

# Modelación matemática en recursos hidráulicos

Luis Alejandro Morales, Ph.D.

email: lmoralesm@unal.edu.co

url: <https://lamhydro.github.io>

Facultad de Ingeniería, Departamento de Ingeniería Civil y  
Agrícola  
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

May 10, 2024



# Outline

---

**1. Modelación matemática**

2. Modelacion matemática en recursos hidráulicos

3. Problemas en la modelacion matematica en recursos hidraulicos

4. Modelo termal de un lago

# Modelos físicos

Representan un prototipo a escala construido en un laboratorio usando leyes de similitud e.g. Reynolds, Froude.

- Modelo de un vertedero de una presa
- Modelo de un tramo de un río para el estudio del transporte de sedimentos
- Modelo de un sistema de bombeo.
- Modelo de la pilas de puentes para estudio de la erosión local.



# Modelos matemáticos

Descripción de un problema real en términos matemáticos abstractos representados, generalmente, como ecuaciones.

- Ecuaciones de Saint-Venant para el análisis del flujo 1D en canales.
- Ecuación de Richard para la descripción del flujo en suelos no saturados.
- Ecuación 1D de advección y difusión para el análisis de la temperatura del agua.
- Ecuación de Muskingum-Cunge para el transito de crecientes.

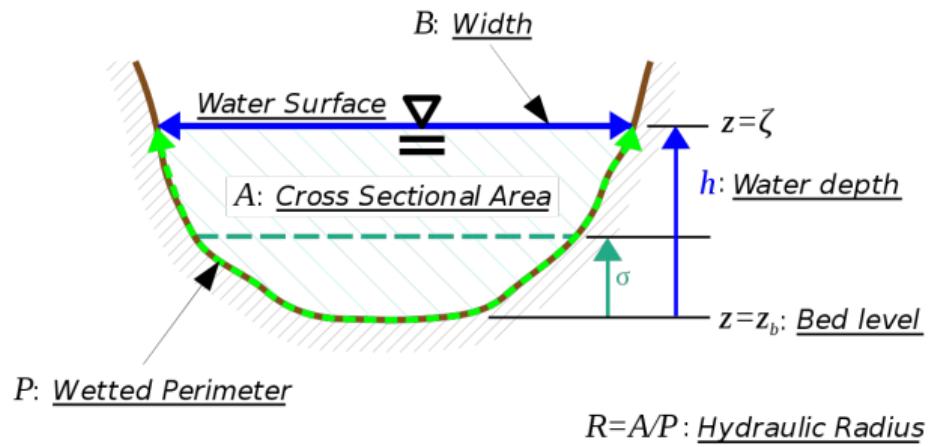
## Ecuciones de Saint-Venant

- Ecuacion de continuidad

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(Au)}{\partial x} = 0$$

- Ecuacion de cantidad de movimiento

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = - \frac{P \tau}{A \rho}$$



# Modelos matemáticos

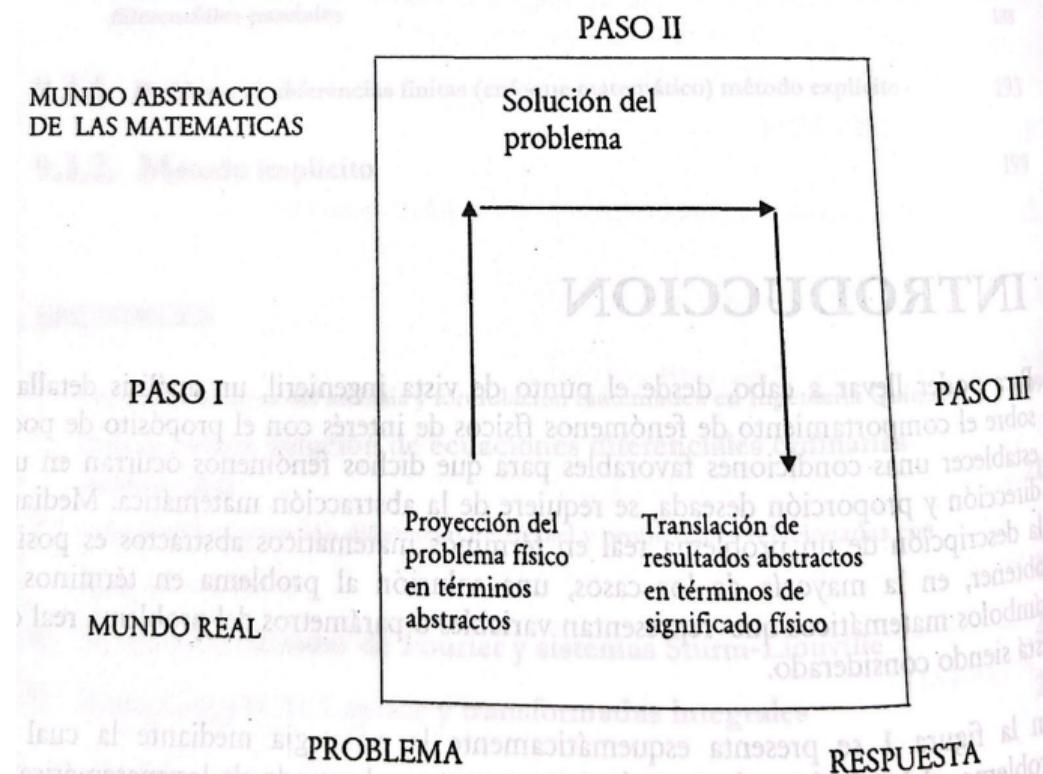


Figure: Representación esquemática de la abstracción de un modelo real

# Objetivos de la modelación matemática

---

- Mostrar un entendimiento de procesos físicos a través de la formulación de ecuaciones que sirven para la predicción del comportamiento de dichos procesos.
- Implementar el modelo propuesto de manera operacional para la predicción y en consecuencia la toma de decisiones.
- Aprender sobre procesos físicos que ocurren en un lugar en particular teniendo en cuenta la incertidumbre.

# Clasificación de modelos matemáticos

- **Lineales y no lineales:** Si todos los elementos del modelo exhiben linealidad (en términos del orden del polinomio o el resultado de una función), el modelo es lineal. Lo contrario, es un modelo no lineal.
- **Estáticos y dinámicos:** En un modelo estático o permanente, las variables de estado no cambian en el tiempo. Sucede lo contrario en los modelos dinámicos. Estos últimos son representados comúnmente con ecuaciones diferenciales.
- **Explícitos e implícitos:** Si todos los parámetros son conocido y pueden ser calculados a través de una ecuación explícita, el modelo es explícito. Si por el contrario, la variable dependiente requiere de un proceso *iterativo* para su solución, el modelo es implícito.
- **Discreto y continuo:** Un modelo discreto trata los objetos físicos como elementos individuales e.g. Partículas en el transporte de contaminantes en un río. En un modelo continuo el medio físico es analizado como un medio continuo e.g. el campo de velocidades en un río o la temperatura en un lago.
- **Determinístico y probabilísticos:** En un modelo determinístico las variables de estado responde siempre de la misma manera a los parámetros o las condiciones iniciales del modelo. En un modelo probabilístico o estocástico la respuesta de las variables de estado no es siempre la misma y esta determinada por unas funciones de probabilidad.

# Proceso de modelación matemática

Existen dos pasos fundamentales para la formulación de un modelo matemático:

1. **Análisis del sistema**: Esta puede ser teórica, observacional o experimental.
2. **Representación matemática**: Síntesis de una representación matemática del sistema.

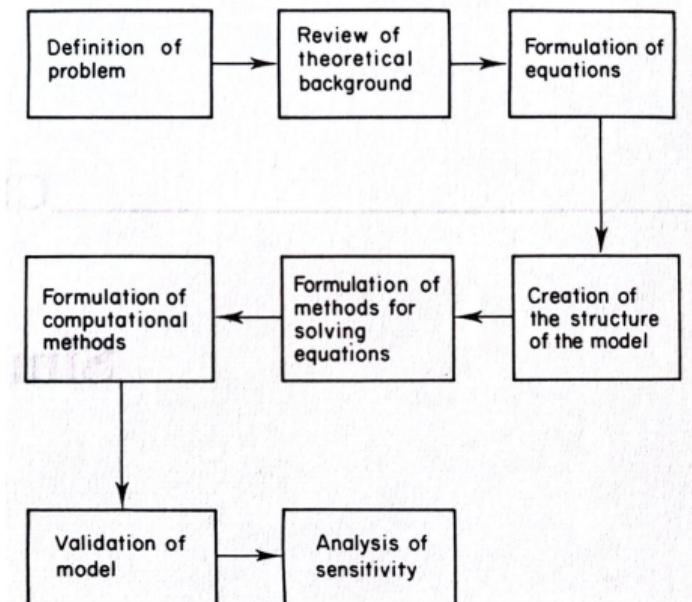


Figure: Pasos para la creación de un modelo matemático

# Proceso de modelación matemática

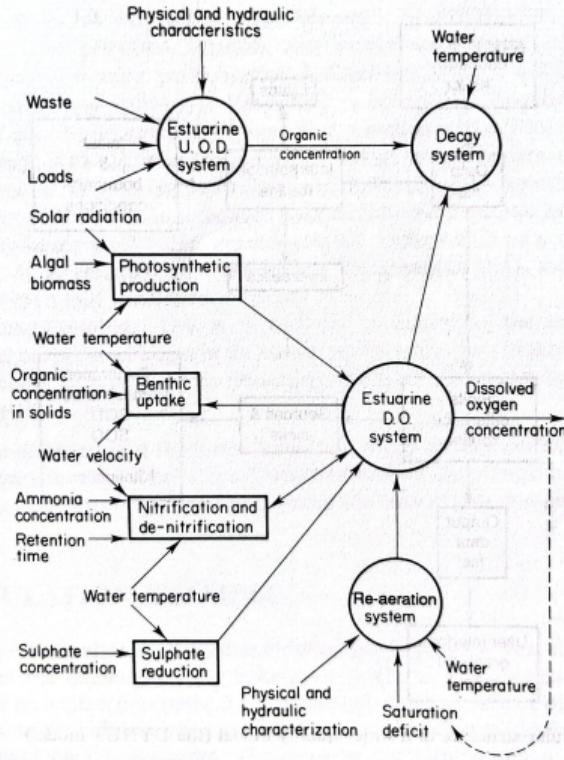


Figure: Modelo conceptual del régimen de oxígeno disuelto en estuarios

# Outline

---

1. Modelación matemática

**2. Modelacion matemática en recursos hidráulicos**

3. Problemas en la modelacion matematica en recursos hidraulicos

4. Modelo termal de un lago

# Generalidades

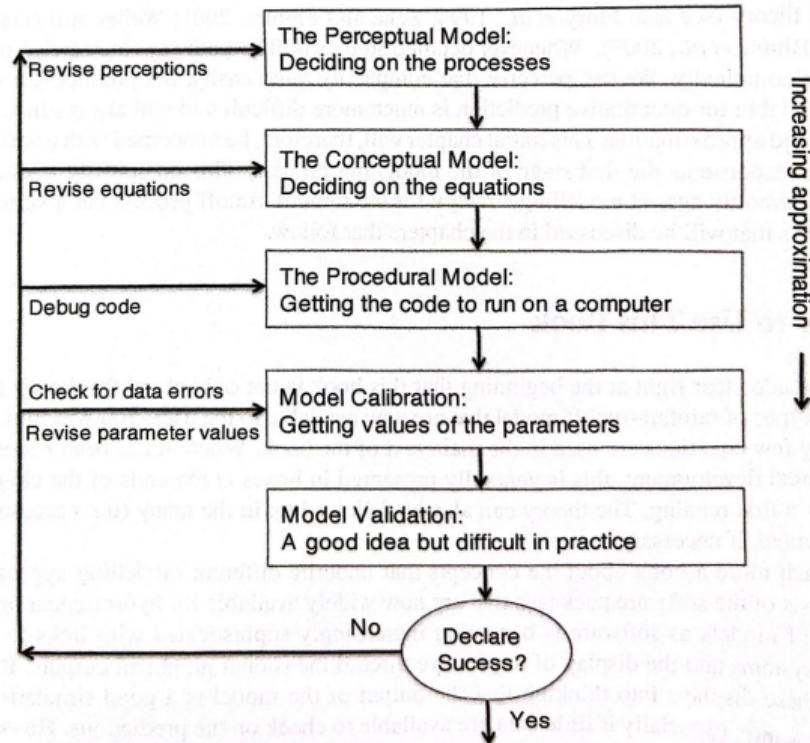


Figure: Esquema del proceso de modelación en recursos hidráulicos

# Modelo perceptual

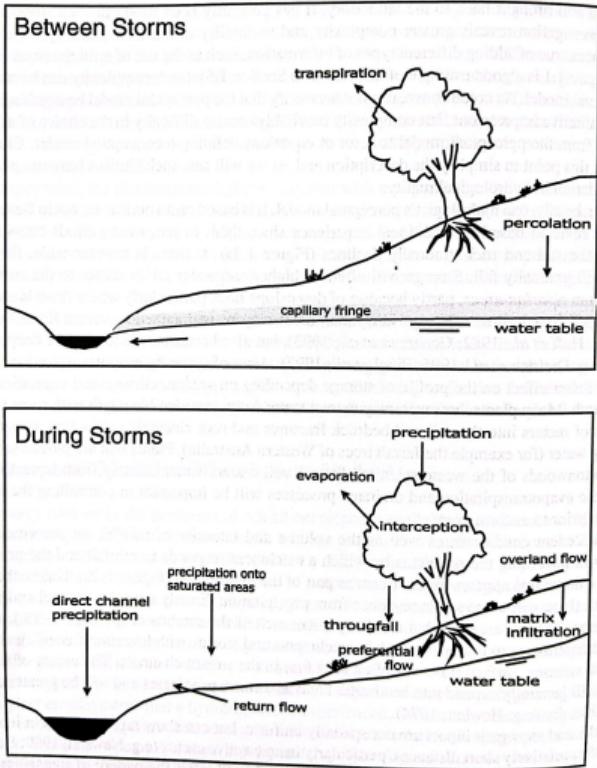


Figure: Modelo perceptual de la hidrología de una ladera

Modelación matemática en recursos hidráulicos

# Modelo conceptual

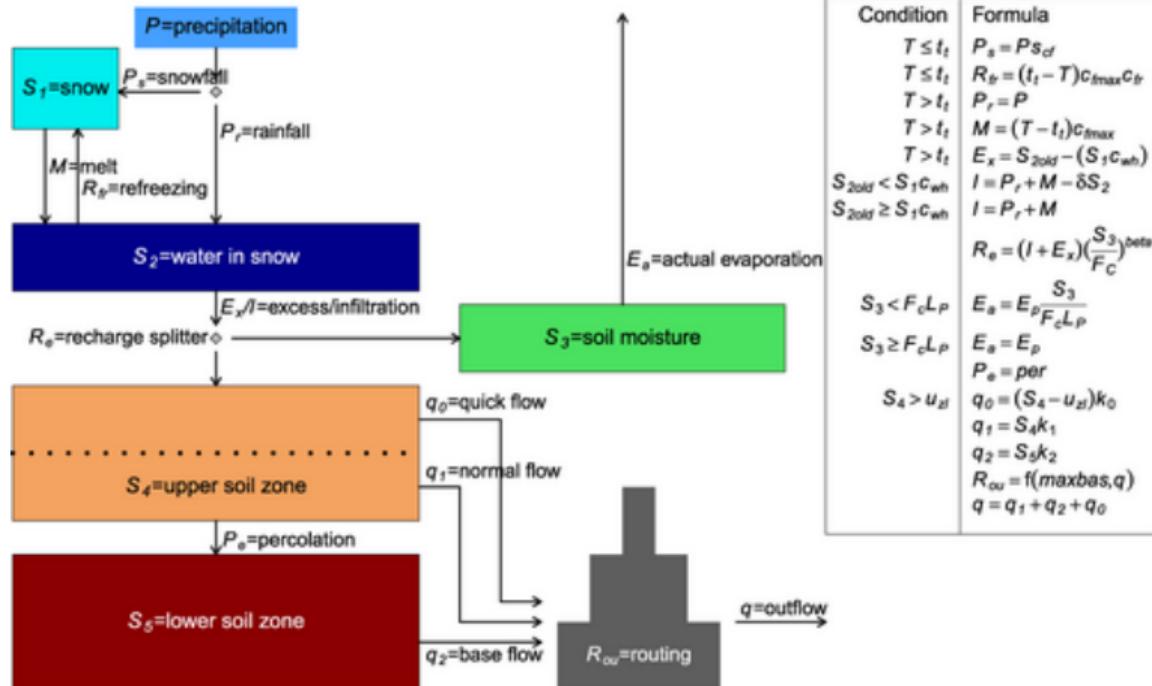


Figure: Modelo conceptual del modelo hidrológico HBV

# Algoritmo computacional

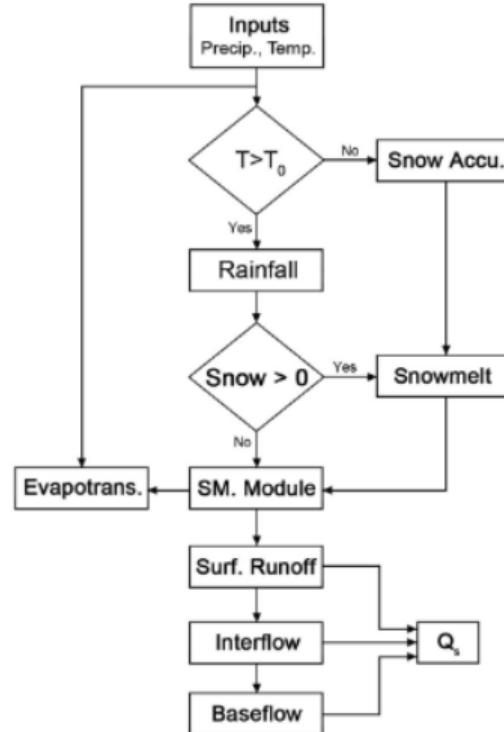


Figure: Algoritmo computacional del modelo hidrológico HBV

# Calibración del modelo

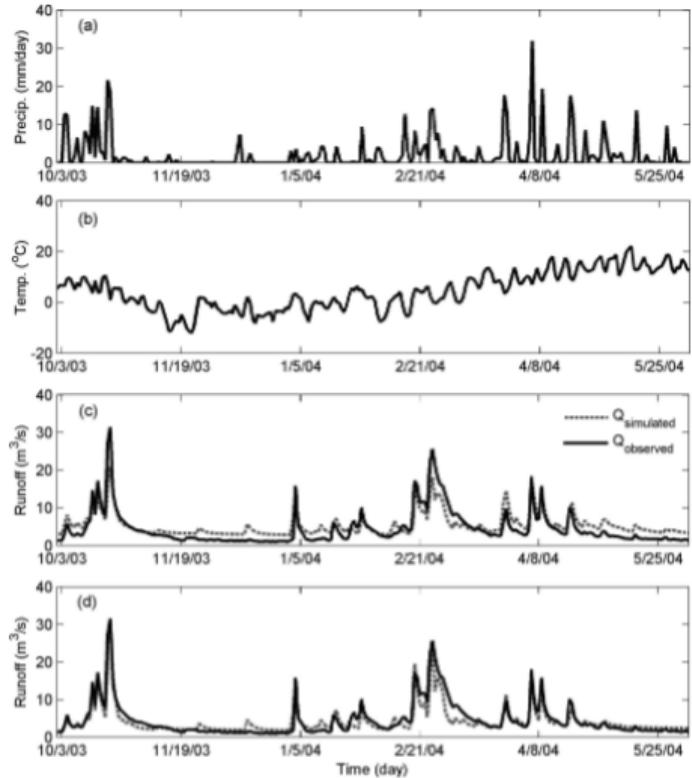


Figure: Precipitación, temperatura, caudal diario (modelo sin calibrar) y caudal diario (modelo calibrado)

# Outline

---

1. Modelación matemática
2. Modelacion matemática en recursos hidráulicos
- 3. Problemas en la modelacion matematica en recursos hidraulicos**
4. Modelo termal de un lago

# Problemas en la modelación en recursos hidráulicos

## Problemas de representación

- Limitaciones esperadas de nuestros modelos perceptuales como representación del sistema físico.
- Simplificación del modelo perceptual hacia el modelo formal y definitivo.
- Aproximaciones en la solución de las ecuaciones del modelo a través de métodos matemáticos programados en el computador.

# Problemas en la modelación en recursos hidráulicos

## Problemas de escala y espacio

- La necesidad de cierre del sistema mediante la definición del límite adecuado y las condiciones iniciales.
- El hecho de que el modelo procedural requerirá condiciones de límite efectivas dependientes de escala, condiciones iniciales, y valores de parámetros que pueden ser diferentes para diferentes implementaciones del modelo.
- El problema de calibrar las condiciones límite del modelo, las condiciones iniciales y los valores de los parámetros en cualquier aplicación a lugares particulares.
- El problema de la incommensurabilidad de las mediciones (y la teoría) con lo que se requiere en las escalas de modelado.
- El problema de transferir los valores de los parámetros de una aplicación de modelo a otra.

# Problemas en la modelación en recursos hidráulicos

## Problemas de incertidumbre y aplicaciones prácticas

- Se requieren diferentes métodos de estimación de la incertidumbre para diferentes tipos de problemas.
- En particular, la estimación de la incertidumbre sin observaciones históricas disponibles, la estimación de la incertidumbre con el acondicionamiento de las observaciones históricas y el pronóstico en tiempo real deben distinguir.

# Problemas en la modelación en recursos hidráulicos

## Problemas de representación de la incertidumbre

- El problema que no todas las incertidumbres son cuantificables.
- El problema que los modelos de errores de modelado pueden ser difíciles de construir y pueden implicar no estacionalidades que surgen como resultado de la entrada y el error estructural del modelo.
- El problema de que las estructuras de modelos y conjuntos de parámetros puedan hacer igualmente bien en el ajuste de los datos observacionales disponibles.
- El problema de usar diferentes representaciones de incertidumbre en la toma de decisiones.

# Problemas en la modelación en recursos hidráulicos

## Incertidumbre y toma de decisiones

- En la aplicación real, la estimación de la incertidumbre es un solo un medio para un final; el final de tomar mejores decisiones.
- Los métodos para la toma de decisiones con relación a la incertidumbre existen. Sin embargo, como representar y estimar mejor la incertidumbre, sigue siendo un problema sin resolver.

# Outline

---

1. Modelación matemática
2. Modelacion matemática en recursos hidráulicos
3. Problemas en la modelacion matematica en recursos hidraulicos
4. **Modelo termal de un lago**

# Problema

## Definición del problema

- **Justificación** Los lagos son cuerpos de agua que son alimentados por ríos, quebradas y flujos subterráneos. Los lagos sirven como suministro de agua para consumo humano, industrial y agrícola, y albergan numerosas especies acuáticas. Diferentes estudios han evidenciado los efectos del cambio climático sobre la estructura termal de este tipo de cuerpos de agua y las consecuencias sobre los ecosistemas que estos albergan.
- **Objetivo principal** Implementar un modelo 1D para la simulación de la estructura termal en lagos pequeños con el fin de investigar cambios temporales de la temperatura.
- **Objetivos específicos**
  - Recopilar la información de entrada y las condiciones iniciales y de frontera.
  - Calibrar el modelo utilizando datos de temperatura a diferentes profundidades.
  - Simular cambio en la estructura termal de un lago periodo largo de tiempo.

# Ecuación del modelo termal

El modelo resuelve la ecuación 1D de advección y difusión de la temperatura dada por:

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = \frac{1}{A(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left( A(z) K z(z,t) \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho C_p A(z)} \frac{\partial A(z) q(z,t)}{\partial z} \quad (1)$$

donde  $z$  es la profundidad de agua (m) medida desde la superficie del agua ( $z = 0$ ) hasta el fondo ( $z = h$ );  $t$  es el tiempo (s),  $T(z,t)$  es la temperatura del agua ( $^{\circ}\text{C}$ ),  $A(z)$  es el área horizontal del punto medio de una capa del modelo (ver  $\text{Ala}_i$  in Figure 9a);  $K z(z,t)$  es el coeficiente de difusión turbulenta ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ),  $q(z,t)$  describe la tasa neta de calor generado ( $\text{W m}^{-2}$ ) debido a la radiación absorbida en la columna de agua , y  $C_p$  is el calor específico del agua.

La solución de la ecuación 1 se logra bajo el supuesto de que el lago está compuesto de múltiples capas horizontales homogéneas. La ecuación se resuelve utilizando diferencias finitas totalmente implícitas. Esto reduce el dominio discreto (es decir, las capas) a un sistema de ecuaciones lineales, cuya matriz de coeficientes tridiagonales luego se invierte eficientemente utilizando el algoritmo de Thomas. La solución de la ecuación 1 produce la temperatura del agua en el centro de cada capa en cada paso de tiempo.

# Estructura del modelo

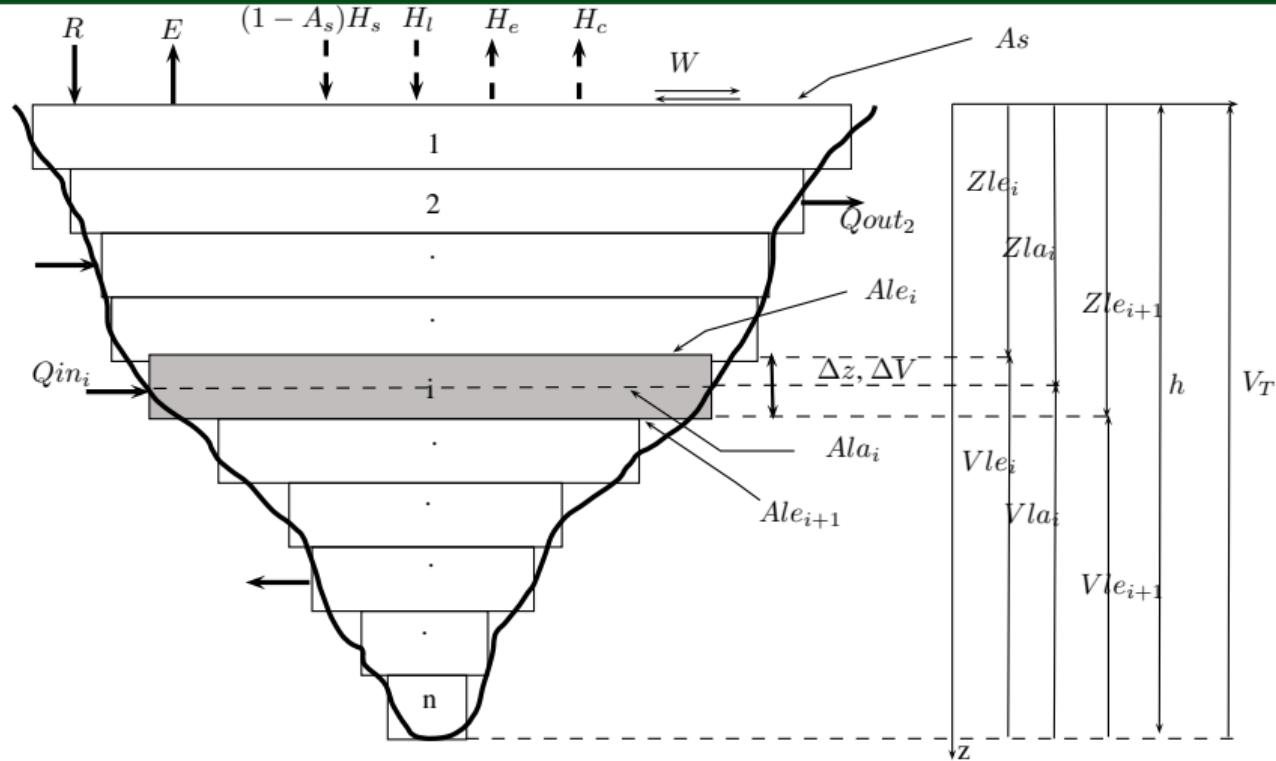


Figure: Discretización computacional del dominio del lago.

# Condiciones de frontera

Las condiciones límite para la ecuación 1 se imponen en la superficie en forma de flujo de calor neto y esfuerzo cortante del viento. El presupuesto de calor neto, representado como  $q(z, t)$  en la Ecuación 1, se calcula como:

$$q(z) = \begin{cases} Hn = (1 - r)Hs + Hl - He - Hc & \text{if } z = 0 \text{ (uppermost layer)} \\ (1 - \beta_s)Hn \exp(-\eta z) & \text{if } z > 0 \text{ (lower layers)} \end{cases} \quad (2)$$

donde  $Hn$  es el flujo de calor neto en la superficie del agua ( $\text{W m}^{-2}$ );  $Hs$  es la irradiación de onda corta medida en la superficie del agua ( $\text{W m}^{-2}$ );  $Hl$  es la radiación de onda larga ( $\text{W m}^{-2}$ );  $He$  es el flujo de calor evaporativo,  $Hc$  es el calor sensible ( $\text{W m}^{-2}$ ),  $r$  es la reflectividad de onda corta,  $\beta_s$  es la fracción de irradiación de ondas absorbidas en la superficie del agua y  $\eta$  es el coeficiente de extinción.

# Condiciones de frontera

El cálculo del balance hídrico es importante para comprender la hidrodinámica del lago, sobre todo porque la variación temporal en la profundidad del agua influye en la capacidad del viento para profundizar la capa de mezcla. El modelo incluye los flujos de agua que surgen de la lluvia y la evaporación, las aguas subterráneas y las entradas y salidas superficiales. La precipitación,  $R$  ( $\text{m h}^{-1}$ ), es una cantidad medida que generalmente se obtiene de una estación meteorológica convenientemente cercana, mientras que la evaporación,  $E$  ( $\text{m h}^{-1}$ ), se calcula usando una de varias fórmulas estándar (la ecuación de Penman por defecto). Se supone que ambas cantidades están distribuidas homogéneamente en la superficie del agua y sólo afectan el equilibrio hídrico de la capa superior. El balance hídrico de esta capa se puede expresar como:

$$\frac{V_1^{t+1} - V_1^t}{\Delta t} = +(R - E)Aa_1^t; \quad (3)$$

donde  $V_1$  es el volumen ( $\text{m}^3$ ) de la capa superior.

# Modelo computacional

- El modelo está codificado en C, lo que ofrece una buena combinación de rendimiento y portabilidad en los principales sistemas operativos informáticos.
- El programa está estructurado en rutinas que proporcionan funcionalidad de entrada/salida y calculan los diversos términos en la ecuación de advección-difusión 1D (Ecuación 1).
- Los tiempos de ejecución dependen de la elección del paso de tiempo y de la discretización utilizada pero, como guía aproximada, se puede lograr una simulación de 20 capas de 1 año de duración en un paso de tiempo de una hora en menos de 4 minutos de tiempo de CPU en una sola CPU Intel de 3,5 GHz con procesador Xeon.
- El modelo está particularmente adecuado para análisis de sensibilidad que utilizan grandes conjuntos de corridas o respuestas físicas de lagos al forzamiento climático en escalas de tiempo de décadas a centenarios.
- El código también es lo suficientemente simple como para utilizarlo como herramienta educativa. El código fuente está disponible bajo una licencia de código abierto a través del repositorio de GitHub.

# Modelo computacional

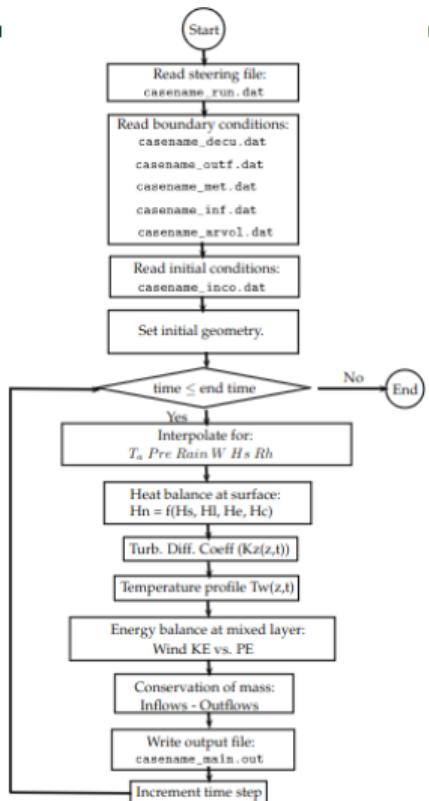
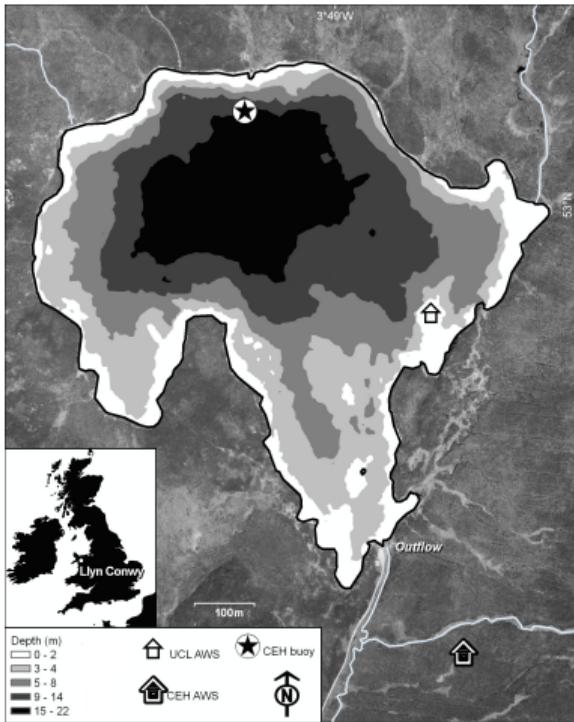


Figure: Estructura del programa

## Caso de estudio

- Llyn Conwy es un pequeño lago de montaña situado a 450 m sobre el nivel medio del mar en la cabecera de la cuenca de Conwy, Norte de Gales, Reino Unido.
- La cuenca es pequeña (96 ha frente a una superficie lacustre de 40 ha) y tiene un relieve moderado, con una elevación máxima de 526 m.
- El lago está ubicado dentro de una meseta grande y está expuesto a las corrientes de aire predominantes del suroeste desde la costa (a 20 km de distancia).
- La profundidad media y máxima del agua es de aproximadamente 7,7 y 22,0 m respectivamente, y la batimetría se caracteriza por una profunda cuenca centro-norte flanqueada por bahías menos profundas al sur y al este.
- Tres pequeños arroyos ingresan al lago desde el norte, noreste y sureste, pero la afluencia se distribuye en gran medida alrededor de la costa y se produce por filtración y escorrentía superficial.
- Aunque natural, el lago se utiliza como fuente de agua potable y su nivel se ha elevado ligeramente mediante un umbral artificial en la desembocadura en el extremo sur del lago. La extracción se produce a través de una tubería adyacente al flujo de salida, aunque los cambios de nivel estacionales resultantes son pequeños.

# Caso de estudio



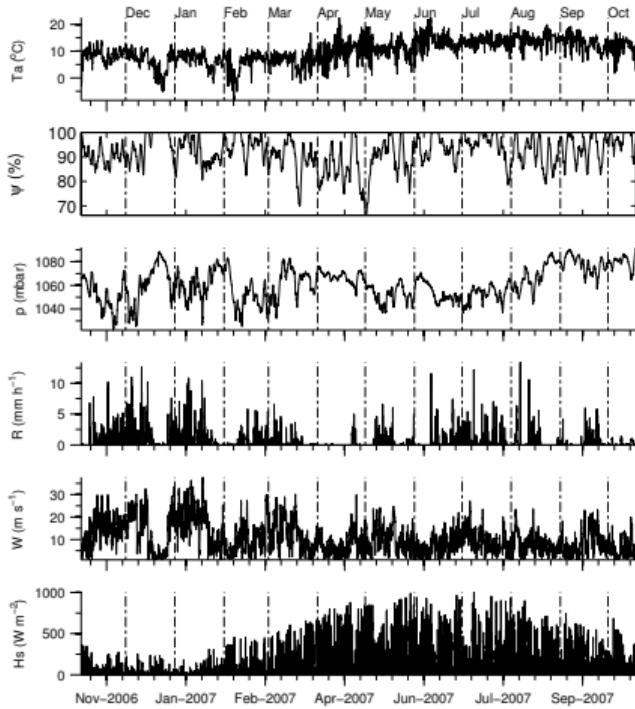
**Figure:** Ubicación, batimetría de Llyn Conwy y lugares de adquisición de datos (boya de datos CEH y estación meteorológica automática UCL). Contornos de profundidad en m.

# Información de entrada al modelo: parámetros

**Table:** Valores de parámetros utilizados en el modelo, con valores utilizados en el estudio de caso de Llyn Conwy. Los parámetros en negrita se ajustaron dentro de los rangos indicados para la calibración del modelo.

Parameter	Symbol	Values	Units
Max. layer thickness	$\delta_{max}$	1.5	m
Min. layer thickness	$\delta_{min}$	0.5	m
<b>Max. hypolim. turb. diff. coeff.</b>	$Kz_{max}$	9.95e-7 - 1.00e-4	$m^2 s^{-1}$
Long-wave albedo	$\alpha$	0.04	—
Short-wave reflectivity	$r$	0.08	—
<b>Wind sheltering coefficient</b>	$C$	0.1 - 1.0	—
Emissivity of water	$\epsilon$	0.972	—
Solar rad. fract. absor. in top layer	$\beta_s$	0.5	—
<b>Extinction coefficient</b>	$\eta$	0.1 - 2.0	$m^{-1}$
Constant	$\alpha$	37	—
Constant	$\beta$	1	—
Constant	$\gamma$	2	—
Molecular diffusion coefficient	$Kz_{mol}$	$1.2 \times 10^{-7}$	$m^2 s^{-1}$
Latitude	$Lat$	53	°
Initial number of layers	$n_{lay0}$	25	—
Initial water surface level	$Lev_{ws}$	0.0	m
Bottom depth	$Lev_{bot}$	21.0	m
Modelación matemática en recursos hidráulicos			

# Información de entrada al modelo: Variables climatológicas



**Figure:** Hourly-averaged meteorological data series used in the model calibration. Ta = air temperature;  $\psi$  = relative humidity, p = atmospheric pressure; R = hourly rainfall; W = windspeed at a height of 2 m above the water surface; and Hs = short wave irradiance at the water surface.

# Calibración del modelo

**Table:** Best parameter set for three different relative water depths ( $h/H$ ) based on the minimum value of NSE.

$h/H$	RMSE (m)	RMAE (%)	NSE	$Kz_{max}$	$C$	$\eta$
0	0.688	7.6	0.973	5.60e-05	0.9000	0.3111
0.5	0.657	6.9	0.971	6.70e-05	0.1000	1.3667
1.0	0.732	8.5	0.963	1.00e-04	0.1000	1.1556

# Calibración del modelo

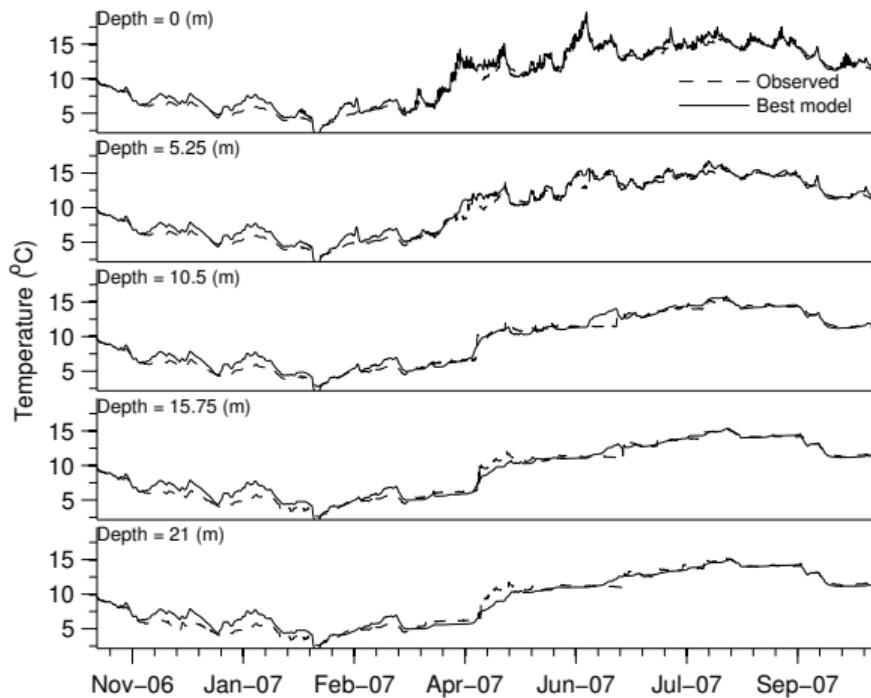
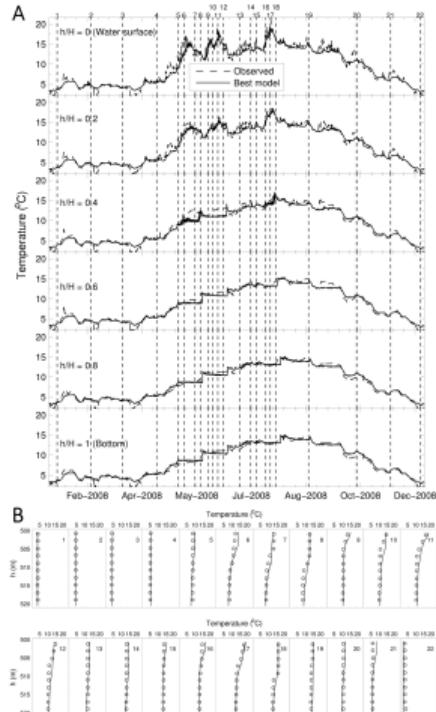


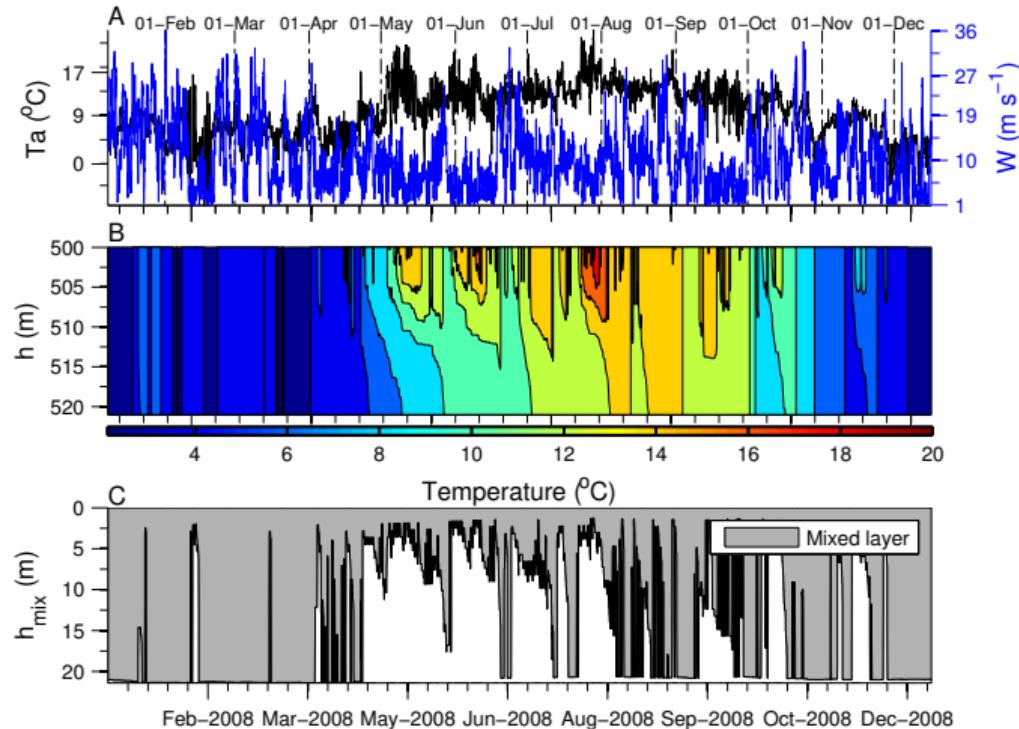
Figure: Comparison between simulated and observed water temperature at five depths (every 20% of the water depth from the surface to the bottom), for the best parameter set (run 54; Table ??).

# Validacion del modelo



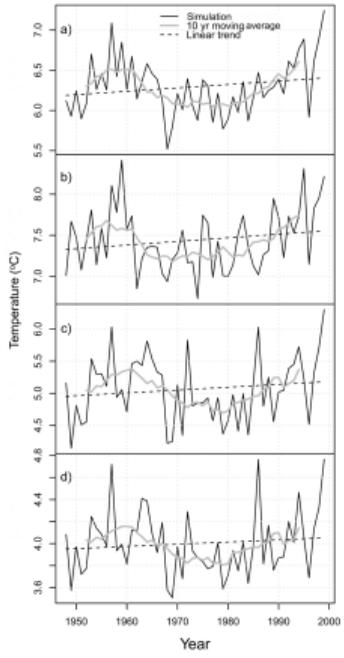
**Figure:** a) Comparison between the best simulated (continuous line) and observed temperature (dashed line) at different percentages of water depth from the water surface to the bottom. Vertical dashed lines indicate the times of b) observed (empty circles) and simulated (continuous line) water temperature profiles.

# Validación del modelo

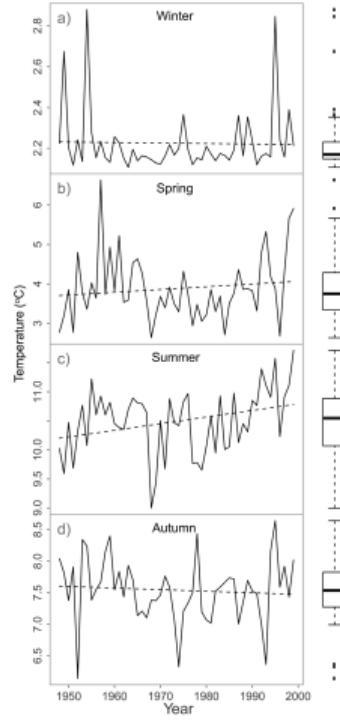


**Figure:** a) Time series for dominant meteorological forcing variables air temperature (black) and wind velocity (blue); b) simulated water temperature contours; c) simulated mixed layer depth.

# Simulacion multidecaadas



**Figure:** Multi-decadal UCLake simulation of annual-average water temperature, with 10-year moving average and linear trend for: a) water column average, b) epilimnion, c) metalimnion and d) hypolimnion.



**Figure:** Seasonal water-depth averaged temperature time-series and boxplots for: a) winter, b) spring, c) summer and d) autumn.



Contents lists available at ScienceDirect

## Limnologica

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/limno](http://www.elsevier.com/locate/limno)



### Simulating seasonal to multi-decadal variation in lake thermal response to meteorological forcing using the UCLAKE 1-dimensional model code

Luis A. Morales-Marín <sup>a,\*</sup>, Jon R. French <sup>a</sup>, Helene Burningham <sup>a</sup>, Chris Evans <sup>b</sup>, Annette Burden <sup>b</sup>

<sup>a</sup> UCL Department of Geography, University College London, Gower Street, London WC1E 6BT, UK

<sup>b</sup> Centre for Ecology & Hydrology, Environment Centre Wales, Deiniol Road, Bangor LL57 2UW, UK

---

#### ARTICLE INFO

**Keywords:**  
Lake temperature  
Lake warming  
Stratification  
Mixing  
Numerical model  
Open source

---

#### ABSTRACT

Lake temperature responses to climate forcing are of interest on account of the important linkages between water temperature and ecosystem processes. This paper describes a new 1-dimensional (1D) numerical model code and its application to investigations of multi-scale linkages between the vertical temperature structure and meteorological forcing. UCLAKE is implemented as highly portable open-source software, based on computationally efficient algorithms, and able to resolve sub-daily (e.g., hourly) dynamics while retaining the efficiency to simulate multi-decadal time scales.

A UCLAKE model is calibrated and validated against thermistor profile time series for a small upland lake in North Wales, UK. Some of the challenges in 1D model calibration are explored and a sensitivity analysis reveals a dependence of optimal parameter set values on water column depth and time. An exploratory 52-year hindcast simulation demonstrates the computational efficiency of UCLAKE for multi-decadal studies of trends in lake temperature that vary with depth. A supplementary application of UCLAKE to Windermere, in the English Lake District, demonstrates its performance for larger and deeper lakes.