

Estructuras Hidráulicas [2015961]

Tema # 3: Flujo variado

Luis Alejandro Morales, Ph.D

Profesor Asistente

Universidad Nacional de Colombia-Bogotá

Facultad de Ingeniería

Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola

Contents

1	Introducción	1
2	Flujo gradualmente variado	1
2.1	Ecuaciones para el calculo	1
2.2	Clasificación de los perfiles de la lamina de agua	3
2.3	Esquematizar los perfiles de flujo	5

1 Introducción

En canales naturales la pendiente y la sección transversal cambian a lo largo del canal, lo cual ocurre tambien en canales artificiales en donde, por razones constructivas y de la topografía del terreno, la pendiente y la sección cambian mediante estructuras de transición. Esto hace que el flujo cambie constantemente y que el flujo sea *no uniforme*. Si el cambio en la lámina de agua a lo largo del canal es relativamente pequeño se le conoce como *flujo gradualmente variado (FGV)*, si el cambio es fuerte, se le conoce como *flujo rapidamente variado (FRV)*. El FGV se analiza para secciones largas de canales por lo que es necesario considerar las perdidas de energía debido a la fricción. Sin embargo, teniendo en cuenta que el FRV se presenta en secciones cortas de un canal, las perdidas de energia por fricción son despreciables. Teniendo en cuenta que las líneas de flujo en el FGV son casi paralelas y siguen una trayectoria casi recta, una distribución de presiones hidroestática es considerada allí. En el FRV, los fuertes gradientes del flujo generan curvaturas de las líneas de corriente y por lo tanto aceleraciones en dirección normal al flujo por lo que considerar una distribución hidroestatica de presiones no es correcto.

2 Flujo gradualmente variado

2.1 Ecuaciones para el calculo

A continuación se derivan las ecuaciones de FGV para una canal prismático, a partir de las siguientes suposiciones:

- Pendiente del fondo del canal pequeña. Esto implica que $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$, donde θ es el angulo del fondo del canal con respecto a la horizontal.
- No hay entradas ni salidas de flujo del canal.
- La distribución de presiones es hidroestatica en todas las secciones del canal.

- Las pérdidas de energía debido a la fricción son calculadas usando alguna de las mencionadas para flujo uniforme.

Teniendo en cuenta lo anterior y la figura 1, la cabeza total de energía en una sección de canal es:

Figure 1: Sección de flujo gradualmente variado en canal prismático (tomado de [?]).

$$H = z + y + \frac{\alpha V^2}{2g} \quad (1)$$

en donde H es la elevación de la línea de energía con respecto a un nivel de referencia, z es la elevación del fondo del canal, y es la profundidad de la lamina de agua, V es la velocidad media del flujo en la sección transversal y α es el factor de corrección de la energía cinética. Consideremos x como la distancia positiva en dirección del flujo. Derivando la ecuación 1 con respecto a x , tenemos:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{\alpha Q^2}{2g} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A^2} \right) \quad (2)$$

Por definición, se tiene que $\frac{dH}{dx} = -S_f$ y $\frac{dz}{dx} = -S_o$, donde S_f es la pendiente de la línea de energía y S_o es la pendiente del fondo del canal; note que el signo negativo indica que las cantidades decrecen a lo largo del canal en dirección del flujo. Resolviendo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A^2} \right) &= \frac{d}{dA} \left(\frac{1}{A^2} \right) \frac{dA}{dx} \\ &= \frac{-2}{A^3} \frac{dA}{dy} \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{-2B}{A^3} \frac{dy}{dx} \end{aligned} \quad (3)$$

donde $B = \frac{dA}{dy}$ representa el ancho del canal en la superficie. Para canales no prismáticos:

$$\frac{dA}{dx} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

Lo que significa que A cambia en x y y .

Reemplazando terminos en la ecuación 2 y organizando terminos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f}{1 - (\alpha B Q^2) / (g A^3)} \quad (4)$$

El termino $\frac{\alpha B Q^2}{g A^3}$ puede ser expresado en función del Numero de Froude (F_r) as $\frac{\alpha B Q^2}{g A^3} = \frac{(Q/A)^2}{(gA)/(\alpha B)} = F_r^2$. De acuerdo con esto, la ecuación 4, se expresa como:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f}{1 - F_r^2}} \quad (5)$$

La ecuación 5 es utilizada para analizar el FGV en canales prismáticos, su solución proporciona las profundidades a lo largo de un tramo de canal. Es además usada para la descripción cualitativa del FGV.

2.2 Clasificación de los perfiles de la lamina de agua

Para clasificar los perfiles de la lamina de agua es necesario en principio clasificar la pendiente del fondo del canal como:

- Pendiente suave (en ingles mild) (M): Si el flujo uniforme es subcritico ($y_n > y_c$) la pendiente el canal es tipo M .
- Pendiente alta (en ingles steep) (S): Si el fluejo uniforme es supercritico ($y_n < y_c$) la pendiente del canal es tipo S .
- Pendiente critica (en ingles critical) (C): Si el flujo uniforme es critico ($y_n = y_c$), la pendiente del canal es tipo C .
- Pendiente horizontal (en ingles horizontal) (H) : Matematicamente, se puede demostrar que la profundidad normal es infinita si la pendiente es horizontal (tipo H). $AR^{2/3} = \frac{Qn}{S_o}$ incrementa hacia el infinito si $S_o \rightarrow 0$.
- Pendiente adversa (en ingles adverse) (A): Matematicamente, se puede demostrar que la profundidad normal no existe si la pendiente es adversa (tipo A). $AR^{2/3} = \frac{Qn}{S_o}$ se vuelve negativa (imposible!) si S_o es negativa.

La esquematizacion de los perfiles de agua M y S se hace con base en la figura 2, en donde NDL indica la posición de la profundidad normal (normal-depth line) y CDL indica la posicion de la profundidad critica (critical-depth line). En esta figura se tienen tres zonas que determinan la posición del perfil M o S . Note además, que las posición de NDL y CDL cambia dependiendo de la pendiente del canal (o tipo de flujo). Para los perfiles C , H , y A , teniendo en cuenta que y_n no existe of es igual a y_c , existen únicamente dos zonas en donde se ubican estos perfiles.

Figure 2: Zonas para la clasificacion de perfiles de flujo (tomado de [?]).

De acuerdo con lo anterior, se tienen entonces 12 diferentes perfiles de lamina de agua: tres para M , tres para S , dos para C (la zona 2 no existe ya que $y_n = y_c$), dos para H (la zona 1 no existe ya que $y_n = \infty$) y dos para A (la zona 1 no existe ya que y_n no existe). La figura 3 muestra los perfiles de la lamina de agua.

Figure 3: Perfiles de la lamina de flujo (tomado de [?]).

El comportamiento de los perfiles de lamina de agua se puede hacer con base en el analysis de la ecuación 5. De acuerdo con esto, y aumentará a lo largo de x si $\frac{dy}{dx}$ es positivo y decrecerá si ocurre lo contrario. El signo de $\frac{dy}{dx}$ lo determina la parte derecha de la ecuación 5; los signos del numerador ($S_o - S_f$) y del denominador ($1 - F_r^2$). Del estudio de flujo uniformes sabemos que $S_f = S_o = S_w$ cuando $y_n = y$, por lo que para un Q dado a partir de la ecuacion de Manning of Chezy tenemos que $S_f > S_o$ si $y < y_n$ y $S_f < S_o$ si $y > y_n$. De acuerdo con esto, podemos establecer el signo de $S_o - S_f$. El signo de $(1 - F_r^2)$ se determina si el flujo es subcritico ($F_r < 1$) o supercritico ($F_r > 1$).

Ahora miremos como la superficie de la lamina de agua se aproxima a la profundidad normal, a la profundidad critica o al fondo del canal. Si $y \rightarrow y_n$ entonces $S_f \rightarrow S_o$ y por lo tanto $\frac{dy}{dx} \rightarrow 0$ a pesar que $F_r \neq 1$ (no flujo critico). Esto significa que el la lamina de agua se aproxima asintoticamente a NDL . Por otro lado, si $y \rightarrow y_c$ $F_r \rightarrow 1$ por que el denominador tiende a cero. Esto quiere decir que $\frac{dy}{dx} \rightarrow \infty$ a pesar que $S_f \neq S_o$. Esto significa que la lamina de agua se aproxima a CDL verticalmente. En realidad no se aproxima verticalmente ya que esto no es posible fisicamente, pero si con una pendiente muy alta. A pesar que teoricamente la lamina de agua se aproxima verticalmente esto no es posible ya que las distribuciones

de presiones cuando la lamina de agua se curva fuertemente la presión ya no es hidroestatica por lo tanto la ecuación 5 se viola.

Por otro lado, cuando $y \rightarrow \infty$, $V \rightarrow 0$ y por lo tanto F_r y S_f tienden a cero. De la ecuacion 5, tenemos entonces que $\frac{dy}{dx} \rightarrow S_o$. Teniendo en cuenta que para FGV se asume una pendiente pequeña, tenemos que $\frac{dy}{dx} \approx 0$ por lo que la lamina de agua tiende ser horizontal.

Analicemos ahora lo que ocurre cuando la lamina de agua se aproxima al fondo del canal (e.g $y \rightarrow 0$). De la ecuación de Chezy, tenemos que

$$S_f = \frac{Q^2}{C^2 A^2 R}$$

donde C es la constante de Chezy, $R = A/P$ es el radio hidráulico. Note que para un canal rectangular muy ancho de ancho B , se tiene que $R \approx y$. Reemplazando en la ecuación 5, tenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{gB(S_o C^2 B^2 y^3 - Q^2)}{C^2(gBy^3 - \alpha BQ^2)}$$

Teniendo en cuenta que $y \rightarrow 0$ cuando se aproxima al fondo del canal, la ecuación anterior se convierte en:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{dy}{dx} = \frac{g}{\alpha C^2}$$

Lo anterior quiere decir que cuando $y \rightarrow 0$, la pendiente de la lamina de agua dy/dx es finita, tiene un valor positivo y es una función de C y de α . Sin embargo, si se usa la ecuación de Manning en lugar de la ecuacion de Chezy, se tiene the $\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{0}{0} \rightarrow \infty$ si $y \rightarrow 0$.

Con base en lo anterior, analisemos los perfiles de lamina de agua cuando S_o es suave, esto quiere decir que $y_n > y_c$. Si analizamos la profundidad de la lamina de agua en las tres zonas:

- Zona 1: $y > y_n > y_c$
- Zona 2: $y_n > y > y_c$
- Zona 2: $y_n > y_c > y$

Zona 1 (perfil M1)

Si $y > y_n$, de la ecuacion de Manning o Chezy, se tiene que $S_f < S_o$ lo que significa que el numerador es positivo en la ecuación 5. Como $y > y_c$, $F_r < 1$ por lo que el denominador de la ecuación 5 es positivo. Los signos de la ecuacion5 son:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f}{1 - F_r^2} = \frac{+}{+} = +$$

Lo anterior significa que y se incrementa a lo largo de x ; crece hacia aguas abajo. Cuando $y \rightarrow y_n$ asintoticamente en dirección aguas arriba ($S_f \rightarrow S_o$), la superficie del agua tiende a ser horizontal ($\frac{dy}{dx} \rightarrow 0$).

Zona 2 (perfil M2)

Si $y < y_n$, de la ecuacion de Manning o Chezy, se tiene que $S_f > S_o$. Esto quiere decir que el numerador en la ecuación 5, es negativo. El denominador sigue siendo positivo as $F_r < 1$ as $y > y_c$. Los signos de la ecuación 5 quedan:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f}{1 - F_r^2} = \frac{-}{+} = -$$

Esto quiere decir que y decrece a lo largo de x ; hacia aguas abajo en donde $y \rightarrow y_c$ asintoticamente y casi vertical. Hacias aguas arriba, $y \rightarrow y_n$ asintoticamente.

Zona 3 (perfil M3)

Si $y < y_n$, de la ecuación de Manning o de Chezy, se tiene que $S_f > S_o$, lo cual significa que el numerador de la ecuación 5 es negativo. Como $y < y_c$, $F_r > 1$ por lo que el denominador de la ecuación 5 es negativo. Los signos de la ecuación 5, son:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f}{1 - F_r^2} = \frac{-}{-} = +$$

Esto significa que y incrementa a lo largo de x ; en dirección aguas abajo. Hacia aguas abajo donde $y \rightarrow y_c$ casi verticalmente, mientras que en dirección aguas arriba cuando $y \rightarrow 0$ la pendiente de lamina de agua es finita y positiva (de acuerdo con la ecuación de Chezy).

La figura 4 muestra los perfiles de flujo en situaciones reales.

Figure 4: Perfiles de la lamina de agua (tomado de [?]).

2.3 Esquematizar los perfiles de flujo

Es importante anotar que una sección de flujo en donde exista una relación entre Q y y (e.g. $f(y) = Q$) es una *sección de control*. El comportamiento de los perfiles de flujo analizados son para canales prismáticos con secciones de control aguas arriba o aguas abajo. Sin embargo, en la vida real, los controles sobre el flujo pueden existir en cualquier sección a lo largo del flujo y la geometría así como la pendiente pueden cambiar a lo largo del canal por lo que la esquematización de los perfiles se debe hacer por sectores del canal. A continuación describe como esquematizar el perfil de flujo en canal:

1. Divida el canal en diferentes tramos con una única geometría, pendiente, caudal y coeficiente de fricción.
2. Calcule la profundidad normal (y_n) y la profundidad crítica (y_c).
3. Para cada tramo, dibuje el fondo del canal, la línea de y_n y de y_c .
4. Determine las secciones de control, aquellas secciones en donde y es conocida e.g. secciones en donde $y = y_c$. Identifique los tramos en donde el flujo es uniforme $y = y_n$.

Note que el flujo subcrítico es gobernado por secciones de control aguas abajo, mientras que el flujo supercrítico es gobernado por secciones de control aguas arriba. Es posible tener secciones de control intermedias como vertederos, compuertas, etc, que determinan el flujo aguas arriba y aguas abajo. Por ejemplo, a la entrada de un canal, la profundidad de flujo pasa a través de y_c cuando el nivel en el tanque o vertedero es mayor que y_c y la pendiente del canal es alta. En un canal que descarga libremente, si $y > y_c$, la lamina de agua pasa por y_c aproximadamente de 3 a 4 veces y_c aguas arriba de la sección de descarga. Por otra parte, un resalto hidráulico es formado cuando se presenta un cambio de flujo supercrítico a subcrítico; en este caso se tienen un control aguas arriba y otro aguas abajo del resalto.

Ejemplo 1

Esquematice el perfil de flujo de el canal que conecta los tanques que muestra la figura. Tenga en cuenta que la pendiente del canal 1 es fuerte y la pendiente del canal 2 es suave.