# Clase # 4: Cinemática de los fluidos [MF100]

**Luis Alejandro Morales**
Profesor Asistente

Universidad Nacional de Colombia-Bogotá
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingenieria Civil y Agrícola

Periodo 2022-II

## Contents



## 1 Descripción Lagrangiana y Euleriana del movimiento de un fluido

Existen dos aproximaciones para analisar la cinematica de los fluidos. La primera se centra en el analisis de los campos de flujo y es conocido como el metodo **Euleriano**. En el metodo euleriano, se calcula la presión del campo de flujo $p(x, y, z, t)$ (e.g en un punto del espacio $x, y, z$ o section) mas no los cambios de presion que experimentaría una partícula moviendose en el flujo. Aqui, la posicion del sistema de coordenadas es constante para un intervalo de tiempo (ver Figura 1). La segunda aproximación se centra en seguir particulas individualmente moviendose a traves del flujo, esto es conocido como el metodo **Lagrangiano**. En este, el sistema de coordenadas se mueve con el flujo. El metodo lagrangiano es mas apropiado para el analisis de solidos, mientras que el metodo euleriano esampliamente usado en mecanica de fluidos. En mediciones en fluidos, un sensor de presion introducido en un canal de laborario determina la presion del flujo en un punto $(x, y, z)$ y en un instante $(t)$ determinado. Dicha medicion es acorde con el metodo euleriano. De acuerdo con el metodo lagrangiano, el mismo sensor arrojado al flujo y moviendose a la misma velocidad permitiria medir la presion de una particula que se mueve con el flujo.

Figure 1: Sistema euleriano y lagrangiano (http://www.flowillustrator.com/fluid-dynamics/basics/lagrangian-eulerian-viewpoints.php)

### 1.1 El campo de velocidad

La propiedad mas conocida de un flujo es el campo de velocidad $\vec{V}(x, y, z, t)$, de la cual se derivan otras propiedades. La velocidad es un vector en funcion de la posicion y del tiempo y por lo tanto tiene tres componentes escalares $u$, $v$ y $w$:

$$\vec{V}(x, y, z) = u(x, y, z, t)\vec{i} + v(x, y, z, t)\vec{j} + w(x, y, z, t)\vec{k}$$

## 1.2 El campo de aceleracion

El vector de aceleracion, $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ es importante en flujos ssometidos a algun tipo de fuerza segun la segunda ley de Newton. El campo de aceleración de un fluido con respecto a un marco de referencia Euleriano, se define como:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

Si tenemos una $y = f(u)$ donde $u = g(x)$, $y$ es una funcion compuesta $y = f(g(x))$ y derivable en $x$. De acuerdo con la **regla de la cadena**, la $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$. Aplicando dicha regla a la ecuacion anterior tenemos:

$$\vec{a} = \frac{\partial\vec{V}}{dt} + u\frac{\partial\vec{V}}{dx} + v\frac{\partial\vec{V}}{dy} + w\frac{\partial\vec{V}}{dz}$$

La aceleracion de una particula de flujo expresada como una variable de campo es:

$$\vec{a}(x,y,z,t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} \tag{1}$$

donde $\vec{\nabla}$ es el *operador de gradiente*, el cual se define en coordenadas cartesianas como:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Las componentes de vector de aceleracion en coordenadas cartesianas son:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

En la ecuacion 1, el termino $\partial\vec{V}/\partial t$ es conocida como la *aceleracion local* y es diferente de zero para flujo no permanente. El segundo termino, $(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}$ es conocido como la *aceleracion advectiva* o la *aceleracion convectiva*. Esta último explica el movimiento de las particulas (adveción o convección) de una localizacion hacia otra en el fluido donde el campo de velocidades del fluido es diferente. Por ejemplo consideremos la salida de agua de una manguera cuyo orificio de salida se reduce gradualmente (ver figura 2). En el sistema Euleriano, el flujo es considerado permanente ya que las propiedades del flujo en cualquier punto del flujo no cambian con el tiempo. Sin embardo, las particulas cambian de velocidad y se aceleran a la salida de la manguera en la reduccion gradual. Por lo tanto, la aceleracion no es zero debido al termino de aceleracion advectiva en la ecuacion 1. Se puede concluir que el flujo puede ser considerado *permanente* desde un marco de referencia *Euleriano* y *no permanente* desde un marco de referencia *Lagrangiano* que se mueve con el fluido.

Figure 2: Flujo a la salida de un manguera cuyo orificio se reduce y acelera el flujo a la salida.

## 1.3 Derivada material

El operador de derivada total $d/dt$ en la ecuación 1 es conocido como la *derivada material*, $D/Dt$ la cual se deduce al seguir una particula que se mueve con el campo de flujo. La derivada material se expresa como:

$$\underbrace{\frac{D}{Dt}}_{\substack{\text{Material}\\\text{derivative}}} = \frac{d}{dt} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{\text{Local}} + \underbrace{(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})}_{\text{Advective}} \tag{2}$$

Aplicando la ecuacion 2 al campo de velocidades tenemos que $\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ y se obtiene la ecuación 1, conocida tambien como la *aceleracion material*.

La ecuacion 2 puede ser aplicada a variables escalares como la presion:

$$\frac{DP}{Dt} = \frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + (\vec{P}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}$$