

Estructuras Hidráulicas [2015961]  
**Tema # 1: Conceptos básicos**

**Luis Alejandro Morales (Ph.D)**  
Profesor Asistente

Universidad Nacional de Colombia-Bogotá  
Facultad de Ingeniería  
Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola

## Contents

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>2</b>
1.1	Generalidades . . . . .	2
1.2	Tipos de canales . . . . .	2
1.3	Geometría de un canal . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Clasificación y regímenes de flujo</b>	<b>5</b>
2.1	Flujo permanente y no permanente . . . . .	5
2.2	Flujo uniforme y no uniforme . . . . .	5
2.3	Flujo laminar y flujo turbulento . . . . .	6
2.4	Flujo subcrítico, crítico y supercrítico . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Distribución de velocidades</b>	<b>6</b>
3.1	Coeficiente de energía . . . . .	7
3.2	Coeficiente de cantidad de movimiento . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Distribución de presiones</b>	<b>9</b>
4.1	Fluido estático . . . . .	9
4.2	Flujo horizontal y paralelo . . . . .	9
4.3	Flujo paralelo en un canal inclinado . . . . .	10
4.4	Flujo curvilíneo . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Conservación de la energía</b>	<b>11</b>
5.1	Energía específica . . . . .	12
5.2	Flujo crítico . . . . .	13
5.3	Fenómenos locales . . . . .	13
<b>6</b>	<b>Conservación de la cantidad de movimiento</b>	<b>14</b>
6.1	Fuerza específica . . . . .	15
<b>7</b>	<b>Casos de aplicación de la conservación de la energía y del momento lineal</b>	<b>15</b>
7.1	Trancisión en un canal . . . . .	15
7.2	Resalto hidráulico . . . . .	17

# 1 Introducción

## 1.1 Generalidades

En general el flujo de fluidos se presenta como *flujo a presión* (flujo en tuberías) y el *flujo a superficie libre* (flujo en canales). La diferencia entre estos tipos de flujo es que en un canal la superficie del flujo esta en contacto con el aire y por lo tanto sometido a una presión atmosférica. En el caso del flujo a presión, la sección de la tubería esta totalmente copada por el fluido y por lo tanto sobre el flujo se ejerce, además de una presión atmosférica sobre el conducto, una presión hidráulica. Analizando la figura 1, se ve que la *línea de gradiente hidráulica LGH* para el flujo en tuberías esta conformada por el nivel topográfico del eje central de la tubería ( $z$ ) y la presión del flujo medida con los piezómetros ( $\frac{p}{\gamma}$ ), mientras que en el flujo a superficie libre el termino de la presión es equivalente a la profundidad del flujo ( $y$ ). En la tubería la línea de gradiente hidráulica está formada por  $z + \frac{p}{\gamma}$ , en el canal esta formada por  $z + y$ .

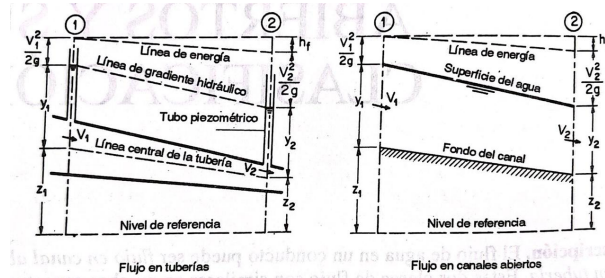


Figure 1: Línea de gradiente hidráulico y de energía en a) flujo a presión y b) flujo a superficie libre (tomado de [2]).

Cabe aclarar que el análisis del flujo en canales es más complejo que el flujo. Mientras que en una tubería la sección que atraviesa el flujo es constante y determinada por la geometría de la tubería que es muchas veces circular, en un canal la sección puede tomar muchas formas geométricas e inclusive puede ser totalmente irregular como en el caso de canales naturales. Por otro lado, la presión en una tubería de sección constante no cambia en el tiempo mientras que en un canal la profundidad del flujo cambia cuando cambia la pendiente del canal. Esto hace que las pendientes de la superficie del agua y del fondo del canal sean diferentes. Además, mientras que la rugosidad en una tubería es independiente de las condiciones de flujo, la rugosidad en un canal depende del nivel de agua. Todos estos factores hacen que el flujo en canales sea más incierto y recurra más al uso de ecuaciones empíricas y al conocimiento previo de otras disciplinas como la *hidrología* y la *geomorfología*.

## 1.2 Tipos de canales

Un canal es un conducto en el cual es agua fluye con su superficie libre (en contacto con la atmósfera). Los canales pueden ser clasificados como:

- **Naturales:** Son aquellos cursos naturales de agua que existen sobre la tierra. Se pueden clasificar como arroyos o quebradas que existen en zonas montañosas hasta ríos y estuarios, los cuales poseen dimensiones mucho mayores y existen en llanuras y en desembocaduras a océanos y mares, respectivamente. Debido a su irregularidad, las propiedades hidráulicas de los canales naturales cambian continuamente en el espacio y en el tiempo.
- **Artificiales:** Son aquellos construidos por el ser humano cuyas formas suelen ser de geometría conocida. Estos canales se construyen para la navegación, en centrales hidroeléctricas, en sistemas de riego, en drenajes en vías, para vertederos y tomas de agua, y en laboratorios para el estudio del flujo. Se han encontrado que las teorías hidráulicas desarrolladas para canales artificiales se pueden aplicar a canales naturales con un buen grado de aproximación. Existen tipos de canales artificiales:

- *Canal*: Canal excavado en el sitio generalmente revestido con pasto, concreto, ladrillo o asfalto. Usualmente tienen bajas pendientes y son utilizados en el drenaje urbano.
- *Canaleta*: Canal de menor tamaño que el canal y apoyado sobre el terreno. Suelen construirse en metal, mampostería o concreto y sirven para transportar el agua a través de una depresión.
- *Rápidas y Caída*: Son canales de alta pendiente contruidos en longitudes cortas.
- *Alcantarilla*: Es un canal cerrado, generalmente de sección circular y longitud corta, construido en concreto o mampostería que sirve para el drenaje de aguas servidas y lluvias en sistemas urbanos.
- *Túneles*: Canales no revestidos y excavados en roca, y revestidos en concreto o mampostería comunmente usados en centrales hidroeléctricas.

Figure 2: a) Canal artificial b) quebrada de alta montaña.

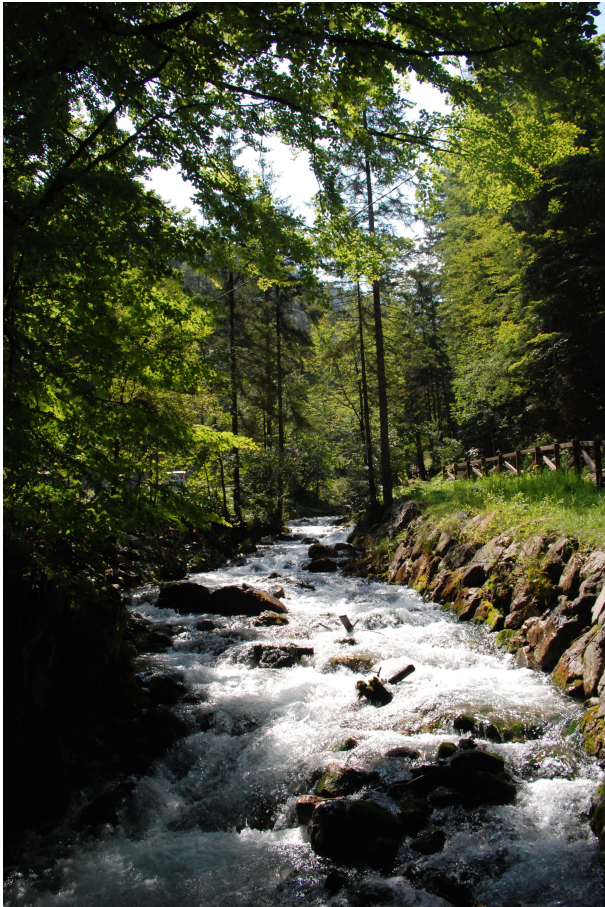
### 1.3 Geometría de un canal

Un *canal prismático* es aquel cuya sección transversal y pendiente permanecen constantes mientras que un *canal no prismático* es aquel en donde la sección y/o la pendiente cambian a lo largo de su longitud (e.g. vertedero de ancho variable). La sección de un canal, es la sección en la dimensión transversal o perpendicular a la dirección de flujo. En canales naturales la sección transversal es irregular y cambia en el espacio y en el tiempo. Cuando ocurren crecientes, generalmente el canal central transporta la mayoría del flujo mientras los canales en las bancas transportan menor flujo.

Los canales artificiales tienen geometrías como las que se muestran en la figura 4. Los canales abiertos más comunes son los rectangulares y los trapezoidales. Los canales circulares son los mas comunes en sistemas de alcantarillado. Existen otras formas de canales cerrados como la sección rectangular, en forma de ovalo o de erradura. En muchos estudios de cauces naturales la parábola se utiliza como una aproximación a una sección de un canal natural.

Las *propiedades geométricas* (ver figura 4) de un canal se expresan a traves de ecuaciones en función de la profundidad del flujo y de otras dimensiones de la sección. Sin embargo para el caso de canales naturales, no es posible obtener ecuaciones y es necesario el uso de métodos numéricos para obtener dichas propiedades. Las propiedades geométricas mas importantes son las siguientes:

- **profundidad de flujo ( $y$ )**: es la distancia vertical desde el punto mas bajo de la sección hasta la superficie del agua.
- **profundidad de la sección ( $d$ )**: es la distancia perpendicular al flujo desde el punto mas bajo de la sección hasta la superficie del agua.  $y = \frac{d}{\cos \theta}$  donde  $\theta$  es el ángulo de la pendiente longitudinal del canal.
- **nivel ( $z$ )**: es la elevación de la superficie del agua desde un nivel de referencia o datum. Si el nivel de referencia es el fondo,  $z = y$ .
- **ancho superficial ( $T$ )**: ancho de la sección transversal en la superficie libre.
- **área mojada ( $A$ )**: es el área de la sección transversal en contacto con el fluido perpendicular a la dirección del flujo.
- **perímetro mojado ( $P$ )**: es el perímetro de la sección transversal en contacto con el fluido.
- **radio hidráulico ( $R$ )**: es la relación entre el perímetro mojado y el área mojada,  $R = \frac{A}{P}$ .










(a) Quebrada de alta montaña



(b) Canal artificial

Figure 3: Tipos de canales principales.

Sección	Área $A$	Perímetro mojado $P$	Radio hidráulico $R$	Ancho superficial $T$	Profundidad hidráulica $D$	Factor de sección $Z$
	$by$	$b + 2y$	$\frac{by}{b + 2y}$	$b$	$y$	$by^3$
	$(b + ay)y$	$b + 2y\sqrt{1 + p^2}$	$\frac{(b + ay)y}{b + 2y\sqrt{1 + p^2}}$	$b + 2ay$	$\frac{(b + ay)y}{b + 2y\sqrt{1 + p^2}}$	$\frac{(b + ay)^3 y^3}{\sqrt{b + 2y\sqrt{1 + p^2}}}$
	$ay^2$	$2y\sqrt{1 + p^2}$	$\frac{ay}{2\sqrt{1 + p^2}}$	$2ay$	$\frac{y}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} ay^3$
	$\frac{\pi}{4}(d - \sin \theta)^2 d$	$\frac{\pi}{2} d$	$\frac{\pi}{4} \left( \frac{d - \sin \theta}{2} \right) d$	$\frac{\pi}{2} d \cos \theta$	$\frac{d - \sin \theta}{2}$	$\frac{\pi}{64} \frac{(d - \sin \theta)^3}{\cos^3 \theta} d^3$
	$\frac{2}{3} by$	$2 + \frac{8}{3} y$	$\frac{2by}{3(2 + 8y)}$	$\frac{2}{3} b$	$\frac{y}{2}$	$\frac{2}{27} by^3$
	$\left( \frac{b}{3} - z \right) y + (b + 2y)z$	$(x - 2y) + b + 2y$	$\frac{(x/2 - 2y) + (b + 2y)}{(x - 2y) + b + 2y}$	$b + 2x$	$\frac{(x/2 - 2y) + (b + 2y)}{b + 2x}$	$\frac{(x/2 - 2y) + (b + 2y)^3}{\sqrt{b + 2x}}$
	$\frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{2} (1 - x \cos^2 \theta)$	$\frac{b}{2} \sqrt{1 + p^2} - \frac{b}{2} (1 - x \cos^2 \theta)$	$\frac{b}{2}$	$2(y - x) + r\sqrt{1 + p^2}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{b}{2} \sqrt{\frac{b}{2}}$

\* Aproximación satisfactoria para el intervalo  $0 < x \leq 1$ , donde  $x = 4y/T$ . Cuando  $x > 1$ , utilice la expresión exacta  $P = (T/2) \sqrt{1 + x^2} + 1/x \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ .

Figure 4: Geometrías y elementos geométricos de secciones transversales de un canal (tomado de [2]).

- **profundidad hidráulica ( $D$ )**: es  $D = \frac{A}{T}$ .
- **factor de sección ( $Z$ )**: para el cálculo del *flujo crítico*, se calcula como  $Z = A\sqrt{D} = A\sqrt{\frac{A}{T}}$ . Para el caso de *flujo uniforme*  $Z = AR^{(2/3)}$ .

## 2 Clasificación y regímenes de flujo

Con base en diferentes criterios, el flujo a superficie libre se puede clasificar en diferentes tipos (ver figura 5).

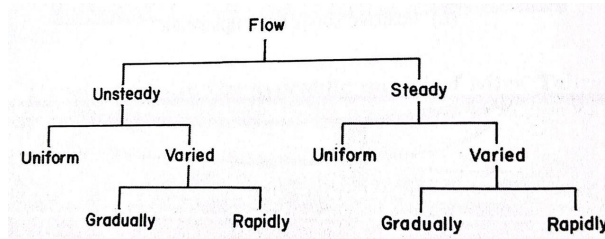


Figure 5: Clasificación de flujos a superficie libre (tomado de [1]).

### 2.1 Flujo permanente y no permanente

Si la velocidad del flujo ( $\vec{U} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ ) en un punto determinado del espacio dentro del flujo no cambia en el tiempo  $t$ , el flujo es *permanente*. Si la velocidad del flujo cambia en un punto determinado del espacio con respecto al tiempo, el flujo es *no permanente*. Esto quiere decir que el término de la *aceleración local* ( $\partial\vec{U}/\partial t$ ), en el campo vectorial de la aceleración ( $\vec{a}$ ), es igual a cero (el cambio de las tres componentes de  $\vec{U}$  con respecto al tiempo es cero). Es posible transformar el flujo no permanente en flujo permanente si el sistema de referencia se mueve con el flujo, e.g. con una onda de creciente que no cambia de forma.

### 2.2 Flujo uniforme y no uniforme

Si la velocidad del flujo para un instante de tiempo  $t$  no cambia a lo largo de un tramo de canal ( $\vec{l} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ), el *flujo es uniforme*. Esto quiere decir que el *término convectivo* ( $\vec{U}(\vec{\nabla} \cdot \vec{U})$ ) del campo vectorial de la aceleración es igual a cero. Note que el operador  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ . Esta condición de flujo uniforme se cumple para la velocidad media de una sección. Sin embargo se considera flujo uniforme incluso cuando la velocidad en diferentes puntos de una sección no es la misma.

Cuando la velocidad para un instante de tiempo dado cambia a lo largo de un tramo de canal, el flujo se considera *no uniforme* o *variado*. Dependiendo de la variación a lo largo del canal, el flujo se

puede clasificar como *gradualmente variado* o *rapidamente variado*. En un flujo gradualmente variado, la profundidad de flujo varia gradualmente a lo largo de la distancia mientras que en un flujo rapidamente variado la profundidad varia rapidamente para una distancia corta.

De acuerdo con lo anterior, para flujo permanente y uniforme, la velocidad no varia ni con el espacio ni con el tiempo, esto quiere decir que el campo vectorial de la aceleracion (derivada total de la velocidad con respecto al tiempo) es igual a cero  $\vec{a} = \frac{d\vec{U}}{dt} = 0$ .

### 2.3 Flujo laminar y flujo turbulento

El flujo es *laminar* cuando las particulas de fluido se desplazan de manera organizada formando capas que se mueven unas sobre otras. En un flujo *turbulento* las particulas de fluido se mueven de manera caótica en trayectorias irregulares. Analizando las fuerzas que intervienen en el flujo de fluidos, el flujo es laminar cuando las fuerzas dominantes son las *fuerzas viscosas* y es turbulento cuando las fuerzas dominantes son las *fuerzas inerciales*. La clasificación de un flujo en laminar o turbulento, se hace a través del *numero de Reynolds* ( $R_e$ ):

$$R_e = \frac{\text{fuerzas inerciales}}{\text{fuerzas viscosas}} = \frac{VL}{\nu} \quad (1)$$

donde  $V$  es la velocidad media de la sección,  $\nu$  es la viscosidad cinemática del fluido y  $L$  es una longitud característica que para flujo a superficie libre es igual al radio hidraulico  $R$  o la profundidad hidraulica. Para flujo en canales, la transicion de flujo laminar a turbulento ocurre cuando  $R_e \approx 600$ . Flujo laminar a superficie libre es muy raro en la vida real. Sin embargo en modelos a escala, es posible que para profundidades de flujo pequeñas se presente flujo laminar en el modelo cuando en realidad el flujo en el prototipo es turbulento.

### 2.4 Flujo subcrítico, crítico y supercrítico

Un flujo es *crítico* cuando este tiene una velocidad media igual a la velocidad con la que se desplaza una onda de gravedad de pequeña amplitud en el flujo. La onda de gravedad se forma por cambios en la profundidad del flujo. Un flujo es *subcrítico* cuando la velocidad media es menor que la *velocidad crítica* y es *supercrítico* cuando la velocidad media es mayor que la velocidad critica. Para la clasificación de estos tipos de flujo, se utiliza el *número de Froude* ( $F_r$ ):

$$F_r = \frac{\text{fuerzas inerciales}}{\text{fuerzas gravitacionales}} = \frac{V}{\sqrt{gL}} \quad (2)$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $L$  es una longitud característica igual a la profundidad hidraulica  $D$  que para canales rectangulares es  $D = y$ . De acuerdo con la ecuación 2, el flujo es crítico cuando  $F_r = 1$ , es subcrítico cuando  $F_r < 1$  y es supercritico cuando  $F_r > 1$ .

Pueden presentarse combinaciones de tipos de flujo de acuerdo con el valor de  $R_e$  y de  $F_r$  como: *subcritico laminar*, *subcritico turbulento*, *supercritico laminar* y *supercritico turbulento* (ver figura 6)

Los flujos subcritico laminar y supercritico laminar son poco comunes en la naturales y se presentan cuando la profundidad de agua es pequeña lo cual suele ocurrir en modelos a escala. En casos reales los flujos son turbulentos.

## 3 Distribución de velocidades

La velocidad del flujo en una seccion de canal varia en cada punto dentro de esta debido a los esfuerzos cortantes entre capas de flujo inducidas por la rugosidad ejercida por el fondo y las bancas del canal, y por la superficie libre en contacto con el aire (ver figura 7).

En teoria la velocidad varia en las tres dimensiones espaciales. Sin embargo en la practica, los mayores gradientes de velocidad se dan a lo largo de la direccion del flujo.



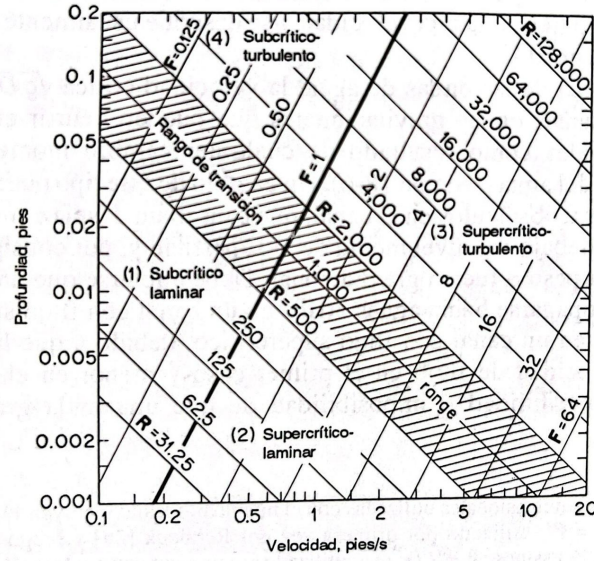


Figure 6: Profundidad vs velocidad para cuatro regimenes flujo en canales abiertos anchos. Note que las escalas son logaritmicas (tomado de [2]).

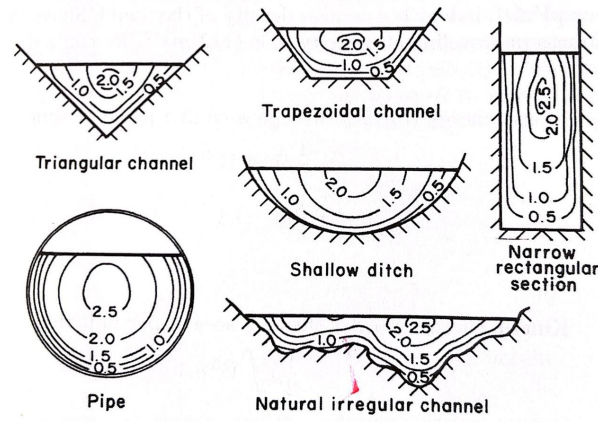


Figure 7: Distribución de velocidad de flujo en diferentes tipos de canales (tomado de [1]).

### 3.1 Coeficiente de energía

Si analizamos un flujo de fluido de densidad  $\rho$  cuyo campo de velocidades es  $\vec{U}$  que pasa a traves de una seccion infinitesimal  $dA$ , la energía cinemática del flujo por unidad de tiempo es  $\frac{1}{2}\rho dAU^3$ . La energía cinemática del flujo a partir de la velocidad media en la seccion  $V$ , se puede estimar como  $\frac{1}{2}\rho dAV^3$ . Sin embargo estas dos maneras de calcular la energía cinemática por unidad de tiempo no son equivalentes. Para superar estas diferencias, se introduce un *coeficiente de energia* o *coeficiente de Coriolis* en la segunda ecuacion, quedando  $\frac{1}{2}\alpha\rho dAV^3$ . Igualando las dos ecuaciones e integrando para el area  $A$  de la seccion transversal, se tiene:

$$\frac{1}{2}\alpha\rho V^3 \int_A dA = \frac{1}{2}\rho \int_A U^3 dA$$

Simplificando y despenjando para  $\alpha$ , se tiene que:

$$\alpha = \frac{\int_A U^3 dA}{V^3 \int_A dA} \quad (3)$$

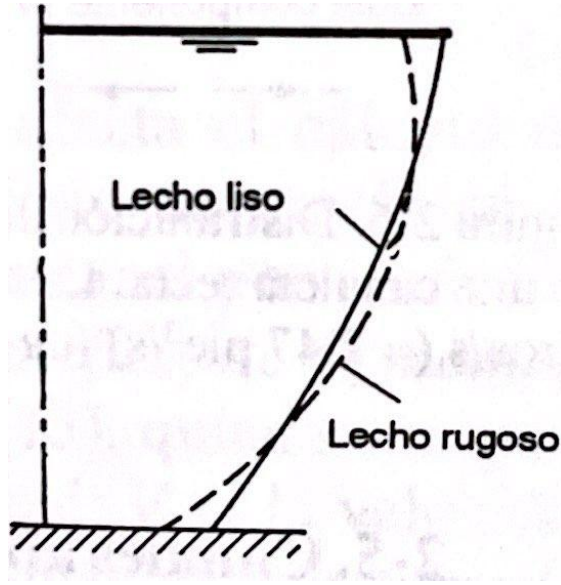


Figure 8: Distribución de velocidades en un canal liso y rugoso (tomado de [2]).

Teniendo en cuenta que la velocidad media en la sección de flujo  $V$  se calcula como  $V = \frac{1}{A} \int_A U dA$ , reemplazando en la ecuación 3, tenemos:

$$\alpha = \frac{A^3 \int_A U^3 dA}{\left(\int_A U dA\right)^3 \int_A dA} = \frac{A^2 \int_A U^3 dA}{\left(\int_A U dA\right)^3} \quad (4)$$

La forma discreta de la ecuación anterior, se expresa como:

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^N A_i^2 \sum_{i=1}^N U_i^3 A_i}{\left(\sum_{i=1}^N U_i A_i\right)^3} \quad (5)$$

donde  $N$  es el numero de subsecciones verticales en las cuales una sección es dividida,  $A_i$  es el area de la subsección  $i$  y  $U_i$  es la velocidad media en la subsección  $i$ .

### 3.2 Coeficiente de cantidad de movimiento

El flujo de cantidad de movimiento por unidad de tiempo a través de una sección  $dA$  cuyo campo de velocidad es  $\vec{U}$  es  $\frac{1}{2}\rho dA U^2$ . Si tomamos la velocidad media en la sección  $V$ , el flujo de cantidad de movimiento a través de  $dA$  por unidad de tiempo es  $\frac{1}{2}\rho dA V^2$ . Para que estas dos ecuaciones sean equivalentes, la última ecuación se debe multiplicar por un *coeficiente de cantidad de movimiento* ( $\beta$ ), quedando  $\frac{1}{2}\beta\rho dA V^2$ . Igualando estas dos ecuaciones e integrando para  $A$ , se tiene:

$$\frac{1}{2}\beta\rho V^2 \int_A dA = \frac{1}{2}\rho \int_A U^2 dA$$

Simplificando y despenjando para  $\alpha$ , se tiene que:

$$\beta = \frac{\int_A U^2 dA}{V^2 \int_A dA} \quad (6)$$

Reemplazando para  $V$  en la ecuación 6, se tiene:

$$\beta = \frac{A \int_A U^2 dA}{\left(\int_A U dA\right)^2} \quad (7)$$



La forma discreta de la ecuación anterior, se expresa como:

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^N A_i \sum_{i=1}^N U_i^2 A_i}{\left(\sum_{i=1}^N U_i A_i\right)^2} \quad (8)$$

Valores teoricos de  $\alpha$  y  $\beta$  se pueden deducir a partir de la *ley de potencia* o de la *ley logaritmica* de distribución de velocidades en canales anchos. Algunos valores tipicos de  $\alpha$  y  $\beta$  para diferentes secciones de canal, se relacionan la tabla 1. En terminos generales para canales prismaticos y circulares rectos, los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  son menores a 1.15 y aproximadamente igual a 1.0.

Sección de canal	$\alpha$	$\beta$
Canales regulares	1.10-1.20	1.03-1.07
Canales naturales	1.15-1.50	1.05-1.17
Rios cubiertos de hielo	1.20-2.00	1.07-1.33
Llanuras de inundacion	1.50-2.00	1.17-1.33

Table 1: Coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  para diferentes tipos de sección (tomado de [1]).

## 4 Distribución de presiones

La distribución de presiones en un canal depende de las condiciones de flujo. A continuacion se analisara las distribuciones para diferentes condiciones.

### 4.1 Fluido estático

En el caso de un fluido estatico, si se analizan las fuerzas ejercidas sobre una porción del fluido de area transversal  $dA$  y altura  $y$ , se tiene que las fuerzas en el plano horizontal se cancelan, por lo que las unicas fuerzas actuantes son el eje vertical  $z$ . Haciendo sumatoria de fuerzas en  $z$  igual a zero (fluido estatico sin aceleración) y trabajando en terminos de presiones manometricas, tenemos que:

$$f_z = w$$

donde  $w$  es el peso del elemento de fluido  $W = \rho g y dA$  y  $f_z$  es la fuerza de presión hidroestatica  $p$  ejercida por el fluido sobre  $dA$  por lo que  $f_z = p dA$ . Reemplazando y simplificando, tenemos:

$$p = \rho g y$$

Esta ecuación determina la presión manometrica en un fluido incompresible ( $\rho$  es constante) en reposo a una profundidad  $y$ . Note que a grandes profundidades  $\rho$  cambia por lo que la ecuación anterior no se cumple.

### 4.2 Flujo horizontal y paralelo

Consideremos ahora un fluido que se mueve en capas en un canal horizontal sin fricción. Si no existe aceleracion del fluido en la dirección del flujo y si la velocidad es uniforme en la sección y paralela al fondo del canal, la sumatoria de fuerzas en la dirección del flujo es cero. Las fuerzas actuantes son a lo largo del eje vertical las cuales son la fuerza de presión hidroestatica a una profundidad  $y$  y el peso del elemento de fluido  $w$ . Similar al caso de fluido estático, tenemos entonces que:

$$p = \rho g y$$

### 4.3 Flujo paralelo en un canal inclinado

Consideremos el flujo en un canal con una pendiente dada por el angulo  $\theta$  (ver figura 9). Si no existe aceleracion del fluido en direcci3n del flujo y si la velocidad es uniforme en la secci3n del canal y paralela al fondo de este, las fuerzas actuantes son a lo largo del eje del elemento y su sumatoria es igual a cero. El peso  $w = \rho g d dA$  en direcci3n vertical hacia abajo, al proyectarlo sobre el eje del elemento se tiene  $w = \rho g d A \cos \theta$ ; note que  $d$  es la profundidad de la seccion. La otra fuerza a lo largo del eje del elemento es la fuerza de presi3n  $f_z = p dA$ . Teniendo en cuenta que  $d = y \cos \theta$ , el peso del elemento de fluido se convierte en  $w = \rho g y \cos^2 \theta$ . Haciendo sumatoria de fuerzas a lo largo del eje del elemento, se tiene:

$$p = \rho g y \cos^2 \theta$$

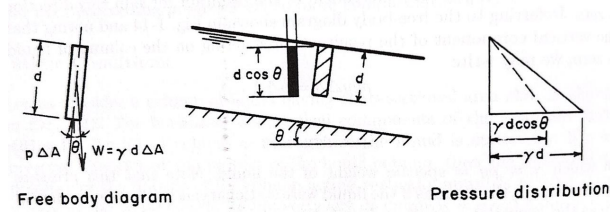


Figure 9: Fuerzas actuantes sobre un elemento de flujo en un canal con pendiente (tomado de [1]).

La ecuacion anterior muestra que la presi3n en el fluido no es hidroestatica como en los dos casos anteriores. Sin embargo para casos practicos la pendiente del canal es relativamente pequena por lo que  $\cos \theta \approx 1$ . Esto implica que  $d \approx y$ . La ecuacion anterior queda entonces:

$$p \approx \rho g y \approx \rho g d$$

La ecuacion anterior es de nuevo la presi3n hidroestatica que para el caso en cuestion es aplicable considerando un canal de pendiente pequena. La presi3n hidroestatica es aplicable en flujo uniforme y flujo variado.

### 4.4 Flujo curvilineo

En los casos anteriores se asumi3 que la velocidad era uniforme en la seccion y paralela al fondo. Sin embargo, existen muchos casos en los que las lineas de flujo se curvan lo cual cambia la distribuci3n de presiones en un elemento de flujo debido a fuerzas centrifugas perpendiculares a la direcci3n del flujo. Para este caso, consideremos las fuerzas verticales actuantes sobre un elemento de flujo (ver figura 10).

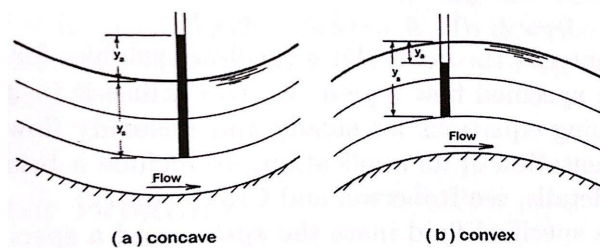


Figure 10: Fuerzas actuantes sobre un elemento de flujo curvilineo (tomado de [1]).

Si la curvatura de las lineas de flujo es  $r$  y la velocidad en un punto es  $V$ , tenemos que la aceleracion centrifuga  $= \frac{V^2}{r}$  y la fuerza centrifuga  $= \rho y_s dA \frac{V^2}{r}$  donde  $y_s$  es la altura hidroestatica,  $y_a$  es la correccion de la altura de presi3n por curvatura y  $h = y_s \pm y_a$  es la altura piezometrica. En el caso de flujo convexo las fuerzas

actúan hacia arriba y la altura piezométrica  $h = y_s - y_a$ ; en el caso del flujo cóncavo, la altura piezométrica es  $h = y_s + y_a$ .  $y_a$  se calcula a partir de la fuerza centrífuga:

$$y_a = \frac{1}{g} y_s \frac{V^2}{r}$$

La altura piezométrica se calcula entonces como:

$$h = y_s \left( 1 \pm \frac{1}{g} \frac{V^2}{r} \right)$$

Note que  $h$  representa la cabeza de energía de presión.

#### Algoritmo 1: Cálculo de los coeficientes de energía y de cantidad de movimiento

1. Leer la siguiente información:  $l$ ,  $x_s$ ,  $y_s$  y  $V_s$ . Note que  $x_s$  y  $y_s$  son dos vectores con las coordenadas  $x$  y  $y$  respectivamente para un número  $m$  de puntos que conforman la sección transversal.  $V_s$  es un vector de velocidades medias de  $m - 1$  segmentos que conforman la sección.
2. Con base en las coordenadas dadas ( $x_s$  y  $y_s$ ), interpolar un nuevo conjunto de puntos para el nivel  $l$ .
3. Calcular el área de cada segmento de área  $A_i$ , con base en el nuevo conjunto de puntos ( $x_s$  y  $y_s$ ).
4. Con base en los valores de  $A_i$  y de  $V_s$ , calcular el coeficiente de energía ( $\alpha$ ) con la ecuación 5 y el coeficiente de cantidad de movimiento ( $\beta$ ) usando la ecuación 8.
5. Imprimir: Coeficiente de energía ( $\alpha$ ) y el coeficiente de cantidad de movimiento ( $\beta$ ).

#### Ejemplo 1

For all natural number  $n$  it holds:

## 5 Conservación de la energía

La energía total del flujo ( $H$ ) en un punto  $A$  de una sección transversal de canal en unidades de fuerza por unidades de longitud sobre unidades de fuerza, con respecto a un nivel de referencia (ver figura 11), está dada por ecuación:

Figure 11: (tomado de [2]).

$$H = z_A + d_A \cos \theta + \frac{U_A^2}{2g} \quad (9)$$

donde  $z_A$  es el nivel de un elemento de fluido  $A$  contenido en una línea de corriente con respecto a un nivel de referencia,  $d_A$  es la profundidad del elemento de fluido  $A$  medida desde la superficie libre,  $\theta$  es el ángulo de inclinación del canal y  $V_A$  es la velocidad de flujo en el punto  $A$ . Para efectos prácticos, la distribución de velocidades en la sección se considera uniforme, por lo que el término de la cabeza de energía cinética de la ecuación 9 se corrige utilizando el coeficiente de energía ( $\alpha$ ) para tener en cuenta la distribución no uniforme de velocidades en la sección. Para una sección cualquiera, tenemos:

$$H = z + d \cos \theta + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad (10)$$

donde  $z$  es el nivel del fondo del canal y representa la *cabeza de energía potencial* del flujo,  $d$  es la profundidad de la sección medida perpendicular desde la superficie hasta el fondo del canal y representa la *cabeza de energía de presión* y  $V$  es la velocidad media en la sección. El término  $\alpha \frac{V^2}{2g}$  representa la *cabeza de energía cinética* corregida del flujo. Si  $\theta \approx 0$ , el término  $d \cos \theta \approx d = y$ , donde  $y$  es la profundidad del flujo.

Analizando la figura 11 y teniendo en cuenta que la ecuación 10 representa la energía en una sección del canal, la pendiente de la línea energía conocida como *gradiente de energía* se representa como  $S_f = \frac{h_f}{L}$  donde  $h_f$  es la pérdida de energía entre dos secciones y  $L$  es la distancia horizontal entre las secciones. Para el caso de *flujo uniforme* la pendiente de la línea de energía ( $S_w$ ) y la pendiente del fondo del canal ( $S_o \approx \sin \theta$ ) son iguales al gradiente de energía:  $S_f = S_w = S_o = \sin \theta$ . Note que  $\tan \theta \approx \sin \theta$  cuando  $\theta \approx 0$ .

De acuerdo con el principio de conservación de energía, la energía total entre dos secciones 1 y 2, se representa como:

$$z_1 + d_1 \cos \theta + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + d_2 \cos \theta + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_f \quad (11)$$

Para un canal con pendiente pequeña, se tiene:

$$z_1 + d_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + d_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_f \quad (12)$$

Si  $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 1$  y  $h_f \approx 0$ , la ecuación 12 se convierte en la *ecuación de Bernoulli*:

$$z_1 + d_1 + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + d_2 + \frac{V_2^2}{2g} = \text{constante} \quad (13)$$

## 5.1 Energía específica

La *energía específica* en la sección de un canal es la energía por unidad de fuerza con respecto al fondo del canal ( $z = 0$ ). A partir de la ecuación 10, se tiene:

$$E = d \cos \theta + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad (14)$$

Cuando  $\theta \approx 0$  y  $\alpha = 1$ , la ecuación anterior queda:

$$E = y + \frac{V^2}{2g} = y + \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (15)$$

donde  $Q$  es el caudal medio que pasa a través de la sección del canal y  $A$  es el área transversal de la sección del canal. La ecuación 15 muestra que la energía específica en la sección de un canal es igual a la profundidad de flujo más la cabeza de energía cinética del flujo. Note que si  $Q$  es conocido, la ecuación 15 se convierte en una función  $y$ .

Graficando la ecuación 15 se tiene la *curva de energía específica* (ver figura 12), en donde las abscisas están representadas por  $E$  y las ordenadas por  $y$ .

Figure 12: Curva de energía específica (tomado de [2]).

Esta curva tiene dos asintotas:  $y = 0$  y  $y = E$  (curva OD) para los cuales los cuales  $E$  tiende a infinito. Note que para canales horizontales, la curva OD forma un ángulo de  $45^\circ$ . Para canales de alta pendiente, la asintota es  $y = E = d \cos \theta$ , por lo que el ángulo es igual a  $\cos \theta$ . La curva además evidencia lo siguiente:

- Para un valor de  $E$  existen dos posibles valores de  $y$ :  $y_1$  y  $y_2$ . Estas dos profundidades son conocidas como las *profundidades alternas*.
- El valor mínimo de la energía  $E$  ocurre en el punto  $C$ . La profundidad allí es una sola y se conoce como la *profundidad crítica* ( $y_c$ ). El flujo para  $y_c$  tiene una *velocidad crítica* ( $V_c$ ).
- Cuando  $y > y_c$ , la velocidad del flujo ( $V$ ) es mayor que  $V_c$  y por lo tanto el flujo es *supercritico*. Cuando  $y < y_c$ , la velocidad del flujo ( $V$ ) es menor que  $V_c$  y por lo tanto el flujo es *subcritico*.
- Si el caudal aumenta en la ecuación 15, la curva de energía específica se desplaza hacia la derecha, si disminuye se desplaza hacia la izquierda.

## 5.2 Flujo critico

El *flujo critico* se define como aquel flujo para el cual el número de Froude ( $F_r$ ) es igual a 1. También se puede definir como el flujo para el cual la energía específica es mínima. Teniendo en cuenta que  $E = f(y)$ , la energía específica mínima o crítica, puede encontrar derivando la ecuación 15 con respecto a  $y$ :

$$\frac{dE}{dy} = 1 - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{dA}{dy} = 1 - \frac{V^2}{gA} \frac{dA}{dy}$$

donde  $\frac{dA}{dy} \approx T$ , donde  $T$  es el ancho superficial de la sección. Teniendo en cuenta que  $A/T$  es conocida como la profundidad hidráulica, tenemos:

$$\frac{dE}{dy} = 1 - \frac{V^2 T}{gA} = 1 - \frac{V^2}{gD}$$

Si la energía es mínima cuando  $\frac{dE}{dy} = 0$ , la expresión anterior queda:

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{D}{2} \quad (16)$$

Esta ecuación indica que la cabeza de energía cinemática es igual a la mitad de la profundidad hidráulica para flujo crítico. La ecuación anterior también se puede expresar como  $\frac{V}{\sqrt{gD}} = 1$  el cual es ecuación de  $F_r$  para flujo crítico. La ecuación 16 se aplica para el caso de canales con pendiente baja y  $\alpha = 1$ . Para canales con pendiente alta y valores de  $\alpha \neq 1$ , la ecuación 16 se convierte:

$$\alpha \frac{V^2}{2g} = \frac{\cos \theta D}{2} \quad (17)$$

## 5.3 Fenómenos locales

Los fenómenos locales ocurren frecuentemente en canales cuando hay cambios de régimen (de subcrítico a supercrítico o viceversa) en distancias. Existen dos tipos principales:

- *Caida hidráulica*: Se presenta cuando hay un cambio brusco de la pendiente del fondo del canal lo cual hace que el flujo pase de ser subcrítico a supercrítico en una sección de transición en donde se presenta la profundidad crítica.

- *Caida libre*: La caida libre se presenta cuando el fondo del canal cambia abruptamente, como por ejemplo, en la descarga libre de un canal a un lago. En la caida libre, el flujo va de flujo subcritico antes de la caida alcanzando su energia minima justo en la sección de la descarga. Sin embargo, analisis experimentales han encontrado que la sección de energía critica no es examente en la sección de la descarga debido a la curvatura de la lamina de agua por lo que para pendientes pequeñas  $y_c = 1.4y_o$ , donde  $y_o$  es la profundidad en el borde y  $y_c$  se localiza entre 3 y 4  $y_c$  aguas arriba del borde del canal.
- *Resalto hidráulico*: Se presenta cuando existe un aumento rapido de la lamina de agua que puede ser causado aguas abajo del flujo bajo una compuerta en un canal horizontal, o al final de un vertedero cuando la pendiente alta se vuelve casi horizontal.

Es importante señalar que la descripcion de la curva de energía especifica se ha presentado para canales prismaticos. En el caso de canales naturales en donde las secciones cambia constantemente a lo largo del canal, la curva de energia especifica varia de igual manera asi como la profundidad critica en cada sección. El cálculo de la curva para canales naturales se hacenumericamente a partir de las ecuaciones descritas anteriormente.

### Ejemplo 2

For all natural number  $n$  it holds:

## 6 Conservacion de la cantidad de movimiento

La cantidad de movimiento que pasa a trave de una seccion de un canal por unidad de tiempo se expresa como  $\beta \frac{\gamma QV}{g}$ . De acuerdo con la *segunda ley de Newton*, para un canal de pendiente alta, el cambio de la cantidad de movimiento por unidad de tiempo entre dos secciones de canal (1 y 2) en la dirección del flujo es igual a las fuerzas externas actuantes sobre el volumen de control conformado por las dos secciones (ver figura 13). La siguiente ecuación se conoce como la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento:

$$\frac{\gamma}{g} (\beta_2 Q_2 V_2 - \beta_1 Q_1 V_1) = A_1 P_1 - A_2 P_2 + w \sin \theta - F_f \quad (18)$$

Figure 13: Aplicacion del principio cantidad de movimiento (tomado de [2]).

donde  $\gamma$  es el peso especifico del liquido,  $P = \gamma \bar{z}$ , es la presion resultante sobre la sección donde  $\bar{z}$  es profundidad del centroide del area mojada  $A$ ,  $w$  es el peso del liquido entre las secciones 1 y 2, y  $F_f$  es la fuerza de fricción que se opone al flujo y que actua a lo largo de la superficie de contacto entre el flujo y el canal; esta fuerza nada tiene que ver con las perdidas de energía dentro del elemento de fluido. Para flujos gradualmente variados, los valores de  $P$  representan la presión hidroestatica. Sin embargo, para el caso de flujo rapidamente variado o curvilineo, la presión no es hidroestatica y dichos valores de  $P$  deben corregirse a través de un *coeficiente de distribución de presiones* o también conocido como *coeficiente de fuerza*  $\nu$ . Este coeficiente se calcula como:

$$\nu = \frac{1}{A\bar{z}} \int_0^A h dA = 1 + \frac{1}{A\bar{z}} \int_0^A y_a dA$$

donde  $h$  es la profundidad del elemento  $dA$  y  $y_a$  es la correcion de la altura piezometrica  $y_a = \frac{y_s V^2}{gr}$ . De acuerdo con la ecuación anterior, se puede ver que  $\nu < 1$  cuando la curvatura es convexa,  $\nu > 1$  cuando la curvatura es concava e igual a 1 para flujo paralelo o gradualmente variado.

Para el caso se flujo gradualmente variado con una pendiente baja ( $\nu \approx 1$ ) la ecuación 18 se convierte en:



$$\frac{\gamma}{g} (\beta_2 Q_2 V_2 - \beta_1 Q_1 V_1) = \gamma (A_1 \bar{z}_1 - A_2 \bar{z}_2) - w \sin \theta - F_f \quad (19)$$

La ecuación 19 representa la ecuación general de la conservación de cantidad de movimiento.

## 6.1 Fuerza específica

Para el caso de un canal prismático casi horizontal ( $\theta \approx 0$ ) y de sección de material suave ( $F_f \approx 0$ ) en donde la distribución de las velocidades es uniforme ( $\beta \approx 0$ ), la ecuación 19 queda:

$$Q_2 V_2 - Q_1 V_1 = g (A_1 \bar{z}_1 - A_2 \bar{z}_2) \quad (20)$$

De la ecuación de continuidad  $Q_1 = V_1 A_1 = Q_2 = V_2 A_2 = Q$ , reemplazando en la ecuación anterior y organizando los términos:

$$\frac{Q^2}{g A_1} + \bar{z}_1 A_1 = \frac{Q^2}{g A_2} + \bar{z}_2 A_2 \quad (21)$$

De la ecuación 21, se puede notar que los dos lados de la igualdad son iguales; cualquier término se denomina *fuerza específica*

$$F_s = \frac{Q^2}{g A} + \bar{z} A \quad (22)$$

La ecuación 22 está en unidades de fuerza por unidad de peso específico. La ecuación 22 se puede expresar como  $F_{s1} = F_{s2}$  lo cual indica que la fuerza específica en dos secciones de un canal es la misma siempre y cuando la fuerza externa ejercida por las paredes del canal sobre el flujo sea despreciable. Para el caso de un canal rectangular ancho de base  $b$ ,  $\bar{z} = \frac{y}{2}$  y  $A = by$ , la ecuación 22 se vuelve:

$$F_s = \frac{Q^2}{g b y} + \frac{b y^2}{2} \quad (23)$$

## 7 Casos de aplicación de la conservación de la energía y del momento lineal

### 7.1 Transición en un canal

Una transición en un canal es un cambio subido o gradual en el ancho del canal, en el fondo del canal o en ambos (ver figura 14). Usualmente, estas transiciones se diseñan de tal manera que las pérdidas de energía son despreciables. Es por esto que la ecuación de conservación de la energía es la más apropiada para el análisis.

Figure 14: Transición en un canal de ancho constante (tomado de [1]).

Si se analiza el caso de un canal rectangular de ancho constante  $b$  con un escalón en el fondo (ver figura 14), se desea obtener, a partir de una profundidad y velocidad conocida aguas arriba, que sucede con la profundidad aguas abajo de la transición. Teniendo en cuenta que las pérdidas en la transición son despreciables la cabeza antes y después son las mismas  $H_1 = H_2$ . Sin embargo, analizando la energía específica en ambas secciones, se tiene que  $E_1 = H_1$  y  $E_2 = H_2 - \Delta z$ , por lo que  $E_2 = E_1 - \Delta z$ . Para

saber cual es la profundidad aguas abajo de la transición es necesario analizar la curva energía específica (figura 14a). Si la profundidad aguas arriba es  $y_1$  esta necesariamente se debe desplazar hacia la izquierda teniendo en cuenta  $\Delta z$ . Al desplazarse a la izquierda la profundidad  $y_2$  puede ser para los puntos 2, 2' o 2''. El punto 2'' implica una profundidad negativa por lo que se descarta. No habria problema de ir de 1 a 2. Sin embargo, para ir de 1 a 2', seria necesario que la curva de caudal especifico se desplazara a la derecha en el evento en que hubiera en la transición un reducción del ancho que aumentara el caudal unitario ( $Q/b$ ) de tal manera que el flujo pasara por  $y_c$  en alguno punto de la reducción y luego pasara a 2' (ver figura 14b). Sin embargo, esto no es posible porque la sección del canal es constante. La otra posibilidad es que el escalon fuera lo suficientemente alto para que la perdida de energía específica fuera tal que la energía en la ciam del escalon fuera  $E_c$  (ver figura 14c). Sin embargo esto tampoco es posible por que la perdida por  $\Delta z$  no es tan grande para que esto suceda. Finalmente, la profundidad cambiaria de 1 a 2 y quiere decir que el regimen de flujo permanece subcritico aguas abajo. En el caso en el que el flujo fuera supercritico aguas arriba, habria la posibilidad de ir de 1 a 2 o 2' (ver figura 15). Sin embargo, para  $\Delta z$  y iria de 1 a 2 y flujo seguiria siendo supercritico.

Figure 15: Transición con flujo supercritico aguas arriba (tomado de [1]).

De acuerdo con los dos casos presentados en las figuras 14 y 15, si el flujo es subcritico aguas arriba, aguas abajo este permanece igual pero con una reducción en  $y$ . En el caso de tener un flujo supercritico aguas arriba, aguas abajo el flujo sigue siendo el mismo pero con un aumento de  $y$ .

Para determinar cual es la variacion de  $y$  con respecto a una variacion del fondo del canal  $z$ , se analiza la ecuación de la cabeza de energía para un flujo paralelo o gradualmente variado cuya presión es hidroestatica y con distribución de velocidad uniforme. Se tiene:

$$H = z + y + \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (24)$$

Derivando la ecuación 24 con respecto a  $x$ , teniendo en cuenta que  $x$  aumenta positivamente hacia aguas abajo, se tiene:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{Q^2}{2g} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{A^2} \right) \quad (25)$$

como:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{A^2} \right) = \frac{-2}{A^3} \frac{dA}{dx}$$

por *regla de la cadena*:

$$\frac{dA}{dx} = \frac{dA}{dy} \frac{dy}{dx}$$

para un cambio pequeño en  $y$ ,  $\Delta y$ , tenemos que  $\Delta A \approx T \Delta y$ , donde  $T$  es el ancho en la superficie libre. Aplicando límites, se tiene que  $dA = T dy$  y:

$$\frac{dA}{dx} = T \frac{dy}{dx}$$

Adicionalmente, de la defición de numero de Froude, se tiene:

$$F_r^2 = \frac{V^2}{gA/T} = \frac{Q^2 T}{gA^3} \quad (26)$$

Reemplazando en la ecuación 25, se tiene que:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz}{dx} + (1 - F_r^2) \frac{dy}{dx} \quad (27)$$

Como no se consideran pérdidas de energía,  $\frac{dH}{dx} = 0$ , la ecuación 27 se convierte:

$$\frac{dz}{dx} = (F_r^2 - 1) \frac{dy}{dx} \quad (28)$$

La ecuación 28 relaciona las variaciones del fondo del canal con la variación de la profundidad de agua. Si hay un aumento del fondo del canal,  $\frac{dz}{dx} > 0$ , por lo que el termino derecho de la ecuación 28 debe ser positivo y para esto  $(F_r^2 - 1)$  y  $\frac{dy}{dx}$  son ambos positivos o ambos negativos. Si ambos son positivos, esto implica haya un aumento de profundidad ( $y_2 > y_1$ ) y que  $F_r^2 > 1$  para lo cual  $F_r > 1$  (flujo supercritico). Si ambos son negativos, esto implica una disminucion de la profundidad ( $y_2 < y_1$ ) y que  $F_r^2 < 1$  para lo cual  $F_r < 1$  (flujo subcritico). Un analisis similar es posible sin en lugar de tener un aumento del fondo se tiene una caida del fondo.

### Ejemplo 3

For all natural number  $n$  it holds:

## 7.2 Resalto hidráulico

Un *resalto hidráulico* es un fenómeno que se forma en un canal cuando existe un cambio de flujo supercritico a subcritico. Se presenta entonces una discontinuidad muy fuerte en la lamina de agua en donde ademas, debido a la turbulencia que se genera dentro del resalto hidraulico, existe una perdida de energía considerable. Es por esto que los resaltos hidraulicos se forman para mezclar sustancias en el flujo, para disipar energias en estructuras hidraulicas y para oxigenar flujos de agua. Las profundidades de la lamina de agua justo antes y despues del resalto se denominan *alturas conjugadas* (ver figura 16).

Figure 16: Transición con flujo supercritico aguas arriba (tomado de [1]).

Un resalto hidraulica posee las siguientes características:

1. Existen perdidas de energia en el resalto hidraulico debido a la turbulencia que se genera dentro del flujo, por lo the  $\Delta H = H_1 - H_2 > 0$ .
2. Teniendo en cuenta que las fuerzas de fricción que ejercer las paredes sobre el flujo son despreciables, y que para canales con pendiente baja ( $\theta \approx 0$ ) la componente del peso en la dirección del flujo es cero, las fuerzas especificas antes y despues del resalto son iguales  $F_{s1} = F_{s2}$ .
3. Se cumple la ecuación de continuidad,  $Q_1 = V_1 A_1 = Q_2 = V_2 A_2$ .

Supongamos que tenemos un canal horizontal de sección rectangular de ancho  $b$  cuya distribucion de velocidades en la sección es uniforme. Para este caso es posible encontrar una expresion que relacione las alturas conjugadas a partir del supuesto  $F_{s1} = F_{s2}$ . Partiendo de la ecuación 19 tenemos:

$$\frac{Q^2}{gA_1} + \bar{z}_1 A_1 = \frac{Q^2}{gA_2} + \bar{z}_2 A_2$$

reorganizando los terminos, se tiene:

$$\frac{Q^2}{g} \left( \frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) = \bar{z}_2 A_2 - \bar{z}_1 A_1$$

Si  $A = by$  y  $\bar{z} = \frac{y}{2}$ , y reorganizando terminos, se tiene:

$$\frac{Q^2}{bg} \left( \frac{y_2 - y_1}{y_2 y_1} \right) = \frac{b}{2} (y_2^2 - y_1^2)$$

Simplificando, se tiene:

$$\frac{2Q^2}{b^2 g} \left( \frac{1}{y_2 y_1} \right) = y_2 + y_1$$

De la ecuación de continuidad para la sección 1,  $Q = A_1 V_1 = b y_1 V_1$ , reemplazando y simplificando:

$$\frac{2V_1^2 y_1}{g y_2} = y_2 + y_1$$

Dividiendo a ambos lados  $y_1^2$ , simplificando y reagrupando:

$$\frac{V_1^2}{g y_1} = \frac{y_2}{2 y_1} (y_2 + y_1)$$

De la definicion de numero de Froude para la sección 1,  $F_{r1}^2 = \frac{V_1^2}{g y_1}$  y reorganizando los terminos, se tiene:

$$2F_{r1}^2 = \left( \frac{y_2}{y_1} \right)^2 + \frac{y_2}{y_1}$$

Reorganizando los terminos, tenemos:

$$\left( \frac{y_2}{y_1} \right)^2 + \frac{y_2}{y_1} - 2F_{r1}^2 = 0$$

La ecuación anterior tiene la forma de una ecuacion cuadratica  $ax^2 + bx + c = 0$ , donde  $x = \frac{y_2}{y_1}$ . Para encontrar la solución se aplica la ecuacion  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ , donde  $a = 1$ ,  $b = 1$  y  $c = -2F_{r1}^2$ , lo cual queda:

$$\boxed{\left( \frac{y_2}{y_1} \right) = \frac{1}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + 8F_{r1}^2} \right)} \quad (29)$$

Note que se toma la raiz positiva para obtener las soluciones de la ecuación, de no ser así.  $\frac{y_2}{y_1} < 0$  lo cual no es posible fisicamente. Si en lugar se aplica la ecuacion de continuidad para la sección 2  $Q = A_2 V_2 = b y_2 V_2$  y la definicion de numero de froude para esta sección, se tiene una ecuacion similar a la ecuación 29:

$$\boxed{\left( \frac{y_1}{y_2} \right) = \frac{1}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + 8F_{r2}^2} \right)} \quad (30)$$

Las ecuaciones 29 y 30 indican que es posible obtener la profundidad de una sección si se conoce la profundidad y la velocidad de la otra sección. Al conocerse  $y_1$ ,  $V_1$ ,  $y_2$  y  $V_2$ , es posible luego conocer las perdidas de energia en el resalto.

De acuerdo con analisis experimentales y con base en las ecuaciones anteriores, se describen algunas propiedades del resalto hidraulico:

- **Relación de las profundidades conjugadas:** Analizando la ecuación 29, la relacion de las profundidades conjugadas  $y_r = \frac{y_2}{y_1}$  se convierte en:

$$y_r = \sqrt{2} F_{r1} - \frac{1}{2}$$

cuando  $F_{r1} > 2$  ya que el valor de  $\sqrt{1 + 8F_{r1}^2} \approx \sqrt{2}F_{r1}$ . Esto indica una relación lineal entre  $y_r$  y  $F_{r1}$ .

- **Longitud del resalto:** La longitud del resalto  $L$  es importante para el diseño de tanques disipadores de energía o de mezcla. Esta longitud difiere de la longitud de la turbulencia  $L_r$  que es mas corta que  $L$ . De acuerdo con estudios experimentales en donde se relacionó las variables adimensionales  $F_{r1}$  con  $\frac{L}{y_1}$  o  $\frac{L}{y_2}$ , se llega a esta ecuación:

$$\frac{L}{y_1} = 220 \tanh \frac{F_{r1} - 1}{22}$$

Para valores  $4 < F_{r1} < 12$ :

$$L = 6y_2$$

Tambien se tiene una expresión para  $L_r$ :

$$\frac{L_r}{y_1} = -1.2 + 160 \tanh \frac{F_{r1}}{20}$$

- **Perfil del resalto:** Esto es importante para determinar la cantidad de agua del resalto retenido en una estructura de disipación y para saber la altura de las paredes de la estructura que contiene el resalto. Con base en estudios experimentales, se ha determinado que:

$$Y = \tanh(1.5X)$$

donde  $X = \frac{x}{L_r}$ ,  $Y = \frac{(y-y_1)}{(y_2-y_1)}$ ,  $x$  es una distancia medida a partir de la sección de inicio del resalto a la cual se encuentra la profundidad  $y$  dentro del resalto.

- **Tipos de resalto:** Los resaltos se pueden determinar a partir de valores  $F_{r1}$ . En cada uno de ellos los patrones de flujo, los remolinos y la turbulencia en general tiene características diferentes. Un resumen es presentado en la figura 17.

Figure 17: Tipos de resalto hidraulico (tomado de [1]).

1. *Resalto debil* ( $1 < F_{r1} < 2.5$ ): Poca pérdida de energía y  $y_1$  y  $y_2$  son aproximadamente iguales.
  2. *Resalto oscilante* ( $2.5 < F_{r1} < 4.5$ ): Formación de ondas en la superficie que persisten aguas abajo del resalto. Se debe evitar en el diseño de disipadores.
  3. *Resalto permanente* ( $4.5 < F_{r1} < 9$ ): El resalto es permanente en su lugar y menos sensible en cambios en las condiciones en la sección 2. Alta disipación de energía.
  4. *Resalto fuerte* ( $F_{r1} > 9$ ): La diferencia de  $y_1$  y  $y_2$  es alta así como la disipación de energía.
- **Pérdida de energía:** Las pérdidas en un resalto hidraulico para una canal horizontal y rectangular se pueden expresar como:

$$\Delta E = E_1 - E_2 = y_1 - y_2 + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g}$$

reagrupando y reemplazando de acuerdo a  $V = \frac{Q}{A}$ , se tiene:

$$\Delta E = y_1 - y_2 + \frac{Q^2}{2g} \left( \frac{A_2^2 - A_1^2}{A_1^2 A_2^2} \right)$$

reagrupando:

$$\Delta E = y_1 - y_2 + \frac{Q^2}{2g} \left( \frac{(A_2 - A_1)(A_2 + A_1)}{(A_1 A_2)(A_1 A_2)} \right)$$

de la ecuación de fuerza específica para el resalto hidráulico ( $F_{s1} = F_{s2}$ ), se tiene que  $\frac{Q^2}{g} \left( \frac{A_2 - A_1}{A_1 A_2} \right) = \bar{z}_2 A_2 - \bar{z}_1 A_1$ . Reemplazando en la ecuación anterior se tiene:

$$\Delta E = y_1 - y_2 + \frac{(\bar{z}_2 A_2 - \bar{z}_1 A_1)(A_2 + A_1)}{2A_1 A_2}$$

reemplazando  $\bar{z} = y/2$  y  $A = by$ , y simplificando, se tiene:

$$\Delta E = y_1 - y_2 + \frac{(y_2^2 - y_1^2)(y_2 + y_1)}{4y_1 y_2}$$

haciendo operaciones algebraicas y agrupando:

$$\Delta E = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4y_1 y_2} \quad (31)$$

#### Ejemplo 4

For all natural number  $n$  it holds:

## References

- [1] M Hanif Chaudhry et al. *Open-channel flow*, volume 523. Springer, 2008.
- [2] Ven Te Chow. Open channel flow. *London: McGRAW-HILL*, 11(95):99–136, 1959.