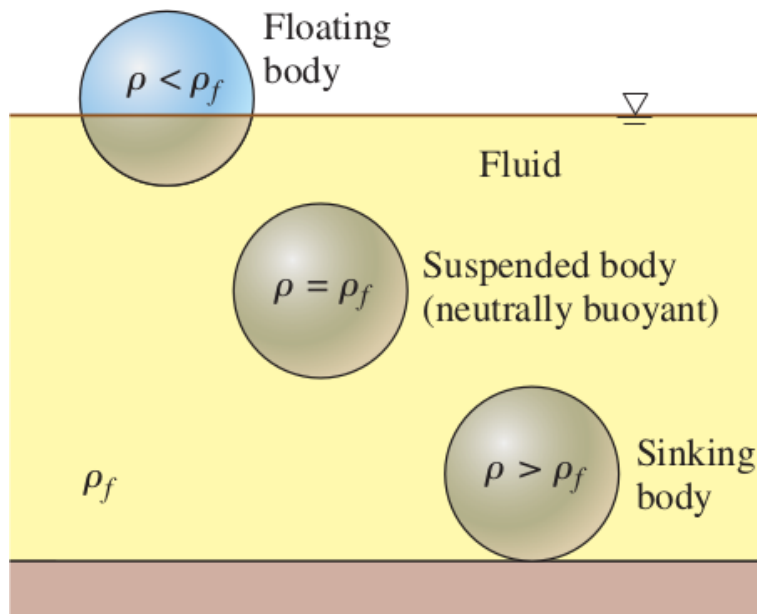


Figure 17: Diferentes estados de un cuerpo inmerso en un fluido dependiendo de su densidad (ρ) y de la del fluido (ρ_f).

hace que el cuerpo se voltee. En el caso en el que G y B coinciden, el cuerpo sumergido es neutramente estable, lo cual es el caso de cuerpos cuya densidad es uniforme (ver figura 18).

Si en un cuerpo G no esta verticalmente alineado con B no es apropiado hablar de estabilidad ya que el cuerpo no esta en un estado de equilibrio y tratara de rotar o moverse por si solo para alcanzarsu estado estable (ver figura 19). El momemento restaurador que actua en contra de las manecillas del reloj, tratara de rotar el cuerpo en la misma direccion con el fin de alinear G y B verticalmente.

La estabilidad de rotación es similar para cuerpos flotantes. Sin embargo, a diferencia de un cuerpo sumergido, un cuerpo flotante puede permanecer estable incluso cuando G esta arriba de B (ver figura 20). Esto se logra gracias a que B se desplaza hacia B' generando un momento restaurador entre las dos fuerzas para retornar el objeto a su posicion original.

Una medida de la estabilidad de un cuerpo flotante es la **altura metacentrica** GM , la cual es la distancia entre G y el *metacentro* M (punto de interseccion entre la linea de accion de las fuerza flotante antes y despues de la rotacion). Con base en la posicion de M , un cuerpo flotante es estable si M esta arriba de G por lo que GM es positiva y es inestable si M esta abajo de G por lo que GM es negativa. Si es inestable, el peso y la fuerza de flotacion actuando sobre el cuerpo inclinado genera un momento de volcamiento en lugar de un momento restaurador. Entre mas grande es GM , mas estable es el cuerpo flotante. Note que un bote puede inclinarse hasta cierto angulo maximo sin volcarse, sin embargo, si dicho angulo es excedido el bote se volteara y se hundira.

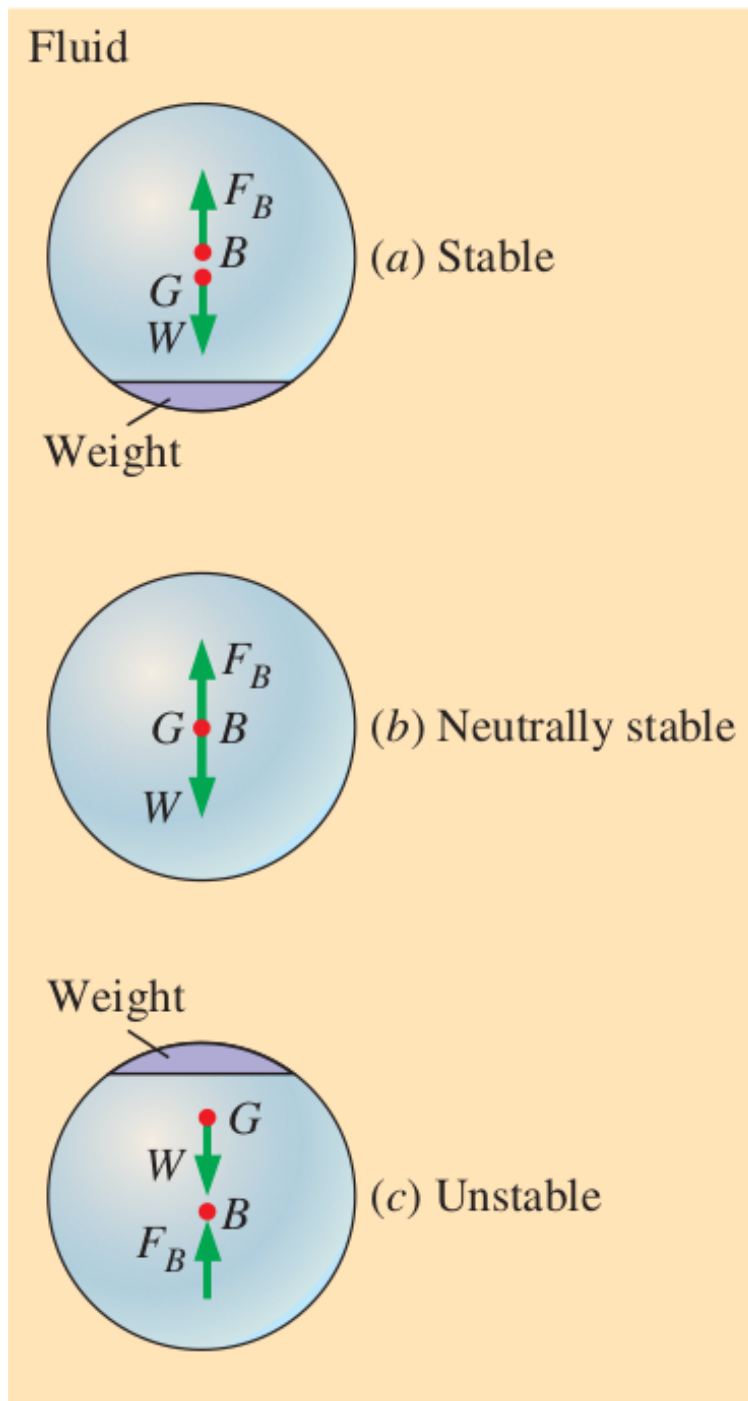


Figure 18: Estabilidad de un cuerpo sumergido.

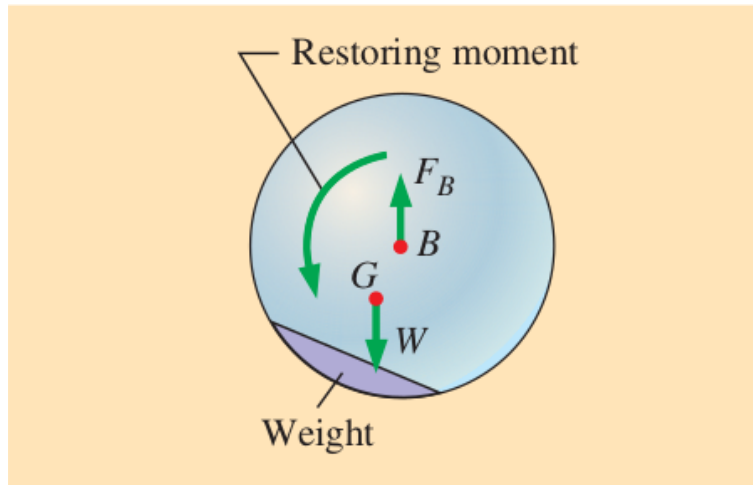


Figure 19: Cuerpo sumergido en desequilibrio en donde G no esta alineado verticalmente con B .

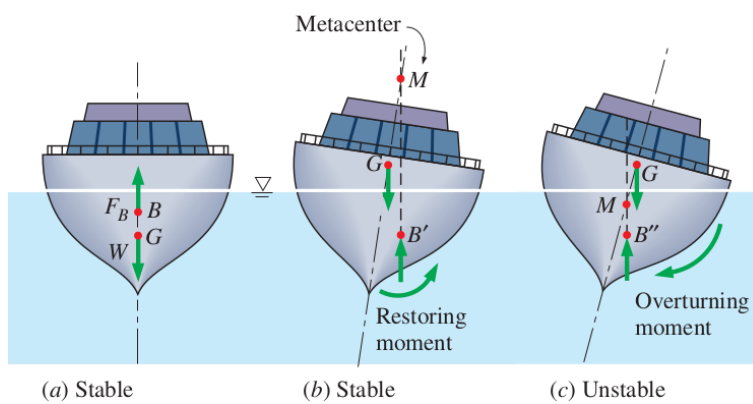


Figure 20: Estabilidad de un cuerpo flotante.