

# Estructuras Hidráulicas [2015961]

## Tema # 2: Flujo uniforme

Luis Alejandro Morales, Ph.D

Profesor Asistente

Universidad Nacional de Colombia-Bogotá

Facultad de Ingeniería

Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola

### Contents

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Resistencia al flujo</b>	<b>2</b>
2.1	Ecuaciones para la resistencia al flujo . . . . .	2
2.1.1	Ecuación de Chezy . . . . .	2
2.1.2	Ecuación de Manning . . . . .	5
2.1.3	Otras ecuaciones de resistencia . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Cálculo de la profundidad normal</b>	<b>7</b>
3.1	Canales artificiales . . . . .	7
3.2	Canales naturales . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Problemas de calculo en flujo uniforme</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>Diseño de canales</b>	<b>14</b>
5.1	Canales no erosinables . . . . .	14
5.2	Sección óptima de un canal . . . . .	15
5.3	Canales erosinables . . . . .	17
5.3.1	Metodo de la velocidad permisible . . . . .	17
5.3.2	Método de la fuerza tractiva . . . . .	18
<b>6</b>	<b>Flujo critico</b>	<b>22</b>
6.1	Canal Rectangular . . . . .	22
6.1.1	Energía Específica . . . . .	22
6.1.2	Caudal unitario . . . . .	23
6.1.3	Fuerza específica . . . . .	24
6.2	Canal no rectangulares (Prismáticos) . . . . .	24
6.2.1	Energía específica . . . . .	24
6.2.2	Fuerza específica . . . . .	25
6.2.3	Aplicaciones del flujo critico . . . . .	26
6.2.4	Canal horizontal con ancho constante y elevación de fondo . . . . .	26
6.2.5	Canal horizontal con ancho variable . . . . .	26
6.3	Localización del flujo critico . . . . .	28
6.3.1	Canal horizontal rectangular con aumento en el fondo . . . . .	28

6.3.2	Canal horizontal con cambio en el ancho . . . . .	29
6.4	Cálculo de la profundidad crítica . . . . .	29
6.4.1	Canal con una única sección . . . . .	29
6.4.2	Curva de diseño . . . . .	30
7	<b>Métodos numéricos</b>	<b>30</b>
7.1	Método de la Bisección . . . . .	31

## 1 Introducción

En flujo a superficie libre actúan básicamente dos fuerzas: *fuerzas gravitacionales* cuya componente en dirección del flujo en un canal de pendiente positiva acelera el flujo hacia abajo, y las *fuerzas de fricción* debido a la rugosidad del canal que tratan de frenar el flujo. Note que en un canal con pendiente negativa, el flujo trata de desacelerarse. En un canal con pendiente positiva, si las fuerzas de fricción son mayores que las fuerzas gravitacionales, el flujo se desacelera produciendo una elevación de la lámina de agua, lo cual se da gracias al principio de *conservación de la masa*. En el caso contrario, la profundidad de la lámina de agua disminuye y la velocidad aumenta. En canales prismáticos largos, es posible que las dos fuerzas se igualen en alguna sección del canal haciendo que ni la profundidad ni la velocidad cambien a partir de este punto aguas abajo (ver figura 1). Por lo tanto, en un flujo en el cual la profundidad no cambia se le denomina *flujo uniforme* y a la profundidad del flujo *profundidad normal*.

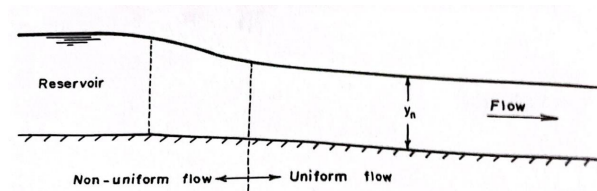


Figure 1: Flujo no uniforme y uniforme en canales (tomado de [?]).

## 2 Resistencia al flujo

En un canal es notorio que la velocidad aumenta desde las orillas y hacia el centro. Lo mismo ocurre al analizar un perfil de velocidades en un canal donde las velocidades aumentan desde el fondo hacia la superficie. Esto se presenta debido a la resistencia al movimiento que ofrece el material del fondo y las orillas del canal que suele ser más pesado que el fluido en movimiento y que el aire que está en la superficie. A pesar que en la realidad los esfuerzos cortantes no son uniformes sobre el perímetro mojado del canal y que existen corrientes secundarias en una sección transversal, para efectos prácticos consideraremos flujo 1D lo que implica velocidades y esfuerzos uniformes en la sección.

### 2.1 Ecuaciones para la resistencia al flujo

En esta sección se presentan algunas ecuaciones que relacionan la resistencia al flujo con otras variables del flujo para, inicialmente, flujo no uniforme, las cuales al simplificarse se usan en flujo uniforme.

#### 2.1.1 Ecuación de Chezy

Consideremos un flujo permanente en un canal prismático y de pendiente baja. Si analizamos un volumen de control dentro del flujo entre dos secciones 1 y 2, la primera a una distancia  $x$  y la otra a una distancia  $x + \Delta x$  a lo largo del canal, en donde la profundidad y la velocidad en 1 es  $y$  y  $V$ , respectivamente, aguas abajo en 2 tenemos que la profundidad es  $y + \frac{dy}{dx} \Delta x$  y  $V + \frac{dV}{dx} \Delta x$  (ver figura 2). Analizando las fuerzas

actuantes sobre el volumen de control tenemos: una fuerza de presión en la sección 1,  $F_1$ ; fuerzas de presión en la sección de salida 2,  $F_2$  y  $F_3$ ; componente del peso del fluido en la dirección del flujo,  $W_x$ ; y la fuerza de fricción en el fondo y paredes del canal que se opone al movimiento,  $F_f$ .

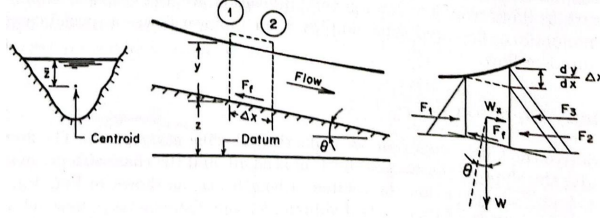


Figure 2: Fuerzas actuantes en un volumen de control de un flujo en un canal (tomado de [?]).

La fuerza de presión en la sección 1 se calculan como  $F_1 = \gamma A \bar{z}$ , donde  $A$  es el área mojada de la sección transversal 1 y  $\bar{z}$  es la profundidad del centroide de la sección. La componente del peso en la dirección del flujo se calcula como  $W_x = \gamma A \Delta x \sin \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo de pendiente del canal. Note que como la pendiente del canal es baja,  $\sin \theta \simeq \tan \theta \simeq -dz/dx$ , por lo tanto  $W_x = -\gamma A \Delta x \frac{dz}{dx}$ . En la sección 2, aguas abajo, actúan dos fuerzas de presión: la fuerza debido a la profundidad ( $F_2$ ) y la fuerza debido a la sobre-elevación en la distancia  $\Delta x$  ( $F_3$ ). De acuerdo con esto,  $F_2 = \gamma A \bar{z}$  y  $F_3 = \gamma A \frac{dy}{dx} \Delta x$ . Como los esfuerzos cortantes ( $\tau_o$ ) sobre las paredes y el fondo del canal son uniformes, la fuerza de fricción se puede calcular como  $F_f = \tau_o P \Delta x$ , donde  $P$  es el perímetro mojado de la sección.

Haciendo sumatoria de las fuerzas actuantes sobre el volumen de control en la dirección del flujo de la figura 2, la fuerza resultante ( $F_r$ ) es:

$$F_r = \sum F = F_1 - F_2 - F_3 + W_x - F_f \quad (1)$$

Sustituyendo las expresiones para cada fuerza en la ecuación 1, tenemos:

$$F_r = -\gamma A \Delta x \left( \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} + \frac{P \tau_o}{\gamma A} \right) \quad (2)$$

Aplicando la ley de conservación de la cantidad de movimiento para el volumen de control de la figura 2, la cual establece que la tasa de cambio de la cantidad de movimiento es igual a la fuerza resultante e igual a  $F_r = \rho AV(V_2 - V_1) = \rho AV \left( (V + \frac{dV}{dx} \Delta x) - V \right) = \rho AV \frac{dV}{dx} \Delta x$ . Igualando a la ecuación 2 y dividiendo por  $\gamma A \Delta x$ :

$$\frac{V}{g} \frac{dV}{dx} = - \left( \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} + \frac{P \tau_o}{\gamma A} \right) \quad (3)$$

Despejando  $\tau_o$  de esta ecuación:

$$\tau_o = -\gamma R \left( \frac{V}{g} \frac{dV}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} \right) \quad (4)$$

donde  $R = A/P$  es el radio hidráulico. Simplificando la ecuación anterior:

$$\tau_o = -\gamma R \frac{d}{dx} \left( z + y + \frac{V^2}{2g} \right) = -\gamma R \frac{dH}{dx} = \gamma R S_f \quad (5)$$

donde  $H$  es la energía total en una sección del flujo y  $S_f = -\frac{dH}{dx}$  es la pérdida de energía en la dirección del flujo o pendiente de la línea de energía. Para flujo uniforme, los términos  $\frac{dV}{dx}$  y  $\frac{dy}{dx}$  de la ecuación 5 son iguales a cero y la  $S_f = S_o = -\frac{dz}{dx}$ . Para flujo uniforme, la ecuación 5 queda:

$$\tau_o = \gamma R S_o \quad (6)$$

Por otra parte, con base en *análisis dimensional*, se tiene que:

$$\tau_o = \kappa \rho V^2 \quad (7)$$

donde  $\kappa$  es un coeficiente adimensional que depende del número de Reynolds ( $Re$ ) y de la rugosidad de canal. Igualando las ecuaciones 5 y 7 y despejando para  $V$ , tenemos:

$$V = \sqrt{\frac{gRS_f}{\kappa}} \quad (8)$$

La ecuación 8 puede ser escrita como:

$$V = C \sqrt{RS_f} \quad (9)$$

donde  $C = \sqrt{\frac{g}{\kappa}}$  es el *coeficiente de Chezy*. Note que la ecuación 9 es para flujo permanente y no uniforme. Para el caso del flujo permanente y uniforme, igualando las ecuaciones 6 y 7, se tiene:

$$V = C \sqrt{RS_o} \quad (10)$$

Note que en flujo uniforme, la pendiente de la línea de energía, la pendiente de la línea de gradiente hidráulico y la pendiente del canal son iguales.

Por otro lado,  $C$  tiene unidades de  $\sqrt{L}/T$  y depende de  $Re$  y de la rugosidad del canal. La *ecuación de Darcy-Weisbach* para tuberías:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (11)$$

donde  $f$  es un factor de fricción adimensional que depende de  $Re$  y de la rugosidad de la tubería,  $D$  es el diámetro de la tubería y  $L$  es la longitud de la tubería, se puede simplificar:

$$V = \sqrt{\frac{2gDS}{f}} \quad (12)$$

donde  $S = \frac{h_f}{L}$ . La ecuación 9, se convierte en, donde  $R = D/4$ :

$$V = C \sqrt{\frac{DS}{4}} \quad (13)$$

Igualando las ecuaciones 12 y 14, se tiene que:

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} \quad (14)$$

El *diagrama de Moody* se puede expresar en función de  $C$  y del  $Re$  (ver figura 3). Este diagrama está dividido en tres regiones que reflejan el tipo de flujo: hidráulicamente lisa, transición y totalmente rugosa. Un flujo en la región hidráulicamente lisa es un flujo laminar que no necesariamente posee una rugosidad baja. En la medida en que  $Re$  aumenta, la subcapa laminar decrece y los efectos rugosos son importantes entrando en la región de transición. Sin embargo, cuando la rugosidad no es cubierta por la subcapa viscosa y existen pérdidas de energía, el flujo es clasificado como completamente rugoso. El flujo se puede clasificar dependiendo al número adimensional  $R_s = \frac{kV^*}{\nu}$ , donde  $\nu$  es la viscosidad cinemática del fluido y  $k$  es una longitud característica de la rugosidad de la superficie del canal.  $V^*$  es la velocidad cortante expresada como  $V^* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} = \sqrt{gRS_f}$ . Por lo tanto:

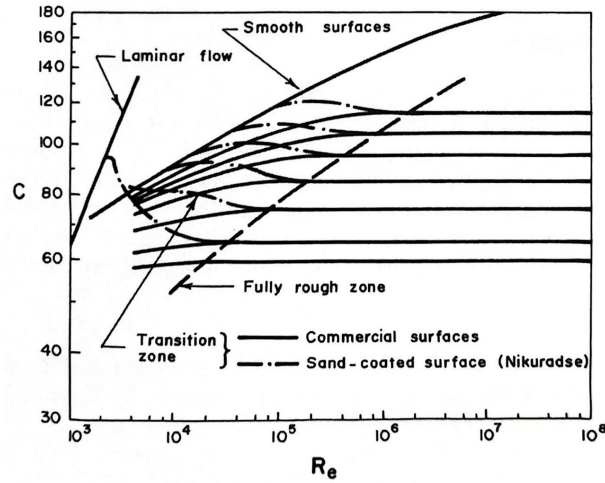


Figure 3: Diagrama de Moody modificado (tomado de [?]).

- Si  $R_s < 4$ , *flujo hidráulicamente liso*
- Si  $4 < R_s < 100$ , *flujo de transición*
- Si  $R_s > 100$ , *flujo completamente rugoso*

Existen expresiones experimentales para calcular  $C$  para el caso de canales relativamente pequeños de superficie lisa ya que estas expresiones fueron obtenidas con base en experimentos en tuberías.

- **Flujo liso**

$$C = \begin{cases} 28.6R_e^{1/8} & \text{if } R_e < 10^5; \\ 4\sqrt{2g} \log_{10} \left( \frac{R_e \sqrt{8g}}{2.51C} \right) & \text{if } R_e > 10^5; \end{cases} \quad (15)$$

- **Flujo rugoso**

$$C = -2\sqrt{8g} \log_{10} \left( \frac{k_s}{12R} + \frac{2.5}{R_e \sqrt{f}} \right) \quad (16)$$

### 2.1.2 Ecuación de Manning

Desde la derivación de la ecuación de Chezy, muchos investigadores han tratado de derivar una expresión para calcular  $C$ . Sin embargo, debido a que  $C$  depende de muchas variables, encontrar una expresión para  $C$  no ha sido fácil. Con base en observaciones de campo, Gauckler y Hagen mostraron que  $C \propto R^{1/6}$ . El Irlandés R. Manning en 1891, encontró la siguiente ecuación a partir de la ecuación de Chezy:

$$V = \frac{C_o}{n} R^{2/3} S_f^{1/2} \quad (17)$$

donde  $n$  es el *coeficiente de rugosidad de Manning* y tiene unidades de  $L^{1/3}/T$ ;  $C_o$  es un coeficiente de conversión de unidades cuyo valor es  $C_o = 1.0$  en *sistema internacional de unidades (SI)* y  $C_o = 1.49$  en *sistema Inglés de unidades (BG)*.  $V$  está dada en  $m/s$  y  $R$  en  $m$  en SI, y  $V$  está dada en  $ft/s$  y  $R$  en  $ft$  en BG.

Note que el valor de  $n$  es el mismo en ambos sistemas.  $n$  depende principalmente de la rugosidad del material del canal, de las irregularidades y de la profundidad de la lámina de agua, entre otros. La tabla 1 muestra los valores más comunes para diferentes tipos de canal y se puede observar como  $n$  aumenta en

Material	$n$
<i>Metales</i>	
Acero	0.012
Hierro fundido	0.013
Metal corrugado	0.025
<i>No metales</i>	
Lucita	0.009
Vidrio	0.010
Cemento	0.011
Concreto	0.013
Madera	0.012
Arcilla	0.013
Ladrillo	0.013
Hormigón lanzado	0.019
Mampostería	0.025
Roca cortada	0.035
<i>Canales naturales</i>	
Limpios y derechos	0.030
Fondo con arena y gravilla	0.040
Fondo con grava y roca	0.050

Table 1: Coeficientes de rugosidad de Manning  $n$  (tomado de [?]).

la medida en que el canal se hace más rugoso; los canales naturales poseen los mayores valores de  $n$  (ver figura 6).

El coeficiente de Manning es difícil de estimar ya que depende de varias variables. Investigaciones han demostrado que  $n$  aumenta en la medida en que la profundidad de la lámina de agua disminuye. En canales revestidos, es común trabajar con un valor de  $n$  constante. Sin embargo cuando la lámina de agua disminuye el valor de  $n$  aumenta. Para canales revestidos con material granular y rocoso

$$n = C_m (3.28d_{50})^{1/6}$$

donde  $d_{50}$  es el diámetro medio de la grava en  $m$ ,  $0.034 \leq C_m \leq 0.039$  para canales con fondo en gravilla. Otra ecuación similar es:

$$n = \frac{(R/0.3048)^{1/6}}{8.6 + 19.97 \log(R/d_{50})}$$

donde  $R$  es el radio hidráulico en  $m$ . Valores de  $n$  para diferentes recubrimientos y diferentes rangos de profundidad se muestran en la figura 7.

Para canales revestidos con vegetación, un  $n$  constante no es adecuado, teniendo en cuenta que la cantidad de vegetación sumergida cambia con el nivel y de igual manera los esfuerzos cortantes. Para estos casos tenemos que:

$$n = \frac{(R/0.3048)^{1/6}}{C + 19.97 \log[(R/0.3048)]^{1.4} S_o^{0.4}}$$

donde  $R$  es el radio hidráulico en  $m$ ,  $S_o$  es la pendiente del fondo del canal y  $C$  es un coeficiente adimensional que depende del tipo de vegetación. La figura 8 muestra valores de  $C$  para diferentes tipos de vegetación.

### 2.1.3 Otras ecuaciones de resistencia

En Europa, la *ecuación de Strickler* ha sido ampliamente usada:

$$V = k_s R^{2/3} S_f^{1/2} \quad (18)$$

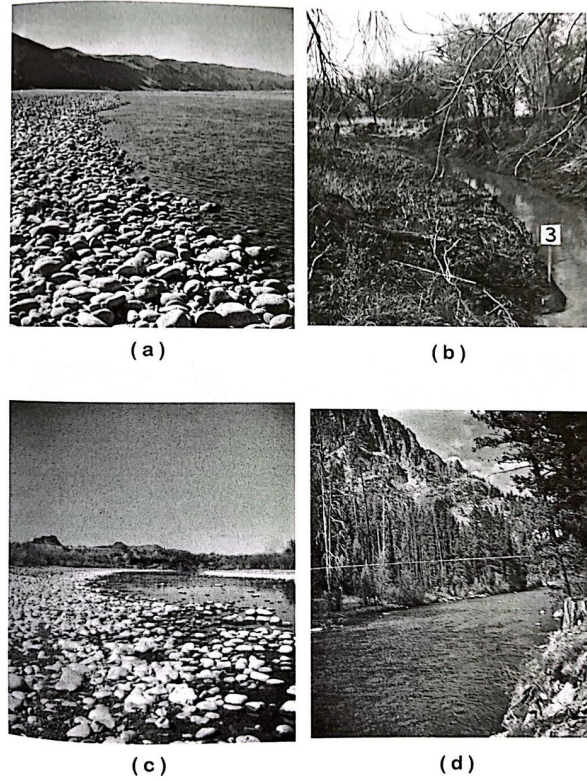


Figure 4: Valores de  $n$  para canales naturales: a) Río Columbia, Washington,  $n = 0.024$ , b) Quebrada Salada, Nebraska,  $n = 0.030$ , c) Río Salado, Arizona,  $n = 0.032$  y d) Río Bitterroot, Montana,  $n = 0.036$  (tomado de [?]).

donde  $k_s$  es la *constante de Strickler*, la cual en sistema internacional se calcula como  $k_s = \frac{21.1}{k^{1/6}}$  donde  $k$  es la rugosidad media del material en  $mm$ . Algunos valores de  $k$  se muestran en la tabla 2.

Material	$k$ (mm)
Hierro fundido nuevo	0.5-1.0
Hierro fundida usado	1.0-1.5
Acabado en cemento	0.3-0.8
Acabado rugoso en cemento	1.0-2.0
Madera rugosa	1.0-2.5
Mampostería rugosa	8.0-15

Table 2: Tamaño de la rugosidad  $k$  (tomado de [?]).

Las ecuaciones 17 y 18 se relacionan como  $k_s = \frac{1}{n}$ .

### 3 Cálculo de la profundidad normal

#### 3.1 Canales artificiales

En muchos problemas de ingeniería, dado el  $Q$  y las características del canal y del fluido es necesario estimar la profundidad normal  $y_n$ . Dicha estimación se hace solucionando la ecuación 17 para  $y_n$ . Los procedimientos aquí mencionados son también aplicables a la ecuación 18 teniendo en cuenta que  $n = 1/k_s$ .



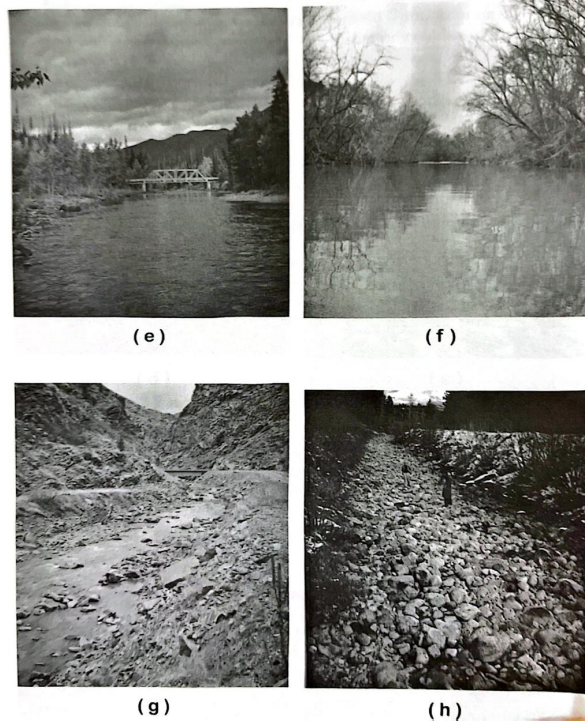


Figure 5: Valores de  $n$  para canales naturales: a) Río Columbia, Washington,  $n = 0.024$ , b) Quebrada Salada, Nebraska,  $n = 0.030$ , c) Río Salado, Arizona,  $n = 0.032$  y d) Río Bitterroot, Montana,  $n = 0.036$  (tomado de [?]).

La ecuación 17 se puede expresar como:

$$AR^{2/3} = \frac{nQ}{C_o S_o^{1/2}} \quad (19)$$

en donde el lado derecho es una función de  $y_n$ . La figura 8 muestra una gráfica de diseño de  $\frac{AR^{2/3}}{b^{8/3}}$  vs  $y_n/b$  para canales trapezoidales y de  $\frac{AR^{2/3}}{d^{8/3}}$  vs  $y_n/d$  para canales circulares, donde  $b$  es el ancho del canal en la base y  $d$  es el diámetro del canal circular. Si se conoce  $Q$ ,  $n$  y  $S_o$  es posible conocer  $AR^{2/3}$  con la ecuación 19, el valor de  $y_n$  puede encontrarse usando la figura 9.

El cálculo de  $y_n$  se puede realizar mediante la aplicación de métodos numéricos para la solución de ecuaciones implícitas. En la tabla 3 se presenta la geometría para las secciones transversales típicas de canales artificiales.

Tipo	Perímetro(P)	Área(A)	Variable	
Rectangular	$b + 2y_n$	$by_n$	$y_n$	
Triangular	$y_n \left( \frac{1}{\sin \theta_1} + \frac{1}{\sin \theta_2} \right)$	$\frac{y_n^2}{2} \left( \frac{1}{\tan \theta_1} + \frac{1}{\tan \theta_2} \right)$	$y_n$	
Trapezoidal	$y_n \left( \frac{1}{\sin \theta_1} + \frac{1}{\sin \theta_2} \right) + b$	$\frac{y_n}{2} \left[ y_n \left( \frac{1}{\tan \theta_1} + \frac{1}{\tan \theta_2} \right) + 2b \right]$	$y_n$	
Circular	$2r\theta$	$r^2 \left( \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right)$	$y_n = r$	Si $\theta = 90$
			$y_n = r(1 - \cos \theta)$	Si $0 < \theta < 90$
			$y_n = r(1 + \sin \theta)$	Si $90 < \theta < 180$

Table 3: Propiedades geométricas para diferentes secciones transversales de un canal. La notación de las ecuaciones se puede observar en figura 10.



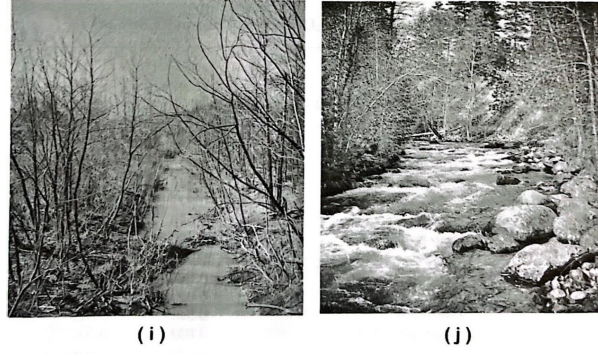


Figure 6: Valores de  $n$  para canales naturales: a) Río Columbia, Washington,  $n = 0.024$ , b) Quebrada Salada, Nebraska,  $n = 0.030$ , c) Río Salado, Arizona,  $n = 0.032$  y d) Río Bitterroot, Montana,  $n = 0.036$  (tomado de [?]).

Channel	Type	n		
		Depth Range		
		(0-150 mm)	(150-600 mm)	(>600 mm)
Rigid	Concrete	0.015	0.013	0.013
	Grouted Riprap	0.040	0.030	0.028
	Stone Masonry	0.042	0.032	0.030
	Soil Cement	0.025	0.022	0.020
	Asphalt	0.018	0.016	0.016
Unlined	Bare Soil	0.023	0.020	0.020
	Rock Cut	0.045	0.035	0.025
Temporary	Woven Paper Net	0.016	0.015	0.015
	Jute Net	0.028	0.022	0.019
	Fiberglass Roving	0.028	0.021	0.019
	Straw with Net	0.065	0.033	0.025
	Curled Wood Mat	0.066	0.035	0.028
	Synthetic Mat	0.036	0.025	0.021
Gravel Riprap	25mm D50	0.044	0.033	0.030
	50 mm D50	0.066	0.041	0.034
Rock Riprap	150 mm D50	0.104	0.069	0.035
	300 mm D50	–	0.078	0.040

\* After Chen and Cotton [1988]

Figure 7: Valores de  $n$  para diferentes recubrimientos y rangos de profundidades (tomado de [?]).

Reemplazando  $R = \frac{A}{P}$  en la ecuación 17 para cualquiera de las secciones de la tabla 3, se obtiene una ecuación implícita en  $y_n$ , con excepción de la sección circular en donde la función es implícita para  $0^\circ < \theta < 180^\circ$ . La ecuación a resolver es:

$$\begin{aligned}
 f(y_n) &= Q - A \frac{C_o}{n} R^{2/3} S_o^{1/2} = 0 && \text{Para todas las secciones excepto la circular} \\
 f(\theta) &= Q - A \frac{C_o}{n} R^{2/3} S_o^{1/2} = 0 && \text{Para la sección circular}
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

Para resolver la ecuación 20, se presenta a continuación un procedimiento con base en el *método de bisección*:

Class	Cover	Condition	C
A	Weeping lovegrass	Excellent stand, tall (average 760 mm)	15.8
B	Yellow Bluestem Ischaemum Kudzu Bermuda Grass Native Grass Mixture (little bluestem, bluestem, blue gamma, and other long and short Midwest grasses) Weeping lovegrass Lespedeza sericea Alfalfa Weeping lovegrass Kudzu Blue Gamma	Excellent stand, tall (average 910 mm) Very dense growth, uncut Good stand, tall (average 300 mm)  Good stand, unmowed  Good stand, tall (average 610 mm) Good stand, not woody, tall (average 480 mm) Good stand, uncut (average 280 mm) Good stand, unmowed (average 330 mm) Dense growth, uncut Good stand, uncut (average 280 mm)	23.0
C	Crabgrass Bermuda grass Common Lespedeza Grass-Legume mixture-summer (orchard grass, redtop, Italian ryegrass, and common lespedeza) Centipedegrass Kentucky Bluegrass	Fair stand, uncut 250 to 1200 mm Good stand, mowed (average 150 mm) Good stand, uncut (average 280 mm) Good stand, uncut (150 to 200 mm)  Very dense cover (average 150 mm) Good stand, headed (150 to 300 mm)	30.2
D	Bermuda grass Common Lespedeza Buffalo grass Grass-legume mixture-fall, spring Lespedeza sericea	Good stand, cut to 60-mm height Excellent stand, uncut (average 110 mm) Good stand, uncut (80 to 150 mm) Good stand, uncut (100 to 130 mm) After cutting to 50-mm height. Very good stand before cutting.	34.6
E	Bermuda grass Burned stubble	Good stand, cut to height 40-mm	37.7

Figure 8: Valores de  $C$  para diferentes tipos de recubrimiento con vegetación (tomado de [?]).

#### Algoritmo 1: Calculo de $y_n$ por el método de la bisección en canales artificiales

1. Leer la siguiente información:

- (a) Para la todas las secciones excepto la circular leer:  $n$ ,  $C_o$ ,  $S_o$ ,  $Q$ ,  $b$ ,  $\theta_1$  y  $\theta_2$ . Note que para la sección rectangular  $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$ , y para la sección triangular  $b = 0$ .
- (b) Para la sección circular leer:  $n$ ,  $C_o$ ,  $S_o$ ,  $Q$ ,  $R$  y  $\theta$ .

2. Definir los límites de iteración,  $a$  y  $b$ , para el método de bisección:

- (a) Para todas las secciones excepto la circular leer:  $a = 0.01$  y  $b = 1000$  ( $a \leq y_n \leq b$ ). Note que  $y_n > 0$  y que  $\text{sign}(f(a)) \neq \text{sign}(f(b))$ . Note que la función  $\text{sign}$  extrae el signo de  $f$ .
- (b) Para la sección circular leer:  $a = 0.01^\circ$  y  $b = 179.9^\circ$  ( $a \leq \theta \leq b$ ). Note que  $0^\circ < \theta < 180^\circ$ , y que  $\text{sign}(f(a)) \neq \text{sign}(f(b))$ .

3. Si  $N \leq N_{max} = 10000$  ir a 4. Si  $N > N_{max}$  ir a 3.

4. Calcular  $C = \frac{a+b}{2}$ .

5. Calcular  $f(c)$  usando la ecuación 20. Si  $|f(c)| < \text{Error}$  o  $\frac{b-a}{2} < \text{Error}$  ir a 2. Si no se cumple alguna de estas condiciones ir a 8.

6. Si  $\text{sign}(f(c)) = \text{sign}(f(a))$ ,  $a = c$ , si no  $b = c$ . Incrementar  $N = N + 1$  e ir 7.

7. Imprimir:

- (a) para todas las secciones exepcto la circular:  $y_n = c$ .
- (b) para la sección circular:  $\theta = c$ . Usar las ecuaciones de la tabla 3 para convertir  $\theta$  en  $y_n$ .

8. Ha fallado la iteración. Revisar datos de entrada y límites iniciales de iteración.

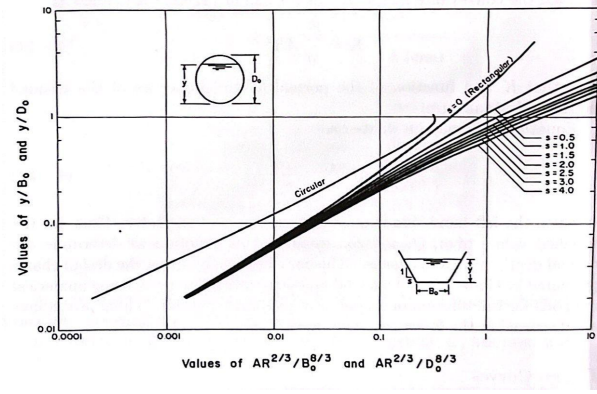


Figure 9: Curvas para calcular  $y_n$  en canales canales circulares y trapezoidales para diferentes valores de la pendiente lateral  $s$  (tomado de [?]).

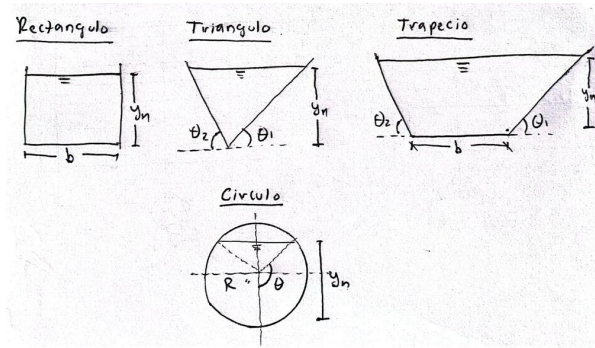


Figure 10: Notación en canales artificiales usada en la tabla 3.

### Ejemplo 1

Un canal trapezoidal en asfalto ( $n = 0.016$ ) y con  $S_o = 0.0015$ , transporta agua con un caudal de  $300 \text{ ft}^3 \text{ s}^{-1}$ . Si el ancho del canal es  $b = 6 \text{ ft}$  y  $\theta_1 = \theta_2 = 50^\circ$ , calcular la profundidad normal ( $y_n$ ).

### Ejemplo 2

Determinar para que relaciones de  $y_n/D$  es posible transportar un caudal máximo y obtener una velocidad máxima en un canal de sección circular.

## 3.2 Canales naturales

En la naturaleza, los canales por los cuales transcurre flujo poseen secciones irregulares como en el caso de ríos y quebradas. Dicha sección cambia en el tiempo debido a procesos de erosión y sedimentación en el fondo y en las orillas producto de cambios en la hidrodinámica del flujo. El cálculo de la profundidad normal se hace con base en la solución de la ecuación de Manning implícita para  $y_n$  siguiendo un método numérico. Si tenemos una sección irregular de un canal como el mostrado en la figura 11, conformada por una serie de  $m$  puntos  $p(x, y)$  con coordenadas espaciales  $x$  y  $y$ , y cuyos coeficientes de Manning están dados entre cada par de puntos  $p_i$  y  $p_{i+1}$  (segmento) para un total de  $m - 1$  coeficientes, el área mojada de la sección para un valor de  $y_n$  se puede calcular como:

$$A = \sum_{i=1}^{m-1} A_i = \sum_{i=1}^{m-1} [(y_n - y_i) + (y_n - y_{i+1})] \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \quad (21)$$

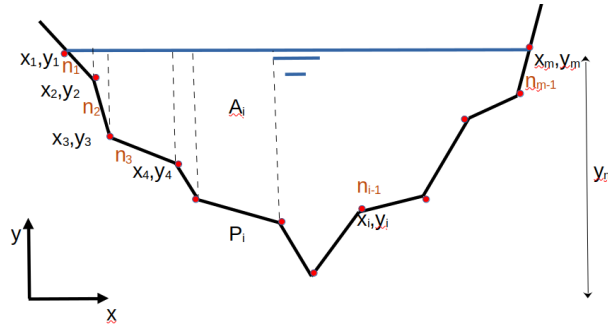


Figure 11: Sección transversal de un cauce irregular (e.g. río).

, perímetro se puede calcular como:

$$P = \sum_{i=1}^{m-1} P_i = \sum_{i=1}^{m-1} \sqrt{(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2} \quad (22)$$

y el coeficiente de rugosidad de Manning como:

$$n = \left( \frac{\sum_{i=1}^{m-1} P_i n_i^{3/2}}{\sum_{i=1}^{m-1} P_i} \right)^{2/3} \quad (23)$$

Note que la ecuación 21 calcula el área mediante la sumatoria de las áreas individuales (trapecios)  $A_i$  formadas entre cada par de puntos  $p_i$  y  $p_{i+1}$ , el perímetro en la ecuación 22 es la sumatoria de las distancias Euclidianas entre cada par de puntos  $p_i$  y  $p_{i+1}$  y el coeficiente de rugosidad de Manning se obtiene usando la ecuación de Horton y Einstein, 1934. Note que  $P_i$  en la ecuación 23 se obtiene utilizando la ecuación 22.

A continuación se muestra un procedimiento para el cálculo de  $y_n$  en canales con sección irregular basado en el método de bisección:

### Algoritmo 2: Cálculo de $y_n$ por el método de la bisección en canales naturales

1. Leer la siguiente información:  $n$ ,  $\alpha$ ,  $S_o$ ,  $Q$ ,  $xs$ ,  $ys$  y  $ns$ . Note que  $xs$  y  $ys$  son dos vectores con las coordenadas  $x$  y  $y$  respectivamente para un número  $m$  de puntos que conforman la sección transversal.  $ns$  es un vector de coeficientes de Manning para los  $m - 1$  segmentos que conforman la sección.
2. Definir los límites de iteración,  $a$  y  $b$ , para el método de bisección:  $a = 0.01$  y  $b = 1000$  ( $a \leq y_n \leq b$ ). Note que  $y_n > 0$  y que  $\text{sign}(f(a)) \neq \text{sign}(f(b))$ . Note que la función  $\text{sign}$  extrae el signo de  $f$ .
3. Si  $N \leq N_{max} = 10000$  ir a 4. Si  $N > N_{max}$  ir a 3.
4. Calcular  $C = \frac{a+b}{2}$ .
5. Con base en las coordenadas dadas ( $xs$  y  $ys$ ), interpolar un nuevo conjunto de puntos para las profundidades normales  $a$ ,  $b$  y  $c$ .
6. Calcular  $f(a)$ ,  $f(b)$  y  $f(c)$  usando la ecuación 20 usando las nuevas secciones interpoladas para  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Note que para evaluar la función es necesario, para cada nuevo conjunto de puntos, calcular el área (ecuación 21), el perímetro (ecuación 22) y la rugosidad de Manning (ecuación 23).
7. Si  $|f(c)| < \text{Error}$  o  $\frac{b-a}{2} < \text{Error}$  ir a 2. Si no se cumple alguna de estas condiciones ir a 8.
8. Si  $\text{sign}(f(c)) = \text{sign}(f(a))$ ,  $a = c$ , si no  $b = c$ . Incrementar  $N = N + 1$  e ir a 7.
9. Imprimir:  $y_n = c$ .
10. Ha fallado la iteración. Revisar datos de entrada y límites iniciales de iteración.

## 4 Problemas de calculo en flujo uniforme

El análisis de flujo uniforme se hace a través de una ecuación de resistencia como la ecuación de Manning y la ecuación de continuidad. Los problemas de flujo uniforme involucran las siguientes variables: caudal de flujo  $Q$ , coeficiente de rugosidad de Manning  $n$ , la profundidad de normal  $y_n$ , la velocidad de flujo  $V$  y la pendiente del canal  $S_o$ . De acuerdo con esto, es posible encontrarse con alguno de los siguientes problemas:

1. *Cálculo del caudal  $Q$* : En aplicaciones practicas se requiere para determinar la capacidad de transporte de un canal determinado, o para la construcción de una curva de calibración sintética del canal.
2. *Cálculo de la velocidad  $V$* : Se requiere para el estudio de la erosión y sedimentación en canales.
3. *Calcular la profundidad normal  $y_n$* : Calculo requerido para establecer el nivel de la lámina de agua en un canal (ver sección 3).
4. *Cálculo de la rugosidad del canal  $n$* : Se calcula el  $n$  del canal y puede usarse para la solución de otros problemas en canales en condiciones similares.
5. *Cálculo de la pendiente del canal  $S_o$* : Se calcula para determinar la pendiente requerida de un canal determinado bajo ciertas condiciones de flujo y rugosidad.

Analizando lo anterior, la solución de cualquiera de los anteriores problemas, excepto el del calculo de  $y_n$ , se hace usando la ecuación de Manning y la ecuación de continuidad de manera explicita por lo que su cálculo es relativamente simple.

## 5 Diseño de canales

El diseño de canales involucra la selección del trazado, forma de la sección, pendiente del fondo, velocidad permitida y recubrimiento. Cabe aclarar que canales recubiertos ofrecen menor fricción por lo que el tamaño de la sección para un caudal determinado es menor que para un canal sin recubrimiento. El diseño de canales se hace asumiendo flujo uniforme y el cálculo se hace por prueba y error de tal manera que de acuerdo con los requerimientos del diseño y los parámetros escogidos el canal sea operativamente viable. Esto quiere decir que el factor decisivo es el económico, es decir, se escoge el diseño más barato entre una combinación de alternativas todas operativamente posibles. Este análisis de costos debe incluir los costos operativos y de mantenimiento. En muchos casos se asume flujo gradualmente variado de tal manera que el tamaño del canal sea determinado de forma óptima. El diseño de canales se puede dividir en dos categorías: canales no erosionables (recubrimiento rígido) y canales erosionables (no recubiertos).

### 5.1 Canales no erosionables

En el diseño de canales no erosionables, se escoge el tipo de sección, el material de recubrimiento y el tamaño de tal manera que el canal sea capaz de transportar el caudal de diseño con un borde libre ( $F_b$ ) que se define como la diferencia entre la superficie del agua (de acuerdo con  $y_n$ ) y la parte superior de las bancas del canal en unidades de longitud. Ese borde libre tiene en cuenta la incertidumbre de los cálculos y de los parámetros escogidos, así como perturbaciones del flujo (e.g. olas). De acuerdo con U.S. Bureau of Reclamation,  $F_b = \sqrt{ky}$ , donde  $y$  es la profundidad del agua en metros y  $k$  es un factor igual a 0.8 para caudales cercanos a  $0.5 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ , e igual 1.4 para caudales mayores  $85 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ .

La alineación del canal debe ser tal manera que sea lo más corto posible permitiendo el fácil acceso para el mantenimiento así como otras consideraciones constructivas. La pendiente es determinada por la topografía y junto con la forma y el tamaño de la sección deben garantizar el transporte del caudal de diseño y minimizar los costos de su construcción. La velocidad debe garantizar que no haya erosión del material de revestimiento así como la no sedimentación de material. Las velocidades mínimas en un canal varían entre 0.6 y 0.9 m/s y velocidades por debajo de 12 m/s con flujo bajo en sedimentos son apropiadas en canales de concreto. Es común entonces encontrar que canales rectangulares son comunes para el transporte de caudales menores (e.g. Cunetas de vías) mientras que canales trapezoidales son construidos para transportar mayores caudales (e.g. Aguas lluvias en ciudades). Los canales de sección circular son comunes en el paso de vías y a través de sistemas rocosos.

#### Algoritmo 3: Diseño de canales no erosionables

1. Lea el caudal  $Q$  de diseño y  $C_o$ .
2. Seleccione el material de revestimiento y con esto el  $n$  de Manning. Con base en la topografía y aspectos constructivos, seleccione la pendiente del canal  $S_o$ .
3. Para unos valores escogidos de la geometría del canal como la base  $b$  y la pendiente lateral  $s$ , resolver la ecuación de Manning (ecuación 17) para encontrar  $y_n$ . Este proceso es iterativo teniendo en cuenta que se debe encontrar una relación  $b/y_n$  que garantice la mejor sección hidráulica (ver sección 5.2).
4. Con el fin de evitar procesos de sedimentación en el canal, revisar que  $V > V_{min}$ . Si esto es falso, ir a los pasos 2 y 3 y revisar estos parámetros. Si es verdad, ir al paso 7.
5. Agregar un borde libre  $F_b$  al canal.



### Ejemplo 3

Diseñar un canal trapezoidal para transportar un caudal de  $10 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ . El canal será escavado en roca ( $n = 0.030$ ) y la pendiente del terreno es 4000:1. La pendiente lateral  $s$  es 1:4.

## 5.2 Sección óptima de un canal

El diseño de canales en ingeniería requiere determinar la sección óptima (aquella que garantice la menor resistencia al flujo) en un canal para unas condiciones dadas. Usando la ecuación de Manning (ecuación ??) es posible maximizar el radio hidráulico ( $R_h$ ) para un área ( $A$ ) y un caudal ( $Q$ ) dado. Teniendo en cuenta que  $R_h = A/P$ , para maximizar  $R_h$  debemos minimizar el perímetro ( $P$ ).

Considerando el canal trapezoidal de la figura 12, el área y el perímetro se pueden calcular como:

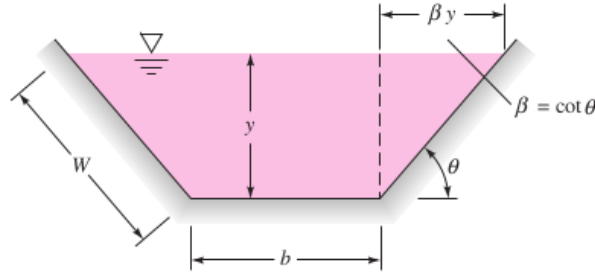


Figure 12: Geometría de un canal trapezoidal (tomado de [?]).

$$A = by + \beta y^2 \quad (24)$$

$$P = b + 2W = b + 2y(1 + \beta^2)^{1/2} \quad (25)$$

donde  $\beta = \cot \theta$  y  $y = y_n$ . Note que  $W = \sqrt{y^2\beta^2 + y^2} = y(\beta^2 + 1)^{1/2}$ . Asumiendo que  $b$  es un dato dado, se despeja de la ecuación 24:

$$b = \frac{A}{y} - y\beta \quad (26)$$

y de la ecuación 25:

$$b = P - 2y(1 + \beta^2)^{1/2} \quad (27)$$

igualando las ecuaciones 26 y 27 y despejando para  $P$ , se tiene:

$$P = \frac{A}{y} - y\beta + 2y(1 + \beta^2)^{1/2} \quad (28)$$

Para minimizar  $P$ , se obtiene  $dP/dy$  de la ecuación 28 tomando como constantes  $A$  y  $\beta$ :

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{A}{y^2} - \beta + 2(1 + \beta^2)^{1/2} \quad (29)$$

igualando  $dP/dy = 0$  y despejando  $y$  se obtiene el valor de  $y$  que minimiza  $P$ :

$$y = \left[ \frac{A}{2(1 + \beta^2)^{1/2} - \beta} \right]^{1/2} \quad (30)$$

Despejando  $A$  de la ecuación 30 y reemplazando en la ecuación 28 para  $P$ , la geometría óptima de un canal trapezoidal para un ángulo  $\theta$  dado es:

$$A = y^2 \left[ 2(1 + \beta^2)^{1/2} - \beta \right] \quad P = 4y(1 + \beta^2)^{1/2} - 2\beta y \quad R_h = \frac{y}{2} \quad (31)$$

La ecuación 31 indica que para un ángulo  $\theta$  dado, la sección transversal más eficiente de un canal en flujo uniforme ocurre cuando el radio hidráulico es igual a la mitad de la profundidad normal. Igualando las ecuaciones 25 y 31 para  $P$ , se tiene una expresión para la base inferior del canal  $b$ :

$$b = 2y \left( \sqrt{1 + \beta^2} - \beta \right) \quad (32)$$

y la base superior  $b_s$

$$b_s = b + 2\beta y = 2y \left( \sqrt{1 + \beta^2} \right) \quad (33)$$

Teniendo en cuenta que cuando  $\theta = 90^\circ$   $\beta = 0$  por lo que tenemos un canal rectangular, reemplazando esto en las ecuaciones 31 se tiene la sección más eficiente para un canal rectangular:

$$A = 2y^2 \quad P = 4y \quad R_h = \frac{y}{2} \quad b = 2y \quad (34)$$

Para encontrar la profundidad correcta, es necesario solucionar las ecuaciones anteriores en conjunto con la ecuación ?? para un caudal dado.

Es posible encontrar el mejor ángulo  $\theta$  del canal trapezoidal para un área y una profundidad dada. Evaluando  $dP/d\beta$  para  $A$  y  $y$  constante se tiene:

$$\frac{dP}{d\beta} = -y + 2\beta y (1 + \beta^2)^{-1/2} \quad (35)$$

igualando la ecuación 36 a cero se tiene:

$$2\beta = (1 + \beta^2)^{1/2} \quad \beta = \cot \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \theta = 60^\circ \quad (36)$$

Esto indica que para una profundidad dada, el ángulo  $\theta$  óptimo es  $60^\circ$ , o que la sección óptima (la que maximiza el flujo) es la mitad de un hexágono.

Si se circunscribe una sección circular de radio  $R$  en la sección trapezoidal donde  $\theta = 60^\circ$ , se tiene que  $R = \frac{1}{2}b_s \sin \theta$ . Reemplazando  $b_s$  en esta ecuación y sabiendo que  $\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , se tiene que  $R = y$ . Esto demuestra que una sección circular tiene su máxima eficiencia cuando  $y = R$  (semicírculo).

Para una sección triangular ( $b = 0$  en la figura 12), el área y el perímetro son:

$$A = \beta y^2 \quad (37)$$

$$P = 2W = 2y(1 + \beta^2)^{1/2} \quad (38)$$

Despejando  $y$  de la ecuación 37 se tiene que  $y = \left( \frac{A}{\beta} \right)^{1/2}$ . Reemplazando en la ecuación 38, el perímetro es:

$$P = 2W = 2 \left( \frac{A}{\beta} \right)^{1/2} (1 + \beta^2)^{1/2} \quad (39)$$

derivando  $P$  con respecto a  $\beta$  en la ecuación 39, se tiene:

$$\frac{dP}{d\beta} = 2A^{1/2} \left[ \beta (1 + \beta^2)^{-1/2} \beta^{-1/2} - \frac{1}{2} \frac{(1 + \beta^2)^{1/2}}{\beta^{3/2}} \right] \quad (40)$$

Haciendo  $dP/d\beta = 0$ , se tiene:

$$\frac{\beta^{1/2}}{(1 + \beta^2)^{1/2}} = \frac{(1 + \beta^2)^{1/2}}{2\beta^{3/2}} \quad (41)$$

Solucionando la ecuación 41, se tiene que  $\beta = 1$ . Esto quiere decir que una sección triangular con  $\theta = 45^\circ$  es la más eficiente.

#### Ejemplo 4

Para un canal rectangular en ladrillo ( $n = 0.015$ ) diseñado para transportar  $5 \text{ m}^3/\text{s}$  y con una pendiente de  $S_o = 0.001$ , determinar las mejores dimensiones para  $y$  y  $b$ . Realizar los mismos cálculos si la sección transversal del canal es la mitad de un hexágono y si es un semicírculo. Comparar los resultados.

### 5.3 Canales erosinables

Para canales excavados en terrenos blandos sin ningún tipo de revestimiento, es posible que se presente erosión de la sección si no se escoge un tamaño y una pendiente adecuados. Existen dos métodos para el análisis de este tipo de canales que son tratados a continuación.

#### 5.3.1 Metodo de la velocidad permisible

El tamaño de la sección del canal se escoge de tal manera que  $V$ , bajo el supuesto de flujo uniforme, sea menor a una *velocidad permisible*. Esta velocidad permisible es aquella para la cual no se presenta erosión en la sección del canal. Esta velocidad depende principalmente del tipo de suelo y del tamaño de las partículas. Sin embargo también depende de la profundidad de agua y de la alineación del canal. Esto debido a que para la misma velocidad media del flujo, la velocidad del flujo en el fondo es mayor cuando la profundidad es baja que cuando es alta. De la misma manera, canales curvos presentan corrientes secundarias que que aceleran el flujo hacia la parte externa de la curva causando erosión en las orillas.

La sección trapezoidal es la más usada y las pendientes de los taludes  $s$  deben ser escogidas de tal manera que garanticen la estabilidad del material en las orillas. La tabla 4 presenta valores recomendados de  $s$  para diferentes tipos de material. De manera similar, la tabla 5 presenta valores de velocidades permisibles para diferentes materiales en canales rectos y profundidad de agua de 1 m. En el caso de canales con algo de sinuosidad, la velocidad permisible se debe reducir en 5%, para canales con sinuosidad media, la velocidad se debe reducir en 13% y para canales con alta sinuosidad, la velocidad se debe reducir en 22%. Para canales muy anchos y con profundidades diferentes a un 1 m, la velocidad permisible se debe multiplicar por un factor de corrección  $k = y^{1/6}$ , donde  $y$  es la profundidad del flujo.

Material	$s$
Roca	Casi vertical
Arcilla resistente	1:0.5 hasta 1:1
Suelo firme	1:1
Suelo arenoso	2:1
Suelo con arenas, arcilla y limos	3:1

Table 4: Pendiente lateral en canales trapezoidales (tomado de [?]).

Material	$V$ (m/s)
Arena fina	0.6
Arena gruesa	1.2
<i>Suelo</i>	
- limo arenoso	0.6
- limo arcilloso	1.1
- arcilloso	1.8
<i>Suelo con pasto Bermuda</i>	
- limo arenoso	1.8
- limo arcilloso	2.4
<i>Suelo con pasto Kentucky</i>	
- limo arenoso	1.5
- limo arcilloso	2.1
<i>Roca blanda</i>	
- arenisca blanda	2.4
- lutita blanda	1.1
Roca dura	6.1

Table 5: Velocidades permisibles (tomado de [?]).

#### Algoritmo 4: Diseño de canales erosionables: método de la velocidad permisible

1. Leer el caudal  $Q$  de diseño, la pendiente del canal  $S_o$  y  $C_o$ .
2. De acuerdo con el material excavado, seleccione el  $n$  de Manning, el  $s$  de acuerdo con la tabla 4, y la velocidad permisible  $V$  de la table 5.
3. De la ecuación de Manning (ecuación 17), calcular  $R$ .
4. De la ecuación de continuidad,  $Q = AV$ , calcular  $A$ .
5. Calcular el perímetro mojado  $P$ , a partir de  $P = A/R$ .
6. De las ecuaciones para  $P$  y  $A$ , estimar el ancho del canal  $b$  y la profundidad normal  $y_n$ .
7. Agregar un borde libre  $F_b$  al canal.

#### Ejemplo 5

Diseñar un canal para transportar un caudal de  $6.91 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ . El canal será excavado en arcilla resistente con una pendiente del terreno  $S_o = 0.00318$ .

#### 5.3.2 Método de la fuerza tractiva

La erosión de las partículas del material de la sección de un canal se puede comprender mejor a través del análisis de la *fuerza tractiva*. El análisis de fuerzas indica que una partícula de material permanecerá estable si las fuerzas de cohesión son mayores que las *fuerzas de arrastre* debido a los esfuerzos cortantes ejercidos por el flujo sobre las paredes y el fondo del canal. Para flujo uniforme en un canal recto, la fuerza tractiva es igual a la componente del peso del fluido en la dirección del flujo.

Si se considera un canal recto de longitud  $L$ , con un área mojada  $A$  y con pendiente  $S_o$ , el peso del volumen del fluido para  $L$  es  $\gamma AL$ . De acuerdo con esto, la componente de dicho peso en la dirección del flujo es  $\gamma ALS_o$  (note que para  $S_o$  pequeñas,  $\sin \theta \approx \tan \theta \approx S_o$ ). La fuerza tractiva por unidad de área o el

esfuerzo cortante sobre el área mojada del tramo de canal  $PL$ , se define como  $\tau_o = \frac{\gamma AL S_o}{PL} = \gamma R S_o$ , donde  $R$  es el radio hidráulico. Para canales muy anchos,  $R \simeq y$  por lo tanto  $\tau_o = \gamma y S_o$ . La distribución de esfuerzos cortantes o de fuerza tractiva por unidad de área sobre la sección del canal no es uniforme. Sin embargo, se ha encontrado que para canales trapezoidales anchos,  $\tau_o = \gamma y S_o$  en el fondo y en las paredes  $\tau_o = 0.76 \gamma y S_o$ .

El esfuerzo cortante necesario para iniciar el movimiento de una partícula se denomina *esfuerzo cortante crítico*  $\tau_c$  y depende del tamaño del material y de la cohesión de las partículas. Note que este esfuerzo es mayor para partículas sobre el fondo que para partículas sobre las paredes del canal, ya que el movimiento de esas últimas está influenciada por la gravedad. Considere una partícula de material sobre la pared de un canal cuyo ángulo de inclinación de la pared del canal es  $\theta$ ,  $a$  es el área efectiva de la partícula,  $W_s$  es el peso sumergido de la partícula,  $\phi$  es el ángulo de reposo del material y  $\tau_s$  es el esfuerzo cortante sobre las paredes del canal (ver figura 13).

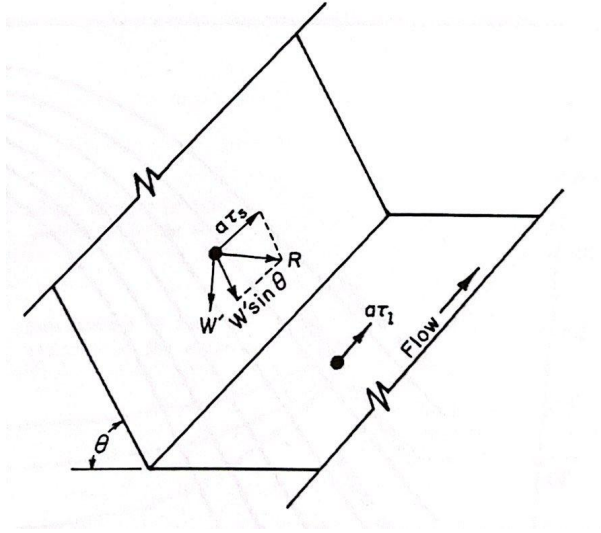


Figure 13: Fuerzas actuantes sobre una partícula en una pared de un canal (tomado de [?]).

Existen dos fuerzas que tienden a desequilibrar la partícula: 1) la fuerza tractiva que se calcula como  $\tau_s a$ , y la componente del peso de la partícula a lo largo de la pared del canal  $W_s \sin \theta$ . La resultante de estas dos fuerzas es:

$$R = \sqrt{W_s^2 \sin^2 \theta + a^2 \tau_s^2}$$

La fuerza normal a la pared del canal se calcula como  $W_s \cos \theta \tan \phi$  y evita el movimiento de la partícula. La partícula está en equilibrio si las fuerzas que propician el movimiento son iguales a las que se oponen a este, por lo que:

$$W_s \cos \theta \tan \phi = \sqrt{W_s^2 \sin^2 \theta + a^2 \tau_s^2}$$

Despejando de esta ecuación  $\tau_s$ , se tiene:

$$\tau_s = \frac{W_s}{a} \cos \theta \tan \phi \sqrt{1 - \frac{\tan^2 \theta}{\tan^2 \phi}} \quad (42)$$

La fuerza que impide el movimiento sobre una superficie nivelada es  $W_s \tan \phi = a \tau_l$ , donde  $\tau_l$  es el esfuerzo cortante que impide el movimiento de la partícula sobre una superficie nivelada. Por lo tanto:

$$\tau_l = \frac{W_s}{a} \tan \phi$$

Reemplazando en la ecuación 42, se tiene:

$$K = \frac{\tau_s}{\tau_l} = \cos \theta \sqrt{1 - \frac{\tan^2 \theta}{\tan^2 \phi}} \quad (43)$$

donde  $K$  se denomina el factor de reducción del esfuerzo crítico sobre las paredes del canal.

Los efectos debido al ángulo de reposo del material se consideran para material grueso sin cohesión. Para material fino cohesivo y no cohesivo, la componente del peso a lo largo de la pared es muy pequeña con respecto a las fuerzas cohesivas por lo cual se pueden despreciar. La figura 14 muestra el ángulo de reposo para material no cohesivo cuyo diámetro, para más del 25% del peso total del material, es  $> 5$  mm. Los esfuerzos críticos para material no cohesivo se muestran en la figura 15 y para material cohesivo en la figura 16 para canales rectos. Estos valores de  $\tau_c$  deben reducirse en 10% para canales algo sinuosos, en 25% para canales moderadamente sinuosos y en 40% para canales muy sinuosos.

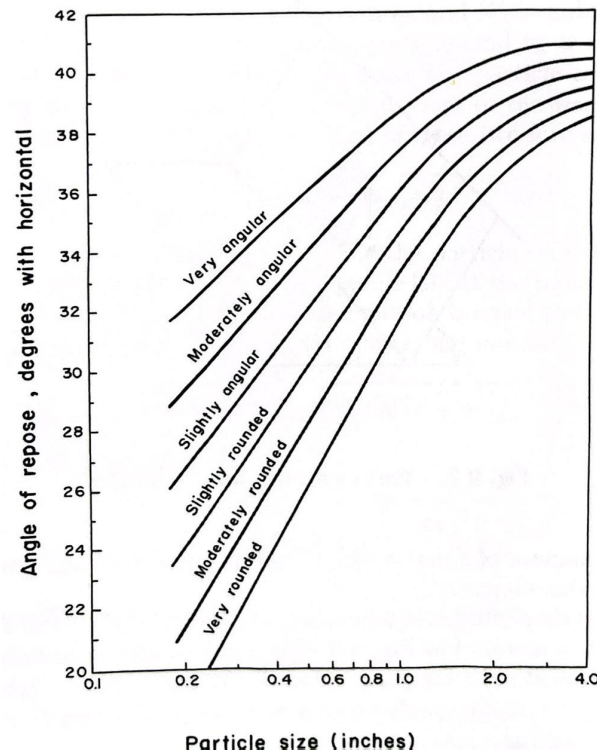


Figure 14: Ángulo de reposo ( $\phi$ ) para material no cohesivo para partículas de diámetro  $> 5$  mm (tomado de [?]).

El diseño de canales por el método de la fuerza tractiva involucra la escogencia de una sección transversal de tal manera que la fuerza tractiva por unidad de área ( $\tau_s$ ) actuante sobre las paredes del canal sea igual al esfuerzo crítico ( $\tau_c$ ) que resistiría el material del canal. Al final de la escogencia de la sección, se debe cumplir que el esfuerzo cortante sobre el fondo del canal sea menor que  $\tau_c$ .



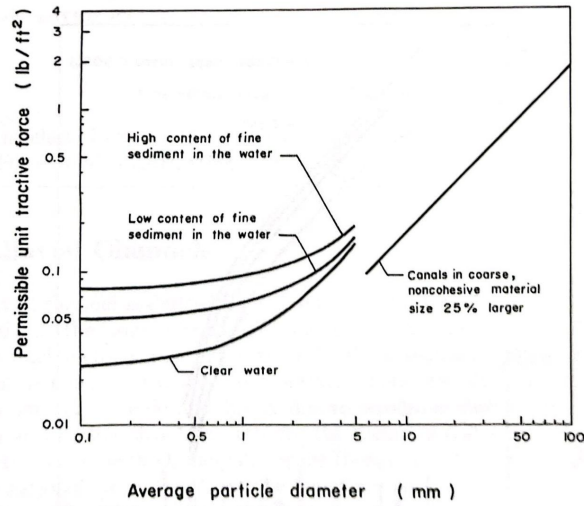


Figure 15: Esfuerzo cortante crítico ( $\tau_c$ ) para material no cohesivo (tomado de [?]).

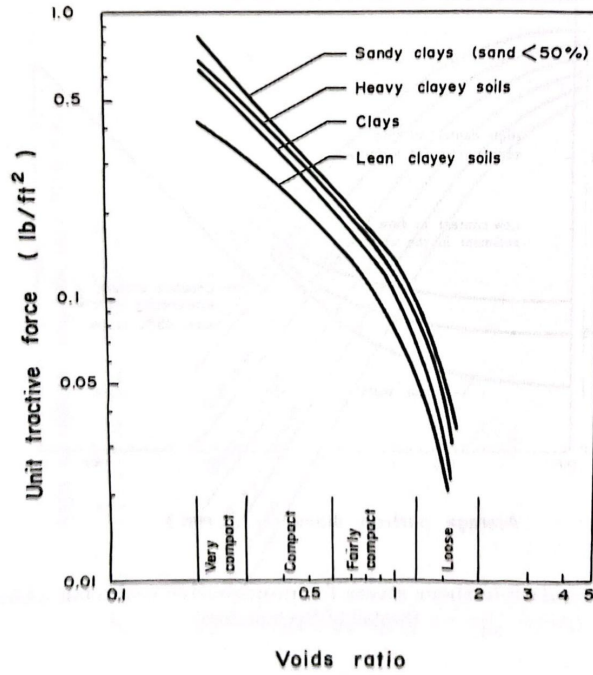


Figure 16: Esfuerzo cortante crítico ( $\tau_c$ ) para material cohesivo (tomado de [?]).

#### Algoritmo 5: Diseño de canales erosionables: método de la fuerza tractiva

1. Leer el caudal  $Q$  de diseño, la pendiente del canal  $S_o$  y  $C_o$ .
2. De acuerdo con el material excavado, seleccione el  $n$  de Manning, el  $s$  de acuerdo con la tabla 4, el ángulo de reposo  $\phi$  del material a partir de la figura 14 y el esfuerzo crítico  $\tau_c$  de la figura 15, si el material es no cohesivo, o de la figura 16 si el material es cohesivo. Ajustar  $\tau_c$  dependiendo de la sinuosidad del canal.
3. Para material no cohesivo, calcular el factor de reducción  $K$  a partir de la ecuación 43. Calcular el esfuerzo cortante de las paredes  $\tau_s = K\tau_c$ .
4. Igualar  $\tau_s$ , calculado en el paso anterior, a  $0.76\gamma y S_o$ , de donde se determina  $y = \frac{\tau_s}{0.76\gamma S_o}$ .
5. De la ecuación de Manning (ecuación 17), calcular  $b$ .
6. Revisar que el esfuerzo cortante en el fondo,  $\tau = \gamma y S_o$ , es menor que el  $\tau_c$  determinado en el paso 2. Si se cumple, ir al paso 7; si no, volver al paso 2.

## Ejemplo 6

Diseñar un canal trapezoidal recto para transportar un caudal de  $10 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ . El canal será excavado en grava fina de diámetro 8 mm con una pendiente del terreno  $S_o = 0.00318$ . Asumir que las partículas de grava son casi redondas y la concentración de sedimentos en suspensión en el flujo es baja.

## 6 Flujo crítico

El flujo crítico se presenta cuando la energía en el flujo es igual a la energía crítica ( $E_c$ ), es decir:

$$E_c = E_c \rightarrow y = y_c$$

y la profundidad a la que se transporta un caudal determinado  $Q$  es  $y = y_c$ .

### 6.1 Canal Rectangular

#### 6.1.1 Energía Específica

La energía específica en un canal de baja pendiente es:

$$E = y + \alpha \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (44)$$

para un canal rectangular de ancho  $b$  y teniendo que  $\alpha = 1$ , reemplazando en la ecuación 44 tenemos:

$$E = y + \frac{Q^2}{2gb^2y^2} \quad (45)$$

En términos del caudal unitario definido como  $q = \frac{Q}{b}$ , se tiene que:

$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2} \quad (46)$$

Partiendo de los conceptos de cálculo diferencial se conoce que los puntos mínimos o máximos de una función se presentan cuando  $\frac{dF}{dx} = 0$  para una función  $f(x)$ , por esto si deseamos conocer el punto de inflexión se tiene que  $\frac{dE}{dy} = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dy} = 1 - \frac{2q^2}{2gy^3} &= 0 & y^3 &= \frac{q^2}{g} \\ y &= \left( \frac{q^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}} = y_c \end{aligned} \quad (47)$$

Esta profundidad  $y$  para la cual  $E$  es mínima se denomina la **profundidad crítica**  $y_c$ .

A partir de  $\frac{dE}{dy}$ , no es posible determinar si la función tiene un mínimo o un máximo en  $y_c$ , derivando nuevamente se tiene:

$$\frac{d^2E}{dy^2} = 0 + \frac{3q^2}{gy^4} = \frac{3q^2}{gy^4} \quad (48)$$

Como  $\frac{d^2E}{dy^2}$  es siempre positiva para cualquier valor de  $y$  dado  $q$ ,  $E$  es mínima para  $y_c$ .

De la ecuación 47 se tiene que:

$$y_c^3 = \frac{q^2}{g} \rightarrow y_c = \frac{Q^2}{gb^2 y_c^2} \rightarrow \frac{y_c}{2} = \frac{v_c^2}{2g} \quad (49)$$

Entonces la profundidad crítica es 2 veces la cabeza de energía cinemática.  
Reemplazando en la ecuación de energía específica:

$$E = y_c + \frac{y_c}{2} = \frac{3}{2}y_c \rightarrow y_c = \frac{2}{3}E \quad (50)$$

Luego la profundidad crítica es  $\frac{2}{3}$  de la energía específica, como:

$$\frac{v_c^2}{2g} = \frac{y_c}{2} \rightarrow \frac{v_c^2}{gy_c} = 1 \rightarrow Fr^2 = 1 \rightarrow Fr = 1 \quad (51)$$

Note que el número de Froude es igual a 1 cuando el flujo es **crítico**.

### 6.1.2 Caudal unitario

Para determinar los cambios de  $q$  con respecto a  $y$  para un valor dado de  $E$ , se tiene:

$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2} \rightarrow 2gy^2(E - y) = q^2 \quad (52)$$

$$q^2 = 2gq^2E - 2gq^3$$

De la ecuación 52 tenemos que para  $y = 0 \rightarrow q = 0$  al igual que cuando  $y = E$ . Derivando la ecuación para determinar los valores de  $y$  para que  $q$  sea  $q_{max}$  o  $q_{min}$ , se tiene:

$$\frac{d(q^2)}{dy} = \frac{d(2gEy^2 - 2gy^3)}{dy}$$

$$2q \frac{dq}{dy} = 2gE2y - 2g3y^2 \quad (53)$$

$$q \frac{dq}{dy} = 2gEy - 3gy^2 \rightarrow q \frac{dq}{dy} = gy(2E - 3y)$$

Igualando la ecuación 53 a 0, se tiene que:  $gy(2E - 3y) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{2}{3}E \\ y = 0 \end{array} \right\} \text{ Raíces} \quad (54)$$

Entonces se puede deducir que  $y = \frac{2}{3}E \rightarrow y = y_c$

Para determinar si se trata de un máximo o de un mínimo se tiene:

$$\left( \frac{dq}{dy} \right)^2 + q \frac{d^2q}{dy^2} = 2gE - 6gy$$

Si  $\frac{dq}{dy} = 0$  para  $y = \frac{2}{3}E$

$$q \frac{d^2q}{dy^2} = 2gE - 4Eg = -2Eg \quad (55)$$

$$\frac{d^2q}{dy^2} = \frac{-2Eg}{q} \rightarrow \frac{d^2q}{dy^2} \text{ es siempre negativo}$$

Esto quiere decir que  $q$  es máximo cuando  $y = y_c$ . Sustituyendo en la ecuación para  $q = f(y)$

$$q_{max}^2 = 2g \frac{4}{9} E^3 - 2g \frac{8}{27} E^3$$

$$q_{max}^2 = 2g \left( \frac{12E^3 - 8E^3}{27} \right) = \frac{8gE^3}{27} \quad (56)$$

La función  $q = (2gEy^2 - 2gy^3) = f(y)$  es una familia de curvas de la forma.

## (PRIMERA GRÁFICA)

### 6.1.3 Fuerza específica

La fuerza específica es  $Fr = \bar{z}A + \beta \frac{Q^2}{gA}$  sabiendo que para un canal rectangular el ancho es  $b$  y  $\beta = 1$ , se tiene:

$$F_s = \frac{y^2 b}{2} + \frac{Q^2}{gby} \rightarrow \frac{y^2 b}{2} + \frac{bq^2}{gy} \quad (57)$$

La fuerza específica por unidad de ancho

$$\frac{F_s}{b} = \frac{y^2}{2} + \frac{q^2}{gy} \quad (58)$$

Tenemos que  $F_s = f(y)$  para determinar los puntos de inflexión, derivamos  $\frac{dF_s}{dy}$ , entonces:

$$\frac{dF_s}{dy} = y - \frac{q^2}{gy^2}$$

$$\text{haciendo } \frac{dF_s}{dy} = 0 \quad y = \frac{y^2}{gy^2} \rightarrow y = \frac{v^2}{g} \quad (59)$$

La ecuación 59 es válida cuando el flujo es crítico. Para determinar si el punto es un máximo o un mínimo, se tiene qué:  $\frac{d^2 F_s}{dy^2} = 1 + \frac{2q^2}{gy^3}$

El valor de  $\frac{dF_s}{dy} = 1 + \frac{2q^2}{gy^3}$  es siempre positivo por lo que la fuerza específica es mínima a la profundidad crítica.

## 6.2 Canal no rectangulares (Prismáticos)

### 6.2.1 Energía específica

Partiendo de la ecuación de energía específica:

$$E = y + \alpha \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (60)$$

Derivando respecto a  $y$  obtenemos:

$$\frac{dE}{dy} = 1 - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{dA}{dy} \quad (61)$$

Luego para obtener el valor mínimo para  $E$ , se obtiene si  $\frac{dE}{dy} = 0$  para una sección prismática  $\frac{dA}{dy} = B$ , lo que se denomina ancho en la superficie.

Entonces para un canal trapezoidal:

$$\begin{aligned}
A &= (B_0 + sy)y & \frac{dA}{dy} &= B_0 + 2sy = B \\
\text{Entonces } 1 - \frac{Q^2}{gA^3}B &= 0 & 1 - \frac{v^2}{gD} &= 0 & \frac{D}{2} &= \frac{v^2}{2g} \\
\text{donde } D \rightarrow \text{profundidad hidráulica} & & D &= \frac{A}{B} \\
\text{Obteniendo } \frac{d^2E}{dy^2} &= 0 - \frac{d}{dy} \left( \frac{Q^2}{gA^3} \cdot B \right) = \frac{-Q^2}{g} \left( \frac{-3B}{A^4} \frac{dA}{dy} + \frac{1}{A^3} \frac{dB}{dy} \right) \\
\frac{d^2E}{dy^2} &= \frac{Q^2}{g} \left( \frac{3B^2}{A^4} - \frac{1}{A^3} \frac{dB}{dy} \right) = \frac{Q^2}{gA^3} \left( \frac{3B^2}{A} - \frac{dB}{dy} \right)
\end{aligned} \tag{62}$$

Esta siempre es positiva ya que  $\frac{3b^2}{A} > \frac{dB}{dy}$  por lo tanto  $E$  es mínima cuando  $\frac{dE}{dy} = 0$ . Esta profundidad que se obtiene a partir de  $\frac{D}{2} = \frac{v^2}{2g} \rightarrow$  es la profundidad crítica.

Note que la profundidad hidráulica es dos veces al energía cinemática cuando el flujo es crítico (similar para el caso de un canal rectangular).

Analizando el número de Froude, para flujo crítico:

$$\begin{aligned}
Fr = 1 &= \frac{v}{\sqrt{gD}} \rightarrow \text{la cual se puede derivar de la ecuación para la energía mínima} \\
\frac{D}{2} &= \frac{v^2}{2g} \rightarrow 1 = \frac{v}{\sqrt{gD}} = Fr
\end{aligned} \tag{63}$$

para el caso de un canal de alta pendiente, con distribución de velocidad no uniforme en donde:

$$E = d \cos \theta + \alpha \frac{Q^2}{2gA^2} \tag{64}$$

Se puede obtener que

$$Fr = 1 = \frac{v}{\sqrt{gd \frac{\cos \theta}{\alpha}}} \quad \text{Donde } \theta \text{ es el ángulo de inclinación del canal} \tag{65}$$

### 6.2.2 Fuerza específica

Partiendo de la ecuación  $Fr = \frac{Q^2}{gA} + \bar{z}A$  y derivando la ecuación respecto a  $y$ , se obtiene:

$$\frac{dF_s}{dy} = -\frac{Q^2}{gA^2} \frac{dA}{dy} + \frac{d(\bar{z}A)}{dy} \tag{66}$$

### (SEGUNDA GRÁFICA)

Donde  $\bar{z}A$  representa el momento de  $A$  respecto a la superficie de agua

El cambio en el momento del  rea ( $\Delta(\bar{z}A)$ ) debido a pequeños cambios en la profundidad del agua  $\Delta y$  con respecto a la superficie del agua:

$$\begin{aligned}\Delta(\bar{z}A) &= A(\bar{z} + \Delta y) - A\bar{z} + B\Delta y \cdot \frac{\Delta y}{2} \\ \Delta(\bar{z}A) &= A\Delta y \\ d(\bar{z}A) &= A dy\end{aligned}\tag{67}$$

$$\begin{aligned}\text{Reemplazando} \quad \frac{dF_s}{dy} &= -\frac{Q^2}{gA^2}B + A \\ \text{para } \frac{dF_s}{dy} = 0 \quad \frac{v^2}{g} = D &\rightarrow \frac{v^2}{2g} = \frac{D}{2} \rightarrow \text{Esta condición se satisface cuando el flujo es crítico}\end{aligned}$$

Como la última condición se satisface, por lo tanto  $F_s$  es mínima cuando el flujo es crítico ( $y = y_c$ ) para probar que esto es un mínimo,  $\frac{d^2 F_s}{dy^2} = \frac{dA}{dy} + \frac{Q^2}{gA^3} \left( \frac{3B^2}{A} - \frac{dB}{dy} \right)$ , luego como  $\frac{3b^2}{A} > \frac{dB}{dy}$  el segundo término es siempre positivo al igual que  $\frac{dA}{dy} = B$ , por lo tanto  $\frac{d^2 F_s}{dy^2} \rightarrow$  es positiva, por lo que  $F_s$  es un mínimo cuando  $\frac{dF_s}{dy} = 0$

### 6.2.3 Aplicaciones del flujo crítico

El flujo crítico establece una relación única entre el caudal y la profundidad del flujo. Teniendo en cuenta esto, [muchas medidas de caudal](#) han sido desarrolladas. Por otro lado, recordemos que el flujo crítico garantiza [el máximo caudal](#) a través de una sección. El flujo crítico se puede lograr:

- Reduciendo la sección del flujo (ancho).
- Elevando el fondo del canal.
- Combinando las dos.

### 6.2.4 Canal horizontal con ancho constante y elevación de fondo

#### (TERCERA GRÁFICA)

Donde  $\Delta z_{max}$  garantiza la ocurrencia de la profundidad crítica para una energía dada en 1,  $\Delta z_{max} = E_1 - E_2$  para un  $\Delta z > \Delta z_{max}$  la profundidad en 1 debe aumentar y por lo tanto  $E_1$  aumenta para garantizar que  $\Delta z = E_1 - E_2$

### 6.2.5 Canal horizontal con ancho variable

#### (CUARTA GRÁFICA)

En la medida que el ancho [decrece](#), la profundidad de agua [decrece para](#) flujo subcrítico aguas arriba. La profundidad de agua aumenta para una reducción del ancho para flujo supercrítico.

Hay un límite del ancho en la reducción para una energía dada en 1 ( $B_c$ ), para un  $B < B_c$  a veces aumenta [el agua](#) en 1 y cambia la energía en  $E_1$  para que  $B = B_c$ .



### Ejemplo 7

Un puente será construido sobre un canal de 50m de ancho que transporta un caudal de  $200m^3/s$  con una profundidad de 4.0m. Con el fin de reducir el **largo** del puente, cual es el ancho mínimo del canal que garantiza que la **condición** aguas arriba del puente no cambiará.

Se tiene que:  $Q = 200m^3/s$ ,  $b = 50m$ ,  $y_1 = 4.0m$

$$v = \frac{200m^3/s}{50m \cdot 4m} = 1m/s \quad E = 4 + \frac{1}{2 \cdot 9.81} = 4,05m$$

$$y_c = \frac{2}{3}E = \frac{2}{3}(4.05) = 2.7m$$

$$q = \sqrt{gy_c^3} = \sqrt{9.81 \cdot (2.7)^3} = 13.9 \frac{m^3/s}{m}$$

$$q = \frac{Q}{B_c} = \frac{200}{13.9} = 14.4m \rightarrow \text{Ancho mínimo que garantiza que la condición a.arriba no cambie}$$

## Ejemplo 8

Para un canal rectangular

Se tiene que:  $Q = 250 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $b = 50 \text{ m}$ ,  $y_1 = 5.0 \text{ m}$

Para producir flujo crítico en este canal, determine:

1. El escalón en el fondo del canal para un ancho constante.
2. La reducción en el ancho del canal.
3. La combinación de escalon y ancho del canal.

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{250 \text{ m}^3/\text{s}}{50 \text{ m} \cdot 5 \text{ m}} = 1 \text{ m/s} \quad E = y + \frac{v^2}{2g} = 5 + \frac{1}{2 \cdot 9.81} = 5.05 \text{ m}$$
$$y_c = \frac{2}{3}E = \frac{2}{3}(5.05) = 3.37 \text{ m}$$

a)

$$\Delta z_{\max} = E_1 - E_2 = y_1 - y_c = 5 - 3.37 = 1.63 \text{ m}$$

b)

$$q = \sqrt{gy_c^3} = \sqrt{9.81 \cdot (3.37)^3} = 19.38 \frac{\text{m}^3/\text{s}}{\text{m}}$$
$$q = \frac{Q}{B_c} = B_c = \frac{Q}{q} = \frac{250}{19.38} = 12.9 \text{ m}$$

c)

$$\text{Supongamos que } B_c = \frac{b}{2} = 25 \text{ m}, B_c > 12.9 \text{ m}$$

$$q = \frac{Q}{B_c} = \frac{250}{25} = 10 \frac{\text{m}^3/\text{s}}{\text{m}} \quad y_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$$

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{10^2}{9.81}} = 2.17 \text{ m}$$

$$E_c = 2.17 + \frac{10^2}{2 \cdot 9.81 \cdot (2.17)^2} = 3.25 \text{ m}$$

$$\Delta z = 5.05 - 3.25 = 1.8 \text{ m}$$

## 6.3 Localización del flujo crítico

### 6.3.1 Canal horizontal rectangular con aumento en el fondo

$$\frac{dz}{dx} = (F_r^2 - 1) \frac{dy}{dx} \quad \text{para el flujo crítico } F_r^2 = 1 \rightarrow \frac{dz}{dx} = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = 0 \quad \text{también cuando } \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{por lo tanto } \frac{dz}{dx} = 0 \quad \text{en el punto más alto}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = (F_r^2 - 1) \frac{d^2y}{dx^2} + 2F_r \frac{dy}{dx} \frac{F_r}{dx}$$

$$\text{para el flujo crítico } F_r = 1 \rightarrow \frac{d^2z}{dx^2} = 2 \frac{dy}{dx} \frac{dF_r}{dx}$$

$$y_2 = y_c < y_1 \rightarrow \frac{dy}{dx}(-)$$

$$F_{r2} = F_c > F_r \rightarrow \frac{dF_r}{dx}(+)$$

$\frac{d^2z}{dx^2}(-) \rightarrow$  Se trata entonces de un máximo.  $y_c$  ocurre en el punto máximo

### 6.3.2 Canal horizontal con cambio en el ancho

$$H = z + y + \frac{Q^2}{2gA^2}$$

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx} \left( \frac{Q^2}{2gA^2} \right) = 0 \quad \frac{dy}{dx} + \frac{Q^2}{2g} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{b^2 y^2} \right) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{Q^2}{2g} \frac{(-2)}{b^3 y^2} \frac{db}{dx} + \frac{Q^2}{2g} \frac{(-2)}{b^2 y^3} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{Q^2}{y} \left( \frac{1}{b^3 y^2} \frac{db}{dx} + \frac{1}{b^2 y^3} \frac{dy}{dx} \right) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q^2}{gy^3 b^2} \left( \frac{y}{b} \frac{db}{dx} + \frac{dy}{dx} \right) = 0 \quad \frac{dy}{dx} - F_r^2 \left( \frac{y}{b} \frac{db}{dx} + \frac{dy}{dx} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} (1 - F_r^2) - F_r^2 \frac{y}{b} \frac{db}{dx} = 0 \quad \rightarrow \text{para } F_r = F_{rc} = 1 \rightarrow \frac{db}{dx} = 0$$

## 6.4 Cálculo de la profundidad crítica

### 6.4.1 Canal con una única sección

Partiendo de la ecuación general para un canal con pendiente  $\theta$  y con velocidad no uniforme, se tiene:

$$F_r = \frac{v}{\sqrt{gD \frac{\cos \theta}{\alpha}}} = 1 \quad (68)$$

Como  $Q = vA \rightarrow v = \frac{Q}{A}$ , reemplazando, se tiene que:

$$\frac{Q}{A \sqrt{gD \frac{\cos \theta}{\alpha}}} = 1 \quad (69)$$

Donde  $D = \frac{A}{B} \rightarrow$  profundidad hidráulica

$$B = \frac{dA}{dy} \rightarrow \text{Ancho del canal en la superficie}$$

$$\text{Haciendo } A\sqrt{D} = \frac{Q}{\sqrt{gD \frac{\cos \theta}{\alpha}}}$$

La profundidad crítica  $y_c$  se encuentra resolviendo la ecuación anterior. Note que  $A\sqrt{D} = f(y_c)$  y  $\frac{Q}{\sqrt{gD \frac{\cos \theta}{\alpha}}} = \text{cte}$  para [and?](#) de sección única, para un caudal dado, se tiene un solo valor de  $y_c$  [de pa de ven?](#) esta ecuación [se puede reducir](#) mediante:

### 6.4.2 Curva de diseño

$$z_c = A\sqrt{D} = \text{factor de sección para } y_c$$

$v_s$

$y_c$

Comun para canales trapezoidales y circulares

## 7 Métodos numéricos

Los principales métodos utilizados para encontrar las raíces de una función implícita  $f(y) = 0$  son:

1. Método de la sección.
2. Método de la bisección.
3. Método de Newton-Raphson. (*mejor*)

$$A\sqrt{D} - \frac{Q}{\sqrt{g \frac{\cos\theta}{\alpha}}} = 0 = f(y)$$
$$A^{\frac{3}{2}} B^{-\frac{1}{2}} - \frac{Q}{\sqrt{g \frac{\cos\theta}{\alpha}}} = 0$$

El método de Newton-Raphson requiere el cálculo de  $\frac{df}{dy}$ , se tiene entonces que:

$$\frac{df}{dy_c} = \frac{3}{2} A^{\frac{1}{2}} B^{-\frac{1}{2}} \frac{dA}{dy} - \frac{1}{2} B^{-\frac{3}{2}} \frac{dB}{dy} A^{\frac{3}{2}} \frac{dB}{dy} = f'(f_c)$$

En ese orden de ideas para el cálculo de  $\frac{dB}{dy}$ :

- Canal ????:

$$\frac{dB}{dy_c} \approx \frac{B(y_c + h) - B(y_c - h)}{2h}$$

Donde:  $h \rightarrow$  ??? pequeño en  $y = 10^{-6}$

**(QUINTA GRÁFICA)**

- Para canal prismático y ???  $B = f(y_c)$

$$\frac{dB}{dy_c} = 2s \quad (\text{Para canal trapezoidal } B = B_0 + 2sy_c)$$

El método de Newton Rhapsion consiste ??? en:

$$y_c^{t+1} = y_c^t - \frac{f(y_c)}{f'(y_c)}$$

El proceso iterativo para cuando  $|y^{t+1} - y^{t+}| \leq \text{tolerancia}$ .

El valor inicial para se puede obtener suponiendo que el canal es rectangular, por lo que:

$$A\sqrt{D} = \frac{Q}{\sqrt{g \frac{\cos\theta}{\alpha}}} \rightarrow by^{\frac{3}{2}} = \frac{Q}{\sqrt{g \frac{\cos\theta}{\alpha}}}$$

$$y_c = \left( \frac{Q}{b\sqrt{g \frac{\cos\theta}{\alpha}}} \right)^{\frac{2}{3}}$$

### Ejemplo 9

Canal trapezoidal

$Q = 30m^3/s$ ,  $B_0 = 10m$ ,  $s = 2$ ,  $\theta \approx 0$ ,  $\alpha = 1$

Calculo la profundidad crítica:

Sabiendo que para un canal trapezoidal se tiene que,  $B = B_0 + 2sy$

$$z_c = A\sqrt{D} = \frac{Q}{\sqrt{g}}$$

$$\frac{Q}{\sqrt{g}} = \frac{30}{\sqrt{9.81}} = 9.58$$

$$A = \frac{1}{2}(B_0 + 2sy_c + B_0)y_c = (B_0 + sy_c)y_c = (10 + 2y_c)y_c$$

$$B = \frac{dA}{dy} = B_0 + 2sy_c = 10 + 4y_c$$

$$D = \frac{A}{B} = \frac{(10 + 2y_c)y_c}{10 + 4y_c}$$

$$(10 + 2y_c)y_c \sqrt{\frac{(10 + 2y_c)y_c}{10 + 4y_c}} - 9.58 = 0 = f(y_c)$$

Utilizando un solver para la ecuación anterior ( $f(y_c)$ ) o utilizando el método de Newton Raphson, se tiene que  $y_c = 0.91m$ , si se usa el método de Newton Raphson.  $y_c$  para  $t = 0$

$$y_c^{t=0} = \left( \frac{30}{10\sqrt{9.81}} \right)^{\frac{2}{3}} = 0.17m$$

## 7.1 Método de la Bisección

1. Elegir un intervalo de  $y_c$ ,  $a < y_c < b$  tal que  $f(a)f(b) < 0$  (Signo opuesto).

2. Calcular el punto medio del intervalo  $c = \frac{a+b}{2}$

3. Evaluar  $f$  en  $c$ , si  $f(c)$

Si  $f(c) \approx 0$   $y_c = c$  Si  $f(a)f(c) < 0 \rightarrow a < y_c < b \rightarrow b = c$  Si  $f(c)f(b) < 0 \rightarrow c < y_c < b \rightarrow a = c$

**(SEXTA GRÁFICA)**

4. El ??? de ??? cuando  $f(c) \leq 10^{-6}$  (tolerancia).

### Ejemplo 10

Canal circular

$\emptyset = 8ft, m = 1ft/milla, Q = 100cfs$  (cubic feet per second),  $\alpha = 1$

Primeramente, se tiene la conversión:

$$m = 1 \frac{ft}{milla} \cdot \frac{1milla}{5280ft} = 0.0002$$

Calculando el valor de  $y_c$ , se tiene:

$$\theta = \arctan(0.0002) = 0.011 \quad \theta \approx 1$$

$$A\sqrt{D} = \frac{Q}{\sqrt{g}} \rightarrow A\sqrt{D} - \frac{Q}{\sqrt{g}} = 0 = f(y_c)$$

$$\frac{Q}{\sqrt{g}} = \frac{100}{\sqrt{32.2}} = 17.62$$

$$A = \frac{1}{8}(\theta - \sin\theta)\emptyset^2$$

$$B = \emptyset \sin \frac{1}{2}\theta$$

$$A^{3/2}B^{-1/2} - 17.62 = 0$$

$$\left(\frac{1}{8}(\theta - \sin\theta)\emptyset^2\right)^{3/2} \left(\emptyset \sin \frac{1}{2}\theta\right)^{-1/2} - 17.62 = 0$$

$$y_c = \frac{\emptyset}{2}(1 - \cos\theta/2) =$$