

Estructuras Hidráulicas [2015961]  
**Tema # 4: Flujo rápidamente variado - Estructuras  
hidráulicas**

**Luis Alejandro Morales, Ph.D**  
Profesor Asistente

Universidad Nacional de Colombia-Bogotá  
Facultad de Ingeniería  
Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola

## Contents

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Leyes de conservación para flujo rápidamente variado</b>	<b>2</b>
2.1	Conservación de la masa . . . . .	2
2.2	Conservación de la cantidad de movimiento . . . . .	2
2.3	Conservación de la energía . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Transiciones en canales</b>	<b>3</b>
3.1	Características generales . . . . .	4
3.2	Flujo subcrítico . . . . .	4
3.2.1	Expansiones . . . . .	4
3.2.2	Contracciones . . . . .	5
3.3	Supercritical flow . . . . .	5
3.3.1	Resalto hidráulico oblicuo . . . . .	6

## 1 Introducción

El estudio de estructuras hidráulicas hace referencia al análisis de flujo rápidamente variado (FRV) en canales. Este tipo de flujos presente en diferentes estructuras hidráulicas es caracterizado por altos gradientes de presión que hace que el comportamiento hidroestático de presiones no se cumpla. Un ejemplo de ello es el *resalto hidráulico* en donde se tiene un cambio de régimen supercrítico a subcrítico por cambios en la geometría del canal. Teniendo en cuenta que la distribución hidroestática de presiones no es aplicable para FRV ya que las líneas de flujo no son aproximadamente paralelas, el análisis de estos flujos se ha realizado desde aproximaciones empíricas analizando diferentes fenómenos y estructuras hidráulicas por separado. Para estos análisis empíricos se han empleado las aproximaciones de *Boussinesq* y *Fawer* en donde la velocidad vertical sigue una ley lineal y exponencial, respectivamente, en donde la velocidad en el fondo es 0.

El FRV ocurre en distancias cortas por lo que la pérdida de energía es despreciable. Por ser flujos rápidos, esto genera la creación de vórtices y ondulaciones de la superficie del agua que aparecen y desaparecen rápidamente. Esto hace que sea difícil determinar valores medios para la velocidad y la profundidad en una sección.

## 2 Leyes de conservación para flujo rápidamente variado

Para el análisis de las leyes de conservación de la masa, de la energía y de la cantidad de movimiento, consideremos las condiciones de flujo en un canal horizontal el cual posee un escalón en tres secciones transversales (ver figura ??). Note que la sección 1 y 3 se considera que el flujo alcanza condiciones uniformes mientras que en la sección 2, justo después del escalón, hay una separación del flujo y por lo tanto la distribución de velocidades es como se muestra en la figura. Esto implica que en las secciones 1 y 3, las presiones son hidroestáticas, lo contrario a la distribución de presiones en la sección en 2.

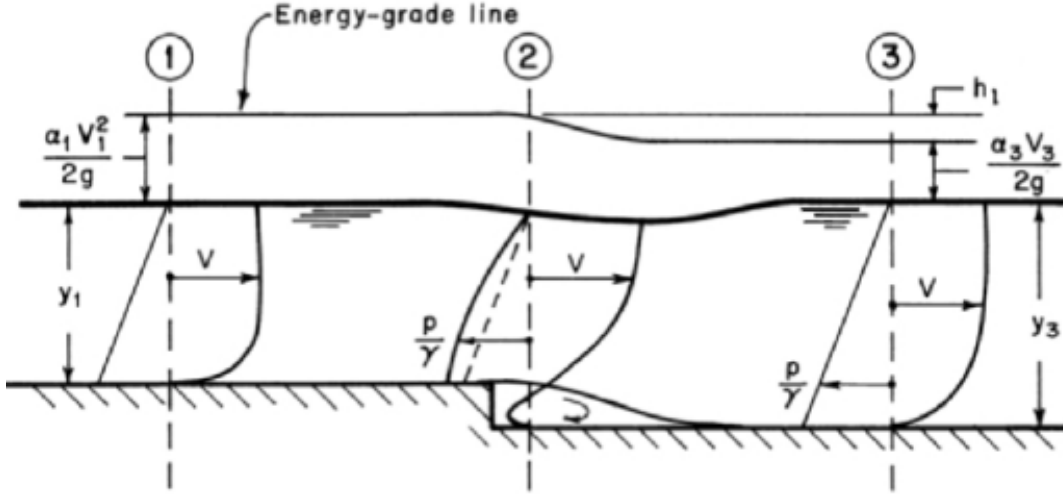


Figure 1: Cambio abrupto en el fondo del canal.

### 2.1 Conservación de la masa

Por definición, el flujo volumétrico o caudal a través de una sección se define como:

$$Q = \int_A \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} \quad (1)$$

donde  $\mathbf{u}$  es el campo vectorial de velocidades,  $d\mathbf{A}$  es el vector normal de área infinitesimal y  $A$  es el área de la sección. Si el flujo es aproximadamente paralelo, lo cual ocurre cuando existe presiones hidroestáticas, el ángulo formado entre  $\mathbf{u}$  y  $d\mathbf{A}$  es cero, y si la velocidad es casi uniforme (velocidad media  $V$ ), como es el caso de las secciones 1 y 3 en la figura ??, la ecuación 7 se convierte en:

$$Q = V \int_A dA = QA \quad (2)$$

La ecuación 7 es conocida como la ecuación de continuidad por lo que, para flujo permanente,  $Q_1 = Q_3$  o  $A_1V_1 = A_3V_3$ .

Analizando la distribución de velocidades en 2, es notorio que existe un flujo de reversa por lo que expresar la velocidad en términos de la velocidad media  $V$  no es posible. Esto implica que el cálculo de  $Q$  en la sección 2 a partir de la ecuación 8 solo es posible si la distribución de velocidad representada por el vector  $\mathbf{u}$  es conocida.

### 2.2 Conservación de la cantidad de movimiento

Por definición, el flujo de cantidad de movimiento a través de una sección  $A$  en dirección  $x$  se define como:

$$m_x = \rho \int_A v_x (vdA) \quad (3)$$

donde  $v_x$  es la componente de la velocidad en  $x$ . Para evaluar la ecuación 9 es necesario conocer las componentes en  $y$  y  $z$  de la velocidad. Ecuaciones similares se pueden obtener para  $m_y$  y  $m_z$ .

Considerando una velocidad uniforme en la sección, el flujo de cantidad de movimiento se puede calcular como:

$$m = \rho Q (\beta V) \quad (4)$$

en donde  $\beta$  es un coeficiente de cantidad de movimiento el cual corrige  $m$  teniendo en cuenta la distribución no uniforme de la velocidad en la sección. Analizando la figura ??, la ecuación 10 puede ser utilizada para estimar  $m$  en las secciones 1 y 3 pero no en la sección 1.

La fuerza actuante sobre una sección puede ser obtenida a partir de la ecuación 10 siempre y cuando la presión en la sección sea hidroestática como es el caso de las secciones 1 y 3. Para el caso de la sección 2 en donde no es posible determinar la fuerza a menos que la función de distribución de presiones sea conocida, lo cual puede lograrse a través de mediciones en el laboratorio. Esto hace que la aplicación de la cantidad de movimiento en FRV sea complicada.

### 2.3 Conservación de la energía

La energía total en una sección de flujo en donde la presión es hidroestática se expresa como:

$$H = z + y + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad (5)$$

En secciones en donde la presión no es hidroestática la ecuación anterior no aplica. En terminos generales, el flujo de energía en una sección se expresa como:

$$P = \rho g \int_A \left( z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) v dA \quad (6)$$

Para solucionar la ecuación anterior, la distribución de velocidades ( $v$ ) y de presiones ( $p$ ) debe ser conocida.

En resumen, no es posible utilizar el concepto de velocidad media o de presiones hidroestáticas para FRV, por lo que es necesario conocer la distribución de velocidades ( $v$ ) y de presiones ( $p$ ). Esto quiere decir que las leyes de conservación, como han sido comunmente aplicadas, no son posibles para FRV. Distribuciones teoricas de la velocidad como la de Bousinessq y la de Fawer pueden ser empleadas. Sin embargo en un canal en donde se presentan FGV y FRV, es preferible hacer el analisis en regiones en donde FRV no este presente.

## 3 Transiciones en canales

Una transición es un cambio local en las características del canal, usualmente, cambio en el área, forma o dirección del canal, que resulta en un cambio de estado en el flujo. Transiciones típicas son las expansiones, las contracciones y las curvas. Aquellas transiciones en donde se obtenga una relación  $y = f(Q)$  se conoce como un *control*; allí ocurre la profundidad crítica. Un *control artificial* ocurre en la entrada de *aliviaderos* o en la cresta de *vertederos*. Por otro lado un *control natural* es aquel que se presenta en la descarga libre de un canal.

A parte de servir como estructuras para cambiar el alineamiento y/o la sección transversal de un canal, las transiciones son también diseñadas para minimizar la pérdida de energía, para disipar energía o para reducir la velocidad del flujo y evitar erosión. Teniendo en cuenta la relación unívoca  $y = f(Q)$ , las transiciones también se usan para medir el  $Q$ .

### 3.1 Características generales

El diseño y construcción de transiciones requiere:

- Con el fin de minimizar costos y por facilidad constructiva, las transiciones deben ser simples y pueden tener fronteras discontinuas.
- Si es necesario minimizar las pérdidas de energía, la transición debe ser gradual y no deben existir discontinuidades en los bordes. Diseños de este tipo previenen la formación de remolinos y la separación del flujo reduciendo la posibilidad de *cavitación*.
- Las transiciones causan aceleración o desaceleración del flujo en una distancia relativamente corta y dominan el movimiento por encima de los esfuerzos cortantes en las fronteras. Esto implica que el flujo no se 1D, que las líneas de flujo se curven y que exista separación del flujo.
- En flujo con fuerte aceleración vertical, la velocidad y la presión no solo cambian en la dirección del flujo si no también en la vertical lo cual da lugar a flujos 2D o 3D.
- La pérdida de energía en una transición es despreciable y el flujo se asume irrotacional.
- Durante el diseño de una transición, es necesario evitar la ocurrencia de caídas de presión (e.g. cavitación) o aumentos de presión que pueden causar vibraciones e inestabilidades.
- Para el análisis de flujo en transiciones, la distribución de velocidades es generalmente no uniforme y es posible tener velocidades negativas en partes de la sección. Esto hace que sea difícil calcular, por ejemplo, la energía total en la sección.

### 3.2 Flujo subcrítico

#### 3.2.1 Expansiones

Una expansión ocurre por un incremento en el ancho del canal, una caída del fondo o una combinación de ambos (ver figura 2)

Las expansiones pueden ser abruptas (ver figura 2) o graduales. Estas estructuras están presentes en canales, descargas, sifones y acueductos. El diseño de expansiones requiere la selección de la forma para evitar separación de flujo y minimizar pérdida de energía. Los criterios de diseño de expansiones se apoyan en análisis experimentales. Algunos hallazgos:

- Se ha encontrado que el flujo aguas abajo de la expansión es asimétrico cuando  $\frac{B_2}{B_1} \leq 1.5$ , donde  $B_1$  es el ancho aguas arriba y  $B_2$  es el ancho aguas abajo de la expansión.
- La forma de una línea de flujo a través de una expansión se puede representar por la siguiente ecuación:

$$\frac{B_x - B_1}{B_2 - B_1} = \frac{x}{L} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{x}{L} \right)^m \right] \quad (7)$$

en donde  $B_x$  es dos veces la distancia desde el eje de simetría de la expansión a la línea de flujo mas externa,  $x$  es la distancia horizontal a lo largo del eje de simetría desde donde inicia la expansión,  $L$  es la distancia horizontal a lo largo del eje de simetría donde la línea de flujo toca la frontera y  $m$  es un exponente que varía como  $0.6 \leq m \leq 0.66$ .

Al diseñar la forma de una expansión siguiendo la ecuación anterior, se garantiza la menor separación de flujo y se minimizan las pérdidas de energía.

Consideremos la expansión repentina mostrada en la figura 3 en donde se cambia de manera abrupta de un ancho  $B_1$  a  $B_2$ .

Si se asume que: 1)  $E_2 = E_1$ , 2)  $F_{s1} = F_{s2}$ , 3)  $y_1 = y_2$ , 4)  $B_2 \approx B_1$  y 5)  $Fr_1^n \approx 0$  para  $n \geq 4$ , se puede demostrar que:

$$E_1 - E_3 = \frac{V_1^2}{2g} \left[ \left(1 - \frac{B_1}{B_2}\right)^2 + 2Fr_1^2 (B_2 - B_1) \frac{B_1^3}{B_2^4} \right] \quad (8)$$

En la ecuación anterior, el segundo termino dentro de los parentesis es despreciables si  $Fr_1 < 0.5$  o si  $B_2/B_1 > 1.5$ . En muchas aplicaciones, la condición  $B_2/B_1 > 1.5$  se cumple. Para el caso en que  $B_2/B_1 < 1.5$  las pérdidas de energía en la expansion son despreciables.

En terminos generales las pérdidas de energía en una expansión subita, se calcula como:

$$H_l = \frac{(V_1 - V_3)^2}{2g} \quad (9)$$

Análisis experimentales han demostrado que la ecuación anterior sobre-estiman las pérdidas de energía en cerca de un 10%.

En expansiones graduales cuyos bordes cambian como 4H:1V, las pérdidas de energía son:

$$H_l = 0.3 \frac{(V_1 - V_3)^2}{2g} \quad (10)$$

Para transiciones más graduales, las pérdidas no son significativamente menores a las estimadas en la ecuación 10, sin embargo, los costos pueden aumentar sustancialmente.

### 3.2.2 Contracciones

Las contracciones en un canal se presentan cuando el ancho del canal se reduce, cuando el fondo del canal aumenta o como una combinación de ambas (ver figura 4). Existen contracciones abruptas y graduales. Análisis experimentales han demostrado que las pérdidas de energía en una contracción son menores que las presentes en una expansión, y son iguales a:

$$H_l = 0.23 \frac{V_3^2}{2g} \quad (11)$$

La ecuación 13 aplica para contracciones abruptas. Para contracciones con bordes redondeados, la pérdida de energía se calcula como:

$$H_l = 0.11 \frac{V_3^2}{2g} \quad (12)$$

Note que  $V_3$  es la velocidad en la seccion de flujo de mayor contracción (aguas abajo de la contracción) en donde la velocidad es casi uniforme. Otros autores han econtrado que la perdidas de energía se calculan como:

$$H_l = C \frac{V_3^2}{2g} \quad (13)$$

donde  $C = 0.35$  para bordes cuadrados y  $C = 0.18$  para bordes redondeados.

Contracciones muy fuertes pueden causar condiciones criticas del flujo en la contracción o que la energía aguas arriba no sea suficiente para pasar a través de la contracción.

## 3.3 Supercritical flow

El flujo supercrítico a través de transiciones puede ser problemático porque es común la formación de ondas de choque en la superficie del flujo. Las ondas de choque son cambios repentinos de la profundidad y de la velocidad que se producen por cambios drásticos en las condiciones de flujo.

Para analizar las ondas de choque imaginemos un observador que viaja sobre un fluido cuya velocidad es  $V$  y causa una perturbación (e.g. cambios en el alineamiento del canal, irregularidades en la superficie

de la pared, etc). La celeridad de una onda, se define como  $c$ , la cual es la velocidad relativa con la cual viaja la perturbación en el flujo. Dependiendo de la magnitud de  $V$  y  $c$  existen tres situaciones posibles que se observan en la figura 6. Analizando el caso  $V > c$ , es posible encontrar una relación entre  $V$ ,  $c$  y  $\beta$ :

$$\sin \beta = \frac{A_1 D_1}{A_1 A_4} = \frac{c \Delta t}{V \Delta t} = \frac{c}{V} \quad (14)$$

En el caso de ondas largas de pequeña amplitud  $c = \sqrt{gy}$ , donde  $y$  es la profundidad de flujo. Reemplazando en la ecuación 15, se tiene:

$$\sin \beta = \frac{c}{V} = \frac{1}{Fr} \quad (15)$$

### 3.3.1 Resalto hidráulico oblicuo

En el caso de un flujo supercrítico que pasa a través de una contracción gradual en un canal rectangular, se generan ondas de gran magnitud debido a la deflexión de las líneas de flujo hacia adentro dando lugar a la ocurrencia de resaltos hidráulicos oblicuos (ver figura ??).

Analizando la figura ??, las velocidades tangenciales antes y después de la contracción (frente de onda) deben ser iguales:

$$V_1 \cos \beta = V_2 \cos (\beta - \Delta \theta) \quad (16)$$

donde  $V_1$  es la velocidad antes de la contracción,  $V_2$  es la velocidad en la contracción,  $\Delta \theta$  es el ángulo de la contracción y  $\beta$  es el ángulo que forma el frente de onda con la horizontal.

A partir de la ecuación de continuidad y de las velocidades perpendiculares al frente de onda, se tiene:

$$y_1 V_1 \sin \theta = y_2 V_2 \sin (\beta - \Delta \theta) \quad (17)$$

De la conservación de cantidad de movimiento para la velocidad perpendicular  $V_1 \sin \beta$ , se tiene:

$$\frac{V_1 \sin^2 \beta}{gy_1} = \frac{1}{2} \frac{y_2}{y_1} \left( \frac{y_2}{y_1} + 1 \right) \quad (18)$$

De esta ecuación se tiene:

$$\sin \beta = \frac{1}{Fr_1} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{y_2}{y_1} \left( \frac{y_2}{y_1} + 1 \right)} \quad (19)$$

Note que para ondas de pequeña amplitud, la ecuación 19 se convierte en la ecuación 15.

Dividiendo la ecuación 17 por la ecuación 16, se tiene:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\tan \beta}{\tan (\beta - \Delta \theta)} \quad (20)$$

Sustituyendo  $y_2 = y_1 + \Delta y$ , donde  $\Delta y$  es la altura de la onda, en la ecuación 20, se tiene:

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\sec^2 \beta \tan \Delta \theta}{\tan \beta - \tan \Delta \theta} \quad (21)$$

Para valores pequeños de  $\Delta \theta$ ,  $\tan \theta \approx \Delta \theta$  y  $\tan \Delta \theta$  es muy pequeño con respecto a  $\tan \beta$ . Aplicando límites cuando  $\Delta \theta \rightarrow 0$ , la ecuación 22 se convierte en:

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{2y}{\sin 2\beta} \quad (22)$$

Combinando las ecuaciones 15 y 22, se tiene:

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{V^2}{g} \tan \beta \quad (23)$$

La ecuación 23 define la variación de la profundidad de flujo en la transición. Esta ecuación indica que  $y$  cambia en función de  $\theta$  a lo largo del frente de onda oblicuo.

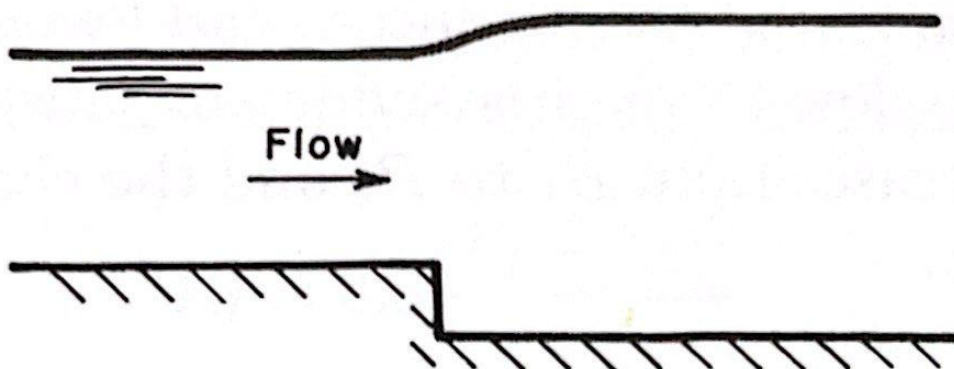
Teniendo en cuenta que las pérdidas de energía pueden ser despreciables, la velocidad se puede expresar como  $V = \sqrt{2g(E - y)}$ . Reemplazando esta expresión en la ecuación 23 y utilizando la ecuación 15, se tiene:

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{2(E - y)\sqrt{y}}{\sqrt{2E - 3y}} \quad (24)$$

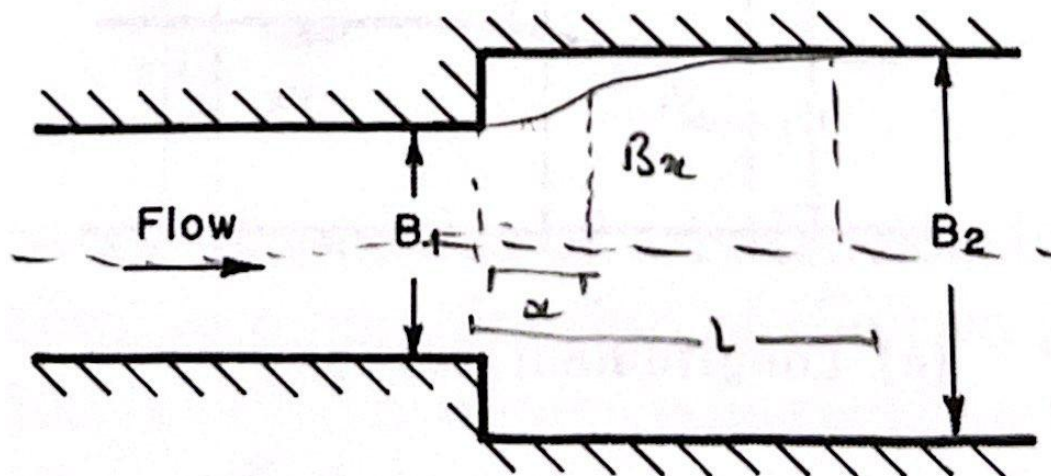
Integrando la ecuación 24 y sustituyendo  $E$  en términos de  $y$  y de  $Fr$ , se tiene:

$$\theta = \sqrt{3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{Fr^2 - 1}} - \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{Fr^2 - 1}} + \theta_0 \quad (25)$$

donde  $\theta_0$  es la constante de integración la cual se obtiene sustituyendo  $\theta = 0$  para la profundidad  $y = y_1$ . Esta ecuación estima los cambios en las profundidades en la transición debido a cambios de  $\theta$ .



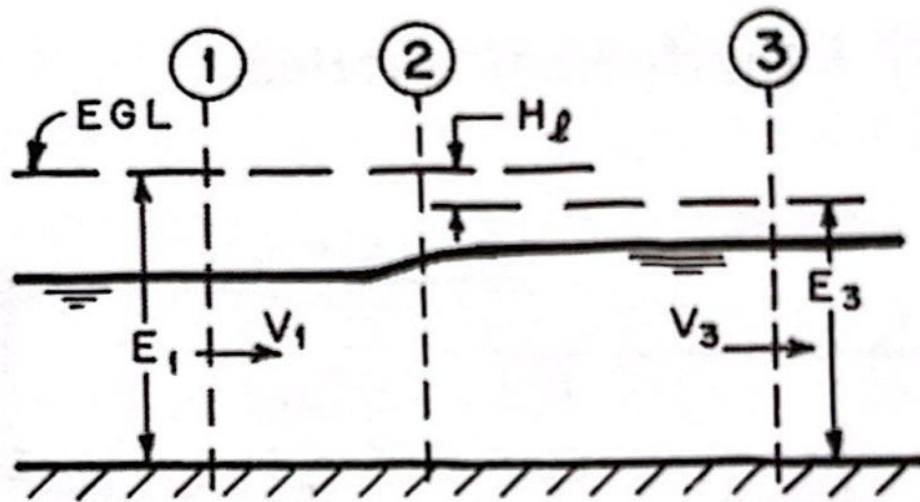
**(a) Longitudinal section.**



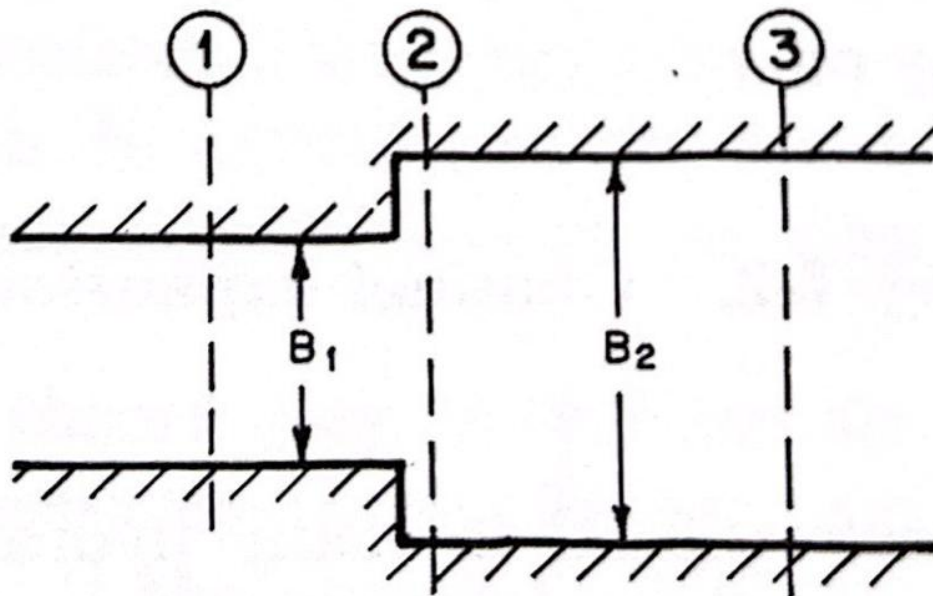
**(b) Plan**

Figure 2: Expansión en un canal.





(a) Longitudinal section

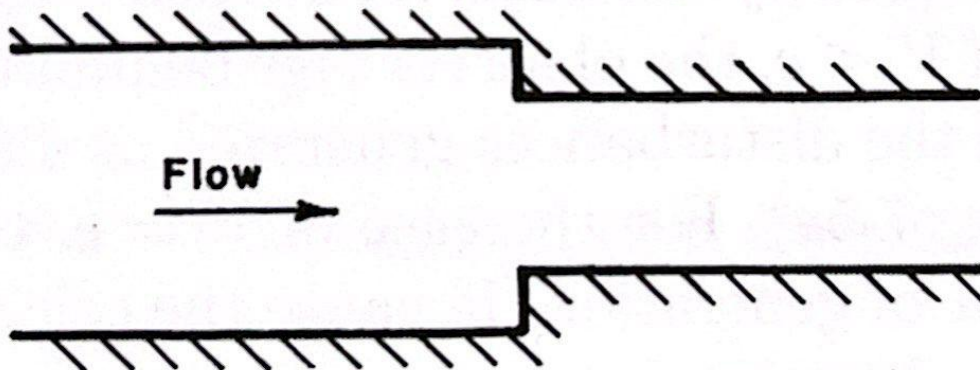


(b) Plan

Figure 3: Expansión en un canal.

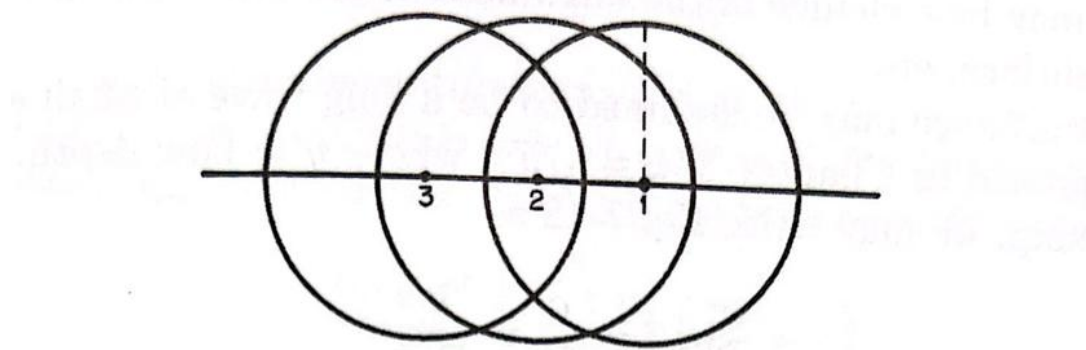


**(a) Longitudinal section**

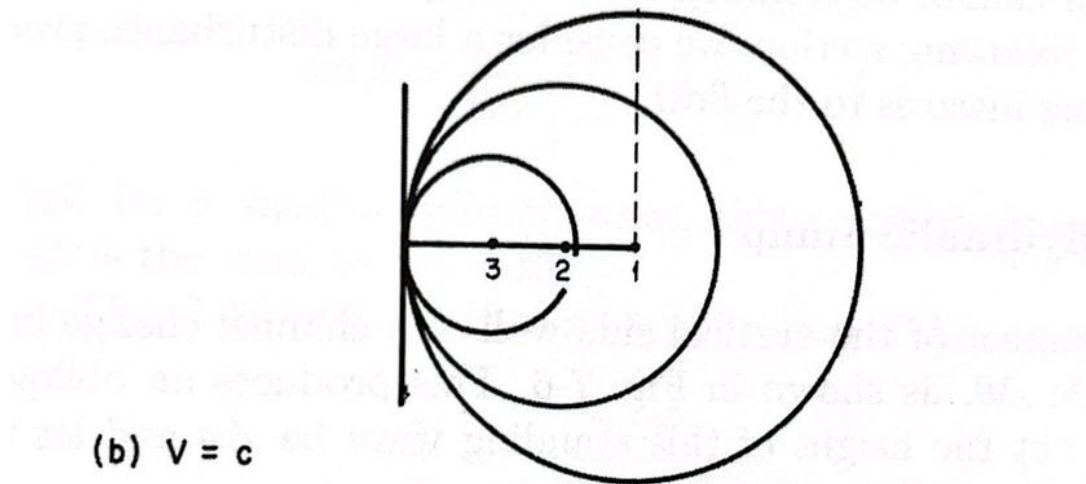


**(b) Plan**

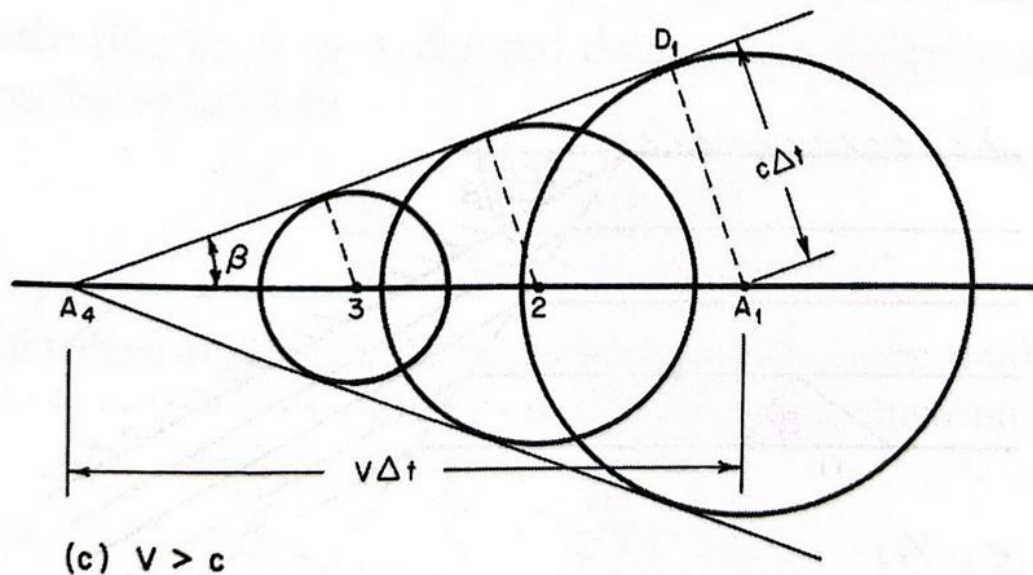
Figure 4: Contracción en un canal.



(a)  $V < c$



(b)  $V = c$



(c)  $V > c$

Figure 5: Propagación de una perturbación.

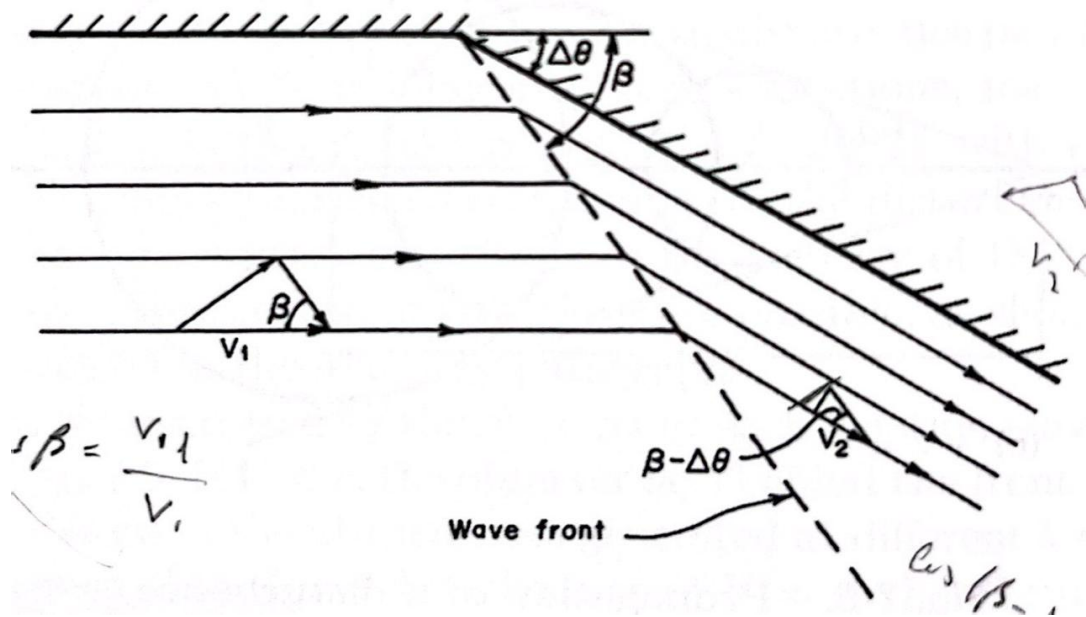


Figure 6: Resalto hidráulico oblicuo.