Computación Bioinspirada

Dr. Edward Hinojosa Cárdenas
ehinojosa@unsa.edu.pe

Algoritmos de Hormigas - Introducción

- A primera vista, las actividades de los insectos no parecen ser una fuente obvia de inspiración para los algoritmos de computación naturales. Sin embargo, en una inspección más cercana, se hace evidente que muchos insectos son capaces de comportamientos extremadamente complejos.

Algoritmos de Hormigas - Introducción

- Pueden procesar una multitud de entradas sensoriales, modular su comportamiento en función de estos estímulos y tomar decisiones sobre la base de una gran cantidad de información ambiental.

- Sin embargo, la complejidad de los insectos individuales no es suficiente para explicar la complejidad que muchas sociedades de insectos pueden alcanzar.

Algoritmos de Hormigas - Introducción

- Aunque sólo el 2% de todas las especies de insectos son sociales, estas especies han tenido un éxito notable en ganarse la vida en su entorno y representan más del 50% de la biomasa total de insectos a nivel mundial.

Algoritmos de Hormigas - Introducción

- Esto sugiere que la naturaleza social de estas especies podría estar contribuyendo a su éxito relativo en la colonización del mundo natural.

Algoritmos de Hormigas - Introducción

- En los insectos sociales se observan tres mecanismos primarios de comunicación:

i. Comunicación indirecta (Estigmergia),

ii. La comunicación directa de los individuos, cuando las acciones de un individuo influyen en las de otro, y

iii. Comunicación directa (no física) entre individuos.

Taxonomía de los Algoritmos de Hormigas

- Los algoritmos de hormigas constituyen una familia de algoritmos de optimización y agrupamiento basados en la población que se basan metafóricamente en las actividades de las hormigas sociales.

- Muchas especies de hormigas sociales viven en colonias.

Taxonomía de los Algoritmos de Hormigas

- A pesar del alto grado de organización de estas colonias, no existe una estructura jerárquica abierta de arriba hacia abajo.

- Cada insecto individual sigue un conjunto de reglas bastante limitado, por lo general sólo con una conciencia local de su entorno.

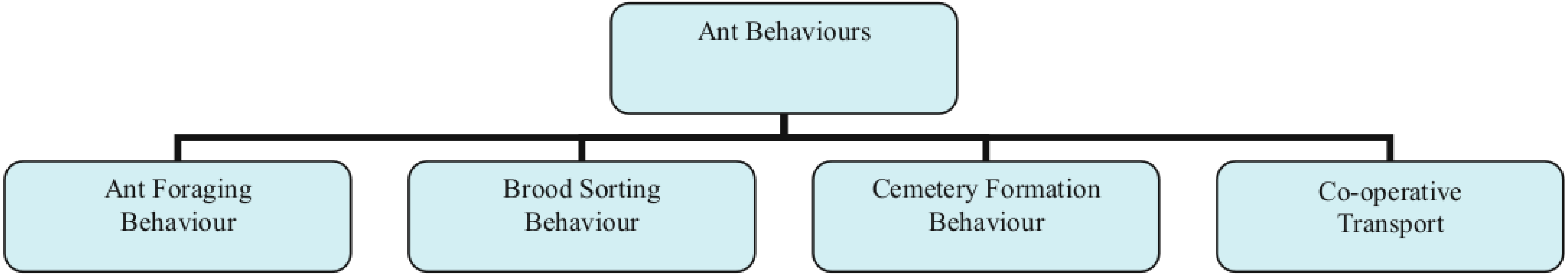
Taxonomía de los Algoritmos de Hormigas

- A pesar de ello, la interacción de las actividades de estos individuos da lugar a una compleja estructura emergente y auto-organizada y proporciona a la colonia la capacidad de adaptarse a los cambios en su entorno.

- Los algoritmos de hormiga enfatizan la importancia de la comunicación (o aprendizaje distribuido) entre los individuos de una población al permitir que la población se adapte con éxito a lo largo del tiempo.

Taxonomía de los Algoritmos de Hormigas

- En general, los algoritmos de las hormigas se derivan de cuatro metáforas del comportamiento de las hormigas:



Taxonomy of ant colony algorithms

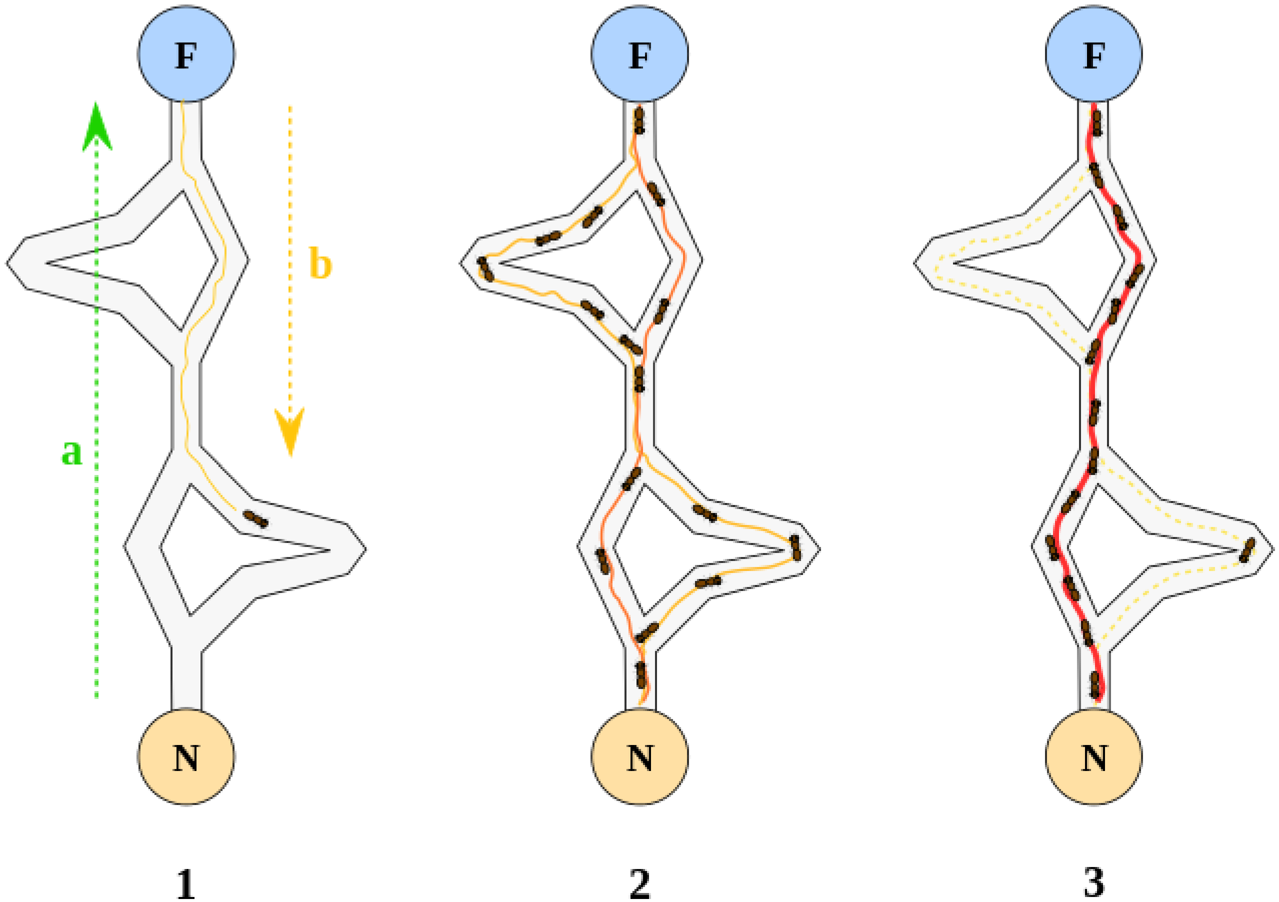
Taxonomía de los Algoritmos de Hormigas

- El primero, la búsqueda de alimento, inspira algoritmos de optimización. Lo veremos en el curso.

- Los siguientes, clasificación de cría, la formación de cementerios, transporte coorperativo, no los veremos en el curso.

Algoritmos de Hormigas

- En general, las hormigas siguen el menor camino entre el hormiguero y su fuente de alimento.



Algoritmos de Hormigas

- Mientras caminan, las hormigas depositan en el suelo una sustancia química llamada feromona.

- Con la presencia de feromona, las hormigas poseen cierta tendencia a seguir el camino marcado con la sustancia.

- Esa tendencia está basada en la cantidad de feromona en cada camino: si mayor es la concentración, mayor la probabilidad de que ese camino sea seguido.

Algoritmos de Hormigas

- Inicialmente, como no existe feromona en los caminos, las hormigas caminan aleatoriamente en busca de alimento.

- Las hormigas que escogen (por casualidad) el menor camino, vuelven por el mismo.

- Como la ida y la vuelta son más rápidas, existe una poco más de feromona en ese camino.

Algoritmos de Hormigas

- Como ese camino posee más feromona, otras hormigas tienden a seguirlo.

- Al pasar del tiempo, los caminos más cortos reciben una carga mayor de feromona, siendo escogidos por las hormigas.

- La feronoma también se evapora con el tiempo.

- De esa forma, los caminos menos visitados pierden feronoma, llevando las hormigas a los caminos escogidos por la demás.

Algoritmos de Hormigas

- Los algoritmos de colonias de hormigas:
  - Son aplicados a problema representado por un grafo G(V, A).
  - Son algoritmos de construcción, a cada iteración, cada hormiga, individualmente, construye una solución para el problema.
  - Son algoritmos que, a cada iteración, trabajan con una población de hormigas (y, por tanto, con una población de soluciones).

Algoritmos de Hormigas

- En la construcción de la solución, la hormiga debe considerar:
  - Información heurística (fija), que indica la conveniencia, para la obtención de la solución del problema, de seleccionar determinado camino.
  - La cantidad de feromona (variable), que indica la probabilidad de seleccionar un determinado camino.

Algoritmos de Hormigas

- En el algoritmo de colonia de hormigas:
  - Cada hormiga posee un estado inicial, del cual parte.
  - La hormigas se comunican apenas mediante la feromona depositada en el camino.
  - Cada hormiga construye una secuencia de estados, incluyendo un nodo por vez.
  - La hormiga tiene una memoria L que le permite reconstruir el camino recorrido hasta el momento.
  - Cuando está en un estado cualquiera, la hormiga puede moverse para cualquier nodo vecino factible.
  - La hormiga posee condiciones de parada, que está asociadas a la obtención de una solución factible para el problema.

Algoritmos de Hormigas

- A la hora de escoger cual camino seguir, la hormiga lleva en consideración dos informaciones:
  - La información heurística, que mide el impacto en la función objetivo de tomar dicha arista.
  - La información que brinda la feromona artificial, que mide cuan deseable es dicha arista.

Algoritmos de Hormigas

- La hormiga puede actualizar la feromona depositada en una arista (r, s):
  - Cuando pasa por la arista.
  - Después que termina su camino, si (r, s), pertenece a la solución obtenida.
- Generalmente, la cantidad de feromona depositada es proporcional a la calidad de la solución obtenida.

- La feromona tiene una tasa de evaporación.

Algoritmos de Hormigas

1. Mientras el criterio de parada no se cumpla

    1.1 Para cada una de las hormigas (en paralelo)

        1.1.1 Escoger una solución. Opcionalmente, utilizar, paso a paso, la feromona de la arista.

        1.1.2 Para cada solución generada, actualizar la feromona del camino recorrido.

    1.2 Evaporar cierta cantidad de feromona en las aristas.

    1.3 Eventualmente, ejecutar acciones *daemon*.

Algoritmos de Hormigas

- Acciones (sin contrapartida natural) que adicionan una perspectiva global a la visión local de las hormigas, cuando esta no consiguen obtener buenas soluciones.
- Ejemplo:
  - Acción de diversificación: evaporar feromona en algunos nodos específicos (que hacen parte de buenas soluciones).
  - Acciones de intensificación:
    - Aplicar un algoritmo de búsqueda local a cada solución obtenida por una hormiga.
    - Aplicar feromona en algunas de las aristas seleccionadas.

Ant System (AS)

- Creado en 1991 por Dorigo, Maniezzo y Colorni; fue el primer algoritmo ACH propuesto en la literatura.

- Inicialmente, se presentaron tres variantes distintas: ant-density, ant-quantity y ant-cycle, que se diferenciaban en la manera en que actualizaban los rastros de feromona.

Ant System (AS)

- En los dos primeros, las hormigas depositaban feromona mientras que construían sus soluciones (esto es, aplicaban una actualización on-line paso a paso de feromona).

- Mientras, que en ant-cycle, la actualización de feromona se llevaba a cabo una vez que todas las hormigas habían construido una solución y la cantidad de feromona depositada por cada hormiga era establecida en función de la calidad de la solución.

- Esta última variante era la que obtenía mejores resultados y es por lo tanto la que se conoce como AS en la literatura.

AS – Construcción de la Solución

- En AS, m hormigas concurrentemente construyen una solución (en este caso un tour para el problema TSP).

- Inicialmente, las hormigas son ubicadas en ciudades elegidas aleatoriamente – en el ejemplo consideraremos solo un punto de partida.

AS – Construcción de la Solución

- En cada paso de la construcción, la hormiga k aplica una regla de elección de acción probabilística (llamada regla proporcional aleatoria) para decidir que nodo (ciudad) visitar a continuación. En particular, la probabilidad con la cual la hormiga k, estando en la ciudad i, elige una ciudad j para ir es:

$$p_{ij}^{k} = \begin{cases} \dfrac{[\tau_{ij}]^{\alpha}[\eta_{ij}]^{\beta}}{\sum_{l \in \mathcal{N}_i^k} [\tau_{il}]^{\alpha}[\eta_{il}]^{\beta}} & \text{si } j \in \mathcal{N}_i^k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

AS – Construcción de la Solución

$$p_{ij}^k = \begin{cases} \dfrac{[\tau_{ij}]^\alpha [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{l \in \mathcal{N}_i^k} [\tau_{il}]^\alpha [\eta_{il}]^\beta} & \text{si } j \in \mathcal{N}_i^k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Donde:
  - $\eta_{ij} = 1/d_{ij}$ es un valor heurístico disponible a priori.
  - Α, β son dos parámetros que establecen la importancia relativa de los rastros de feromona y de la información heurística respectivamente.
  - $\mathcal{N}_i^k$ es el vecindario alcanzable por la hormiga k cuando se encuentra en el nodo i (esto es, el conjunto de ciudades que la hormiga k aún no ha visitado).

AS – Construcción de la Solución

- Cada hormiga k mantiene una memoria M_k la cual contiene las ciudades visitadas, y en el orden en que fueron visitadas. Esta memoria se usa para determinar la vecindad factible en cada paso de la construcción.

- Respecto a los parámetros α y β, su función es la siguiente: si α = 0, aquellos nodos con una preferencia heurística mejor tienen una mayor probabilidad de ser escogidos, haciendo el algoritmo muy similar a un algoritmo voraz probabilístico clásico (con múltiples puntos de partida en caso de que las hormigas estén situadas en nodos distintos al comienzo de cada iteración).

AS – Construcción de la Solución

- Sin embargo, si $\beta = 0$, sólo se tienen en cuenta los rastros de feromona para guiar el proceso constructivo, lo que puede causar un rápido estancamiento, esto es, una situación en la que los rastros de feromona asociados a una solución son ligeramente superiores que el resto, provocando por tanto que las hormigas siempre construyan las mismas soluciones, normalmente óptimos locales.

- Por tanto es necesario establecer un balance adecuado entre la información heurística y los rastros de feromona.

AS – Actualización de los rastros de feromona

- El depósito de feromona se realiza una vez que todas las hormigas han acabado de construir sus soluciones.

- Primero, los rastros de feromona asociados a cada arco se evaporan reduciendo todos los rastros de feromona en un factor constante:

$$\tau_{ij}(t+1) = \rho\tau_{ij}(t)$$

AS – Actualización de los Rastros de feromona

- donde $0 < \rho \leq 1$ es la tasa de evaporación. El parámetro ρ es usado para evitar una acumulación ilimitada de los rastros de feromona y permite al algoritmo “olvidar” malas decisiones tomadas previamente.

- De hecho, si un arco no es elegido por las hormigas su valor de feromona asociado decrece exponencialmente con el número de iteraciones.

AS – Actualización de los Rastros de feromona

- Después de la evaporación, todas las hormigas depositan feromona sobre los arcos que han elegido en su tour:

$$\tau_{ij}(t+1) = \rho\tau_{ij}(t) + \Delta\tau_{ij}$$

- Donde $\Delta\tau_{ij}^{k}$ es la cantidad de feromona que la hormiga k deposita en los arcos que ha visitado. Se define como:

AS – Actualización de los Rastros de feromona

$$\Delta\tau_{ij}^{k} = \begin{cases} \dfrac{Q}{L_k} & \text{si la hormiga } k \text{ usó el arco } (i,j) \text{ en su tour} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- donde Q es una constante y L_k es la longitud del tour construido por la k-ésima hormiga.

- Esto significa, que cuanto mejor sea el tour construido por la hormiga, mayor es la cantidad de feromona que reciben los arcos de ese tour.

AS – Ejemplo

$$p_{ij} = \begin{cases} \dfrac{[\tau_{ij}]^\alpha [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{h \in \Omega} [\tau_{ih}]^\alpha [\eta_{ih}]^\beta} & \text{if } j \in \Omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1}$$

$$\text{where } \eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$$

where

τ_{ij}	intensity of pheromone trail between cities i and j
α	parameter to regulate the influence of τ_{ij}
η_{ij}	visibility of city j from city i
β	parameter to regulate the influence of η_{ij}
Ω	set of cities, that have not been visited yet
d_{ij}	distance between cities i and j

AS – Ejemplo

$$\tau_{ij}(t+1) = \rho\tau_{ij}(t) + \Delta\tau_{ij} \tag{2}$$

$$\text{where } \Delta\tau_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \Delta\tau_{ij}^{k} \text{ and } \Delta\tau_{ij}^{k} = \begin{cases} \frac{Q}{L_k} & \text{if ant } k \text{ travels on edge } (i,j) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

where

t	iteration counter
$\rho \in [0,1]$	parameter to regulate the reduction of τ_{ij}
$\Delta\tau_{ij}$	total increase of trail level on edge (i,j)
m	number of ants
$\Delta\tau_{ij}^{k}$	increase of trail level on edge (i,j) caused by ant k
Q	quantity of pheromone laid by an ant per tour
L_k	tour length of ant k

AS – Ejemplo

```
Initialize
For t = 1 to number of iterations do
    For k = 1 to m do
        Repeat until ant k has completed a tour
            Select the city j to be visited next
            with probability p_ij given by equation (1)
        Calculate the length L_k of the tour generated by ant k
    Update the trail levels τ_ij on all edges according to equation (2)
End
```

Ant system algorithm in PseudoCode

AS – Ejemplo

- Consideremos las siguientes distancias entre ciudades. Consideremos como ciudad inicial D. Tenemos que recorrer todas las ciudades con el menor costo (recorrer la menor distancia).

Matriz Distancia:

	A	B	C	D	E
A	0.0	12.0	3.0	23.0	1.0
B	12.0	0.0	9.0	18.0	3.0
C	3.0	9.0	0.0	89.0	56.0
D	23.0	18.0	89.0	0.0	87.0
E	1.0	3.0	56.0	87.0	0.0

AS – Ejemplo

- Valores Iniciales:
  - $\rho = 0.99$
  - $\alpha = 1$
  - $\beta = 1$
  - $Q = 1$
  - Feromona Inicial = 0.1
  - Cantidad de Hormigas: 3
  - Cantidad de Iteraciones: 100 (Al final la mayoría o todas las hormigas deben seguir el mismo camino).

AS – Ejemplo

- Calculamos la matriz de Visibilidad:

```
Iteracion 1
Matriz Distancia:
```

	A	B	C	D	E
A	0.0	12.0	3.0	23.0	1.0
B	12.0	0.0	9.0	18.0	3.0
C	3.0	9.0	0.0	89.0	56.0
D	23.0	18.0	89.0	0.0	87.0
E	1.0	3.0	56.0	87.0	0.0

```
Matriz Visibilidad:
```

	A	B	C	D	E
A	0.0	0.083	0.333	0.043	1.0
B	0.083	0.0	0.111	0.056	0.333
C	0.333	0.111	0.0	0.011	0.018
D	0.043	0.056	0.011	0.0	0.011
E	1.0	0.333	0.018	0.011	0.0

$$p_{ij} = \begin{cases} \dfrac{[\tau_{ij}]^\alpha [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{h \in \Omega} [\tau_{ih}]^\alpha [\eta_{ih}]^\beta} & \text{if } j \in \Omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{where } \eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$$

AS – Ejemplo

- Definimos la feromona inicial:

Matriz Feromona:

	A	B	C	D	E
A	0.0	0.1	0.1	0.1	0.1
B	0.1	0.0	0.1	0.1	0.1
C	0.1	0.1	0.0	0.1	0.1
D	0.1	0.1	0.1	0.0	0.1
E	0.1	0.1	0.1	0.1	0.0

$$p_{ij} = \begin{cases} \dfrac{[\tau_{ij}]^\alpha [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{h \in \Omega} [\tau_{ih}]^\alpha [\eta_{ih}]^\beta} & \text{if } j \in \Omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{where } \eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$$

AS – Ejemplo

- Definimos el camino para la Hormiga 1 (2da Ciudad):

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}]^\alpha [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{h \in \Omega} [\tau_{ih}]^\alpha [\eta_{ih}]^\beta} & \text{if } j \in \Omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{where } \eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$$

```
Hormiga 1
Ciudad Inicial: D
D-A: t = 0.1 n = 0.043478260869565216 t*n = 0.0043478260869565522
D-B: t = 0.1 n = 0.0555555555555555 t*n = 0.005555555555555556
D-C: t = 0.1 n = 0.011235955056179775 t*n = 0.0011235955056179776
D-E: t = 0.1 n = 0.011494252873563218 t*n = 0.0011494252873563218
Suma: 0.012176402435486377
D-A: prob = 0.35706984144063825
D-B: prob = 0.4562559085074822
D-C: prob = 0.09227647587791775
D-E: prob = 0.09439777417396182
Numero aleatorio para la Probabilidad: 0.08213968313087117
Ciudad Siguiente: A
```

AS – Ejemplo

- Definimos el camino para la Hormiga 1 (3ra Ciudad):

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}]^\alpha [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{h\in\Omega} [\tau_{ih}]^\alpha [\eta_{ih}]^\beta} & \text{if } j \in \Omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{where } \eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$$

```
A-B: t = 0.1 n = 0.08333333333333333 t*n = 0.008333333333333333
A-C: t = 0.1 n = 0.3333333333333333 t*n = 0.03333333333333333
A-E: t = 0.1 n = 1.0 t*n = 0.1
Suma: 0.14166666666666666
A-B: prob = 0.05882352941176705
A-C: prob = 0.2352941176470582
A-E: prob = 0.7058823529411765
Numero aleatorio para la Probabilidad: 0.2899458522174332
Ciudad Siguiente: C
```

AS – Ejemplo

- Definimos el camino para la Hormiga 1 (4ta y 5ta Ciudad):

$$p_{ij} = \begin{cases} \dfrac{[\tau_{ij}]^{\alpha}[\eta_{ij}]^{\beta}}{\sum_{h \in \Omega} [\tau_{ih}]^{\alpha}[\eta_{ih}]^{\beta}} & \text{if } j \in \Omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{where } \eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$$

```
C-B: t = 0.1 n = 0.1111111111111111 t*n = 0.011111111111111112
C-E: t = 0.1 n = 0.017857142857142856 t*n = 0.0017857142857142857
Suma: 0.012896825396825398
C-B: prob = 0.8615384615384615
C-E: prob = 0.13846153846153844
Numero aleatorio para la Probabilidad: 0.4536494691725761
Ciudad Siguiente: B

B-E: t = 0.1 n = 0.3333333333333333 t*n = 0.03333333333333333
Suma: 0.03333333333333333
B-E: prob = 1.0
Numero aleatorio para la Probabilidad: 0.6980165006196684
Ciudad Siguiente: E

Hormiga 1: D-A-C-B-E
```

AS – Ejemplo

- Definimos el camino para la Hormiga 2 (2da Ciudad):

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}]^{\alpha}[\eta_{ij}]^{\beta}}{\sum_{h\in\Omega}[\tau_{ih}]^{\alpha}[\eta_{ih}]^{\beta}} & \text{if } j \in \Omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{where } \eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$$

```
Hormiga 2
Ciudad Inicial: D
D-A: t = 0.1 n = 0.043478260869565216 t*n = 0.0043478260869565522
D-B: t = 0.1 n = 0.05555555555555555 t*n = 0.0055555555555555556
D-C: t = 0.1 n = 0.011235955056179775 t*n = 0.0011235955056179776
D-E: t = 0.1 n = 0.011494252873563218 t*n = 0.0011494252873563218
Suma: 0.012176402435486377
D-A: prob = 0.35706984144063825
D-B: prob = 0.4562559085074822
D-C: prob = 0.09227647587791775
D-E: prob = 0.09439777417396182
Numero aleatorio para la Probabilidad: 0.17875713250506475
Ciudad Siguiente: A
```

AS – Ejemplo

- Definimos el camino para la Hormiga 2 (3ra Ciudad):

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}]^{\alpha}[\eta_{ij}]^{\beta}}{\sum_{h\in\Omega}[\tau_{ih}]^{\alpha}[\eta_{ih}]^{\beta}} & \text{if } j \in \Omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{where } \eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$$

```
A-B: t = 0.1 n = 0.08333333333333333 t*n = 0.008333333333333333
A-C: t = 0.1 n = 0.3333333333333333 t*n = 0.03333333333333333
A-E: t = 0.1 n = 1.0 t*n = 0.1
Suma: 0.14166666666666666
A-B: prob = 0.05882352941176705
A-C: prob = 0.2352941176470582
A-E: prob = 0.705882352941176S
Numero aleatorio para la Probabilidad: 0.2202982699292205Z
Ciudad Siguiente: C
```

AS – Ejemplo

- Definimos el camino para la Hormiga 2 (4ta y 5ta Ciudad):

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}]^{\alpha}[\eta_{ij}]^{\beta}}{\sum_{h \in \Omega} [\tau_{ih}]^{\alpha}[\eta_{ih}]^{\beta}} & \text{if } j \in \Omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{where } \eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$$

```
C-B: t = 0.1 n = 0.1111111111111111 t*n = 0.01111111111111112
C-E: t = 0.1 n = 0.017857142857142856 t*n = 0.0017857142857142857
Suma: 0.012896825396825398
C-B: prob = 0.8615384615384615
C-E: prob = 0.13846153846153844
Numero aleatorio para la Probabilidad: 0.960654249448409З
Ciudad Siguiente: E

E-B: t = 0.1 n = 0.3333333333333333 t*n = 0.03333333333333333
Suma: 0.03333333333333333
E-B: prob = 1.0
Numero aleatorio para la Probabilidad: 0.528435880534217Д
Ciudad Siguiente: B

Hormiga 2: D-A-C-E-B
```

AS – Ejemplo

- Definimos el camino para la Hormiga 3 (2da Ciudad):

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}]^{\alpha}[\eta_{ij}]^{\beta}}{\sum_{h\in\Omega}[\tau_{ih}]^{\alpha}[\eta_{ih}]^{\beta}} & \text{if } j \in \Omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{where } \eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$$

```
Hormiga 3
Ciudad Inicial: D
D-A: t = 0.1 n = 0.043478260869565216 t*n = 0.004347826086956522
D-B: t = 0.1 n = 0.05555555555555555 t*n = 0.005555555555555556
D-C: t = 0.1 n = 0.011235955056179775 t*n = 0.0011235955056179776
D-E: t = 0.1 n = 0.011494252873563218 t*n = 0.0011494252873563218
Suma: 0.012176402435486377
D-A: prob = 0.35706984144063825
D-B: prob = 0.4562559085074822
D-C: prob = 0.09227647587791775
D-E: prob = 0.09439777417396182
Numero aleatorio para la Probabilidad: 0.6325429719052083
Ciudad Siguiente: B
```

AS – Ejemplo

- Definimos el camino para la Hormiga 3 (3ra Ciudad):

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}]^\alpha [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{h \in \Omega} [\tau_{ih}]^\alpha [\eta_{ih}]^\beta} & \text{if } j \in \Omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{where } \eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$$

```
B-A: t = 0.1 n = 0.08333333333333333 t*n = 0.008333333333333333
B-C: t = 0.1 n = 0.1111111111111111 t*n = 0.01111111111111112
B-E: t = 0.1 n = 0.3333333333333333 t*n = 0.03333333333333333
Suma: 0.05277777777777778
B-A: prob = 0.15789473684210525
B-C: prob = 0.2105263157894737
B-E: prob = 0.631578947368421
Numero aleatorio para la Probabilidad: 0.3045536848647048
Ciudad Siguiente: C
```

AS – Ejemplo

- Definimos el camino para la Hormiga 3 (4ta y 5ta Ciudad):

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}]^\alpha [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{h \in \Omega} [\tau_{ih}]^\alpha [\eta_{ih}]^\beta} & \text{if } j \in \Omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{where } \eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$$

```
C-A: t = 0.1 n = 0.3333333333333333 t*n = 0.03333333333333333
C-E: t = 0.1 n = 0.017857142857142856 t*n = 0.0017857142857142857
Suma: 0.03511904761904762
C-A: prob = 0.9491525423728814
C-E: prob = 0.05084745762711864
Numero aleatorio para la Probabilidad: 0.42560431707951685
Ciudad Siguiente: A

A-E: t = 0.1 n = 1.0 t*n = 0.1
Suma: 0.1
A-E: prob = 1.0
Numero aleatorio para la Probabilidad: 0.8611797118577005
Ciudad Siguiente: E

Hormiga 3: D-B-C-A-E
```

AS – Ejemplo

- Definimos el costo para cada camino de cada hormiga:

$$\tau_{ij}(t+1) = \rho\tau_{ij}(t) + \Delta\tau_{ij}$$

$$\text{where } \Delta\tau_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \Delta\tau_{ij}^{k} \text{ and } \Delta\tau_{ij}^{k} = \begin{cases} \frac{Q}{L_k} & \text{if ant } k \text{ travels on edge } (i,j) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

```
Hormiga 3: D-B-C-A-E

Hormiga 1 (D-A-C-B-E) - Costo: 38.0
Hormiga 2 (D-A-C-E-B) - Costo: 85.0
Hormiga 3 (D-B-C-A-E) - Costo: 31.0
----------
Mejor Hormiga Global: D-B-C-A-E - Costo: 31.0
----------
```

AS – Ejemplo

- Definimos la feromona para cada camino:

$$\Delta\tau_{ij}^{k} = \begin{cases} \frac{Q}{L_k} & \text{si la hormiga } k \text{ usó el arco } (i,j) \text{ en su tour} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

```
A-B: Feromona = 0.099 + 0.0 + 0.0 + 0.0 = 0.099
A-C: Feromona = 0.099 + 0.02631578947368421 + 0.011764705882352941 + 0.03225806451612903 = 0.1693385598721662
A-D: Feromona = 0.099 + 0.02631578947368421 + 0.011764705882352941 + 0.0 = 0.13708049535603717
A-E: Feromona = 0.099 + 0.0 + 0.0 + 0.03225806451612903 = 0.13125806451612904
B-A: Feromona = 0.099 + 0.0 + 0.0 + 0.0 = 0.099
B-C: Feromona = 0.099 + 0.02631578947368421 + 0.0 + 0.03225806451612903 = 0.15757385398981325
B-D: Feromona = 0.099 + 0.0 + 0.0 + 0.03225806451612903 = 0.13125806451612904
B-E: Feromona = 0.099 + 0.02631578947368421 + 0.011764705882352941 + 0.0 = 0.13708049535603717
```

AS – Ejemplo

- Definimos la feromona para cada camino:

$$\Delta\tau_{ij}^{k} = \begin{cases} \frac{Q}{L_k} & \text{si la hormiga } k \text{ usó el arco } (i,j) \text{ en su tour} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

D-A: Feromona = 0.099 + 0.02631578947368421 + 0.011764705882352941 + 0.0 = 0.13708049535603717

D-B: Feromona = 0.099 + 0.0 + 0.0 + 0.03225806451612903 = 0.13125806451612904

D-C: Feromona = 0.099 + 0.0 + 0.0 + 0.0 = 0.099

D-E: Feromona = 0.099 + 0.0 + 0.0 + 0.0 = 0.099

E-A: Feromona = 0.099 + 0.0 + 0.0 + 0.03225806451612903 = 0.13125806451612904

E-B: Feromona = 0.099 + 0.02631578947368421 + 0.011764705882352941 + 0.0 = 0.13708049535603717

E-C: Feromona = 0.099 + 0.0 + 0.011764705882352941 + 0.0 = 0.11076470588235295

E-D: Feromona = 0.099 + 0.0 + 0.0 + 0.0 = 0.099

AS – Ejemplo

- Después de 100 iteraciones mostramos el mejor camino global. La mayoría o todas las hormigas de la última iteración deben seguir ese camino.

```
Hormiga 1 (D-B-E-A-C) - Costo: 25.0
Hormiga 2 (D-B-E-A-C) - Costo: 25.0
Hormiga 3 (D-B-E-A-C) - Costo: 25.0
----------
Mejor Hormiga Global: D-B-E-A-C - Costo: 25.0
----------
```

```
Iteraciones Totales: 100
----------
Mejor Hormiga Global: D-B-E-A-C - Costo: 25.0
----------
```

Elitist Ant System – Sistema de Hormigas Elitista (AS_e)

- Primera mejora del AS propuesta en Dorigo (1992)

- Idea básica: proporcionar un peso adicional que refuercen los arcos que pertenecen al mejor camino encontrados desde el principio de la búsqueda, L^{mejor_global} -> Actualización de la feromonas.

- Valor típico para e=n (donde n es la cantidad de nodos).

Elitist Ant System – Sistema de Hormigas Elitista (AS_e)

$$\tau_{rs}(t) = (1-\rho)\cdot\tau_{rs}(t-1) + \sum_{k=1}^{m}\Delta\tau_{rs}^{k} + e\cdot\Delta\tau_{rs}^{mejor\_global}$$

donde $\Delta\tau_{rs}^{mejor\_global} = \begin{cases} 1/C^{mejor\_global} & \text{si arco } (i,j) \in L^{mejor\_global} \\ 0 & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$

AS_e - Ejemplo

- Consideremos las siguientes distancias entre ciudades. Consideremos como ciudad inicial D. Tenemos que recorrer todas las ciudades con el menor costo (recorrer la menor distancia).

Matriz Distancia:

	A	B	C	D	E
A	0.0	12.0	3.0	23.0	1.0
B	12.0	0.0	9.0	18.0	3.0
C	3.0	9.0	0.0	89.0	56.0
D	23.0	18.0	89.0	0.0	87.0
E	1.0	3.0	56.0	87.0	0.0

AS_e - Ejemplo

- Valores Iniciales:
  - $\rho = 0.1$
  - $\alpha = 1$
  - $\beta = 1$
  - $e = 5$
  - $Q = 1$
  - Feromona Inicial = 10.0
  - Cantidad de Hormigas: 3
  - Cantidad de Iteraciones: 50

AS_e – Ejemplo

- Calculamos la matriz de Visibilidad:

Matriz Distancia:

	A	B	C	D	E
A	0.0	12.0	3.0	23.0	1.0
B	12.0	0.0	9.0	18.0	3.0
C	3.0	9.0	0.0	89.0	56.0
D	23.0	18.0	89.0	0.0	87.0
E	1.0	3.0	56.0	87.0	0.0

Matriz Visibilidad:

	A	B	C	D	E
A	0.0	0.083	0.333	0.043	1.0
B	0.083	0.0	0.111	0.056	0.333
C	0.333	0.111	0.0	0.011	0.018
D	0.043	0.056	0.011	0.0	0.011
E	1.0	0.333	0.018	0.011	0.0

$$p_{ij} = \begin{cases} \dfrac{[\tau_{ij}]^\alpha [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{h \in \Omega} [\tau_{ih}]^\alpha [\eta_{ih}]^\beta} & \text{if } j \in \Omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{where } \eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$$

AS_e – Ejemplo

- Definimos la feromona inicial:

Matriz Feromona:

	A	B	C	D	E
A	0.0	10.0	10.0	10.0	10.0
B	10.0	0.0	10.0	10.0	10.0
C	10.0	10.0	0.0	10.0	10.0
D	10.0	10.0	10.0	0.0	10.0
E	10.0	10.0	10.0	10.0	0.0

$$p_{ij} = \begin{cases} \dfrac{[\tau_{ij}]^\alpha [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{h \in \Omega} [\tau_{ih}]^\alpha [\eta_{ih}]^\beta} & \text{if } j \in \Omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{where } \eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$$

AS_e – Ejemplo

- Definimos el camino para la Hormiga 1 (2da Ciudad):

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}]^\alpha [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{h \in \Omega} [\tau_{ih}]^\alpha [\eta_{ih}]^\beta} & \text{if } j \in \Omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{where } \eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$$

```
Hormiga 1
Ciudad Inicial: D
D-A: t = 10.0 n = 0.043478260869565216 t*n = 0.43478260869565216
D-B: t = 10.0 n = 0.05555555555555555 t*n = 0.5555555555555556
D-C: t = 10.0 n = 0.011235955056179775 t*n = 0.11235955056179775
D-E: t = 10.0 n = 0.011494252873563218 t*n = 0.11494252873563218
Suma: 1.2176402435486378
D-A: prob = 0.3570698414406382
D-B: prob = 0.45625590850748216
D-C: prob = 0.09227647587791774
D-E: prob = 0.09439777417396182
Numero aleatorio para la Probabilidad: 0.10294352514814276
Ciudad Siguiente: A
```

AS_e – Ejemplo

- Definimos el camino para la Hormiga 1 (3ra Ciudad):

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}]^\alpha [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{h \in \Omega} [\tau_{ih}]^\alpha [\eta_{ih}]^\beta} & \text{if } j \in \Omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{where } \eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$$

```
A-B: t = 10.0 n = 0.08333333333333333 t*n = 0.8333333333333333
A-C: t = 10.0 n = 0.3333333333333333 t*n = 3.333333333333333
A-E: t = 10.0 n = 1.0 t*n = 10.0
Suma: 14.166666666666666
A-B: prob = 0.058823529411764705
A-C: prob = 0.23529411764705882
A-E: prob = 0.7058823529411765
Numero aleatorio para la Probabilidad: 0.801684448223654
Ciudad Siguiente: E
```

AS_e – Ejemplo

- Definimos el camino para la Hormiga 1 (4ta y 5ta Ciudad):

$$p_{ij} = \begin{cases} \dfrac{[\tau_{ij}]^{\alpha}[\eta_{ij}]^{\beta}}{\sum_{h \in \Omega} [\tau_{ih}]^{\alpha}[\eta_{ih}]^{\beta}} & \text{if } j \in \Omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{where } \eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$$

```
E-B: t = 10.0 n = 0.3333333333333333 t*n = 3.333333333333333
E-C: t = 10.0 n = 0.017857142857142856 t*n = 0.17857142857142855
Suma: 3.511904761904761 4
E-B: prob = 0.9491525423728814
E-C: prob = 0.05084745762711865
Numero aleatorio para la Probabilidad: 0.03841008384877953
Ciudad Siguiente: B

B-C: t = 10.0 n = 0.1111111111111111 t*n = 1.1111111111111112
Suma: 1.1111111111111112
B-C: prob = 1.0
Numero aleatorio para la Probabilidad: 0.2337150000487010 5
Ciudad Siguiente: C

Hormiga 1: D-A-E-B-C
```

AS_e – Ejemplo

- Definimos el camino para la Hormiga 2 (2da Ciudad):

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}]^\alpha [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{h \in \Omega} [\tau_{ih}]^\alpha [\eta_{ih}]^\beta} & \text{if } j \in \Omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{where } \eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$$

```
Hormiga 2
Ciudad Inicial: D
D-A: t = 10.0 n = 0.043478260869565216 t*n = 0.43478260869565216
D-B: t = 10.0 n = 0.05555555555555555 t*n = 0.5555555555555556
D-C: t = 10.0 n = 0.011235955056179775 t*n = 0.11235955056179775
D-E: t = 10.0 n = 0.011494252873563218 t*n = 0.11494252873563218
Suma: 1.2176402435486378
D-A: prob = 0.35706984144063 82
D-B: prob = 0.45625590850748216
D-C: prob = 0.0922764758779177 4
D-E: prob = 0.09439777417396182
Numero aleatorio para la Probabilidad: 0.8115731187225752
Ciudad Siguiente: B
```

AS_e – Ejemplo

- Definimos el camino para la Hormiga 3 (2da Ciudad):

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}]^{\alpha}[\eta_{ij}]^{\beta}}{\sum_{h \in \Omega} [\tau_{ih}]^{\alpha}[\eta_{ih}]^{\beta}} & \text{if } j \in \Omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{where } \eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$$

```
Hormiga 3
Ciudad Inicial: D
D-A: t = 10.0 n = 0.043478260869565216 t*n = 0.43478260869565216
D-B: t = 10.0 n = 0.05555555555555555 t*n = 0.5555555555555556
D-C: t = 10.0 n = 0.011235955056179775 t*n = 0.11235955056179775
D-E: t = 10.0 n = 0.011494252873563218 t*n = 0.11494252873563218
Suma: 1.2176402435486378
D-A: prob = 0.3570698414406382
D-B: prob = 0.4562559085074821б
D-C: prob = 0.09227647587791774
D-E: prob = 0.09439777417396182
Numero aleatorio para la Probabilidad: 0.9717197754685619
Ciudad Siguiente: E
```

AS_e – Ejemplo

- Definimos el camino para la Hormiga 3 (4ta y 5ta Ciudad):

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}]^{\alpha}[\eta_{ij}]^{\beta}}{\sum_{h\in\Omega}[\tau_{ih}]^{\alpha}[\eta_{ih}]^{\beta}} & \text{if } j \in \Omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{where } \eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$$

```
A-B: t = 10.0 n = 0.08333333333333333 t*n = 0.8333333333333333
A-C: t = 10.0 n = 0.3333333333333333 t*n = 3.333333333333333
Suma: 4.166666666666666
A-B: prob = 0.2
A-C: prob = 0.8
Numero aleatorio para la Probabilidad: 0.3242758378938108 7
Ciudad Siguiente: C

C-B: t = 10.0 n = 0.1111111111111111 t*n = 1.1111111111111112
Suma: 1.1111111111111112
C-B: prob = 1.0
Numero aleatorio para la Probabilidad: 0.580627258956884 2
Ciudad Siguiente: B

Hormiga 3: D-E-A-C-B
```

AS_e – Ejemplo

- Definimos el costo para cada camino de cada hormiga:

$$\tau_{rs}(t) = (1-\rho)\cdot\tau_{rs}(t-1) + \sum_{k=1}^{m}\Delta\tau_{rs}^{k} + e\cdot\Delta\tau_{rs}^{mejor\_global}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\Delta\tau_{ij}^{k} \text{ and } \Delta\tau_{ij}^{k} = \begin{cases} \frac{Q}{L_k} & \text{if ant } k \text{ travels on edge } (i,j) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\Delta\tau_{rs}^{mejor\_global} = \begin{cases} 1/C^{mejor\_global} & \text{si arco } (i,j)\in L^{mejor\_global} \\ 0 & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

```
Hormiga 1 (D-A-E-B-C) - Costo: 36.0
Hormiga 2 (D-B-A-C-E) - Costo: 89.0
Hormiga 3 (D-E-A-C-B) - Costo: 100.0
----------
Mejor Hormiga Global: D-A-E-B-C - Costo: 36.0
----------
```

AS_e – Ejemplo

- Definimos la feromona para cada camino:

$$\tau_{rs}(t) = (1-\rho)\cdot\tau_{rs}(t-1) + \sum_{k=1}^{m}\Delta\tau_{rs}^{k} + e\cdot\Delta\tau_{rs}^{mejor\_global}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\Delta\tau_{ij}^{k} \text{ and } \Delta\tau_{ij}^{k} = \begin{cases} \frac{Q}{L_k} & \text{if ant } k \text{ travels on edge } (i,j) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\Delta\tau_{rs}^{mejor\_global} = \begin{cases} 1/C^{mejor\_global} & \text{si arco } (i,j) \in L^{mejor\_global} \\ 0 & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

```
A-B: Feromona = 9.0 + 0.0 + 0.011235955056179775 + 0.0 + 0.0 = 9.01123595505618
A-C: Feromona = 9.0 + 0.0 + 0.011235955056179775 + 0.01 + 0.0 = 9.02123595505618
A-D: Feromona = 9.0 + 0.027777777777777776 + 0.0 + 0.0 + 0.1388888888888889 = 9.166666666666668
A-E: Feromona = 9.0 + 0.027777777777777776 + 0.0 + 0.01 + 0.1388888888888889 = 9.176666666666668
B-A: Feromona = 9.0 + 0.0 + 0.011235955056179775 + 0.0 + 0.0 = 9.01123595505618
B-C: Feromona = 9.0 + 0.027777777777777776 + 0.0 + 0.01 + 0.1388888888888889 = 9.176666666666668
B-D: Feromona = 9.0 + 0.0 + 0.011235955056179775 + 0.0 + 0.0 = 9.01123595505618
```

AS$_e$ – Ejemplo

- Definimos la feromona para cada camino:

$$\tau_{rs}(t) = (1-\rho)\cdot\tau_{rs}(t-1) + \sum_{k=1}^{m} \Delta\tau_{rs}^{k} + e\cdot\Delta\tau_{rs}^{mejor\_global}$$

$$\sum_{k=1}^{m} \Delta\tau_{ij}^{k} \text{ and } \Delta\tau_{ij}^{k} = \begin{cases} \frac{Q}{L_k} & \text{if ant } k \text{ travels on edge } (i,j) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\Delta\tau_{rs}^{mejor\_global} = \begin{cases} 1/C^{mejor\_global} & \text{si arco } (i,j) \in L^{mejor\_global} \\ 0 & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

```
B-E: Feromona = 9.0 + 0.027777777777777776 + 0.0 + 0.0 + 0.1388888888888889 = 9.166666666666668
C-A: Feromona = 9.0 + 0.0 + 0.011235955056179775 + 0.01 + 0.0 = 9.021235955056179
C-B: Feromona = 9.0 + 0.027777777777777776 + 0.0 + 0.01 + 0.1388888888888889 = 9.176666666666668
C-D: Feromona = 9.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 = 9.0
C-E: Feromona = 9.0 + 0.0 + 0.011235955056179775 + 0.0 + 0.0 = 9.01123595505618
D-A: Feromona = 9.0 + 0.027777777777777776 + 0.0 + 0.0 + 0.1388888888888889 = 9.166666666666668
D-B: Feromona = 9.0 + 0.0 + 0.011235955056179775 + 0.0 + 0.0 = 9.01123595505618
```

AS_e – Ejemplo

- Definimos la feromona para cada camino:

$$\tau_{rs}(t) = (1-\rho)\cdot\tau_{rs}(t-1) + \sum_{k=1}^{m} \Delta\tau_{rs}^{k} + e\cdot\Delta\tau_{rs}^{mejor\_global}$$

$$\sum_{k=1}^{m} \Delta\tau_{ij}^{k} \text{ and } \Delta\tau_{ij}^{k} = \begin{cases} \frac{Q}{L_k} & \text{if ant } k \text{ travels on edge } (i,j) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\Delta\tau_{rs}^{mejor\_global} = \begin{cases} 1/C^{mejor\_global} & \text{si arco } (i,j) \in L^{mejor\_global} \\ 0 & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

```
D-C: Feromona = 9.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 = 9.0
D-E: Feromona = 9.0 + 0.0 + 0.0 + 0.01 + 0.0 = 9.01
E-A: Feromona = 9.0 + 0.027777777777777776 + 0.0 + 0.01 + 0.1388888888888889 = 9.176666666666668
E-B: Feromona = 9.0 + 0.027777777777777776 + 0.0 + 0.0 + 0.1388888888888889 = 9.166666666666668
E-C: Feromona = 9.0 + 0.0 + 0.011235955056179775 + 0.0 + 0.0 = 9.01123595505618
E-D: Feromona = 9.0 + 0.0 + 0.0 + 0.01 + 0.0 = 9.01
```

AS_e – Ejemplo

- Después de 50 iteraciones:

Matriz Feromona Final:

	A	B	C	D	E
A	0.0	0.056	3.171	0.078	3.19
B	0.056	0.0	0.093	3.166	3.177
C	3.171	0.093	0.0	0.053	0.057
D	0.078	3.166	0.053	0.0	0.053
E	3.19	3.177	0.057	0.053	0.0

Iteraciones Totales: 50

Mejor Hormiga Global: D-B-E-A-C - Costo: 25.0

El sistema de hormigas basado en rankings (AS_{rank})

- AS_{rank} fue propuesto por Bullnhemiern et al. (1999).

- Idea básica: cada hormiga deposita una cantidad de feromona que disminuye con su ranking. Además, como en AS_e, la hormiga que ha recorrido el mejor camino siempre deposita la mayor cantidad de feromona en cada iteración.

- Las hormigas se clasificación en función de la longitud de los caminos que han construido y la cantidad de feromona que depositan depende de su posición en el ranking.

El sistema de hormigas basado en rankings (AS_{rank})

- En cada iteración solo las w-1 hormigas mejor clasificadas y la hormiga que produjo el mejor camino visitado pueden depositar feromona.

- La cantidad de feromona que depositan estas hormigas se multiplican por el peso max {0, w-r}, si ocupan la posición r en el ranking. La hormiga que produjo el mejor camino visitado obtiene el peso máximo w.

- Valor típico para w=6.

El sistema de hormigas basado en rankings (AS_{rank})

- En cada iteración solo las w-1 hormigas mejor clasificadas y la hormiga que produjo el mejor camino visitado pueden depositar feromona.

- La cantidad de feromona que depositan estas hormigas se multiplican por el peso max {0, w-r}, si ocupan la posición r en el ranking. La hormiga que produjo el mejor camino visitado obtiene el peso máximo w. No se considera la evaporación. En caso dos caminos tengan el mismo valor, el ranking es aleatorio.

- Valor típico para w=6.

El sistema de hormigas basado en rankings (AS$_{rank}$)

$$\tau_{rs}(t) = \tau_{rs}(t-1) + \sum_{r=1}^{w-1} (w - r)\, \Delta\tau_{rs}{}^{r} + w\Delta\tau_{rs}{}^{mejor\_global}$$

donde $\Delta\tau_{rs}{}^{r} = 1/C^{r}$ y $\Delta\tau_{rs}{}^{mejor\_global} = 1/C^{mejor\_global}$

AS_{rank} - Ejemplo

- Consideremos las siguientes distancias entre ciudades. Consideremos como ciudad inicial D. Tenemos que recorrer todas las ciudades con el menor costo (recorrer la menor distancia).

Matriz Distancia:

	A	B	C	D	E
A	0.0	12.0	3.0	23.0	1.0
B	12.0	0.0	9.0	18.0	3.0
C	3.0	9.0	0.0	89.0	56.0
D	23.0	18.0	89.0	0.0	87.0
E	1.0	3.0	56.0	87.0	0.0

AS_{rank} - Ejemplo

- Valores Iniciales:
  - $\alpha = 1$
  - $\beta = 1$
  - $w=6$
  - Feromona Inicial = 10.0
  - Cantidad de Hormigas: 3
  - Cantidad de Iteraciones: 50

AS$_{rank}$ – Ejemplo

- Calculamos la matriz de Visibilidad:

Matriz Distancia:

	A	B	C	D	E
A	0.0	12.0	3.0	23.0	1.0
B	12.0	0.0	9.0	18.0	3.0
C	3.0	9.0	0.0	89.0	56.0
D	23.0	18.0	89.0	0.0	87.0
E	1.0	3.0	56.0	87.0	0.0

Matriz Visibilidad:

	A	B	C	D	E
A	0.0	0.083	0.333	0.043	1.0
B	0.083	0.0	0.111	0.056	0.333
C	0.333	0.111	0.0	0.011	0.018
D	0.043	0.056	0.011	0.0	0.011
E	1.0	0.333	0.018	0.011	0.0

$$p_{ij} = \begin{cases} \dfrac{[\tau_{ij}]^\alpha [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{h \in \Omega} [\tau_{ih}]^\alpha [\eta_{ih}]^\beta} & \text{if } j \in \Omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{where } \eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$$

AS_{rank} – Ejemplo

- Definimos la feromona inicial:

Matriz Feromona:

	A	B	C	D	E
A	0.0	10.0	10.0	10.0	10.0
B	10.0	0.0	10.0	10.0	10.0
C	10.0	10.0	0.0	10.0	10.0
D	10.0	10.0	10.0	0.0	10.0
E	10.0	10.0	10.0	10.0	0.0

$$p_{ij} = \begin{cases} \dfrac{[\tau_{ij}]^{\alpha}[\eta_{ij}]^{\beta}}{\sum_{h \in \Omega} [\tau_{ih}]^{\alpha}[\eta_{ih}]^{\beta}} & \text{if } j \in \Omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{where } \eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$$

AS_{rank} – Ejemplo

- Definimos el camino para la Hormiga 1 (2da Ciudad):

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}]^\alpha [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{h \in \Omega} [\tau_{ih}]^\alpha [\eta_{ih}]^\beta} & \text{if } j \in \Omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{where } \eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$$

```
Hormiga 1
Ciudad Inicial: D
D-A: t = 10.0 n = 0.043478260869565216 t*n = 0.43478260869565216
D-B: t = 10.0 n = 0.05555555555555555 t*n = 0.5555555555555556
D-C: t = 10.0 n = 0.011235955056179775 t*n = 0.11235955056179775
D-E: t = 10.0 n = 0.011494252873563218 t*n = 0.11494252873563218
Suma: 1.2176402435486378
D-A: prob = 0.35706984144066382
D-B: prob = 0.45625590850748216
D-C: prob = 0.09227647587791774
D-E: prob = 0.09439777417396182
Numero aleatorio para la Probabilidad: 0.1609504391199632
Ciudad Siguiente: A
```

AS_{rank} – Ejemplo

- Definimos el camino para la Hormiga 1 (3ra Ciudad):

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}]^{\alpha}[\eta_{ij}]^{\beta}}{\sum_{h \in \Omega} [\tau_{ih}]^{\alpha}[\eta_{ih}]^{\beta}} & \text{if } j \in \Omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{where } \eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$$

```
A-B: t = 10.0 n = 0.08333333333333333 t*n = 0.8333333333333333
A-C: t = 10.0 n = 0.3333333333333333 t*n = 3.333333333333333
A-E: t = 10.0 n = 1.0 t*n = 10.0
Suma: 14.166666666666666
A-B: prob = 0.058823529411764705
A-C: prob = 0.2352941176470588 2
A-E: prob = 0.7058823529411765
Numero aleatorio para la Probabilidad: 0.502263416888227l
Ciudad Siguiente: E
```

AS_{rank} – Ejemplo

- Definimos el camino para la Hormiga 1 (4ta y 5ta Ciudad):

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}]^\alpha [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{h \in \Omega} [\tau_{ih}]^\alpha [\eta_{ih}]^\beta} & \text{if } j \in \Omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{where } \eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$$

```
E-B: t = 10.0 n = 0.3333333333333333 t*n = 3.333333333333333
E-C: t = 10.0 n = 0.017857142857142856 t*n = 0.17857142857142855
Suma: 3.5119047619047614
E-B: prob = 0.9491525423728814
E-C: prob = 0.05084745762711865
Numero aleatorio para la Probabilidad: 0.48950833789490444
Ciudad Siguiente: B

B-C: t = 10.0 n = 0.1111111111111111 t*n = 1.1111111111111112
Suma: 1.1111111111111112
B-C: prob = 1.0
Numero aleatorio para la Probabilidad: 0.5161873511371794
Ciudad Siguiente: C

Hormiga 1: D-A-E-B-C
```

AS_{rank} – Ejemplo

- Definimos el camino para la Hormiga 2 (2da Ciudad):

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}]^\alpha [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{h\in\Omega} [\tau_{ih}]^\alpha [\eta_{ih}]^\beta} & \text{if } j \in \Omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{where } \eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$$

```
Hormiga 2
Ciudad Inicial: D
D-A: t = 10.0 n = 0.043478260869565216 t*n = 0.43478260869565216
D-B: t = 10.0 n = 0.05555555555555555 t*n = 0.5555555555555556
D-C: t = 10.0 n = 0.011235955056179775 t*n = 0.11235955056179775
D-E: t = 10.0 n = 0.011494252873563218 t*n = 0.11494252873563218
Suma: 1.217640243548637 8
D-A: prob = 0.3570698414406382
D-B: prob = 0.4562559085074821 6
D-C: prob = 0.0922764758779177 4
D-E: prob = 0.0943977741739618 2
Numero aleatorio para la Probabilidad: 0.8809076901730281
Ciudad Siguiente: C
```

AS_{rank} – Ejemplo

- Definimos el camino para la Hormiga 3 (2da Ciudad):

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}]^\alpha [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{h \in \Omega} [\tau_{ih}]^\alpha [\eta_{ih}]^\beta} & \text{if } j \in \Omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{where } \eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$$

```
Hormiga 3
Ciudad Inicial: D
D-A: t = 10.0 n = 0.043478260869565216 t*n = 0.43478260869565216
D-B: t = 10.0 n = 0.05555555555555555 t*n = 0.5555555555555556
D-C: t = 10.0 n = 0.011235955056179775 t*n = 0.11235955056179775
D-E: t = 10.0 n = 0.011494252873563218 t*n = 0.11494252873563218
Suma: 1.2176402435486378
D-A: prob = 0.3570698414406382
D-B: prob = 0.45625590850748216
D-C: prob = 0.09227647587791774
D-E: prob = 0.09439777417396182
Numero aleatorio para la Probabilidad: 0.8797483449625245
Ciudad Siguiente: C
```

AS_{rank} – Ejemplo

- Definimos el camino para la Hormiga 3 (4ta y 5ta Ciudad):

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}]^{\alpha}[\eta_{ij}]^{\beta}}{\sum_{h\in\Omega}[\tau_{ih}]^{\alpha}[\eta_{ih}]^{\beta}} & \text{if } j \in \Omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{where } \eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$$

```
A-B: t = 10.0 n = 0.08333333333333333 t*n = 0.8333333333333333
A-E: t = 10.0 n = 1.0 t*n = 10.0
Suma: 10.833333333333334
A-B: prob = 0.07692307692307691
A-E: prob = 0.923076923076923
Numero aleatorio para la Probabilidad: 0.332192244773121
Ciudad Siguiente: E

E-B: t = 10.0 n = 0.3333333333333333 t*n = 3.333333333333333
Suma: 3.333333333333333
E-B: prob = 1.0
Numero aleatorio para la Probabilidad: 0.252865796705485 8
Ciudad Siguiente: B

Hormiga 3: D-C-A-E-B
```

AS_{rank} – Ejemplo

- Definimos el costo y ranking para cada camino de cada hormiga:

$$\tau_{rs}(t) = \tau_{rs}(t-1) + \sum_{r=1}^{w-1} (w - r)\, \Delta\tau_{rs}^{r} + w\Delta\tau_{rs}^{mejor\_global}$$

$$\Delta\tau_{rs}^{r} = 1/C^{r} \text{ y } \Delta\tau_{rs}^{mejor\_global} = 1/C^{mejor\_global}$$

```
Hormiga 1 (D-A-E-B-C) - Costo: 36.0
Hormiga 2 (D-C-B-E-A) - Costo: 102.0
Hormiga 3 (D-C-A-E-B) - Costo: 96.0

Hormiga 1 - Rank(r) = 1
Hormiga 3 - Rank(r) = 2
Hormiga 2 - Rank(r) = 3
-----------
Mejor Hormiga Global: D-A-E-B-C - Costo: 36.0
-----------
```

AS_{rank} – Ejemplo

- Definimos la feromona para cada camino:

$$\tau_{rs}(t) = \tau_{rs}(t-1) + \sum_{r=1}^{w-1} (w - r)\, \Delta\tau_{rs}{}^{r} + w\Delta\tau_{rs}{}^{mejor\_global}$$

$$\Delta\tau_{rs}{}^{r} = 1/C^{r} \text{ y } \Delta\tau_{rs}{}^{mejor\_global} = 1/C^{mejor\_global}$$

```
A-B: Feromona = 10.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 = 10.0
A-C: Feromona = 10.0 + 0.0 + 0.0 + 0.041666666666666664 + 0.0 = 10.041666666666666
A-D: Feromona = 10.0 + 0.1388888888888889 + 0.0 + 0.0 + 0.16666666666666666 = 10.305555555555555
A-E: Feromona = 10.0 + 0.1388888888888889 + 0.029411764705882353 + 0.041666666666666664 + 0.16666666666666666 = 10.376633986928104
B-A: Feromona = 10.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 = 10.0
B-C: Feromona = 10.0 + 0.1388888888888889 + 0.029411764705882353 + 0.0 + 0.16666666666666666 = 10.334967320261438
```

AS_{rank} – Ejemplo

- Definimos la feromona para cada camino:

$$\tau_{rs}(t) = \tau_{rs}(t-1) + \sum_{r=1}^{w-1} (w - r)\, \Delta\tau_{rs}^{\ r} + w\Delta\tau_{rs}^{\ mejor\_global}$$

$$\Delta\tau_{rs}^{\ r} = 1/C^{r} \text{ y } \Delta\tau_{rs}^{\ mejor\_global} = 1/C^{mejor\_global}$$

B-D: Feromona = 10.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 = 10.0

B-E: Feromona = 10.0 + 0.1388888888888889 + 0.029411764705882353 + 0.041666666666666664 + 0.16666666666666666 = 10.376633986928104

C-A: Feromona = 10.0 + 0.0 + 0.0 + 0.041666666666666664 + 0.0 = 10.041666666666666

C-B: Feromona = 10.0 + 0.1388888888888889 + 0.029411764705882353 + 0.0 + 0.16666666666666666 = 10.334967320261438

C-D: Feromona = 10.0 + 0.0 + 0.029411764705882353 + 0.041666666666666664 + 0.0 = 10.071078431372548

C-E: Feromona = 10.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 = 10.0

AS_{rank} – Ejemplo

- Definimos la feromona para cada camino:

$$\tau_{rs}(t) = \tau_{rs}(t-1) + \sum_{r=1}^{w-1}(w - r)\,\Delta\tau_{rs}^{\ r} + w\Delta\tau_{rs}^{\ mejor\_global}$$

$$\Delta\tau_{rs}^{\ r} = 1/C^r \text{ y } \Delta\tau_{rs}^{\ mejor\_global} = 1/C^{mejor\_global}$$

D-A: Feromona = 10.0 + 0.1388888888888889 + 0.0 + 0.0 + 0.16666666666666666 = 10.305555555555555

D-B: Feromona = 10.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 = 10.0

D-C: Feromona = 10.0 + 0.0 + 0.029411764705882353 + 0.041666666666666664 + 0.0 = 10.071078431372548

D-E: Feromona = 10.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 = 10.0

E-A: Feromona = 10.0 + 0.1388888888888889 + 0.029411764705882353 + 0.041666666666666664 + 0.16666666666666666 = 10.376633986928104

E-B: Feromona = 10.0 + 0.1388888888888889 + 0.029411764705882353 + 0.041666666666666664 + 0.16666666666666666 = 10.376633986928104

E-C: Feromona = 10.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 = 10.0

E-D: Feromona = 10.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 = 10.0

AS_{rank} – Ejemplo

- Después de 50 iteraciones:

```
Matriz Feromona Final:
          A       B       C       D       E
A         0.0     10.333  32.12   12.57   33.435
B         10.333  0.0     13.831  31.166  32.848
C         32.12   13.831  0.0     10.301  10.389
D         12.57   31.166  10.301  0.0     10.282
E         33.435  32.848  10.389  10.282  0.0
Iteraciones Totales: 50
----------
Mejor Hormiga Global: D-B-E-A-C - Costo: 25.0
```

Sistemas de hormigas Max-Min (MMAS)

- MAX–MIN Ant System (MMAS).

- T. Stützle, H.H. Hoos, MAX-MIN Ant System. Future Generation Computer Systems, Vol. 16, nº 8, 2000, 889-914

- Fue desarrollado específicamente para promover una explotación más fuerte de las soluciones y por lo tanto evitar caer en un estado de estancamiento.

Sistemas de hormigas Max-Min (MMAS)

- Podríamos definir un estado de estancamiento como la situación en la que las hormigas construyen la misma solución una y otra vez y, finalmente, la exploración se detiene.

- El MMAA tiene tres diferencias principales en relación al AS:

Sistemas de hormigas Max-Min (MMAS)

- Primera: Al igual que otras mejoras al AS, una fuerte estrategia elitista regula el agente autorizado a actualizar los rastros de feromona. Podría ser la hormiga que tiene la mejor solución la mejor solución en la iteración actual.

- En segundo lugar, todos los rastros de feromona se limitan al rango:

$$[\tau_{min}, \tau_{max}]$$

Sistemas de hormigas Max-Min (MMAS)

- Si el valor de la feromona mínima es mayor que 0 para todos los componentes de la solución, entonces la probabilidad de la selección de un estado específico nunca será cero, lo que evita configuraciones de estancamiento.

- Si el valor de la feromona es menor a la feromona mínima, el valor se actualiza a valor mínimo. Lo mismo para el valor máximo, si el valor de la feromona supera el valor máximo, el valor se actualiza al valor máximo.

Sistemas de hormigas Max-Min (MMAS)

- Tercero: La feromona de los arcos de inicializan como el valor máximo de feromona, lo cual, en combinación con un ratio de evaporación bajo hace que se incremente la exploración de caminos al principio de la búsqueda.

Procedimiento de optimización mediante el algoritmo MMAS

- En el MMAS las hormigas construyen las soluciones de manera probabilística, guiándose por un rastro de feromona artificial y por una información calculada a priori de manera heurística.

- Sea α y β la importancia concedida a la feromona y a la heurística respectivamente, se sigue para el TSP la regla probabilística mostrada en la ecuación:

$$p_{ij}^{k} = \frac{[\tau_{ij}(t)]^{\alpha}[\eta_{ij}]^{\beta}}{\sum_{l \in N_i^k}[\tau_{ij}(t)]^{\alpha}[\eta_{ij}]^{\beta}}, \qquad con\ j \in N_i^k$$

Procedimiento de optimización mediante el algoritmo MMAS

- Cuando todas las hormigas han construido una solución debe actualizarse la feromona en cada arco según el procedimiento general.

- La manera en que ésta actualización ocurre distingue a cada tipo de algoritmo. En MMAS, sea ρ el coeficiente de evaporación de la feromona definido en el intervalo (0, 1], se sigue la siguiente ecuación para la actualización de dicha sustancia:

$$\tau_{ij}(t+1) = (1-\rho)\tau_{ij}(t) + \Delta\tau_{ij}^{best},$$

$$\Delta\tau_{ij}^{best} = \begin{cases} \dfrac{1}{L^{best}} : si\ el\ arco\ (i,j) \in S^{best} \\ 0 \quad : \quad en\ caso\ contrario \end{cases}$$

Procedimiento de optimización mediante el algoritmo MMAS

- donde, S^{best} es la mejor solución encontrada en la iteración; L^{best} es la longitud de la solución S^{best}.

- Vale destacar que para la actualización, la elección de S^{best} como la mejor solución encontrada en la iteración actual, constituye un rasgo distintivo del algoritmo MMAS. Así se garantiza que las aristas que frecuentemente se hallen en esta mejor solución refuercen con un valor más alto su cantidad de feromona.

Procedimiento de optimización mediante el algoritmo MMAS

- Cuando únicamente se utiliza la mejor solución global, la búsqueda puede concentrarse demasiado rápido alrededor de la solución y la exploración de posibles mejores soluciones queda limitada, con el consiguiente peligro de quedar atrapado con soluciones de pobre calidad.

- Tras la actualización de la feromona se comienza una nueva iteración. El algoritmo MMAS converge cuando para cada vértice del grafo, cada arista de la solución tiene asociada la mayor cantidad de feromona τ_{max}, mientras que las restantes tienen el valor de feromona τ_{min}.

Procedimiento de optimización mediante el algoritmo MMAS

- Si el MMAS converge, la solución que se construye eligiendo siempre la arista con mayor rastro de feromona corresponderá típicamente con la mejor solución encontrada por el algoritmo

GRACIAS

Dr. Edward Hinojosa Cárdenas
ehinojosa@unsa.edu.pe