

# Estructuras Hidráulicas [2015961]

## Tema # 2: Flujo uniforme

Luis Alejandro Morales, Ph.D

Profesor Asistente

Universidad Nacional de Colombia-Bogotá

Facultad de Ingeniería

Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola

### Contents

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Resistencia al flujo</b>	<b>2</b>
2.1	Ecuaciones para la resistencia al flujo . . . . .	2
2.1.1	Ecuación de Chezy . . . . .	2
2.1.2	Ecuación de Manning . . . . .	4
2.1.3	Otras ecuaciones de resistencia . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Cálculo de la profundidad normal</b>	<b>6</b>
3.1	Canales artificiales . . . . .	6
3.2	Canales naturales . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Problemas de calculo en flujo uniforme</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Diseño de canales</b>	<b>11</b>
5.1	Canales no erosinables . . . . .	11
5.2	Sección óptima de un canal . . . . .	12
5.3	Canales erosinables . . . . .	14
5.3.1	Metodo de la velocidad permisible . . . . .	14
5.3.2	Metodo de la fuerza tractiva . . . . .	15

## 1 Introducción

En flujo a superficie libre actuan basicamente dos fuerzas: *fuerzas gravitacionales* cuya componente en dirección del flujo en un canal de pendiente positiva acelera el flujo hacia abajo, y las *fuerzas de fricción* debido a la rugosidad del canal que tratan de frenar el flujo. Note que en un canal con pendiente negativa, el flujo trata de desacelerarse. En un canal con pendiente positiva, si las fuerzas de fricción son mayores que las fuezas gravitacionales, el flujo se sesacelera produciendo una elevacion de la lamina de agua, lo cual se da gracias al principio de *coservacion de la masa*. En el caso contrario la profundidad de la lamina de agua disminuye y la velocidad aumenta. En canales prismaticos largos, es posible que las dos fuerzas se igualen en alguna sección del canal haciendo que ni la profundidad ni la velocidad cambien a partir de este punto aguas abajo (ver figura 1). Por lo tanto, en un flujo en el cual la profundidad no cambia se le denomina *flujo uniforme* y a la profundidad del flujo *profundidad normal*.

Figure 1: Flujo no uniforme y uniforme en canales (tomado de [?]).

## 2 Resistencia al flujo

En un canal es notorio que la velocidad aumenta desde las orillas y hacia el centro. Lo mismo ocurre al analizar un perfil de velocidades en un canal donde las velocidades aumentan desde el fondo hacia la superficie. Esto se presenta debido a la resistencia al movimiento que ofrece el material del fondo y las orillas del canal que suele ser mas pesado que el fluido en movimiento y que el aire que esta en la superficie. A pesar que en la realidad los esfuerzos cortantes no son uniformes sobre el perimetro mojado del canal y que existen corrientes secundarias en una sección transversal, para efectos practicos consideraremos flujo 1D lo que implica velocidades y esfuerzos uniformes en la sección.

### 2.1 Ecuaciones para la resistencia al flujo

En esta sección se presentan algunas ecuaciones que relacionan la resistencia al flujo con otras variables del flujo para, inicialmente, flujo no uniforme, las cuales al simplifircarse se usan en flujo uniforme.

#### 2.1.1 Ecuación de Chezy

Consideremos un flujo permanente en un canal prismatico y de pendiente baja. Si analizamos un volumen de control dentro del flujo entre dos secciones 1 y 2, la primera a una distancia  $x$  y la otra a una distancia  $x + \Delta x$  a lo largo del canal, en donde la profundidad y la velocidad en 1 es  $y$  y  $V$ , respectivamente, aguas abajo en 2 tenemos que la profundidad es  $y + \frac{dy}{dx}\Delta x$  y  $V + \frac{dV}{dx}\Delta x$  (ver figura 2) Analizando las fuerzas actuantes sobre el volumen de control se tenemos: una fuerza de presión en la seccion 1,  $F_1$ ; fuerzas de presión en la sección de salida 2,  $F_2$  y  $F_3$ ; componente del peso del fluido en la dirección del flujo,  $W_x$ ; y la fuerza de fricción en el fondo y paredes del canal que se opone al movimiento,  $F_f$ .

Figure 2: Fuerzas actuantes en un volumen de contro de un flujo en un canal (tomado de [?]).

La fuerza de presión en la sección 1 se calculan como  $F_1 = \gamma A \bar{z}$ , donde  $A$  es el area mojada de la sección transversal 1 y  $\bar{z}$  es la profundidad del centroide de la sección. La componente del peso en la dirección del flujo se calcula como  $W_x = \gamma A \Delta x \sin \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo de pendiente del canal. Note que como la pendiente del canal es baja,  $\sin \theta \simeq \tan \theta \simeq -dz/dx$ , por lo tanto  $W_x = -\gamma A \Delta x \frac{dz}{dx}$ . En las sección 2, aguas abajo, actual dos fuerzas de presión: la fuerza debido a la profundidad ( $F_2$ ) y la fuerza debido a la sobre-elevación en la distancia  $\Delta x$  ( $F_3$ ). De acuerdo con esto,  $F_2 = \gamma A \bar{z}$  y  $F_3 = \gamma A \frac{dy}{dx} \Delta x$ . Como los esfuerzos cortantes ( $\tau_o$ ) sobre las paredes y el fondo del canal son uniformes, la fuerza de fricción se puede calcular como  $F_f = \tau_o P \Delta x$ , donde  $P$  es el perimetro mojado de la sección.

Haciendo sumatoria de las fuerzas actuantes sobre el volumen de control en la dirección del flujo de la figura 2, la fuerza resultante ( $F_r$ ) es:

$$F_r = \sum F = F_1 - F_2 - F_3 + W_x - F_f \quad (1)$$

Sustituyendo las expresiones para cada fuerza en la ecuación 1, tenemos:

$$F_r = -\gamma A \Delta x \left( \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} + \frac{P \tau_o}{\gamma A} \right) \quad (2)$$

Aplicando la ley de conservacion de la cantidad de movimiento para el volumen de control de la figura 2, la cual establece que la tasa de cambio de la cantidad de movimiento es igual a la fuerza resultante e igual

a  $F_r = \rho AV(V_2 - V_1) = \rho AV \left( (V + \frac{dV}{dx} \Delta x) - V \right) = \rho AV \frac{dV}{dx} \Delta x$ . Igualando a la ecuación 2 y dividiendo por  $\gamma A \Delta x$ :

$$\frac{V}{g} \frac{dV}{dx} = - \left( \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} + \frac{P\tau_o}{\gamma A} \right) \quad (3)$$

Despejando  $\tau_o$  de esta ecuación:

$$\tau_o = -\gamma R \left( \frac{V}{g} \frac{dV}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} \right) \quad (4)$$

donde  $R = A/P$  es el radio hidráulico. Simplificando la ecuación anterior:

$$\tau_o = -\gamma R \frac{d}{dx} \left( z + y + \frac{V^2}{2g} \right) = -\gamma R \frac{dH}{dx} = \gamma R S_f \quad (5)$$

donde  $H$  es la energía total en una sección del flujo y  $S_f = -\frac{dH}{dx}$  es la pérdida de energía en la dirección del flujo o pendiente de la línea de energía. Para flujo uniforme, los terminos  $\frac{dV}{dx}$  y  $\frac{dy}{dx}$  de la ecuación 5 son iguales a cero y la  $S_f = S_o = -\frac{dz}{dx}$ . Para flujo uniforme, la ecuación 5 queda:

$$\tau_o = \gamma R S_o \quad (6)$$

Por otra parte, con base en *análisis dimensional*, se tiene que:

$$\tau_o = \kappa \rho V^2 \quad (7)$$

donde  $\kappa$  es un coeficiente adimensional que depende del número de Reynolds ( $Re$ ) y de la rugosidad de canal. Igualando las ecuaciones 5 y 7 y despejando para  $V$ , tenemos:

$$V = \sqrt{\frac{g R S_f}{\kappa}} \quad (8)$$

La ecuación 8 puede ser escrita como:

$$V = C \sqrt{R S_f} \quad (9)$$

donde  $C = \sqrt{\frac{g}{\kappa}}$  es el *coeficiente de Chezy*. Note que la ecuación 9 es para flujo permanente y no uniforme. Para el caso del flujo permanente y uniforme, igualando las ecuaciones 6 y 7, se tiene:

$$V = C \sqrt{R S_o} \quad (10)$$

Note que en flujo uniforme, la pendiente de la línea de energía, la pendiente de la línea de gradiente hidráulico y la pendiente del canal son iguales.

Por otro lado,  $C$  tiene unidades de  $\sqrt{L}/T$  y depende de  $Re$  y de la rugosidad del canal. La *ecuación de Darcy-Weisbach* para tuberías:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (11)$$

donde  $f$  es un factor de fricción adimensional que depende de  $Re$  y de la rugosidad de la tubería,  $D$  es el diámetro de la tubería y  $L$  es la longitud de la tubería, se puede simplificar:

$$V = \sqrt{\frac{2g D S}{f}} \quad (12)$$

donde  $S = \frac{h_f}{L}$ . La ecuación 9, se convierte en, donde  $R = D/4$ :

$$V = C \sqrt{\frac{DS}{4}} \quad (13)$$

Igualando las ecuaciones 12 y 14, se tiene que:

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} \quad (14)$$

El *diagrama de Moody* se puede expresar en función de  $C$  y del  $R_e$  (ver figura 3). Este diagrama esta dividido en tres regiones que reflejan en tipo de flujo: hidraulicamente lisa, transición y totalmente rugosa. Un flujo en la region hidraulicamente lisa es un flujo laminar que no necesariamente posee una rugosidad baja. En la medida en que  $R_e$  aumenta, la subcapa laminar decrese y los efectos rugosos son importante entrando en la region de transición. Sin embargo cuando la rugosidad no es cubierta por la subcapa viscosa y existen perdidas de energia, el flujo es clasificado como completamente rugoso. El flujo se puede clasificar dependiendo al numero adimensional  $R_s = \frac{kV^*}{\nu}$ , donde  $\nu$  es la viscosidad cinemática del fluido y  $k$  es una longitud característica de la rugosidad de la superficie del canal.  $V^*$  es la velocidad cortante expresada como  $V^* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} = \sqrt{gRS_f}$ . Por lo tanto:

Figure 3: Diagrama de Moody modificado (tomado de [?]).

- Si  $R_s < 4$ , *flujo hidraulicamente liso*
- Si  $4 < R_s < 100$ , *flujo de transición*
- Si  $R_s > 100$ , *flujo completamente rugoso*

Existen expresiones experimentales para calcular  $C$  para para el caso de canales relativamente pequeños de superficie lisa ya que estas expresiones fueron obtenidas con base en experimentos en tuberías.

- **Flujo liso**

$$C = \begin{cases} 28.6R_e^{1/8} & \text{if } R_e < 10^5; \\ 4\sqrt{2g} \log_{10} \left( \frac{R_e \sqrt{8g}}{2.51C} \right) & \text{if } R_e > 10^5; \end{cases} \quad (15)$$

- **Flujo rugoso**

$$C = -2\sqrt{8g} \log_{10} \left( \frac{k_s}{12R} + \frac{2.5}{R_e \sqrt{f}} \right) \quad (16)$$

### 2.1.2 Ecuación de Manning

Desde la derivación de la ecuación de Chezy, muchos investigadores han tratado de derivar una expresión para calcular  $C$ . Sin embargo, debido a que  $C$  depende de muchas variables, encontrar una expresion para  $C$  no ha sido facil. Con base en observaciones de campo, Gauckler y Hagen mostraron que  $C \propto R^{1/6}$ . El Irlandes R. Manning en 1891, encontro la siguiente ecuación a partir de la ecuación de Chezy:

$$V = \frac{C_o}{n} R^{2/3} S_f^{1/2} \quad (17)$$

donde  $n$  es el *coeficiente de rugosidad de Manning* y tiene unidades de  $L^{1/3}/T$ ;  $C_o$  es un coeficiente de conversión de unidades cuyo valor es  $C_o = 1.0$  en *sistema internacional de unidades (SI)* y  $C_o = 1.49$  en

sistema Inglés de unidades (BG).  $V$  está dada en  $m/s$  y  $R$  en  $m$  en SI, y  $V$  esta dada en  $ft/s$  y  $R$  en  $ft$  en BG.

Note que el valor de  $n$  es el mismo en ambos sistemas.  $n$  depende principalmente de la rugosidad del material del canal, de las irregularidades y de la profundidad de la lamina de agua, entre otros. La tabla 1 muestra los valores más comunes para diferentes tipos de canal y se puede observar como  $n$  aumenta en la medida en que el canal se hace más rugoso; los canales naturales poseen los mayores valores de  $n$  (ver figura 4).

Material	$n$
<i>Metales</i>	
Acero	0.012
Hierro fundido	0.013
Metal corrugado	0.025
<i>No metales</i>	
Lucita	0.009
Vidrio	0.010
Cemento	0.011
Concreto	0.013
Madera	0.012
Arcilla	0.013
Ladrillo	0.013
Hormigon lanzado	0.019
Mamposteria	0.025
Roca cortada	0.035
<i>Canales naturales</i>	
Limpios y derechos	0.030
Fondo con arena y gravilla	0.040
Fondo con grava y roca	0.050

Table 1: Coeficientes de rugosidad de Manning  $n$  (tomado de [?]).

Figure 4: Valores de  $n$  para canales naturales: a) Rio Columbia, Washington,  $n = 0.024$ , b) Quebrada Salada, Nebraska,  $n = 0.030$ , c) Rio Salado, Arizona,  $n = 0.032$  y d) Rio Bitterroot, Montana,  $n = 0.036$  (tomado de [?]).

El coeficiente de Manning es difícil de estimar ya que depende de varias variables. Investigaciones han demostrado que  $n$  aumenta en la medida en que la profundidad de la lamina de agua disminuye. En canales revestidos, es común trabajar con un valor de  $n$  constante. Sin embargo cuando la lamina de agua disminuye el valor de  $n$  aumenta. Para canales revestidos con material granular y rocoso

$$n = C_m (3.28d_{50})^{1/6}$$

donde  $d_{50}$  es el diametro medio de la grava en  $m$ ,  $0.034 \leq C_m \leq 0.039$  para canales con fondo en gravilla. Otra ecuación similar es:

$$n = \frac{(R/0.3048)^{1/6}}{8.6 + 19.97 \log(R/d_{50})}$$

donde  $R$  es el radio hidráulico en  $m$ . Valores de  $n$  para diferentes recubrimientos y diferentes rangos de profundidad se muestran en la figura 5.

Para canales revestidos con vegetación, un  $n$  constante no es adecuado, teniendo que la cantidad de vegetación sumergida cambia con el nivel y de igual manera los esfuerzos cortantes. Para estos casos

Figure 5: Valores de  $n$  para diferentes recubrimientos y rangos de profundidades (tomado de [?]).

tenemos que:

$$n = \frac{(R/0.3048)^{1/6}}{C + 19.97 \log [(R/0.3048)]^{1.4} S_o^{0.4}}$$

donde  $R$  es el radio hidraulico en  $m$ ,  $S_o$  es la pendiente del fondo del canal y  $C$  es un coeficiente adimensional que depende del tipo de vegetación. La figura 6 muestra valores de  $C$  para diferentes tipos de vegetación.

Figure 6: Valores de  $C$  para diferentes tipos de recubrimiento con vegetación (tomado de [?]).

### 2.1.3 Otras ecuaciones de resistencia

En Europa, la *ecuación de Strickler* has sido ampliamente usada:

$$V = k_s R^{2/3} S_f^{1/2} \quad (18)$$

donde  $k_s$  es la *constante de Strickler*, la cual en sistema internacional se calcula como  $k_s = \frac{21.1}{k^{1/6}}$  donde  $k$  es la rugosidad media del material en  $mm$ . Alguno valores de  $k$  se muestran en la tabla 2.

Material	$k$ (mm)
Hierro fundido nuevo	0.5-1.0
Hierro fundida usado	1.0-1.5
Acabado en cemento	0.3-0.8
Acabado rugoso en cemento	1.0-2.0
Madera rugosa	1.0-2.5
Mamposteria rugosa	8.0-15

Table 2: Tamaño de la rugosidad  $k$  (tomado de [?]).

Las ecuaciones 17 y 18 se relacionan como  $k_s = \frac{1}{n}$ .

## 3 Cálculo de la profundidad normal

### 3.1 Canales artificiales

En muchos problemas de ingeniería, dado el  $Q$  y las características del canal y del fluido es necesario estimar la profundidad normal  $y_n$ . Dicha estimación se hace solucionando la ecuación 17 para  $y_n$ . Los procedimientos aquí mencionados son tambien aplicables a la ecuacio 18 teniendo en cuenta que  $n = 1/k_s$ .

La ecuación 17 se puede expresar como:

$$AR^{2/3} = \frac{nQ}{C_o S_o^{1/2}} \quad (19)$$

en donde el lado derecho es una función the  $y_n$ . La figura 6 muestra una grafica de diseño de  $\frac{AR^{2/3}}{b^{8/3}}$  vs  $y_n/b$  para canales trapezoidales y de  $\frac{AR^{2/3}}{d^{8/3}}$  vs  $y_n/d$  para canales circulares, donde  $b$  es el ancho del canal en la base y  $d$  es el diametro del canal circular. Si se conoce  $Q$ ,  $n$  y  $S_o$  es posible conocer  $AR^{2/3}$  con la ecuación 19, el valor de  $y_n$  puede encontrarse usando la figura 7.

Figure 7: Curvas para calcular  $y_n$  en canales canales circulares y trapezoidales para diferentes valores de la pendiente lateral  $s$  (tomado de [?]).

El cálculo de  $y_n$  se puede realizar mediante la aplicación de métodos numéricos para la solución de ecuaciones implícitas. En la tabla 3 se presenta la geometría para las secciones transversales típicas de canales artificiales.

Tipo	Perimetro(P)	Area(A)	Variable	
Rectangular	$b + 2y_n$	$by_n$	$y_n$	
Triangular	$y_n \left( \frac{1}{\sin \theta_1} + \frac{1}{\sin \theta_2} \right)$	$\frac{y_n^2}{2} \left( \frac{1}{\tan \theta_1} + \frac{1}{\tan \theta_2} \right)$	$y_n$	
Trapezoidal	$y_n \left( \frac{1}{\sin \theta_1} + \frac{1}{\sin \theta_2} \right) + b$	$\frac{y_n}{2} \left[ y_n \left( \frac{1}{\tan \theta_1} + \frac{1}{\tan \theta_2} \right) + 2b \right]$	$y_n$	
Circular	$2r\theta$	$r^2 \left( \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right)$	$y_n = r$	Si $\theta = 90$
			$y_n = r(1 - \cos \theta)$	Si $0 < \theta < 90$
			$y_n = r(1 + \sin \theta)$	Si $90 < \theta < 180$

Table 3: Propiedades geométricas para diferentes secciones transversales de un canal. La notación de las ecuaciones se puede observar en figura 8.

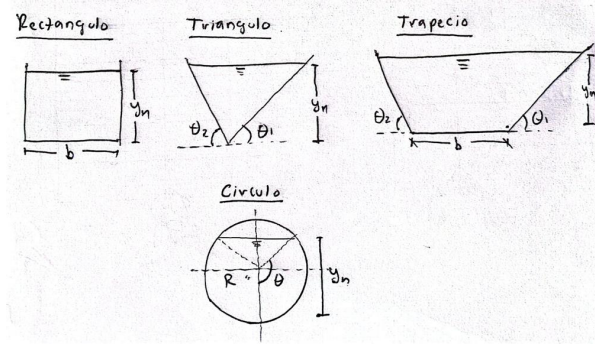


Figure 8: Notación en canales artificiales usada en la tabla 3.

Reemplazando  $R = \frac{A}{P}$  en la ecuación 17 para cualquiera de las secciones de la tabla 3, se obtiene una ecuación implícita en  $y_n$ , con excepción de la sección circular en donde la función es implícita para  $0^\circ < \theta < 180^\circ$ . La ecuación a resolver es:

$$f(y_n) = Q - A \frac{C_o}{n} R^{2/3} S_o^{1/2} = 0$$

$$f(\theta) = Q - A \frac{C_o}{n} R^{2/3} S_o^{1/2} = 0$$

Para todas las secciones excepto la circular

Para la sección circular

(20)

Para resolver la ecuación 20, se presenta a continuación un procedimiento con base en el *método de bisección*:

### Algoritmo 1: Cálculo de $y_n$ por el método de la bisección en canales artificiales

1. Leer la siguiente información:
  - (a) Para todas las secciones excepto la circular leer:  $n$ ,  $C_o$ ,  $S_o$ ,  $Q$ ,  $b$ ,  $\theta_1$  y  $\theta_2$ . Note que para la sección rectangular  $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$ , y para la sección triangular  $b = 0$ .
  - (b) Para la sección circular leer:  $n$ ,  $C_o$ ,  $S_o$ ,  $Q$ ,  $R$  y  $\theta$ .
2. Definir los límites de iteración,  $a$  y  $b$ , para el método de bisección:
  - (a) Para todas las secciones excepto la circular leer:  $a = 0.01$  y  $b = 1000$  ( $a \leq y_n \leq b$ ). Note que  $y_n > 0$  y que  $\text{sign}(f(a)) \neq \text{sign}(f(b))$ . Note que la función  $\text{sign}$  extrae el signo de  $f$ .
  - (b) Para la sección circular leer:  $a = 0.01^\circ$  y  $b = 179.9^\circ$  ( $a \leq \theta \leq b$ ). Note que  $0^\circ < \theta < 180^\circ$ , y que  $\text{sign}(f(a)) \neq \text{sign}(f(b))$ .
3. Si  $N \leq N_{\max} = 10000$  ir a 4. Si  $N > N_{\max}$  ir a 3.
4. Calcular  $C = \frac{a+b}{2}$ .
5. Calcular  $f(c)$  usando la ecuación 20. Si  $|f(c)| < \text{Error}$  o  $\frac{b-a}{2} < \text{Error}$  ir a 2. Si no se cumple alguna de estas condiciones ir a 8.
6. Si  $\text{sign}(f(c)) = \text{sign}(f(a))$ ,  $a = c$ , si no  $b = c$ . Incrementar  $N = N + 1$  e ir a 7.
7. Imprimir:
  - (a) para todas las secciones excepto la circular:  $y_n = c$ .
  - (b) para la sección circular:  $\theta = c$ . Usar las ecuaciones de la tabla 3 para convertir  $\theta$  en  $y_n$ .
8. Ha fallado la iteración. Revisar datos de entrada y límites iniciales de iteración.

#### Ejemplo 1

Un canal trapezoidal en asfalto ( $n = 0.016$ ) y con  $S_o = 0.0015$ , transporta agua con un caudal de  $300 \text{ ft}^3 \text{ s}^{-1}$ . Si el ancho del canal es  $b = 6 \text{ ft}$  y  $\theta_1 = \theta_2 = 50^\circ$ , calcular la profundidad normal ( $y_n$ ).

#### Ejemplo 2

Determinar para que relaciones de  $y_n/D$  es posible transportar un caudal máximo y obtener una velocidad máxima en un canal de sección circular.

### 3.2 Canales naturales

En la naturaleza, los canales por los cuales transcurre flujo poseen secciones irregulares como en el caso de ríos y quebradas. Dicha sección cambia en el tiempo debido a procesos de erosión y sedimentación en el fondo y en las orillas producto de cambios en la hidrodinámica del flujo. El cálculo de la profundidad normal se hace con base en la solución de la ecuación de Manning implícita para  $y_n$  siguiendo un método numérico. Si tenemos una sección irregular de un canal como el mostrado en la figura 9, conformada por una serie de  $m$  puntos  $p(x, y)$  con coordenadas espaciales  $x$  y  $y$ , y cuyos coeficientes de Manning están dados entre cada par de puntos  $p_i$  y  $p_{i+1}$  (segmento) para un total de  $m - 1$  coeficientes, el área mojada de la sección para un valor de  $y_n$  se puede calcular como:



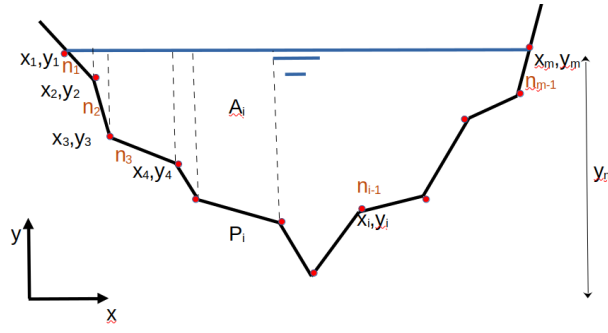


Figure 9: Sección transversal de un cauce irregular (e.g. río).

$$A = \sum_{i=1}^{m-1} A_i = \sum_{i=1}^{m-1} [(y_n - y_i) + (y_n - y_{i+1})] \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \quad (21)$$

, perímetro se puede calcular como:

$$P = \sum_{i=1}^{m-1} P_i = \sum_{i=1}^{m-1} \sqrt{(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2} \quad (22)$$

y el coeficiente de rugosidad de Manning como:

$$n = \left( \frac{\sum_{i=1}^{m-1} P_i n_i^{3/2}}{\sum_{i=1}^{m-1} P_i} \right)^{2/3} \quad (23)$$

Note que la ecuación 21 calcula el área mediante la sumatoria de las áreas individuales (trapezios)  $A_i$  formadas entre cada par de puntos  $p_i$  y  $p_{i+1}$ , el perímetro en la ecuación 22 es la sumatoria de las distancias Euclidianas entre cada par de puntos  $p_i$  y  $p_{i+1}$  y el coeficiente de rugosidad de Manning se obtiene usando la ecuación de Horton y Einstein, 1934. Note que  $P_i$  en la ecuación 23 se obtiene utilizando la ecuación 22.

A continuación se muestra un procedimiento para el cálculo de  $y_n$  en canales con sección irregular basado en el método de bisección:

### Algoritmo 2: Calculo de $y_n$ por el método de la bisección en canales naturales

1. Leer la siguiente información:  $n$ ,  $\alpha$ ,  $S_o$ ,  $Q$ ,  $x_s$ ,  $y_s$  y  $n_s$ . Note que  $x_s$  y  $y_s$  son dos vectores con las coordenadas  $x$  y  $y$  respectivamente para un numero  $m$  de puntos que conforman la sección transversal.  $n_s$  es un vector de coeficientes de Manning para los  $m - 1$  segmentos que conforman la seccion.
2. Definir los límites de iteración,  $a$  y  $b$ , para el método de bisección:  $a = 0.01$  y  $b = 1000$  ( $a \leq y_n \leq b$ ). Note que  $y_n > 0$  y que  $\text{sign}(f(a)) \neq \text{sign}(f(b))$ . Note que la función  $\text{sign}$  extrae el signo de  $f$ .
3. Si  $N \leq N_{max} = 10000$  ir a 4. Si  $N > N_{max}$  ir a 3.
4. Calcular  $C = \frac{a+b}{2}$ .
5. Con base en las coordenadas datas ( $x_s$  y  $y_s$ ), interpolar un nuevo conjunto de puntos para las profundidades normales  $a$ ,  $b$  y  $c$ .
6. Calcular  $f(a)$ ,  $f(b)$  y  $f(c)$  usando la ecuación 20 usando la nuevas secciones interpoladas para  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Note que para evaluar la función es necesario, para cada nuevo conjunto de puntos, calcular el área (ecuación 21), el perimetro (ecuación 22) y la rugosidad de Manning (ecuación 23).
7. Si  $|f(c)| < \text{Error}$  o  $\frac{b-a}{2} < \text{Error}$  ir a 2. Si no se cumple alguna de estas condiciones ir a 8.
8. Si  $\text{sign}(f(c)) = \text{sign}(f(a))$ ,  $a = c$ , si no  $b = c$ . Incrementar  $N = N + 1$  e ir 7.
9. Imprimir:  $y_n = c$ .
10. Ha fallado la iteración. Revisar datos de entrada y límites iniciales de iteración.

## 4 Problemas de calculo en flujo uniforme

El analisis de flujo uniforme se hace a través de una ecuacion de resistencia como la ecuación de Manning y la ecuacion de continuidad. Los problemas de flujo uniforme involucran las siguientes variables: caudal de flujo  $Q$ , coeficiente de rugosidad de Manning  $n$ , la profundidad de normal  $y_n$ , la velocidad de flujo  $V$  y la pendiente del canal  $S_o$ . De acuerdo con esto, es posible encontrarse con alguno de los siguientes problemas:

1. *Calculo del caudal  $Q$* : En aplicaciones practicas se requiere para determinar la capacidad de transporte de un canal determinado, o para la construcción de una curva de calibracion sintetica del canal.
2. *Calculo de la velocidad  $V$* : Se requiere para el estudio de la erosion y sedimentación en canales.
3. *Calcular la profundidad normal  $y_n$* : Calculo requerido para establecer el nivel de la lamina de agua en un canal (ver sección 3).
4. *Calculo de la rugosidad del canal  $n$* : Se calcula el  $n$  del canal y puede usarse para la solución de otros problemas en canales en condiciones similares.
5. *Calculo de la pendiente del canal  $S_o$* : Se calcula para determinar la pendiente requerida de un canal determinado bajo ciertas condiciones de flujo y rugosidad.

Analizando lo anterior, la solución de cualquiera de los anteriores problemas, exepcto el del calculo de  $y_n$ , se hace usando la ecuacion de Manning y la ecuacion de continuidad de manera explicita por lo que su calculo es relativamente simple.

## 5 Diseño de canales

El diseño de canales involucra la selección del trazado, forma de la sección, pendiente del fondo, velocidad permitida y recubrimiento. Cabe aclarar que canales recubiertos ofrecen menor fricción por lo que el tamaño de la sección para un caudal determinado es menor que para un canal sin recubrimiento. El diseño de canales se hace asumiendo flujo uniforme y el cálculo se hace por prueba y error de tal manera que de acuerdo con los requerimientos del diseño y los parámetros escogidos el canal sea operativamente viable. Esto quiere decir el factor decisivo es el económico, es decir, se escoge el diseño más barato entre una combinación de alternativas todas operativamente posibles. Este análisis de costos debe incluir los costos operativos y de mantenimiento. En muchos casos se asume flujo gradualmente variado de tal manera que el tamaño del canal sea determinado de forma óptima. El diseño de canales se puede dividir en dos categorías: canales no erosionables (recubrimiento rígido) y canales erosionables (no recubiertos).

### 5.1 Canales no erosionables

En el diseño de canales no erosionables, se escoge el tipo de sección, el material de recubrimiento y el tamaño de tal manera que el canal sea capaz de transportar el caudal de diseño con un borde libre ( $F_b$ ) que se define como la diferencia entre la superficie del agua (de acuerdo con  $y_n$ ) y la parte superior de las banquetas del canal en unidades de longitud. Ese borde libre tiene en cuenta la incertidumbre de los cálculos y de los parámetros escogidos, así como perturbaciones del flujo (e.g. olas). De acuerdo con U.S. Bureau of Reclamation,  $F_b = \sqrt{ky}$ , donde  $y$  es la profundidad del agua en metros y  $k$  es un factor igual a 0.8 para caudales cercanos a  $0.5 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ , e igual 1.4 para caudales mayores  $85 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ .

La alineación del canal debe ser tal manera que sea lo más corto posible permitiendo el fácil acceso para el mantenimiento así como otras consideraciones constructivas. La pendiente es determinada por la topografía y junto con la forma y el tamaño de la sección deben garantizar el transporte del caudal de diseño y minimizar los costos de su construcción. La velocidad debe garantizar que no haya erosión del material de revestimiento así como la no sedimentación de material. Las velocidades mínimas en un canal varían entre 0.6 y 0.9 m/s y velocidades por debajo de 12 m/s con flujo bajo en sedimentos son apropiadas en canales de concreto. Es común entonces encontrar que canales rectangulares son comunes para el transporte de caudales menores (e.g. cunetas de vías) mientras que canales trapezoidales son construidos para transportar mayores caudales (e.g. aguas lluvias en ciudades). Los canales de sección circular son comunes en el paso de vías y a través de sistemas rocosos.

#### Algoritmo 3: Diseño de canales no erosionables

1. Lea el caudal  $Q$  de diseño y  $C_o$ .
2. Seleccione el material de revestimiento y con esto el  $n$  de Manning. Con base en la topografía y aspectos constructivos, seleccione la pendiente del canal  $S_o$ .
3. Para unos valores escogidos de la geometría del canal como la base  $b$  y la pendiente lateral  $s$ , resolver la ecuación de Manning (ecuación 17) para encontrar  $y_n$ . Este proceso es iterativo teniendo en cuenta que se debe encontrar una relación  $b/y_n$  que garantice la mejor sección hidráulica (ver sección 5.2).
4. Con el fin de evitar procesos de sedimentación en el canal, revisar que  $V > V_{min}$ . Si esto es falso, ir a los pasos 2 y 3 y revisar estos parámetros. Si es verdad, ir al paso 7.
5. Agregar un borde libre  $F_b$  al canal.

### Ejemplo 3

Diseñar un canal trapezoidal para transportar un caudal de  $10 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ . El canal será escavado en roca ( $n = 0.030$ ) y la pendiente del terreno es 4000:1. La pendiente lateral  $s$  es 1:4.

## 5.2 Sección óptima de un canal

El diseño de canales en ingeniería requiere determinar la sección óptima (aquella que garantice la menor resistencia al flujo) en un canal para unas condiciones dadas. Usando la ecuación de Manning (ecuación ??) es posible maximizar el radio hidráulico ( $R_h$ ) para un área ( $A$ ) y un caudal ( $Q$ ) dado. Teniendo en cuenta que  $R_h = A/P$ , para maximizar  $R_h$  debemos minimizar el perímetro ( $P$ ).

Considerando el canal trapezoidal de la figura 10, el área y el perímetro se pueden calcular como:

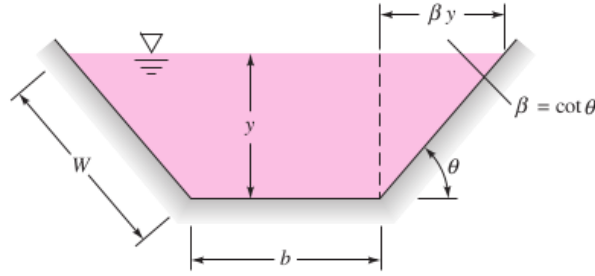


Figure 10: Geometría de un canal trapezoidal (tomado de [?]).

$$A = by + \beta y^2 \quad (24)$$

$$P = b + 2W = b + 2y(1 + \beta^2)^{1/2} \quad (25)$$

donde  $\beta = \cot \theta$  y  $y = y_n$ . Note que  $W = \sqrt{y^2\beta^2 + y^2} = y(\beta^2 + 1)^{1/2}$ . Asumiendo que  $b$  es un dato dado, se despeja de la ecuación 24:

$$b = \frac{A}{y} - y\beta \quad (26)$$

y de la ecuación 25:

$$b = P - 2y(1 + \beta^2)^{1/2} \quad (27)$$

igualando las ecuaciones 26 y 27 y despejando para  $P$ , se tiene:

$$P = \frac{A}{y} - y\beta + 2y(1 + \beta^2)^{1/2} \quad (28)$$

Para minimizar  $P$ , se obtiene  $dP/dy$  de la ecuación 28 tomando como constantes  $A$  y  $\beta$ :

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{A}{y^2} - \beta + 2(1 + \beta^2)^{1/2} \quad (29)$$

igualando  $dP/dy = 0$  y despejando  $y$  se obtiene el valor de  $y$  que minimiza  $P$ :

$$y = \left[ \frac{A}{2(1 + \beta^2)^{1/2} - \beta} \right]^{1/2} \quad (30)$$

Despejando  $A$  de la ecuación 30 y reemplazando en la ecuación 28 para  $P$ , la geometría optima de un canal trapezoidal para un angulo  $\theta$  dado es:

$$A = y^2 \left[ 2 (1 + \beta^2)^{1/2} - \beta \right] \quad P = 4y (1 + \beta^2)^{1/2} - 2\beta y \quad R_h = \frac{y}{2} \quad (31)$$

La ecuación 31 indica que para un angulo  $\theta$  dado, la sección transversal mas eficiente de un canal en flujo uniforme ocurre cuando el radio hidráulico es igual a la metade la profundidad normal. Igualando las ecuaciones 25 y 31 para  $P$ , se tiene una expresión para la base inferior del canal  $b$ :

$$b = 2y \left( \sqrt{1 + \beta^2} - \beta \right) \quad (32)$$

y la base superior  $b_s$

$$b_s = b + 2\beta y = 2y \left( \sqrt{1 + \beta^2} \right) \quad (33)$$

Teniendo en cuenta que cuando  $\theta = 90^\circ$   $\beta = 0$  por lo que tenemos un canal rectangular, reemplazando esto en las ecuaciones 31 se tiene la sección más eficiente para un canal rectangular:

$$A = 2y^2 \quad P = 4y \quad R_h = \frac{y}{2} \quad b = 2y \quad (34)$$

Para encontrar la profundidad correcta, es necesario solucionar las ecuaciones anteriores en conjunto con la ecuación ?? para un caudal dado.

Es posible encontrar el mejor angulo  $\theta$  del canal trapezoidal para un área y una profundidad dada. Evaluando  $dP/d\beta$  para  $A$  y  $y$  constante se tiene:

$$\frac{dP}{d\beta} = -y + 2\beta y (1 + \beta^2)^{-1/2} \quad (35)$$

igualando la ecuación 36 a cero se tiene:

$$2\beta = (1 + \beta^2)^{1/2} \quad \beta = \cot \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \theta = 60^\circ \quad (36)$$

Esto indica que para una profundidad dada, el angulo  $\theta$  óptimo es  $60^\circ$ , o que la sección óptima (la que maximiza el flujo) es la mitad de un hexágono.

Si se circunscribe una sección circular de radio  $R$  en la sección trapezoidal donde  $\theta = 60^\circ$ , se tiene que  $R = \frac{1}{2}b_s \sin \theta$ . Reemplazando  $b_s$  en esta ecuación y sabiendo que  $\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , se tiene que  $R = y$ . Esto demuestra que una sección circular tiene su máxima eficiencia cuando  $y = R$  (semicirculo).

Para una sección triangular ( $b = 0$  en la figura 10), el área y el perímetro son:

$$A = \beta y^2 \quad (37)$$

$$P = 2W = 2y (1 + \beta^2)^{1/2} \quad (38)$$

Despejando  $y$  de la ecuación 37 se tiene que  $y = \left( \frac{A}{\beta} \right)^{1/2}$ . Reemplazando en la ecuación 38, el perímetro es:

$$P = 2W = 2 \left( \frac{A}{\beta} \right)^{1/2} (1 + \beta^2)^{1/2} \quad (39)$$

derivando  $P$  con respecto a  $\beta$  en la ecuación 39, se tiene:

$$\frac{dP}{d\beta} = 2A^{1/2} \left[ \beta (1 + \beta^2)^{-1/2} \beta^{-1/2} - \frac{1}{2} \frac{(1 + \beta^2)^{1/2}}{\beta^{3/2}} \right] \quad (40)$$

Haciendo  $dP/d\beta = 0$ , se tiene:

$$\frac{\beta^{1/2}}{(1 + \beta^2)^{1/2}} = \frac{(1 + \beta^2)^{1/2}}{2\beta^{3/2}} \quad (41)$$

Solucionando la ecuación 41, se tiene que  $\beta = 1$ . Esto quiere decir que una sección triangular con  $\theta = 45^\circ$  es la mas eficiente.

#### Ejemplo 4

Para un canal rectangular en ladrillo ( $n = 0.015$ ) diseñado para transportar  $5 \text{ m}^3/\text{s}$  y con una pendiente de  $S_o = 0.001$ , determinar las mejores dimensiones para  $y$  y  $b$ . Realizar los mismos cálculos si la sección transversal del canal es la mitad de un hexágono y si es un semicirculo. Comparar los resultados.

### 5.3 Canales erosinables

Para canales excavados en terrenos blandos sin ningun tipo de revestimiento, es posible que se presente erorasion de la sección si no se escoge un tamaño y una pendiente adeacuados. Existen dos metodos para el analisis de este tipo de canales que son tratados a continuacion.

#### 5.3.1 Metodo de la velocidad permisible

El tamaño de la sección del canal se escoge de tal manera que  $V$ , bajo el supuesto de flujo uniforme, sea menor a una *velocidad permisible*. Esta velocidad permisible es aquella para la cual no se presenta erosion en la sección del canal. Esta velocidad depende principalmente del tipo de suelo y del tamaño de las particulas. Sin embargo tambien depende de la profundidad de agua y de la alineacion del canal. Esto debido a que para la misma velocidad media del flujo, la velocidad el flujo en el fondo en mayor cuando la profundidad es baja que cuando es alta. De la misma manera, canales curvos presentan corrientes secundarias que que aceleran el flujo hacia la parte externa de la curva causando erorsionen las orillas.

La sección trapezoidal es la mas usada y las pendiente laterale  $s$  deben ser escogida de tal manera que garantice la estabilidad del material en las orillas. La tabla 4 presenta valores recomendados de  $s$  para diferentes tipos de material. De manera similar, la tabla 5 presenta valores de velocidades permisibles para diferentes materiales en canales rectosy profundidad de agua de 1 m. En el caso de canales con algo de sinuosoidad, la velocidad permisible se debe reducir en 5%, para canales con sinuosoidad media, la velocidad se debe reducir en 13% y para canales con alta sinuosoidad, la velocidad se debe reducir en 22%. Para canales muy anchos y con profundidades diferentes a un 1 m, la velocidad permisible se debe multiplicar por un factor de corrección  $k = y^{1/6}$ , donde  $y$  es la profundidad del flujo.

Material	$s$
Roca	Casi vertical
Arcilla resistente	1:0.5 hasta 1:1
Suelo firme	1:1
Suelo arenoso	2:1
Suelo con arenas, arcilla y limos	3:1

Table 4: Pendiente lateral en canales trapezoidales (tomado de [?]).

Material	$V$ (m/s)
Arena fina	0.6
Arena gruesa	1.2
<i>Suelo</i>	
- limo arenoso	0.6
- limo arcilloso	1.1
- arcilloso	1.8
<i>Suelo con pasto Bermuda</i>	
- limo arenoso	1.8
- limo arcilloso	2.4
<i>Suelo con pasto Kentucky</i>	
- limo arenoso	1.5
- limo arcilloso	2.1
<i>Roca blanda</i>	
- arenisca blanda	2.4
- lutita blanda	1.1
Roca dura	6.1

Table 5: Velocidades permisibles (tomado de [?]).

#### Algoritmo 4: Diseño de canales erosionables: método de la velocidad permisible

1. Leer el caudal  $Q$  de diseño, la pendiente del canal  $S_o$  y  $C_o$ .
2. De acuerdo con el material excavado, seleccione el  $n$  de Manning, el  $s$  de acuerdo con la tabla 4, y la velocidad permisible  $V$  de la table 5.
3. De la ecuación de Manning (ecuación 17), calcular  $R$ .
4. De la ecuación de continuidad,  $Q = AV$ , calcular  $A$ .
5. Calcular el perimetro mojado  $P$ , a partir de  $P = A/R$ .
6. De las ecuaciones para  $P$  y  $A$ , estimar el ancho del canal  $b$  y la profundidad normal  $y_n$ .
7. Agregar un borde libre  $F_b$  al canal.

#### Ejemplo 5

Diseñar un canal para transportar un caudal de  $6.91 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ . El canal sera excavado en arcilla resistente con una pendiente del terreno  $S_o = 0.00318$ .

### 5.3.2 Metodo de la fuerza tractiva