

Estructuras Hidráulicas [2015961]

Tema # 2: Flujo uniforme

Luis Alejandro Morales, Ph.D

Profesor Asistente

Universidad Nacional de Colombia-Bogotá

Facultad de Ingeniería

Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola

Contents

1	Introducción	1
2	Resistencia al flujo	2
2.1	Ecuaciones para la resistencia al flujo	2
2.1.1	Ecuación de Chezy	2
2.1.2	Ecuación de Manning	5
2.1.3	Otras ecuaciones de resistencia	6
3	Cálculo de la profundidad normal	6
3.1	Canales artificiales	6
3.2	Canales naturales	9
4	Problemas de calculo en flujo uniforme	12
5	Diseño de canales	12
5.1	Canales no erosinables	12
5.2	Sección óptima de un canal	13
5.3	Canales erosinables	15
5.3.1	Metodo de la velocidad permisible	15
5.3.2	Método de la fuerza tractiva	17

1 Introducción

En flujo a superficie libre actúan básicamente dos fuerzas: *fuerzas gravitacionales* cuya componente en dirección del flujo en un canal de pendiente positiva acelera el flujo hacia abajo, y las *fuerzas de fricción* debido a la rugosidad del canal que tratan de frenar el flujo. Note que en un canal con pendiente negativa, el flujo trata de desacelerarse. En un canal con pendiente positiva, si las fuerzas de fricción son mayores que las fuerzas gravitacionales, el flujo se desacelera produciendo una elevación de la lámina de agua, lo cual se da gracias al principio de *conservación de la masa*. En el caso contrario, la profundidad de la lámina de agua disminuye y la velocidad aumenta. En canales prismáticos largos, es posible que las dos fuerzas se igualen en alguna sección del canal haciendo que ni la profundidad ni la velocidad cambien a partir de este punto aguas abajo (ver figura 1). Por lo tanto, en un flujo en el cual la profundidad no cambia se le denomina *flujo uniforme* y a la profundidad del flujo *profundidad normal*.

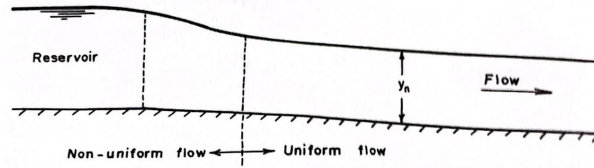


Figure 1: Flujo no uniforme y uniforme en canales (tomado de [?]).

2 Resistencia al flujo

En un canal es notorio que la velocidad aumenta desde las orillas y hacia el centro. Lo mismo ocurre al analizar un perfil de velocidades en un canal donde las velocidades aumentan desde el fondo hacia la superficie. Esto se presenta debido a la resistencia al movimiento que ofrece el material del fondo y las orillas del canal que suele ser más pesado que el fluido en movimiento y que el aire que está en la superficie. A pesar que en la realidad los esfuerzos cortantes no son uniformes sobre el perímetro mojado del canal y que existen corrientes secundarias en una sección transversal, para efectos prácticos consideraremos flujo 1D lo que implica velocidades y esfuerzos uniformes en la sección.

2.1 Ecuaciones para la resistencia al flujo

En esta sección se presentan algunas ecuaciones que relacionan la resistencia al flujo con otras variables del flujo para, inicialmente, flujo no uniforme, las cuales al simplificarse se usan en flujo uniforme.

2.1.1 Ecuación de Chezy

Consideremos un flujo permanente en un canal prismático y de pendiente baja. Si analizamos un volumen de control dentro del flujo entre dos secciones 1 y 2, la primera a una distancia x y la otra a una distancia $x + \Delta x$ a lo largo del canal, en donde la profundidad y la velocidad en 1 es y y V , respectivamente, aguas abajo en 2 tenemos que la profundidad es $y + \frac{dy}{dx} \Delta x$ y $V + \frac{dV}{dx} \Delta x$ (ver figura 2). Analizando las fuerzas actuantes sobre el volumen de control tenemos: una fuerza de presión en la sección 1, F_1 ; fuerzas de presión en la sección de salida 2, F_2 y F_3 ; componente del peso del fluido en la dirección del flujo, W_x ; y la fuerza de fricción en el fondo y paredes del canal que se opone al movimiento, F_f .

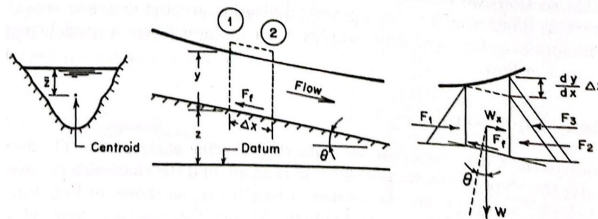


Figure 2: Fuerzas actuantes en un volumen de control de un flujo en un canal (tomado de [?]).

La fuerza de presión en la sección 1 se calculan como $F_1 = \gamma A \bar{z}$, donde A es el área mojada de la sección transversal 1 y \bar{z} es la profundidad del centroide de la sección. La componente del peso en la dirección del flujo se calcula como $W_x = \gamma A \Delta x \sin \theta$, donde θ es el ángulo de pendiente del canal. Note que como la pendiente del canal es baja, $\sin \theta \simeq \tan \theta \simeq -dz/dx$, por lo tanto $W_x = -\gamma A \Delta x \frac{dz}{dx}$. En la sección 2, aguas abajo, actúan dos fuerzas de presión: la fuerza debido a la profundidad (F_2) y la fuerza debido a la sobre-elevación en la distancia Δx (F_3). De acuerdo con esto, $F_2 = \gamma A \bar{z}$ y $F_3 = \gamma A \frac{dy}{dx} \Delta x$. Como los esfuerzos cortantes (τ_o) sobre las paredes y el fondo del canal son uniformes, la fuerza de fricción se puede calcular como $F_f = \tau_o P \Delta x$, donde P es el perímetro mojado de la sección.

Haciendo sumatoria de las fuerzas actuantes sobre el volumen de control en la dirección del flujo de la figura 2, la fuerza resultante (F_r) es:

$$F_r = \sum F = F_1 - F_2 - F_3 + W_x - F_f \quad (1)$$

Sustituyendo las expresiones para cada fuerza en la ecuación 1, tenemos:

$$F_r = -\gamma A \Delta x \left(\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} + \frac{P\tau_o}{\gamma A} \right) \quad (2)$$

Aplicando la ley de conservación de la cantidad de movimiento para el volumen de control de la figura 2, la cual establece que la tasa de cambio de la cantidad de movimiento es igual a la fuerza resultante e igual a $F_r = \rho AV(V_2 - V_1) = \rho AV \left((V + \frac{dV}{dx} \Delta x) - V \right) = \rho AV \frac{dV}{dx} \Delta x$. Igualando a la ecuación 2 y dividiendo por $\gamma A \Delta x$:

$$\frac{V}{g} \frac{dV}{dx} = - \left(\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} + \frac{P\tau_o}{\gamma A} \right) \quad (3)$$

Despejando τ_o de esta ecuación:

$$\tau_o = -\gamma R \left(\frac{V}{g} \frac{dV}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} \right) \quad (4)$$

donde $R = A/P$ es el radio hidráulico. Simplificando la ecuación anterior:

$$\tau_o = -\gamma R \frac{d}{dx} \left(z + y + \frac{V^2}{2g} \right) = -\gamma R \frac{dH}{dx} = \gamma R S_f \quad (5)$$

donde H es la energía total en una sección del flujo y $S_f = -\frac{dH}{dx}$ es la pérdida de energía en la dirección del flujo o pendiente de la línea de energía. Para flujo uniforme, los términos $\frac{dV}{dx}$ y $\frac{dy}{dx}$ de la ecuación 5 son iguales a cero y la $S_f = S_o = -\frac{dz}{dx}$. Para flujo uniforme, la ecuación 5 queda:

$$\tau_o = \gamma R S_o \quad (6)$$

Por otra parte, con base en *análisis dimensional*, se tiene que:

$$\tau_o = \kappa \rho V^2 \quad (7)$$

donde κ es un coeficiente adimensional que depende del número de Reynolds (Re) y de la rugosidad de canal. Igualando las ecuaciones 5 y 7 y despejando para V , tenemos:

$$V = \sqrt{\frac{g R S_f}{\kappa}} \quad (8)$$

La ecuación 8 puede ser escrita como:

$$V = C \sqrt{R S_f} \quad (9)$$

donde $C = \sqrt{\frac{g}{\kappa}}$ es el *coeficiente de Chezy*. Note que la ecuación 9 es para flujo permanente y no uniforme. Para el caso del flujo permanente y uniforme, igualando las ecuaciones 6 y 7, se tiene:

$$V = C \sqrt{R S_o} \quad (10)$$

Note que en flujo uniforme, la pendiente de la línea de energía, la pendiente de la línea de gradiente hidráulico y la pendiente del canal son iguales.

Por otro lado, C tiene unidades de \sqrt{L}/T y depende de R_e y de la rugosidad del canal. La ecuación de Darcy-Weisbach para tuberías:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (11)$$

donde f es un factor de fricción adimensional que depende de R_e y de la rugosidad de la tubería, D es el diámetro de la tubería y L es la longitud de la tubería, se puede simplificar:

$$V = \sqrt{\frac{2gDS}{f}} \quad (12)$$

donde $S = \frac{h_f}{L}$. La ecuación 9, se convierte en, donde $R = D/4$:

$$V = C \sqrt{\frac{DS}{4}} \quad (13)$$

Igualando las ecuaciones 12 y 14, se tiene que:

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} \quad (14)$$

El *diagrama de Moody* se puede expresar en función de C y del R_e (ver figura 3). Este diagrama está dividido en tres regiones que reflejan el tipo de flujo: hidráulicamente lisa, transición y totalmente rugosa. Un flujo en la región hidráulicamente lisa es un flujo laminar que no necesariamente posee una rugosidad baja. En la medida en que R_e aumenta, la subcapa laminar decrece y los efectos rugosos son importantes entrando en la región de transición. Sin embargo, cuando la rugosidad no es cubierta por la subcapa viscosa y existen pérdidas de energía, el flujo es clasificado como completamente rugoso. El flujo se puede clasificar dependiendo al número adimensional $R_s = \frac{kV^*}{\nu}$, donde ν es la viscosidad cinemática del fluido y k es una longitud característica de la rugosidad de la superficie del canal. V^* es la velocidad cortante expresada como $V^* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} = \sqrt{gRS_f}$. Por lo tanto:

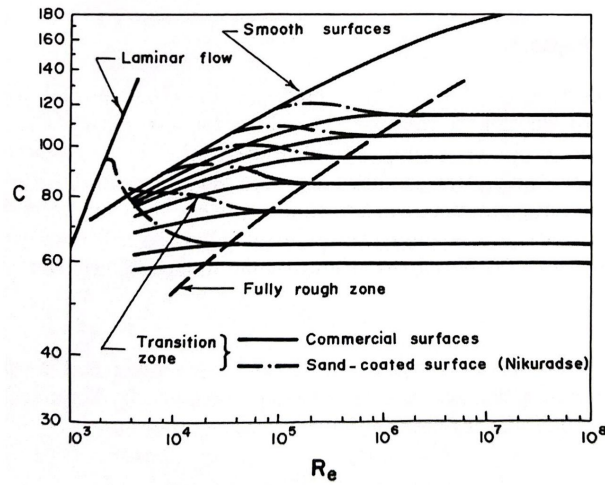


Figure 3: Diagrama de Moody modificado (tomado de [?]).

- Si $R_s < 4$, flujo hidráulicamente liso

- Si $4 < R_s < 100$, *flujo de transición*
- Si $R_s > 100$, *flujo completamente rugoso*

Existen expresiones experimentales para calcular C para el caso de canales relativamente pequeños de superficie lisa ya que estas expresiones fueron obtenidas con base en experimentos en tuberías.

- **Flujo liso**

$$C = \begin{cases} 28.6R_e^{1/8} & \text{if } R_e < 10^5; \\ 4\sqrt{2g} \log_{10} \left(\frac{R_e \sqrt{8g}}{2.51C} \right) & \text{if } R_e > 10^5; \end{cases} \quad (15)$$

- **Flujo rugoso**

$$C = -2\sqrt{8g} \log_{10} \left(\frac{k_s}{12R} + \frac{2.5}{R_e \sqrt{f}} \right) \quad (16)$$

2.1.2 Ecuación de Manning

Desde la derivación de la ecuación de Chezy, muchos investigadores han tratado de derivar una expresión para calcular C . Sin embargo, debido a que C depende de muchas variables, encontrar una expresión para C no ha sido fácil. Con base en observaciones de campo, Gauckler y Hagen mostraron que $C \propto R^{1/6}$. El Irlandés R. Manning en 1891, encontró la siguiente ecuación a partir de la ecuación de Chezy:

$$V = \frac{C_o}{n} R^{2/3} S_f^{1/2} \quad (17)$$

donde n es el *coeficiente de rugosidad de Manning* y tiene unidades de $L^{1/3}/T$; C_o es un coeficiente de conversión de unidades cuyo valor es $C_o = 1.0$ en *sistema internacional de unidades (SI)* y $C_o = 1.49$ en *sistema Inglés de unidades (BG)*. V está dada en m/s y R en m en SI, y V esta dada en ft/s y R en ft en BG.

Note que el valor de n es el mismo en ambos sistemas. n depende principalmente de la rugosidad del material del canal, de las irregularidades y de la profundidad de la lámina de agua, entre otros. La tabla 1 muestra los valores más comunes para diferentes tipos de canal y se puede observar como n aumenta en la medida en que el canal se hace más rugoso; los canales naturales poseen los mayores valores de n (ver figura 6).

El coeficiente de Manning es difícil de estimar ya que depende de varias variables. Investigaciones han demostrado que n aumenta en la medida en que la profundidad de la lámina de agua disminuye. En canales revestidos, es común trabajar con un valor de n constante. Sin embargo cuando la lámina de agua disminuye el valor de n aumenta. Para canales revestidos con material granular y rocoso

$$n = C_m (3.28d_{50})^{1/6}$$

donde d_{50} es el diámetro medio de la grava en m , $0.034 \leq C_m \leq 0.039$ para canales con fondo en gravilla. Otra ecuación similar es:

$$n = \frac{(R/0.3048)^{1/6}}{8.6 + 19.97 \log(R/d_{50})}$$

donde R es el radio hidráulico en m . Valores de n para diferentes recubrimientos y diferentes rangos de profundidad se muestran en la figura 7.

Para canales revestidos con vegetación, un n constante no es adecuado, teniendo en cuenta que la cantidad de vegetación sumergida cambia con el nivel y de igual manera los esfuerzos cortantes. Para estos casos tenemos que:

$$n = \frac{(R/0.3048)^{1/6}}{C + 19.97 \log[(R/0.3048)]^{1.4} S_o^{0.4}}$$

donde R es el radio hidráulico en m , S_o es la pendiente del fondo del canal y C es un coeficiente adimensional que depende del tipo de vegetación. La figura 8 muestra valores de C para diferentes tipos de vegetación.

Material	n
<i>Metales</i>	
Acero	0.012
Hierro fundido	0.013
Metal corrugado	0.025
<i>No metales</i>	
Lucita	0.009
Vidrio	0.010
Cemento	0.011
Concreto	0.013
Madera	0.012
Arcilla	0.013
Ladrillo	0.013
Hormigón lanzado	0.019
Mampostería	0.025
Roca cortada	0.035
<i>Canales naturales</i>	
Limpios y derechos	0.030
Fondo con arena y gravilla	0.040
Fondo con grava y roca	0.050

Table 1: Coeficientes de rugosidad de Manning n (tomado de [?]).

2.1.3 Otras ecuaciones de resistencia

En Europa, la *ecuación de Strickler* ha sido ampliamente usada:

$$V = k_s R^{2/3} S_f^{1/2} \quad (18)$$

donde k_s es la *constante de Strickler*, la cual en sistema internacional se calcula como $k_s = \frac{21.1}{k^{1/6}}$ donde k es la rugosidad media del material en mm . Algunos valores de k se muestran en la tabla 2.

Material	k (mm)
Hierro fundido nuevo	0.5-1.0
Hierro fundida usado	1.0-1.5
Acabado en cemento	0.3-0.8
Acabado rugoso en cemento	1.0-2.0
Madera rugosa	1.0-2.5
Mampostería rugosa	8.0-15

Table 2: Tamaño de la rugosidad k (tomado de [?]).

Las ecuaciones 17 y 18 se relacionan como $k_s = \frac{1}{n}$.

3 Cálculo de la profundidad normal

3.1 Canales artificiales

En muchos problemas de ingeniería, dado el Q y las características del canal y del fluido es necesario estimar la profundidad normal y_n . Dicha estimación se hace solucionando la ecuación 17 para y_n . Los procedimientos aquí mencionados son también aplicables a la ecuación 18 teniendo en cuenta que $n = 1/k_s$.

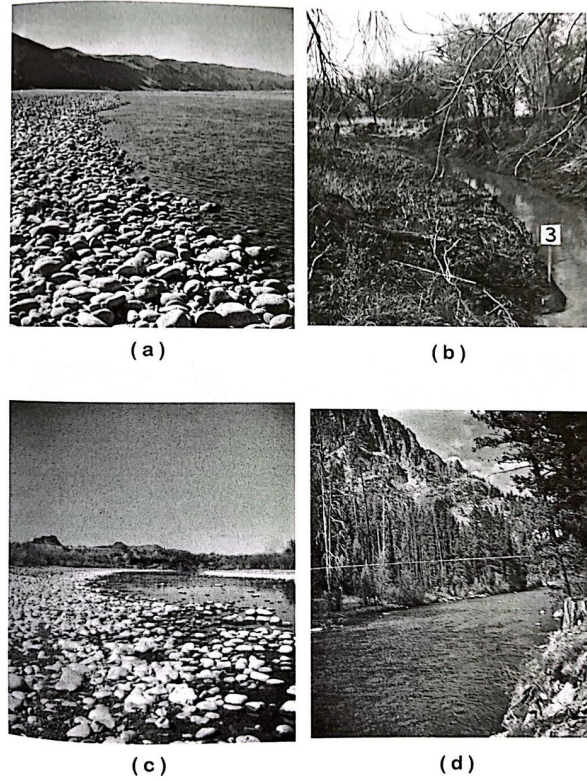


Figure 4: Valores de n para canales naturales: a) Río Columbia, Washington, $n = 0.024$, b) Quebrada Salada, Nebraska, $n = 0.030$, c) Río Salado, Arizona, $n = 0.032$ y d) Río Bitterroot, Montana, $n = 0.036$ (tomado de [?]).

La ecuación 17 se puede expresar como:

$$AR^{2/3} = \frac{nQ}{C_o S_o^{1/2}} \quad (19)$$

en donde el lado derecho es una función de y_n . La figura 8 muestra una gráfica de diseño de $\frac{AR^{2/3}}{b^{8/3}}$ vs y_n/b para canales trapezoidales y de $\frac{AR^{2/3}}{d^{8/3}}$ vs y_n/d para canales circulares, donde b es el ancho del canal en la base y d es el diámetro del canal circular. Si se conoce Q , n y S_o es posible conocer $AR^{2/3}$ con la ecuación 19, el valor de y_n puede encontrarse usando la figura 9.

El cálculo de y_n se puede realizar mediante la aplicación de métodos numéricos para la solución de ecuaciones implícitas. En la tabla 3 se presenta la geometría para las secciones transversales típicas de canales artificiales.

Reemplazando $R = \frac{A}{P}$ en la ecuación 17 para cualquiera de las secciones de la tabla 3, se obtiene una ecuación implícita en y_n , con excepción de la sección circular en donde la función es implícita para $0^\circ < \theta < 180^\circ$. La ecuación a resolver es:

$f(y_n) = Q - A \frac{C_o}{n} R^{2/3} S_o^{1/2} = 0$	Para todas las secciones excepto la circular	(20)
$f(\theta) = Q - A \frac{C_o}{n} R^{2/3} S_o^{1/2} = 0$	Para la sección circular	

Para resolver la ecuación 20, se presenta a continuación un procedimiento con base en el *método de bisección*:

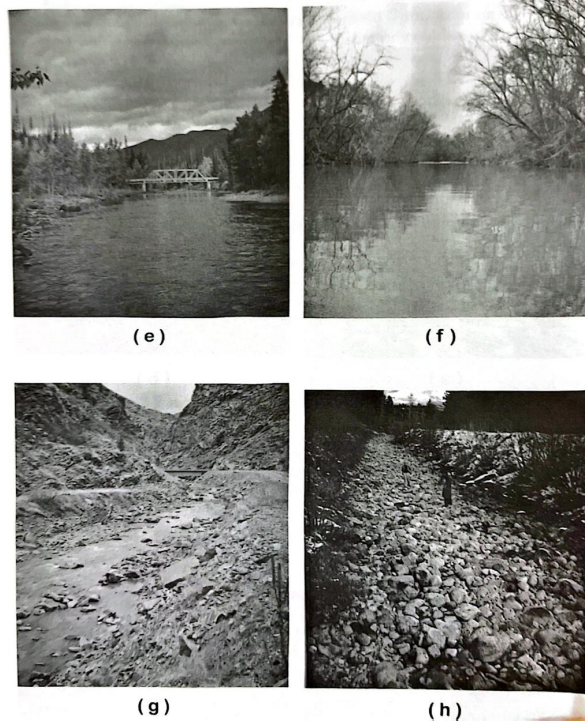


Figure 5: Valores de n para canales naturales: a) Río Columbia, Washington, $n = 0.024$, b) Quebrada Salada, Nebraska, $n = 0.030$, c) Río Salado, Arizona, $n = 0.032$ y d) Río Bitterroot, Montana, $n = 0.036$ (tomado de [?]).

Tipo	Perímetro(P)	Área(A)	Variable
Rectangular	$b + 2y_n$	by_n	y_n
Triangular	$y_n \left(\frac{1}{\sin \theta_1} + \frac{1}{\sin \theta_2} \right)$	$\frac{y_n^2}{2} \left(\frac{1}{\tan \theta_1} + \frac{1}{\tan \theta_2} \right)$	y_n
Trapezoidal	$y_n \left(\frac{1}{\sin \theta_1} + \frac{1}{\sin \theta_2} \right) + b$	$\frac{y_n}{2} \left[y_n \left(\frac{1}{\tan \theta_1} + \frac{1}{\tan \theta_2} \right) + 2b \right]$	y_n
Circular	$2r\theta$	$r^2 \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right)$	$y_n = r$ Si $\theta = 90$
			$y_n = r(1 - \cos \theta)$ Si $0 < \theta < 90$
			$y_n = r(1 + \sin \theta)$ Si $90 < \theta < 180$

Table 3: Propiedades geométricas para diferentes secciones transversales de un canal. La notación de las ecuaciones se puede observar en figura 10.

Algoritmo 1: Calculo de y_n por el método de la bisección en canales artificiales

1. Leer la siguiente información:

- (a) Para la todas las secciones excepto la circular leer: n , C_o , S_o , Q , b , θ_1 y θ_2 . Note que para la sección rectangular $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$, y para la sección triangular $b = 0$.
- (b) Para la sección circular leer: n , C_o , S_o , Q , R y θ .

2. Definir los límites de iteración, a y b , para el método de bisección:

- (a) Para todas las secciones excepto la circular leer: $a = 0.01$ y $b = 1000$ ($a \leq y_n \leq b$). Note que $y_n > 0$ y que $\text{sign}(f(a)) \neq \text{sign}(f(b))$. Note que la función sign extrae el signo de f .
- (b) Para la sección circular leer: $a = 0.01^\circ$ y $b = 179.9^\circ$ ($a \leq \theta \leq b$). Note que $0^\circ < \theta < 180^\circ$, y que $\text{sign}(f(a)) \neq \text{sign}(f(b))$.

3. Si $N \leq N_{max} = 10000$ ir a 4. Si $N > N_{max}$ ir a 3.

4. Calcular $C = \frac{a+b}{2}$.

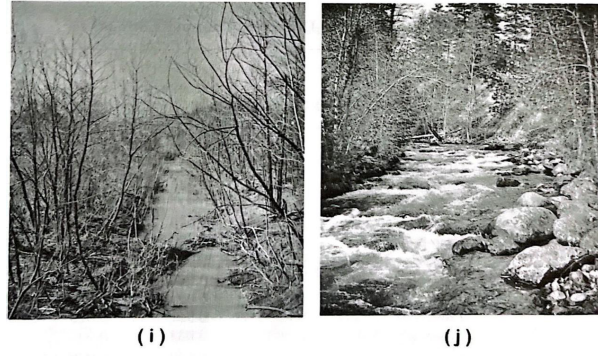


Figure 6: Valores de n para canales naturales: a) Río Columbia, Washington, $n = 0.024$, b) Quebrada Salada, Nebraska, $n = 0.030$, c) Río Salado, Arizona, $n = 0.032$ y d) Río Bitterroot, Montana, $n = 0.036$ (tomado de [?]).

Channel	Type	n		
		Depth Range		
		(0-150 mm)	(150-600 mm)	(>600 mm)
Rigid	Concrete	0.015	0.013	0.013
	Grouted Riprap	0.040	0.030	0.028
	Stone Masonry	0.042	0.032	0.030
	Soil Cement	0.025	0.022	0.020
	Asphalt	0.018	0.016	0.016
Unlined	Bare Soil	0.023	0.020	0.020
	Rock Cut	0.045	0.035	0.025
Temporary	Woven Paper Net	0.016	0.015	0.015
	Jute Net	0.028	0.022	0.019
	Fiberglass Roving	0.028	0.021	0.019
	Straw with Net	0.065	0.033	0.025
	Curled Wood Mat	0.066	0.035	0.028
	Synthetic Mat	0.036	0.025	0.021
Gravel Riprap	25mm D50	0.044	0.033	0.030
	50 mm D50	0.066	0.041	0.034
Rock Riprap	150 mm D50	0.104	0.069	0.035
	300 mm D50	–	0.078	0.040

* After Chen and Cotton [1988]

Figure 7: Valores de n para diferentes recubrimientos y rangos de profundidades (tomado de [?]).

Ejemplo 1

Un canal trapezoidal en asfalto ($n = 0.016$) y con $S_o = 0.0015$, transporta agua con un caudal de $300 \text{ ft}^3 \text{ s}^{-1}$. Si el ancho del canal es $b = 6 \text{ ft}$ y $\theta_1 = \theta_2 = 50^\circ$, calcular la profundidad normal (y_n).

Ejemplo 2

Determinar para que relaciones de y_n/D es posible transportar un caudal máximo y obtener una velocidad máxima en un canal de sección circular.

3.2 Canales naturales

En la naturaleza, los canales por los cuales transcurre flujo poseen secciones irregulares como en el caso de ríos y quebradas. Dicha sección cambia en el tiempo debido a procesos de erosión y sedimentación en el fondo y en las orillas producto de cambios en la hidrodinámica del flujo. El cálculo de la profundidad normal se hace con base en la solución de la ecuación de Manning implícita para y_n siguiendo un método numérico. Si tenemos una sección irregular de un canal como el mostrado en la figura 11, conformada por una serie de m puntos $p(x, y)$ con coordenadas espaciales x y y , y cuyos coeficientes de Manning están

Class	Cover	Condition	C
A	Weeping lovegrass	Excellent stand, tall (average 760 mm)	15.8
B	Yellow Bluestem Ischaemum Kudzu Bermuda Grass Native Grass Mixture (little bluestem, bluestem, blue gamma, and other long and short Midwest grasses) Weeping lovegrass Lespedeza sericea Alfalfa Weeping lovegrass Kudzu Blue Gamma	Excellent stand, tall (average 910 mm) Very dense growth, uncut Good stand, tall (average 300 mm) Good stand, unmowed Good stand, tall (average 610 mm) Good stand, not woody, tall (average 480 mm) Good stand, uncut (average 280 mm) Good stand, unmowed (average 330 mm) Dense growth, uncut Good stand, uncut (average 280 mm)	23.0
C	Crabgrass Bermuda grass Common Lespedeza Grass-Legume mixture-summer (orchard grass, redtop, Italian ryegrass, and common lespedeza) Centipedegrass Kentucky Bluegrass	Fair stand, uncut 250 to 1200 mm Good stand, mowed (average 150 mm) Good stand, uncut (average 280 mm) Good stand, uncut (150 to 200 mm) Very dense cover (average 150 mm) Good stand, headed (150 to 300 mm)	30.2
D	Bermuda grass Common Lespedeza Buffalo grass Grass-legume mixture-fall, spring Lespedeza sericea	Good stand, cut to 60-mm height Excellent stand, uncut (average 110 mm) Good stand, uncut (80 to 150 mm) Good stand, uncut (100 to 130 mm) After cutting to 50-mm height. Very good stand before cutting.	34.6
E	Bermuda grass Burned stubble	Good stand, cut to height 40-mm	37.7

Figure 8: Valores de C para diferentes tipos de recubrimiento con vegetación (tomado de [?]).

dados entre cada par de puntos p_i y p_{i+1} (segmento) para un total de $m - 1$ coeficientes, el área mojada de la sección para un valor de y_n se puede calcular como:

$$A = \sum_{i=1}^{m-1} A_i = \sum_{i=1}^{m-1} [(y_n - y_i) + (y_n - y_{i+1})] \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \quad (21)$$

, perímetro se puede calcular como:

$$P = \sum_{i=1}^{m-1} P_i = \sum_{i=1}^{m-1} \sqrt{(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2} \quad (22)$$

y el coeficiente de rugosidad de Manning como:

$$n = \left(\frac{\sum_{i=1}^{m-1} P_i n_i^{3/2}}{\sum_{i=1}^{m-1} P_i} \right)^{2/3} \quad (23)$$

Note que la ecuación 21 calcula el área mediante la sumatoria de las áreas individuales (trapezios) A_i formadas entre cada par de puntos p_i y p_{i+1} , el perímetro en la ecuación 22 es la sumatoria de las distancias Euclidianas entre cada par de puntos p_i y p_{i+1} y el coeficiente de rugosidad de Manning se obtiene usando la ecuación de Horton y Einstein, 1934. Note que P_i en la ecuación 23 se obtiene utilizando la ecuación 22.

A continuación se muestra un procedimiento para el cálculo de y_n en canales con sección irregular basado en el método de bisección:

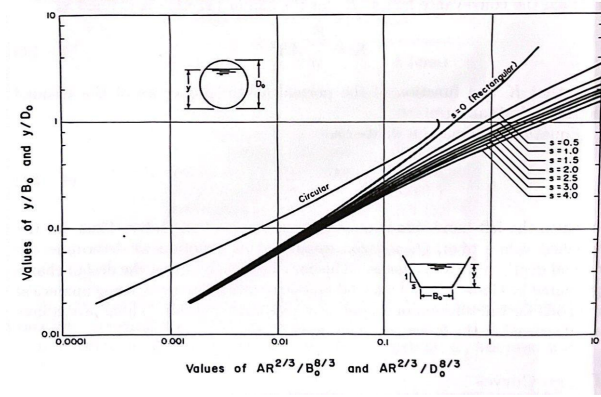


Figure 9: Curvas para calcular y_n en canales canales circulares y trapezoidales para diferentes valores de la pendiente lateral s (tomado de [?]).

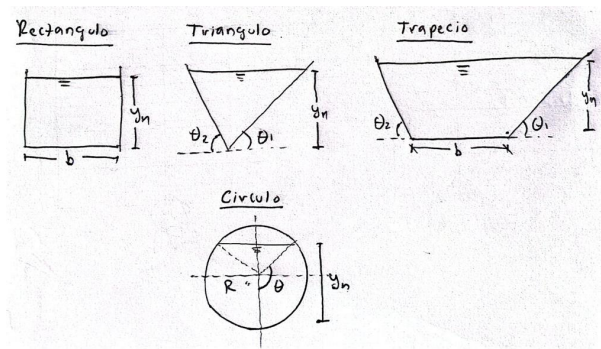


Figure 10: Notación en canales artificiales usada en la tabla 3.

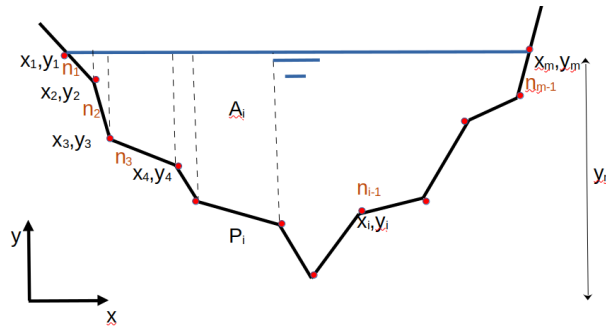


Figure 11: Sección transversal de un cauce irregular (e.g. río).

Algoritmo 2: Cálculo de y_n por el método de la bisección en canales naturales

1. Leer la siguiente información: n , α , S_0 , Q , xs , ys y ns . Note que xs y ys son dos vectores con las coordenadas x y y respectivamente para un número m de puntos que conforman la sección transversal. ns es un vector de coeficientes de Manning para los $m - 1$ segmentos que conforman la sección.
2. Definir los límites de iteración, a y b , para el método de bisección: $a = 0.01$ y $b = 1000$ ($a \leq y_n \leq b$). Note que $y_n > 0$ y que $\text{sign}(f(a)) \neq \text{sign}(f(b))$. Note que la función sign extrae el signo de f .
3. Si $N \leq N_{\max} = 10000$ ir a 4. Si $N > N_{\max}$ ir a 3.
4. Calcular $C = \frac{a+b}{2}$.
5. Con base en las coordenadas dadas (xs y ys) _{i} interpolar un nuevo conjunto de puntos para las profundidades normales a , b y c .

4 Problemas de calculo en flujo uniforme

El análisis de flujo uniforme se hace a través de una ecuación de resistencia como la ecuación de Manning y la ecuación de continuidad. Los problemas de flujo uniforme involucran las siguientes variables: caudal de flujo Q , coeficiente de rugosidad de Manning n , la profundidad de normal y_n , la velocidad de flujo V y la pendiente del canal S_o . De acuerdo con esto, es posible encontrarse con alguno de los siguientes problemas:

1. *Cálculo del caudal Q* : En aplicaciones practicas se requiere para determinar la capacidad de transporte de un canal determinado, o para la construcción de una curva de calibración sintética del canal.
2. *Cálculo de la velocidad V* : Se requiere para el estudio de la erosión y sedimentación en canales.
3. *Calcular la profundidad normal y_n* : Calculo requerido para establecer el nivel de la lámina de agua en un canal (ver sección 3).
4. *Cálculo de la rugosidad del canal n* : Se calcula el n del canal y puede usarse para la solución de otros problemas en canales en condiciones similares.
5. *Cálculo de la pendiente del canal S_o* : Se calcula para determinar la pendiente requerida de un canal determinado bajo ciertas condiciones de flujo y rugosidad.

Analizando lo anterior, la solución de cualquiera de los anteriores problemas, excepto el del calculo de y_n , se hace usando la ecuación de Manning y la ecuación de continuidad de manera explicita por lo que su cálculo es relativamente simple.

5 Diseño de canales

El diseño de canales involucra la selección del trazado, forma de la sección, pendiente del fondo, velocidad permitida y recubrimiento. Cabe aclarar que canales recubiertos ofrecen menor fricción por lo que el tamaño de la sección para un caudal determinado es menor que para un canal sin recubrimiento. El diseño de canales se hace asumiendo flujo uniforme y el cálculo se hace por prueba y error de tal manera que de acuerdo con los requerimientos del diseño y los parámetros escogidos el canal sea operativamente viable. Esto quiere decir que el factor decisivo es el económico, es decir, se escoge el diseño más barato entre una combinación de alternativas todas operativamente posibles. Este análisis de costos debe incluir los costos operativos y de mantenimiento. En muchos casos se asume flujo gradualmente variado de tal manera que el tamaño del canal sea determinado de forma óptima. El diseño de canales se puede dividir en dos categorías: canales no erosionables (recubrimiento rígido) y canales erosionables (no recubiertos).

5.1 Canales no erosionables

En el diseño de canales no erosionables, se escoge el tipo de sección, el material de recubrimiento y el tamaño de tal manera que el canal sea capaz de transportar el caudal de diseño con un borde libre (F_b) que se define como la diferencia entre la superficie del agua (de acuerdo con y_n) y la parte superior de las banquetas del canal en unidades de longitud. Ese borde libre tiene en cuenta la incertidumbre de los cálculos y de los parámetros escogidos, así como perturbaciones del flujo (e.g. olas). De acuerdo con U.S. Bureau of Reclamation, $F_b = \sqrt{ky}$, donde y es la profundidad del agua en metros y k es un factor igual a 0.8 para caudales cercanos a $0.5 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, e igual 1.4 para caudales mayores $85 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$.

La alineación del canal debe ser tal manera que sea lo más corto posible permitiendo el fácil acceso para el mantenimiento así como otras consideraciones constructivas. La pendiente es determinada por la topografía y junto con la forma y el tamaño de la sección deben garantizar el transporte del caudal de diseño y minimizar los costos de su construcción. La velocidad debe garantizar que no haya erosión del material de revestimiento así como la no sedimentación de material. Las velocidades mínimas en un canal varían entre 0.6 y 0.9 m/s y velocidades por debajo de 12 m/s con flujo bajo en sedimentos son

apropiadas en canales de concreto. Es común entonces encontrar que canales rectangulares son comunes para el transporte de caudales menores (e.g. Cunetas de vías) mientras que canales trapezoidales son construidos para transportar mayores caudales (e.g. Aguas lluvias en ciudades). Los canales de sección circular son comunes en el paso de vías y a través de sistemas rocosos.

Algoritmo 3: Diseño de canales no erosionables

1. Lea el caudal Q de diseño y C_o .
2. Seleccione el material de revestimiento y con esto el n de Manning. Con base en la topografía y aspectos constructivos, seleccione la pendiente del canal S_o .
3. Para unos valores escogidos de la geometría del canal como la base b y la pendiente lateral s , resolver la ecuación de Manning (ecuación 17) para encontrar y_n . Este proceso es iterativo teniendo en cuenta que se debe encontrar una relación b/y_n que garantice la mejor sección hidráulica (ver sección 5.2).
4. Con el fin de evitar procesos de sedimentación en el canal, revisar que $V > V_{min}$. Si esto es falso, ir a los pasos 2 y 3 y revisar estos parámetros. Si es verdad, ir al paso 7.
5. Agregar un borde libre F_b al canal.

Ejemplo 3

Diseñar un canal trapezoidal para transportar un caudal de $10 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. El canal será escavado en roca ($n = 0.030$) y la pendiente del terreno es 4000:1. La pendiente lateral s es 1:4.

5.2 Sección óptima de un canal

El diseño de canales en ingeniería requiere determinar la sección óptima (aquella que garantice la menor resistencia al flujo) en un canal para unas condiciones dadas. Usando la ecuación de Manning (ecuación ??) es posible maximizar el radio hidráulico (R_h) para un área (A) y un caudal (Q) dado. Teniendo en cuenta que $R_h = A/P$, para maximizar R_h debemos minimizar el perímetro (P).

Considerando el canal trapezoidal de la figura 12, el área y el perímetro se pueden calcular como:

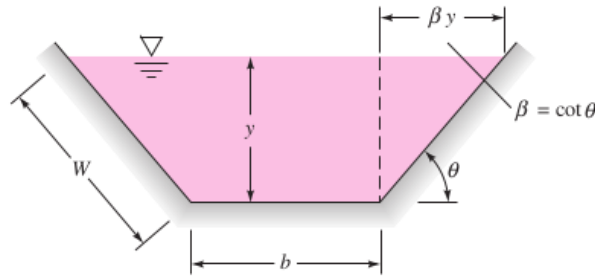


Figure 12: Geometría de un canal trapezoidal (tomado de [?]).

$$A = by + \beta y^2 \quad (24)$$

$$P = b + 2W = b + 2y(1 + \beta^2)^{1/2} \quad (25)$$

donde $\beta = \cot \theta$ y $y = y_n$. Note que $W = \sqrt{y^2\beta^2 + y^2} = y(\beta^2 + 1)^{1/2}$. Asumiendo que b es un dato dado, se despeja de la ecuación 24:

$$b = \frac{A}{y} - y\beta \quad (26)$$

y de la ecuación 25:

$$b = P - 2y(1 + \beta^2)^{1/2} \quad (27)$$

igualando las ecuaciones 26 y 27 y despejando para P , se tiene:

$$P = \frac{A}{y} - y\beta + 2y(1 + \beta^2)^{1/2} \quad (28)$$

Para minimizar P , se obtiene dP/dy de la ecuación 28 tomando como constantes A y β :

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{A}{y^2} - \beta + 2(1 + \beta^2)^{1/2} \quad (29)$$

igualando $dP/dy = 0$ y despejando y se obtiene el valor de y que minimiza P :

$$y = \left[\frac{A}{2(1 + \beta^2)^{1/2} - \beta} \right]^{1/2} \quad (30)$$

Despejando A de la ecuación 30 y reemplazando en la ecuación 28 para P , la geometría optima de un canal trapezoidal para un ángulo θ dado es:

$$A = y^2 \left[2(1 + \beta^2)^{1/2} - \beta \right] \quad P = 4y(1 + \beta^2)^{1/2} - 2\beta y \quad R_h = \frac{y}{2} \quad (31)$$

La ecuación 31 indica que para un ángulo θ dado, la sección transversal más eficiente de un canal en flujo uniforme ocurre cuando el radio hidráulico es igual a la mitad de la profundidad normal. Igualando las ecuaciones 25 y 31 para P , se tiene una expresión para la base inferior del canal b :

$$b = 2y \left(\sqrt{1 + \beta^2} - \beta \right) \quad (32)$$

y la base superior b_s

$$b_s = b + 2\beta y = 2y \left(\sqrt{1 + \beta^2} \right) \quad (33)$$

Teniendo en cuenta que cuando $\theta = 90^\circ$ $\beta = 0$ por lo que tenemos un canal rectangular, reemplazando esto en las ecuaciones 31 se tiene la sección más eficiente para un canal rectangular:

$$A = 2y^2 \quad P = 4y \quad R_h = \frac{y}{2} \quad b = 2y \quad (34)$$

Para encontrar la profundidad correcta, es necesario solucionar las ecuaciones anteriores en conjunto con la ecuación ?? para un caudal dado.

Es posible encontrar el mejor ángulo θ del canal trapezoidal para un área y una profundidad dada. Evaluando $dP/d\beta$ para A y y constante se tiene:

$$\frac{dP}{d\beta} = -y + 2\beta y(1 + \beta^2)^{-1/2} \quad (35)$$

igualando la ecuación 36 a cero se tiene:

$$2\beta = (1 + \beta^2)^{1/2} \quad \beta = \cot \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \theta = 60^\circ \quad (36)$$

Esto indica que para una profundidad dada, el ángulo θ óptimo es 60° , o que la sección óptima (la que maximiza el flujo) es la mitad de un hexágono.

Si se circunscribe una sección circular de radio R en la sección trapezoidal donde $\theta = 60^\circ$, se tiene que $R = \frac{1}{2}b_s \sin \theta$. Reemplazando b_s en esta ecuación y sabiendo que $\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, se tiene que $R = y$. Esto demuestra que una sección circular tiene su máxima eficiencia cuando $y = R$ (semicírculo).

Para una sección triangular ($b = 0$ en la figura 12), el área y el perímetro son:

$$A = \beta y^2 \quad (37)$$

$$P = 2W = 2y (1 + \beta^2)^{1/2} \quad (38)$$

Despejando y de la ecuación 37 se tiene que $y = \left(\frac{A}{\beta}\right)^{1/2}$. Reemplazando en la ecuación 38, el perímetro es:

$$P = 2W = 2 \left(\frac{A}{\beta}\right)^{1/2} (1 + \beta^2)^{1/2} \quad (39)$$

derivando P con respecto a β en la ecuación 39, se tiene:

$$\frac{dP}{d\beta} = 2A^{1/2} \left[\beta (1 + \beta^2)^{-1/2} \beta^{-1/2} - \frac{1}{2} \frac{(1 + \beta^2)^{1/2}}{\beta^{3/2}} \right] \quad (40)$$

Haciendo $dP/d\beta = 0$, se tiene:

$$\frac{\beta^{1/2}}{(1 + \beta^2)^{1/2}} = \frac{(1 + \beta^2)^{1/2}}{2\beta^{3/2}} \quad (41)$$

Solucionando la ecuación 41, se tiene que $\beta = 1$. Esto quiere decir que una sección triangular con $\theta = 45^\circ$ es la más eficiente.

Ejemplo 4

Para un canal rectangular en ladrillo ($n = 0.015$) diseñado para transportar $5 \text{ m}^3/\text{s}$ y con una pendiente de $S_o = 0.001$, determinar las mejores dimensiones para y y b . Realizar los mismos cálculos si la sección transversal del canal es la mitad de un hexágono y si es un semicírculo. Comparar los resultados.

5.3 Canales erosinables

Para canales excavados en terrenos blandos sin ningún tipo de revestimiento, es posible que se presente erosión de la sección si no se escoge un tamaño y una pendiente adecuados. Existen dos métodos para el análisis de este tipo de canales que son tratados a continuación.

5.3.1 Metodo de la velocidad permisible

El tamaño de la sección del canal se escoge de tal manera que V , bajo el supuesto de flujo uniforme, sea menor a una *velocidad permisible*. Esta velocidad permisible es aquella para la cual no se presenta erosión en la sección del canal. Esta velocidad depende principalmente del tipo de suelo y del tamaño de las partículas. Sin embargo también depende de la profundidad de agua y de la alineación del canal. Esto debido a que para la misma velocidad media del flujo, la velocidad del flujo en el fondo es mayor cuando la profundidad es baja que cuando es alta. De la misma manera, canales curvos presentan corrientes secundarias que que aceleran el flujo hacia la parte externa de la curva causando erosión en las orillas.

La sección trapezoidal es la más usada y las pendientes de los taludes s deben ser escogidas de tal manera que garanticen la estabilidad del material en las orillas. La tabla 4 presenta valores recomendados de s para diferentes tipos de material. De manera similar, la tabla 5 presenta valores de velocidades permisibles para diferentes materiales en canales rectos y profundidad de agua de 1 m. En el caso de canales con algo de sinuosidad, la velocidad permisible se debe reducir en 5%, para canales con sinuosidad media, la velocidad se debe reducir en 13% y para canales con alta sinuosidad, la velocidad se debe reducir en 22%. Para canales muy anchos y con profundidades diferentes a un 1 m, la velocidad permisible se debe multiplicar por un factor de corrección $k = y^{1/6}$, donde y es la profundidad del flujo.

Material	s
Roca	Casi vertical
Arcilla resistente	1:0.5 hasta 1:1
Suelo firme	1:1
Suelo arenoso	2:1
Suelo con arenas, arcilla y limos	3:1

Table 4: Pendiente lateral en canales trapezoidales (tomado de [?]).

Material	V (m/s)
Arena fina	0.6
Arena gruesa	1.2
<i>Suelo</i>	
- limo arenoso	0.6
- limo arcilloso	1.1
- arcilloso	1.8
<i>Suelo con pasto Bermuda</i>	
- limo arenoso	1.8
- limo arcilloso	2.4
<i>Suelo con pasto Kentucky</i>	
- limo arenoso	1.5
- limo arcilloso	2.1
<i>Roca blanda</i>	
- arenisca blanda	2.4
- lutita blanda	1.1
Roca dura	6.1

Table 5: Velocidades permisibles (tomado de [?]).

Algoritmo 4: Diseño de canales erosionables: método de la velocidad permisible

1. Leer el caudal Q de diseño, la pendiente del canal S_o y C_o .
2. De acuerdo con el material excavado, seleccione el n de Manning, el s de acuerdo con la tabla 4, y la velocidad permisible V de la table 5.
3. De la ecuación de Manning (ecuación 17), calcular R .
4. De la ecuación de continuidad, $Q = AV$, calcular A .
5. Calcular el perímetro mojado P , a partir de $P = A/R$.
6. De las ecuaciones para P y A , estimar el ancho del canal b y la profundidad normal y_n .
7. Agregar un borde libre F_b al canal.

Ejemplo 5

Diseñar un canal para transportar un caudal de $6.91 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. El canal será excavado en arcilla resistente con una pendiente del terreno $S_o = 0.00318$.

5.3.2 Método de la fuerza tractiva

La erosión de las partículas del material de la sección de un canal se puede comprender mejor a través del análisis de la *fuerza tractiva*. El análisis de fuerzas indica que una partícula de material permanecerá estable si las fuerzas de cohesión son mayores que las *fuerzas de arrastre* debido a los esfuerzos cortantes ejercidos por el flujo sobre las paredes y el fondo del canal. Para flujo uniforme en un canal recto, la fuerza tractiva es igual a la componente del peso del fluido en la dirección del flujo.

Si se considera un canal recto de longitud L , con un área mojada A y con pendiente S_o , el peso del volumen del fluido para L es γAL . De acuerdo con esto, la componente de dicho peso en la dirección del flujo es γALS_o (note que para S_o pequeñas, $\sin \theta \approx \tan \theta \approx S_o$). La fuerza tractiva por unidad de área o el esfuerzo cortante sobre el área mojada del tramo de canal PL , se define como $\tau_o = \frac{\gamma ALS_o}{PL} = \gamma RS_o$, donde R es el radio hidráulico. Para canales muy anchos, $R \simeq y$ por lo tanto $\tau_o = \gamma y S_o$. La distribución de esfuerzos cortantes o de fuerza tractiva por unidad de área sobre la sección del canal no es uniforme. Sin embargo, se ha encontrado que para canales trapezoidales anchos, $\tau_o = \gamma y S_o$ en el fondo y en las paredes $\tau_o = 0.76 \gamma y S_o$.

El esfuerzo cortante necesario para iniciar el movimiento de una partícula se denomina *esfuerzo cortante crítico* τ_c y depende del tamaño del material y de la cohesión de las partículas. Note que este esfuerzo es mayor para partículas sobre el fondo que para partículas sobre las paredes del canal, ya que el movimiento de esas últimas está influenciada por la gravedad. Considere una partícula de material sobre la pared de un canal cuyo ángulo de inclinación de la pared del canal es θ , a es el área efectiva de la partícula, W_s es el peso sumergido de la partícula, ϕ es el ángulo de reposo del material y τ_s es el esfuerzo cortante sobre las paredes del canal (ver figura 13).

Existen dos fuerzas que tienden a desequilibrar la partícula: 1) la fuerza tractiva que se calcula como $\tau_s a$, y la componente del peso de la partícula a lo largo de la pared del canal $W_s \sin \theta$. La resultante de estas dos fuerzas es:

$$R = \sqrt{W_s^2 \sin^2 \theta + a^2 \tau_s^2}$$

La fuerza normal a la pared del canal se calcula como $W_s \cos \theta \tan \phi$ y evita el movimiento de la partícula. La partícula está en equilibrio si las fuerzas que propician el movimiento son iguales a las que se oponen a este, por lo que:

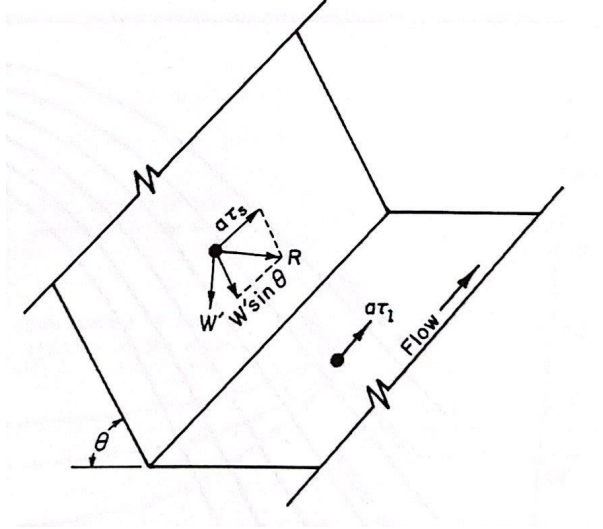


Figure 13: Fuerzas actuantes sobre una partícula en una pared de un canal (tomado de [?]).

$$W_s \cos \theta \tan \phi = \sqrt{W_s^2 \sin^2 \theta + a^2 \tau_s^2}$$

Despejando de esta ecuación τ_s , se tiene:

$$\tau_s = \frac{W_s}{a} \cos \theta \tan \phi \sqrt{1 - \frac{\tan^2 \theta}{\tan^2 \phi}} \quad (42)$$

La fuerza que impide el movimiento sobre una superficie nivelada es $W_s \tan \phi = a \tau_l$, donde τ_l es el esfuerzo cortante que impide el movimiento de la partícula sobre una superficie nivelada. Por lo tanto:

$$\tau_l = \frac{W_s}{a} \tan \phi$$

Reemplazando en la ecuación 42, se tiene:

$$K = \frac{\tau_s}{\tau_l} = \cos \theta \sqrt{1 - \frac{\tan^2 \theta}{\tan^2 \phi}} \quad (43)$$

donde K se denomina el factor de reducción del esfuerzo crítico sobre las paredes del canal.

Los efectos debido al ángulo de reposo del material se consideran para material grueso sin cohesión. Para material fino cohesivo y no cohesivo, la componente del peso a lo largo de la pared es muy pequeña con respecto a las fuerzas cohesivas por lo cual se pueden despreciar. La figura 14 muestra el ángulo de reposo para material no cohesivo cuyo diámetro, para más del 25% del peso total del material, es > 5 mm. Los esfuerzos críticos para material no cohesivo se muestran en la figura 15 y para material cohesivo en la figura 16 para canales rectos. Estos valores de τ_c deben reducirse en 10% para canales algo sinuosos, en 25% para canales moderadamente sinuosos y en 40% para canales muy sinuosos.

El diseño de canales por el método de la fuerza tractiva involucra la escogencia de una sección transversal de tal manera que la fuerza tractiva por unidad de área (τ_s) actuante sobre las paredes del canal sea igual al esfuerzo crítico (τ_c) que resistiría el material del canal. Al final de la escogencia de la sección, se debe cumplir que el esfuerzo cortante sobre el fondo del canal sea menor que τ_c .

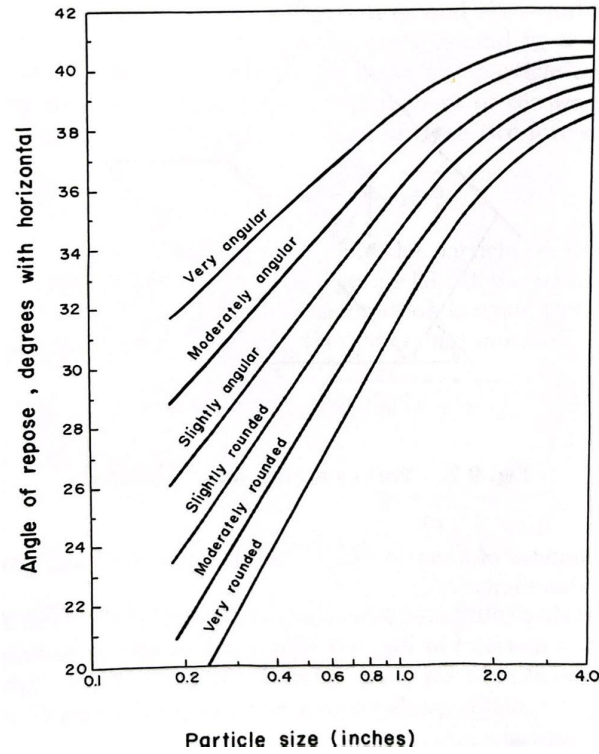


Figure 14: Ángulo de reposo (ϕ) para material no cohesivo para partículas de diámetro > 5 mm (tomado de [?]).

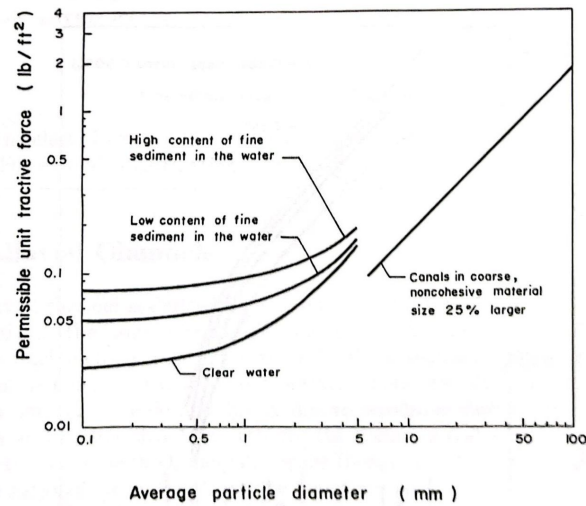


Figure 15: Esfuerzo cortante crítico (τ_c) para material no cohesivo (tomado de [?]).

Algoritmo 5: Diseño de canales erosionables: método de la fuerza tractiva

1. Leer el caudal Q de diseño, la pendiente del canal S_o y C_o .
2. De acuerdo con el material excavado, seleccione el n de Manning, el s de acuerdo con la tabla 4, el ángulo de reposo ϕ del material a partir de la figura 14 y el esfuerzo crítico τ_c de la figura 15, si el material es no cohesivo, o de la figura 16 si el material es cohesivo. Ajustar τ_c dependiendo de la sinuosidad del canal.
3. Para material no cohesivo, calcular el factor de reducción K a partir de la ecuación 43. Calcular el esfuerzo cortante de las paredes $\tau_s = K\tau_c$.
4. Igualar τ_s , calculado en el paso anterior, a $0.76\gamma y S_o$, de donde se determina $y = \frac{\tau_s}{0.76\gamma S_o}$.

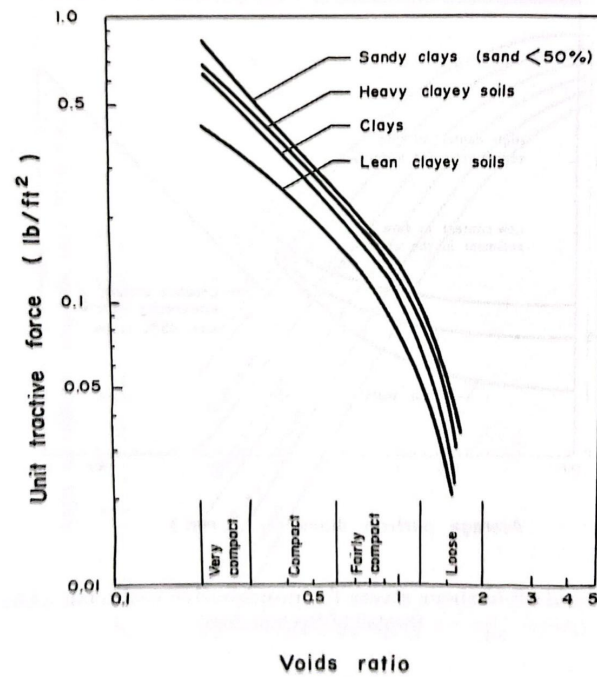


Figure 16: Esfuerzo cortante crítico (τ_c) para material cohesivo (tomado de [?]).

Ejemplo 6

Diseñar un canal trapezoidal recto para transportar un caudal de $10 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. El canal será excavado en grava fina de diámetro 8 mm con una pendiente del terreno $S_o = 0.00318$. Asumir que las partículas de grava son casi redondas y la concentración de sedimentos en suspensión en el flujo es baja.