

# Estructuras Hidráulicas [2015961]

## Tema # 3: Flujo variado

Luis Alejandro Morales, Ph.D

Profesor Asistente

Universidad Nacional de Colombia-Bogotá

Facultad de Ingeniería

Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola

## Contents

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Flujo gradualmente variado</b>	<b>1</b>
2.1	Ecuaciones para el calculo . . . . .	1
2.2	Clasificación de los perfiles de flujo . . . . .	3
2.3	¿Como esquematizar los perfiles de flujo? . . . . .	6
2.4	Casos típicos relacionados con perfiles de flujo . . . . .	7
2.5	Perfiles de flujo en canales compuestos . . . . .	9
2.6	Cálculo del flujo gradualmente variado . . . . .	9
2.6.1	Método del paso directo . . . . .	11
2.6.2	Método del paso estandar . . . . .	13

## 1 Introducción

En canales naturales la pendiente y la sección transversal cambian a lo largo del canal, lo cual ocurre también en canales artificiales en donde, por razones constructivas y de la topografía del terreno, la pendiente y la sección cambian mediante estructuras de transición. Esto hace que el flujo cambie constantemente y que el flujo sea *no uniforme*. Si el cambio en la lámina de agua a lo largo del canal es relativamente pequeño se le conoce como *flujo gradualmente variado (FGV)*, si el cambio es fuerte, se le conoce como *flujo rapidamente variado (FRV)*. El FGV se analiza para secciones largas de canales por lo que es necesario considerar las pérdidas de energía debido a la fricción. Sin embargo, teniendo en cuenta que el FRV se presenta en secciones cortas de un canal, las pérdidas de energía por fricción son despreciables. Teniendo en cuenta que las líneas de flujo en el FGV son casi paralelas y siguen una trayectoria casi recta, una distribución de presiones hidroestática es considerada allí. En el FRV, los fuertes gradientes del flujo generan curvaturas de las líneas de corriente y por lo tanto aceleraciones en dirección normal al flujo por lo que considerar una distribución hidroestática de presiones no es correcto.

## 2 Flujo gradualmente variado

### 2.1 Ecuaciones para el calculo

A continuación se derivan las ecuaciones de FGV para una canal prismático, a partir de las siguientes suposiciones:

- Pendiente del fondo del canal pequeña. Esto implica que  $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo del fondo del canal con respecto a la horizontal.
- No hay entradas ni salidas de flujo del canal.
- La distribución de presiones es hidrostática en todas las secciones del canal.
- Las pérdidas de energía debido a la fricción son calculadas usando alguna de las ecuaciones mencionadas para flujo uniforme.

Teniendo en cuenta lo anterior y la figura 1, la cabeza total de energía en una sección de canal es:

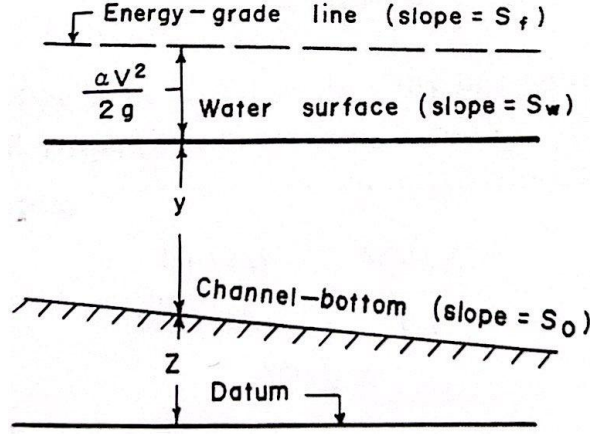


Figure 1: Sección de flujo gradualmente variado en canal prismático (tomado de [?]).

$$H = z + y + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad (1)$$

en donde  $H$  es la elevación de la línea de energía con respecto a un nivel de referencia,  $z$  es la elevación del fondo del canal,  $y$  es la profundidad de la lámina de agua,  $V$  es la velocidad media del flujo en la sección transversal y  $\alpha$  es el factor de corrección de la energía cinética. Consideremos  $x$  como la distancia positiva en dirección del flujo. Derivando la ecuación 1 con respecto a  $x$ , tenemos:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{\alpha Q^2}{2g} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{A^2} \right) \quad (2)$$

Por definición, se tiene que  $\frac{dH}{dx} = -S_f$  y  $\frac{dz}{dx} = -S_o$ , donde  $S_f$  es la pendiente de la línea de energía y  $S_o$  es la pendiente del fondo del canal; note que el signo negativo indica que las cantidades decrecen a lo largo del canal en dirección del flujo.

Resolviendo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{A^2} \right) &= \frac{d}{dA} \left( \frac{1}{A^2} \right) \frac{dA}{dx} \\ &= \frac{-2}{A^3} \frac{dA}{dy} \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{-2B}{A^3} \frac{dy}{dx} \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $B = \frac{dA}{dy}$  representa el ancho del canal en la superficie. Para canales no prismáticos:

$$\frac{dA}{dx} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}$$

Lo que significa que  $A$  cambia en  $x$  y  $y$ .

Reemplazando terminos en la ecuación 2 y organizando terminos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f}{1 - (\alpha B Q^2) / (g A^3)} \quad (4)$$

El termino  $\frac{\alpha B Q^2}{g A^3}$  puede ser expresado en funcion del número de Froude ( $F_r$ ) as  $\frac{\alpha B Q^2}{g A^3} = \frac{(Q/A)^2}{(gA)/(\alpha B)} = F_r^2$ . De acuerdo con esto, la ecuación 4, se expresa como:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f}{1 - F_r^2}} \quad (5)$$

La ecuación 5 es utilizada para analizar el FGV en canales prismáticos, su solución proporciona las profundidades a lo largo de un tramo de canal. Es además usada para la descripción cualitativa del FGV.

## 2.2 Clasificación de los perfiles de flujo

Para clasificar los perfiles de la lámina de agua es necesario, en principio, clasificar la pendiente del fondo del canal como:

- Pendiente suave (en Inglés, mild) ( $M$ ): Si el flujo uniforme es subcrítico ( $y_n > y_c$ ) la pendiente el canal es tipo  $M$ .
- Pendiente alta (en Inglés, steep) ( $S$ ): Si el flujo uniforme es supercrítico ( $y_n < y_c$ ) la pendiente del canal es tipo  $S$ .
- Pendiente critica (en Inglés, critical) ( $C$ ): Si el flujo uniforme es crítico ( $y_n = y_c$ ), la pendiente del canal es tipo  $C$ .
- Pendiente horizontal (en Inglés, horizontal) ( $H$ ) : Matemáticamente, se puede demostrar que la profundidad normal es infinita si la pendiente es horizontal (tipo  $H$ ).  $AR^{2/3} = \frac{Q_n}{S_o}$  incrementa hacia el infinito si  $S_o \rightarrow 0$ .
- Pendiente adversa (en Inglés, adverse) ( $A$ ): Matemáticamente, se puede demostrar que la profundidad normal no existe si la pendiente es adversa (tipo  $A$ ).  $AR^{2/3} = \frac{Q_n}{S_o}$  se vuelve negativa (imposible!) si  $S_o$  es negativa.

La esquematización de los perfiles de agua  $M$  y  $S$  se hace con base en la figura 2, en donde  $NDL$  indica la posición de la profundidad normal (normal-depth line) y  $CDL$  indica la posición de la profundidad crítica (critical-depth line). En esta figura se tienen tres zonas que determinan la posición del perfil  $M$  o  $S$ . Note además, que las posición de  $NDL$  y  $CDL$  cambia dependiendo de la pendiente del canal (o tipo de flujo). Para los perfiles  $C$ ,  $H$ , y  $A$ , teniendo en cuenta que  $y_n$  no existe o es igual a  $y_c$ , existen únicamente dos zonas en donde se ubican estos perfiles.

De acuerdo con lo anterior, se tienen entonces 12 diferentes perfiles de lámina de agua: tres para  $M$ , tres para  $S$ , dos para  $C$  (la zona 2 no existe ya que  $y_n = y_c$ ), dos para  $H$  (la zona 1 no existe ya que  $y_n = \infty$ ) y dos para  $A$  (la zona 1 no existe ya que  $y_n$  no existe). La figura 3 muestra los perfiles de la lámina de agua.

El comportamiento de los perfiles de lámina de agua se puede hacer con base en el análisis de la ecuación 5. De acuerdo con esto,  $y$  aumentará a lo largo de  $x$  si  $\frac{dy}{dx}$  es positivo y decrecerá si ocurre lo

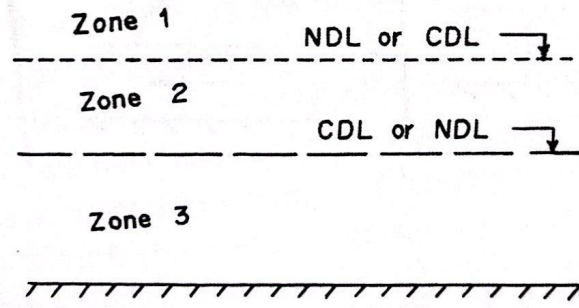


Figure 2: Zonas para la clasificación de perfiles de flujo (tomado de [?]).

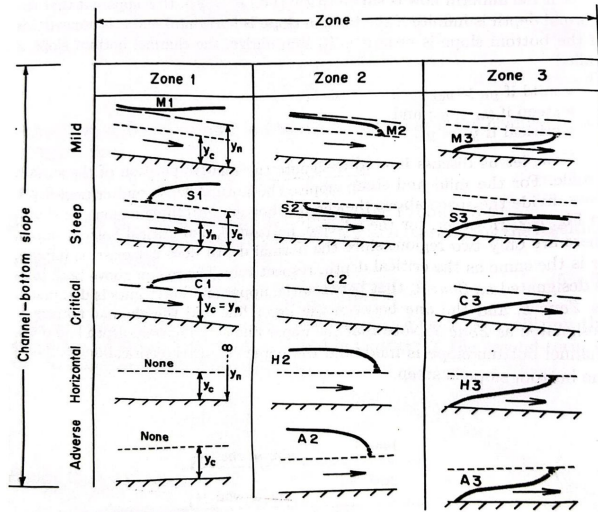


Figure 3: Perfiles de la lámina de flujo (tomado de [?]).

contrario. El signo de  $\frac{dy}{dx}$  lo determina la parte derecha de la ecuación 5; los signos del numerador ( $S_o - S_f$ ) y del denominador ( $1 - F_r^2$ ). Del estudio de flujo uniformes sabemos que  $S_f = S_o = S_w$  cuando  $y_n = y$ , por lo que para un  $Q$  dado a partir de la ecuación de Manning o de Chezy tenemos que  $S_f > S_o$  si  $y < y_n$  y  $S_f < S_o$  si  $y > y_n$ . De acuerdo con esto, podemos establecer el signo de  $S_o - S_f$ . El signo de  $(1 - F_r^2)$  se determina si el flujo es subcrítico ( $F_r < 1$ ) o supercrítico ( $F_r > 1$ ).

Ahora miremos como la superficie de la lámina de agua se aproxima a la profundidad normal, a la profundidad crítica o al fondo del canal. Si  $y \rightarrow y_n$  entonces  $S_f \rightarrow S_o$  y por lo tanto  $\frac{dy}{dx} \rightarrow 0$  a pesar que  $F_r \neq 1$  (no flujo crítico). Esto significa que la lámina de agua se aproxima asintóticamente a *NDL*. Por otro lado, si  $y \rightarrow y_c$   $F_r \rightarrow 1$  por que el denominador tiende a cero. Esto quiere decir que  $\frac{dy}{dx} \rightarrow \infty$  a pesar que  $S_f \neq S_o$ . Esto significa que la lámina de agua se aproxima a *CDL* verticalmente. En realidad no se aproxima verticalmente ya que esto no es posible físicamente, pero si con una pendiente muy alta. A pesar que teóricamente la lámina de agua se aproxima verticalmente esto no es posible ya que las distribuciones de presiones cuando la lámina de agua se curva fuertemente la presión ya no es hidroestática por lo tanto la ecuación 5 se viola.

Por otro lado, cuando  $y \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow 0$  y por lo tanto  $F_r$  y  $S_f$  tienden a cero. De la ecuación 5, tenemos entonces que  $\frac{dy}{dx} \rightarrow S_o$ . Teniendo en cuenta que para FGV se asume una pendiente pequeña, tenemos que  $\frac{dy}{dx} \approx 0$  por lo que la lámina de agua tiende a ser horizontal.

Analícemos ahora lo que ocurre cuando la lámina de agua se aproxima al fondo del canal (e.g  $y \rightarrow$ ). De la ecuación de Chezy, tenemos que:

$$S_f = \frac{Q^2}{C^2 A^2 R}$$

donde  $C$  es la constante de Chezy,  $R = A/P$  es el radio hidráulico. Note que para un canal rectangular muy ancho de ancho  $B$ , se tiene que  $R \approx y$ . Reemplazando en la ecuación 5, tenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{gB (S_o C^2 B^2 y^3 - Q^2)}{C^2 (gB y^3 - \alpha B Q^2)}$$

Teniendo en cuenta que  $y \rightarrow 0$  cuando se aproxima al fondo del canal, la ecuación anterior se convierte en:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{dy}{dx} = \frac{g}{\alpha C^2}$$

Lo anterior quiere decir que cuando  $y \rightarrow 0$ , la pendiente de la lámina de agua  $dy/dx$  es finita, tiene un valor positivo y es una función de  $C$  y de  $\alpha$ . Sin embargo, si se usa la ecuación de Manning en lugar de la ecuación de Chezy, se tiene que  $\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{0}{0} \rightarrow \infty$  si  $y \rightarrow 0$ .

Con base en lo anterior, analisemos los perfiles de lámina de agua cuando  $S_o$  es suave, esto quiere decir que  $y_n > y_c$ . Si analizamos la profundidad de la lámina de agua en las tres zonas:

- Zona 1:  $y > y_n > y_c$
- Zona 2:  $y_n > y > y_c$
- Zona 2:  $y_n > y_c > y$

### Zona 1 (perfil M1)

Si  $y > y_n$ , de la ecuación de Manning o Chezy, se tiene que  $S_f < S_o$  lo que significa que el numerador es positivo en la ecuación 5. Como  $y > y_c$ ,  $F_r < 1$  por lo que el denominador de la ecuación 5 es positivo. Los signos de la ecuación 5 son:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f}{1 - F_r^2} = \frac{+}{+} = +$$

Lo anterior significa que  $y$  se incrementa a lo largo de  $x$ ; crece hacia aguas abajo. Cuando  $y \rightarrow y_n$  asintóticamente en dirección aguas arriba ( $S_f \rightarrow S_o$ ), la superficie del agua tiende a ser horizontal ( $\frac{dy}{dx} \rightarrow 0$ ).

### Zona 2 (perfil M2)

Si  $y < y_n$ , de la ecuación de Manning o Chezy, se tiene que  $S_f > S_o$ . Esto quiere decir que el numerador en la ecuación 5, es negativo. El denominador sigue siendo positivo porque  $F_r < 1$  y  $y > y_c$ . Los signos de la ecuación 5 quedan:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f}{1 - F_r^2} = \frac{-}{+} = -$$

Esto quiere decir que  $y$  decrece a lo largo de  $x$ ; hacia aguas abajo en donde  $y \rightarrow y_c$  asintóticamente y casi vertical. Hacia aguas arriba,  $y \rightarrow y_n$  asintóticamente.

### Zona 3 (perfil M3)

Si  $y < y_n$ , de la ecuación de Manning o de Chezy, se tiene que  $S_f > S_o$ , lo cual significa que el numerador de la ecuación 5 es negativo. Como  $y < y_c$ ,  $F_r > 1$  por lo que el denominador de la ecuación 5 es negativo. Los signos de la ecuación 5, son:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f}{1 - F_r^2} = \frac{-}{-} = +$$

Esto significa que  $y$  incrementa a lo largo de  $x$ ; en dirección aguas abajo. Hacia aguas abajo donde  $y \rightarrow y_c$  casi verticalmente, mientras que en dirección aguas arriba cuando  $y \rightarrow 0$  la pendiente de la lámina de agua es finita y positiva (de acuerdo con la ecuación de Chezy).

La figura 4 muestra los perfiles de flujo en situaciones reales.

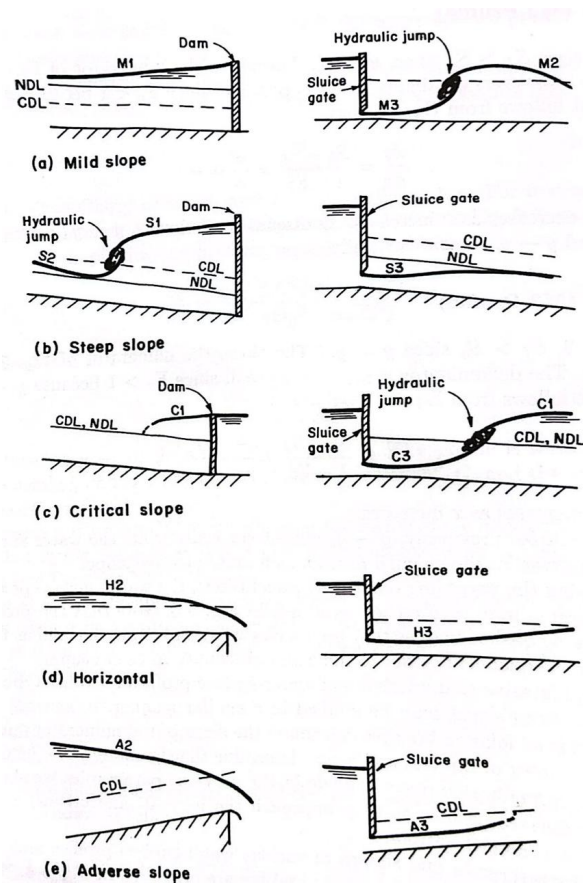


Figure 4: Perfiles de la lámina de agua (tomado de [?]).

### 2.3 ¿Como esquematizar los perfiles de flujo?

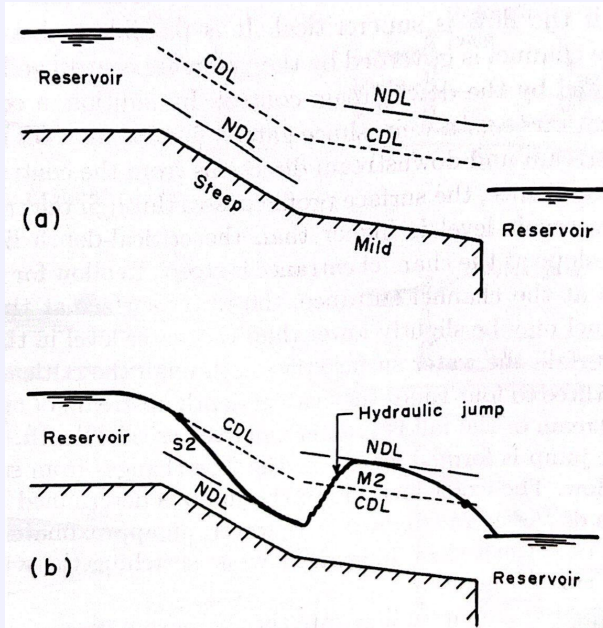
Es importante anotar que una sección de flujo en donde exista una relación entre  $Q$  y  $y$  (e.g.  $f(y) = Q$ ) es una *sección de control*. El comportamiento de los perfiles de flujo analizados son para canales prismáticos con secciones de control aguas arriba o aguas abajo. Sin embargo, en la vida real, los controles sobre el flujo pueden existir en cualquier sección a lo largo del flujo y la geometría así como la pendiente pueden cambiar a lo largo del canal por lo que la esquematización de los perfiles se debe hacer por sectores del canal. A continuación describe como esquematizar el perfil de flujo en canal:

1. Divida el canal en diferentes tramos con una única geometría, pediente, caudal y coeficiente de fricción.
2. Calcule la profundidad normal ( $y_n$ ) y la profundidad crítica ( $y_c$ ).
3. Para cada tramo, dibuje el fondo del canal, la línea de  $y_n$  y de  $y_c$ .
4. Determine las secciones de control, aquellas secciones en donde  $y$  es conocida e.g. secciones en donde  $y = y_c$ . Identifique los tramos en donde el flujo es uniforme  $y = y_n$ .

Note que el flujo subcrítico es gobernado por secciones de control aguas abajo, mientras que el flujo supercrítico es gobernado por secciones de control aguas arriba. Es posible tener secciones de control intermedias como vertederos, compuertas, etc, que determinan el flujo aguas arriba y aguas abajo. Por ejemplo, a la entrada de un canal, la profundidad de flujo pasa a través de  $y_c$  cuando el nivel en el tanque o vertedero es mayor que  $y_c$  y la pendiente del canal es alta. En un canal que descarga libremente, si  $y > y_c$ , la lámina de agua pasa por  $y_c$  aproximadamente de 3 a 4 veces  $y_c$  aguas arriba de la sección de descarga. Por otra parte, un resalto hidráulico es formado cuando se presenta un cambio de flujo supercrítico a subcrítico; en este caso se tiene un control aguas arriba y otro aguas abajo del resalto.

### Ejemplo 1

Esquematice el perfil de flujo de el canal que conecta los tanques que muestra la figura. Tenga en cuenta que la pendiente del canal 1 es fuerte y la pendiente del canal 2 es suave.



## 2.4 Casos típicos relacionados con perfiles de flujo

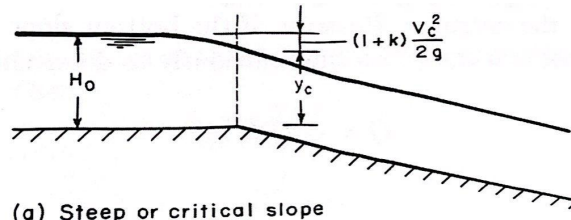
### Descarga de un embalse

Consideremos el sistema mostrado en la figura 5 en donde un embalse descarga hacia un canal en donde la sección transversal, el coeficiente de pérdidas de energía a la entrada ( $k$ ), el coeficiente de rugosidad de Manning ( $n$ ) y la pendiente del fondo del canal  $S_o$ , son conocidas. El problema consiste en determinar la profundidad de la lámina de agua ( $y$ ) y el caudal de flujo ( $Q$ ). Note que como el embalse es grande, la velocidad de flujo justo antes de la entrada al canal es cero y el nivel de la lámina de agua ( $H_o$ ) es constante y conocido.

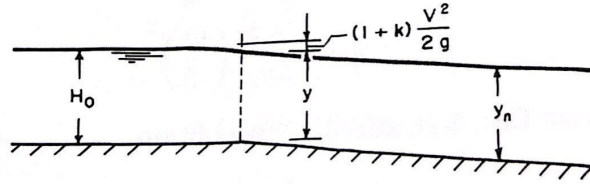
Como  $S_o$  puede ser suave, crítica o fuerte, tenemos que la posición de  $CDL$  y  $NDL$  cambia. Si  $S_o$  es fuerte o crítica,  $y$  cortará  $CDL$  justo a la entrada del canal y seguirá disminuyendo hasta encontrar una profundidad uniforme  $y < y_c$  para el caso de pendiente fuerte y  $y = y_c$  para el caso de pendiente crítica. Si  $S_o$  es suave,  $y$  se aproximará a  $NDL$  rápidamente justo aguas abajo de la entrada.

El primer paso, es determinar el tipo  $S_o$ . Para esto se calcula la pendiente crítica del canal  $S_c$ . Si consideramos que  $y_c$  ocurre a la entrada del canal, para un  $\alpha$ , tenemos que:

$$\frac{Q^2}{2gA_c^2} = \frac{D_c}{2}$$



(a) Steep or critical slope



(b) Mild slope

Figure 5: Descarga desde un embalse (tomado de [?]).

y

$$H_o = y_c + (1 + k) \frac{Q^2}{2gA_c^2}$$

donde  $k$  es el coeficiente de pérdidas a la entrada, y  $D_c$  y  $A_c$  son la profundidad hidráulica y el área mojada, respectivamente, para  $y_c$ . Estas dos ecuaciones son resueltas para  $Q$  y  $y_c$ . Si la pendiente del fondo del canal es igual a  $S_c$ , tendríamos un flujo uniforme ( $y = y_n = y_c$ ) a partir de la entrada al canal y podríamos utilizar la ecuación de Manning para encontrar  $S_c$ :

$$Q = \frac{1}{n} AR^{2/3} S_c^{1/2}$$

Una vez calculada  $S_c$  a partir de la ecuación anterior, podemos decir que la pendiente es crítica si  $S_o = S_c$ , la pendiente es fuerte si  $S_o > S_c$  y la pendiente es suave si  $S_o < S_c$ . Si  $S_o = S_c$   $Q$  y  $y = y_n = y_c$ , calculadas a partir de las ecuaciones, son correctas. Si  $S_o > S_c$  solo el caudal es correcto y la profundidad  $y = y_n$  se calcula a partir de la ecuación de Manning. Si  $S_o < S_c$  ni  $Q$  ni  $y$  están bien calculadas y es necesario resolver las siguientes ecuaciones para encontrarlas:

$$Q = \frac{1}{n} AR^{2/3} S_o^{1/2}$$

y

$$H_o = y + (1 + k) \frac{Q^2}{2gA^2}$$

Uniendo estas dos ecuaciones, tenemos que:

$$H_o = y + \frac{1 + k}{2gn^2} R^{4/3} S_o$$

Resolviendo esta ecuación encontramos  $y$  en el canal, y  $Q$  se puede encontrar utilizando la ecuación de Manning.



## Ejemplo 2

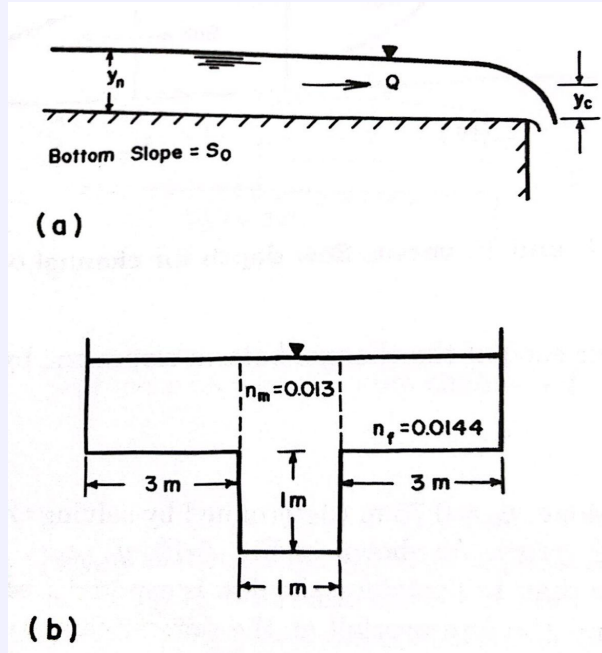
Un canal rectangular en concreto ( $n = 0.013$ ) de  $B = 10$  m de ancho que tiene una pendiente del fondo  $S_o = 0.01$  sirve para descargar un embalse de nivel constante. Si el nivel en el embalse es de  $H_o = 6$  m, determinar el caudal y la profundidad teniendo en cuenta que la velocidad en el embalse es cero y las pérdidas a la entrada del canal son despreciables.

## 2.5 Perfiles de flujo en canales compuestos

El cálculo de perfiles de flujo mostrado hasta el momento ha sido para canales con secciones únicas. Sin embargo, en canales con secciones compuestas (canales con banquetas o diferentes rugosidades) los perfiles de flujo necesitan un tratamiento especial porque puede haber más de una profundidad crítica. Para el análisis de estos perfiles de flujo es importante dibujar las curvas de energía y fuerza específica y determinar las profundidades críticas. El siguiente ejemplo muestra como determinar el perfil de flujo para una canal compuesto.

## Ejemplo 3

Un canal largo de sección transversal como se muestra en la figura, descarga libremente a un embalse. El canal transporta un caudal constante de  $Q = 2.5 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$  y los coeficientes de rugosidad para el canal principal y las banquetas son de 0.013 y 0.0144, respectivamente (ver figura). Esquematizar los perfiles de velocidad si el fondo del canal tuviera las siguientes pendientes:  $S_o = 0.0094$ ,  $S_o = 0.0049$ ,



$S_o = 0.0029$  y  $S_o = 0.001$ .

## 2.6 Cálculo del flujo gradualmente variado

En ingeniería hidráulica, es necesario, en muchos casos, determinar el perfil de la lámina de agua a lo largo de un canal para un caudal determinado. Este cálculo es importante para la planeación, diseño y operación de canales, y para evaluar los efectos en la hidráulica del canal para diferentes modificaciones. Por ejemplo, la construcción de una presa en un río, modifica el perfil de la lámina de agua aguas arriba por lo que es necesario calcularlo para determinar el área inundada. El cálculo del flujo gradualmente variado (FGV) consiste en determinar la profundidad y la velocidad en cada sección del canal a partir de las ecuaciones de conservación de la masa, conservación de la energía y conservación de la cantidad de movimiento lineal,

para un  $n$  de Manning,  $S_o$ ,  $Q$  y geometría de la sección, usualmente, conocidas. Como comentabamos en secciones anteriores, el cambio en la profundidad de flujo en FGV es pequeño por lo que se puede asumir una distribución hidroestática de presiones.

Para determinar el perfil de la lámina de agua a lo largo del canal, es necesario solucionar la ecuación 4, la cual es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en donde  $x$ , que es la longitud en dirección del flujo, es la variable independiente y  $y$ , que es la profundidad del flujo, es la variable dependiente. Note que la ecuación 4 es función de  $x$  y de  $y$ , ya que la geometría,  $n$ ,  $S_o$  y  $Q$  son valores dados. De acuerdo con esto es posible escribir:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (6)$$

por lo que

$$f(x, y) = \frac{S_o - S_f}{1 - (\alpha B Q^2) / (g A^3)} \quad (7)$$

La ecuación 7, la cual es una ecuación no lineal, se soluciona por integración numérica teniendo en cuenta que su solución analítica no es posible para el caso general. Esta solución numérica se hace para valores discretos de  $x$  para los cuales se determina el valor de  $y$  partiendo de un valor inicial  $y$  conocido para  $x$ . Supongamos que  $y_1$  es un valor conocido en  $x_1$  y se quiere conocer  $y_2$  para  $x_2$  o  $x_2$  para  $y_2$ . Esto implica dos tipos de problemas: 1) calcular  $y_2$  para  $x_2$  y 2) conocer  $x_2$  si se conoce  $y_2$ . Despejando e integrado la ecuación 6, se tiene:

$$\int_{y_1}^{y_2} dy = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx \quad (8)$$

Resolviendo, se tiene:

$$y_2 = y_1 + \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx \quad (9)$$

La ecuación 9 sirve para encontrar de manera secuencial los valores de  $y$  aguas abajo en dirección  $x$  positiva a partir de un valor  $y_1$  y de  $f(x, y)$  en  $x_1$  conocidos. De igual manera es posible encontrar los valores de  $y$  aguas arriba en dirección de  $x$  negativa partiendo de un valor dado de  $y_2$  y de  $f(x, y)$  en  $x_2$  conocidos.

Para el problema dos, el cual consiste en encontrar  $x_2$  si se conoce  $y_2$ , a partir de la ecuación 6 tenemos:

$$\frac{dx}{dy} = f^{-1}(x, y) \quad (10)$$

Despejando e integrando:

$$x_2 = x_1 + \int_{y_1}^{y_2} f^{-1}(x, y) dy \quad (11)$$

La ecuación 11 sirve para encontrar de manera secuencial los valores de  $x$  aguas abajo en dirección  $x$  positiva a partir de un valor  $x_1$  y de  $f(x, y)$  en  $x_1$  conocidos. De igual manera, es posible encontrar los valores de  $x$  aguas arriba en dirección de  $x$  negativa partiendo de un valor dado de  $x_2$  y de  $f(x, y)$  en  $x_2$  conocidos.

Como una alternativa a la solución de la ecuación 4, es la solución de la ecuación de conservación de la energía entre dos secciones adyacentes 1 y 2,

$$z_1 + y_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + y_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_f \quad (12)$$

donde  $h_f$  es la pérdida de energía entre 1 y 2. Esta ecuación algebraica se soluciona para la sección 1 o 2 dependiendo en cual de ellas sean conocidas las condiciones de flujo. Note que  $h_f$  se calcula a partir de la ecuación de Manning, por ejemplo. Note que todo lo que debemos saber para solucionar la ecuación 4 o la ecuación 12 son las condiciones del flujo en una sección (sección de control) e ir calculando hacia aguas arriba o hacia aguas abajo dependiendo del tipo de problema, las propiedades del flujo (e.g.  $y$ ). Un aspecto importante a tener en cuenta es el paso en  $x$  con el fin de que la solución numérica sea estable.

En las siguientes secciones se explican algunos métodos para el cálculo del flujo gradualmente variado. El cálculo del perfil en los dos primeros métodos se hace sección a sección. Se introducen además métodos numéricos más sofisticados para el cálculo del FGV.

### 2.6.1 Método del paso directo

Este método es un procedimiento sistemático para determinar la posición  $x_2$  en donde ocurre una profundidad conocida  $y_2$  a partir de las condiciones conocidas en una sección 1 ( $x_1$  y  $y_1$ ) para un  $Q$ ,  $S_o$  y  $n$  conocidos (ver figura 6).

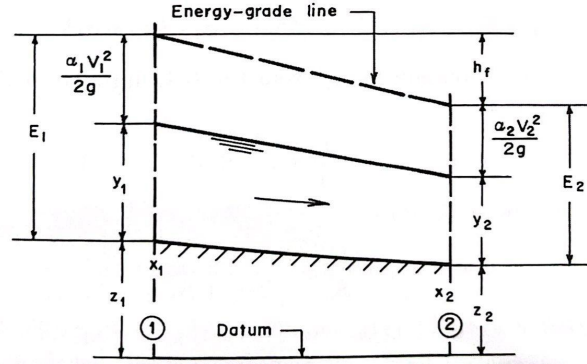


Figure 6: Cálculo de la distancia para una profundidad conocida (tomado de [?]).

Partiendo de la ecuación de conservación de la energía (ecuación 12) entre dos secciones 1 y 2, tenemos que:

$$z_1 + E_1 = z_2 + E_2 + h_f \quad (13)$$

en donde  $E_i = y_i + \alpha_i \frac{V_i^2}{2g}$ . Las pérdidas de energía  $h_f$  entre 1 y 2, se pueden calcular como:

$$h_f = \frac{1}{2} (S_{f1} + S_{f2}) (x_2 - x_1)$$

en donde  $S_{f_i}$  puede ser calculada usando una de las ecuaciones para el cálculo de pérdidas en flujo uniforme como la ecuación de Manning. La ecuación 13 queda:

$$z_1 + E_1 = z_2 + E_2 + \frac{1}{2} (S_{f1} + S_{f2}) (x_2 - x_1) \quad (14)$$

De la figura 6 tenemos que  $z_2 = z_1 - S_o (x_2 - x_1)$ , reemplazando en la ecuación 14 y despejando para  $x_2$ :

$$x_2 = x_1 + \frac{E_2 - E_1}{S_o - \frac{1}{2} (S_{f1} + S_{f2})} \quad (15)$$

La ecuación 15 determina la localización  $x$  de la sección 2 a partir de unos valores dados de  $Q$ ,  $S_o$  y  $n$ , a partir de condiciones conocidas de flujo en la sección 1, y a partir de unos valores dados de  $y_2$  para calcular  $E_2$ . A partir de la sección conocida 1, se inicia el cálculo sistemático de  $x$  para valores dados de  $y$  aguas abajo ( $x$  positivo) o hacia aguas arriba ( $x$  negativo) dependiendo de donde se encuentre la sección inicial.

Note que el signo del cálculo es tenido en cuenta en la ecuación 15. Para el cálculo es importante utilizar el mayor número de cifras significativas teniendo en cuenta que el segundo término del lado derecho de la ecuación 15 es muy pequeño. Algunas desventajas de este método son: 1) no cálculo de la profundidad de agua  $y$  por lo que sería necesario interpolar para saber  $y$  en una posición determinada, 2) en canales con geometría variable sería necesario determinar la geometría mediante un proceso iterativo ya que esta no se conoce en 2.

A continuación se describe un algoritmo para la implementación del método de paso directo.

**Algoritmo 1: Cálculo del FVG en canales prismáticos o circulares: Método del paso directo**

1. Leer:  $Q$ ,  $n$ ,  $So$ ,  $\alpha$ ,  $y_1$  y  $x_1$ , donde  $y_1$  es la profundidad de flujo en la sección de control y  $x_1$  es la abscisa de la sección de control. En caso de canales prismáticos leer:  $b$ ,  $\theta_1$  (ángulo de la banca izquierda) y  $\theta_2$  (ángulo de la banca derecha). En el caso de secciones circulares, leer  $r$  (radio). Note que en caso de que en la sección de control la profundidad  $y_1 = y_c$ , el valor de  $y_1$  no se lee; se hará igual a  $y_c$  una vez sea calculada.
2. Calcular la profundidad normal ( $y_n$ ) usando la ecuación de Manning y la profundidad crítica ( $y_c$ ) usando la ecuación de número de Froude.
3. Con base en  $y_n$ ,  $y_c$  y  $So$  determinar el tipo de perfil de flujo.
4. Establecer si la sección de control de flujo está aguas arriba o aguas abajo.
5. Leer  $\Delta y$ , el cual es el paso para aumentar o disminuir (dependiendo del perfil) la profundidad.  $\Delta y$  se establece como la diferencia entre  $y_1$  y la profundidad que alcanzará el perfil de flujo hacia aguas arriba o hacia aguas abajo, puede ser  $y_n$  o  $y_c$ . Note que  $\Delta y$  debe asegurar que existan un número suficiente de puntos para graficar el perfil.
6. Elaborar una tabla con las siguientes columnas:  $y$  (profundidad de flujo),  $A$  (Área),  $R$  (Radio hidráulico),  $V$  (Velocidad de flujo),  $S_f$  (gradiente de energía) y  $E$  (Energía). La primera fila de la tabla se calcula con los valores conocidos en la sección de control 1. Para la segunda fila (la sección siguiente 2), la profundidad  $y_1$  se disminuye o se aumenta (dependiendo del tipo de perfil) en un valor  $\Delta y$ ,  $y_2 = y_1 \pm \Delta y$ . A partir de  $y_2$  se calculan los valores de la tabla para completar la fila 1.
7. A partir de los valores calculados en la tabla para la fila  $i$  y la fila  $i + 1$ , se calcula la abscisa  $x_{i+1}$  usando la ecuación 15. El cálculo de los valores de  $x$  se hace hasta que:
  - $y \geq 1.05y_n$  en caso de que  $y$  disminuya y se aproxime a  $y_n$ .
  - $y \leq 0.98y_n$  en caso de que  $y$  aumente y se aproxime a  $y_n$ .
  - $y \geq 1.05y_c$  en caso de que  $y$  disminuya y se aproxime a  $y_c$ .
  - $y \leq 0.98y_c$  en caso de que  $y$  aumente y se aproxime a  $y_c$ .
8. Con las parejas de valores  $(x, y)$  graficar el perfil de flujo. Otras parejas de puntos útiles para graficar son:  $(x, z)$ ,  $(x, y_n)$  y  $(x, y_c)$ . En las dos últimas los valores de  $y_n$  y  $y_c$  se repiten. Note que  $z_{i+1} = z_{i+1} + So(x_{i+1} - x_i)$

#### Ejemplo 4

Para una canal trapezoidal con las siguientes características:

- Pendiente de fondo  $S_o = 0.001$
- Caudal  $Q = 30 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$
- Ancho de base  $b = 10 \text{ m}$
- Coeficiente de rugosidad de Manning  $n = 0.013$
- Profundidad en la sección de control aguas abajo  $y_1 = 5 \text{ m}$  en  $x_1 = 0 \text{ m}$ .
- $\alpha = 1$

calcular el perfil de la lámina de agua utilizando el método del paso directo.

#### 2.6.2 Método del paso estandar

El método del paso directo no es adecuado si queremos determinar la profundidad en una sección determinada o si el canal tiene una geometría irregular como es el caso de canales naturales. El *método del paso estandar* aparece como el procedimiento más adecuado para el cálculo de perfiles de flujo en cualquier tipo de canales. Este método es el implementado dentro del programa HEC-RAS, el cual es un código de uso libre muy popular desarrollado por el U.S. Army Corps of Engineers.

Al observar la figura 7, se desea calcular la profundidad  $y_2$  en una sección  $x_2$  a partir de un caudal  $Q$ , una pendiente  $S_o$ , una rugosidad de Manning  $n$  y una geometría conocidas en un tramo de canal incluyendo, una profundidad conocida  $y_1$  en  $x_1$ .

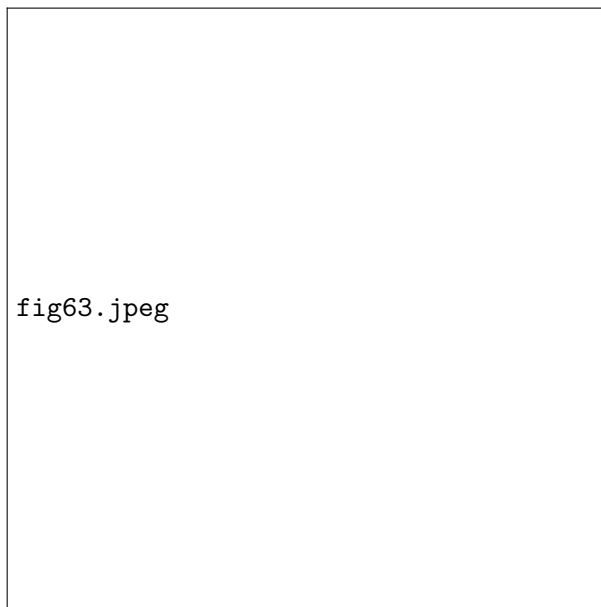


Figure 7: Cálculo de la profundidad de flujo en una sección determinada (tomado de [?]).

Partiendo de la profundidad  $y_1$  y de  $Q$  se puede calcular la  $V_1$  a través de  $V_1 = Q/A_1$ , donde  $A_1$  es la sección transversal en 1. Se puede entonces calcular la energía total en 1  $H_1$  como:

$$H_1 = z_1 + y_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} \quad (16)$$

y por lo tanto, la energía total en 2  $H_2$  es:

$$H_2 = H_1 - h_f \quad (17)$$

donde  $h_f$  son las pérdidas de energía entre las secciones 1 y 2. La ecuación 17, en función del gradiente de energía, se puede expresar como:

$$H_2 = H_1 - \frac{1}{2} (S_{f_1} + S_{f_2}) (x_2 - x_1) \quad (18)$$

Reemplazando por los terminos de la energía total para  $H_2$  en la ecuación 18 y re-organizando se tiene:

$$y_2 + \frac{\alpha_2 Q^2}{2gA_2^2} + \frac{1}{2} S_{f_2} (x_2 - x_1) + z_2 - H_1 + \frac{1}{2} S_{f_1} (x_2 - x_1) = 0 \quad (19)$$

En la ecuación 19,  $A_2$  y  $S_{f_2}$  son funciones de la variable desconocida  $y_2$ . Los otros términos son dados o han sido calculados para la sección 1. De acuerdo con esto,  $y_2$  es encontrado tras solucionar la ecuación no linear:

$$f(y_2) = y_2 + \frac{\alpha_2 Q^2}{2gA_2^2} + \frac{1}{2} S_{f_2} (x_2 - x_1) + z_2 - H_1 + \frac{1}{2} S_{f_1} (x_2 - x_1) \quad (20)$$

La ecuación ??uede ser resuelta por medio de el *método de Newton-Raphson* o el *método de la bisección*. A continuación se discutirá el método de Newton-Raphson para resolver la ecuación 20 y para esto es necesario el cálculo de la derivada de  $f(y_2)$  con respecto a  $y_2$  como:

$$\frac{df}{dy_2} = 1 - \frac{\alpha_2 Q^2}{gA_2^3} \frac{dA_2}{dy_2} + \frac{1}{2} (x_2 - x_1) \frac{d}{dy_2} \left( \frac{Q^2 n^2}{C_o^2 A_2^2 R_2^{4/3}} \right) \quad (21)$$

Resolviendo la derivada de el último termino de la ecuación 21, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dy_2} \left( \frac{Q^2 n^2}{C_o^2 A_2^2 R_2^{4/3}} \right) &= \frac{-2Q^2 n^2}{C_o^2 A_2^3 R_2^{4/3}} \frac{dA_2}{dy_2} - \frac{4}{3} \frac{Q^2 n^2}{C_o^2 A_2^3 R_2^{4/3}} \frac{1}{R_2} \frac{dR_2}{dy_2} \\ &= \frac{-2Q^2 n^2}{C_o^2 A_2^3 R_2^{4/3}} \frac{B_2}{A_2} - \frac{4}{3} \frac{Q^2 n^2}{C_o^2 A_2^3 R_2^{4/3}} \frac{1}{R_2} \frac{dR_2}{dy_2} \\ &= -2 \left( S_{f_2} \frac{B_2}{A_2} + \frac{2}{3} \frac{S_{f_2}}{R_2} \frac{dR_2}{dy_2} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

Reemplazando la ecuación 22 en la ecuación 21, se tiene:

$$\frac{df}{dy_2} = 1 - \frac{\alpha_2 Q^2}{gA_2^3} B_2 - \frac{1}{2} (x_2 - x_1) \left( S_{f_2} \frac{B_2}{A_2} + \frac{2}{3} \frac{S_{f_2}}{R_2} \frac{dR_2}{dy_2} \right) \quad (23)$$

La derivada  $\frac{dR_2}{dy_2}$  del último termino de la ecuación 23 es:

$$\begin{aligned} \frac{dR_2}{dy_2} &= \frac{d}{dy_2} \left( \frac{A_2}{P_2} \right) \\ &= \frac{1}{P_2} \frac{dA_2}{dy_2} + A_2 \frac{d}{dy_2} \left( \frac{1}{P_2} \right) \\ &= \frac{B_2}{P_2} - \frac{A_2}{P_2^2} \frac{dP_2}{dy_2} \end{aligned} \quad (24)$$

Note que para un canal rectangular  $\frac{dP_2}{dy_2} = 2$  y para un canal trapezoidal  $\frac{dP_2}{dy_2} = 2\sqrt{1+s^2}$  en donde  $s$  es la pendiente de las bancas del canal (sH:1V). A continuación se describe un algoritmo para la implementación del método de paso estandar.

## Algoritmo 2: Cálculo del FVG en canales: Método del paso estandar

1. Leer:  $Q$ ,  $n$ ,  $So$ ,  $\alpha$ ,  $y_1$  y  $x_1$ , donde  $y_1$  es la profundida de flujo en la sección de control y  $x_1$  es la abscisa de la sección de control. En caso de canales prismáticos leer:  $b$ ,  $\theta_1$  (ángulo de la banca izquierda) y  $\theta_2$  (ángulo de la banca izquierda). En el caso de secciones circulares, leer  $r$  (radio). Para canales irregulares, es necesario leer parejas de puntos  $(x_i, y_i, z_i)$  donde  $i = 1 \cdots n$  para  $n$  puntos y valores de  $n_i$  (rugosidad de Manning) para  $n - 1$  segmentos; esto se hace para  $ns$  secciones. Para el caso de canales naturales no se lee  $So$ , esta se calcula con base en los puntos más bajos entre secciones adyacentes. Para cualquier tipo de canal es tambien necesario leer el paso en  $x$   $\Delta x$ . Note que en caso de que en la sección de control la profundidad  $y_0 = y_c$ , el valor de  $y_0$  no se lee; se hará igual a  $y_c$  una ves sea calculada.

2. Calcular  $H_1$  usando la ecuación 16

3. Calcular un inicial aproximado de  $y_2$ , que se llamara  $y_2^*$ .  $y_2^*$  se calcula a partir de la ecuación 6 como

$$y_2^* = y_1 + f(x_1, y_1)dx = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1)$$

donde  $f(x, y)$  se calcula usando la ecuación 7. Note que  $x_2 = x_1 + \Delta x$ . Alternativamente, para pasos de cálculo mayores a 2 (e.g 3,4  $\cdots$ )  $y_2^*$  se puede calcular extrapolando los puntos de  $y$  para secciones anteriores. Por ejemplo,  $y_3^*$  se calcula extrapolando los puntos  $y_2$  y  $y_1$ .

4. Para el valor estimado de  $y_2^*$ , calcular para la sección 2:  $B_2^*$ ,  $A_2^*$ ,  $R_2^*$  y  $S_{f2}^*$ .
5. Con base en los valores estimados en el paso anterior, calcular  $f(y_2^*)$  usando la ecuación 20 y calcular  $\left(\frac{df}{dy_2}\right)^*$  usando la ecuación 23 y la ecuación 24.
6. Implementando el método de Newton-Raphson, calcular un mejor valor de  $y_2$  (valor definitivo de  $y$  en la sección 2) usando:

$$y_2 = y_2^* - \frac{f(y_2^*)}{\left(\frac{df}{dy_2}\right)^*}$$

Este calculo se hace iterativamente hasta que  $|y_2 - y_2^*| \leq \epsilon$  donde la tolerancia  $\epsilon \approx 0.00001$ . Note que en cada iteración  $y_2^* = y_2$  por lo que es necesario volver los pasos del 4 a 6 hasta que el criterio de convergencia  $|y_2 - y_2^*| \leq \epsilon$  se cumpla.

7. Con las parejas de valores  $(x, y)$  graficar el perfil de flujo. Otras parejas de puntos utiles para graficar son:  $(x, z)$ ,  $(x, y_n)$  y  $(x, y_c)$ , donde  $y_n$  y  $y_c$  son la profundidad normal y critica respectivamente.

### Ejemplo 5

Para una canal trapezoidal con las siguientes características:

- Pendiente de fondo  $S_o = 0.001$
- Caudal  $Q = 30 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$
- Ancho de base  $b = 10 \text{ m}$
- Coeficiente de rugosidad de Manning  $n = 0.013$
- Profundidad en la sección de control aguas abajo  $y_1 = 5 \text{ m}$  en  $x_1 = 0 \text{ m}$ .
- $\alpha = 1$

calcular el perfil de la lámina de agua utilizando el método del paso estandar.