Geometric Deep Learning

Tommaso Lamma

2021

Reti Convoluzionali

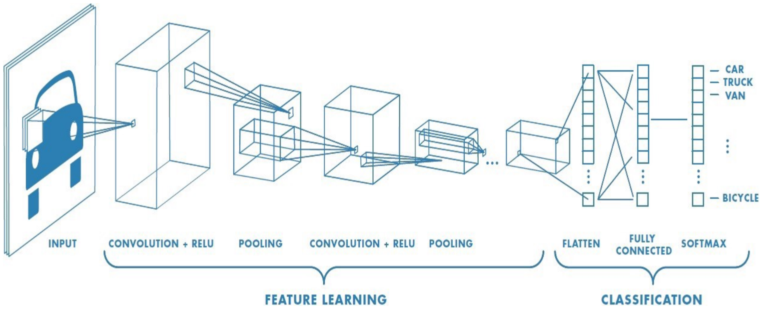

Figura: Una rete neurale convoluzionale.

Convoluzione su Domini Euclidei

Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} dx' f(x') g(x - x').$$

Cosa significa $(x - x')$ in un dominio diverso da $\mathbb{R}$?

Cosa significa $(x - x')$ in $\mathbb{R}$?

Possiamo vedere $(x - x')$ come l'azione dell'elemento $(-x')$ del gruppo delle traslazioni $(\mathbb{R}, +)$ sul dominio $\mathbb{R}$(A priori della struttura di spazio vettoriale).

Notare:

Il gruppo $(\mathbb{R}, +)$ è una simmetria globale del dominio $\mathbb{R}$.

Possiamo definire una convoluzione su un dominio a partire dalla simmetria globale del dominio?

Operatore Posizione

Definiamo spettralmente l'operatore posizione $\widehat{x}|x\rangle = x|x\rangle$, tale che

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x'), \quad \int_{\mathbb{R}} dx|x\rangle\langle x| = \widehat{1}.$$

Operatore Impulso

Il generatore delle traslazioni $(\mathbb{R}^n, +)$ è l'operatore impulso $\widehat{p}$, tale che

$$\widehat{p}|p\rangle = p|p\rangle,$$

che verifica

$$\langle p|p'\rangle = \delta(p - p'), \quad \int_{\mathbb{R}} dp|p\rangle\langle p| = \widehat{1}.$$

Trasformata di Fourier

Definiamo la trasformata di Fourier come $\langle x|\psi\rangle \mapsto \langle p|\psi\rangle$, che può essere calcolata nel seguente modo

$$\langle p|\psi\rangle = \langle p| \left(\int_{\mathbb{R}} dx |x\rangle\langle x| \right) |\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dx \langle p|x\rangle\langle x|\psi\rangle.$$

Teorema della Convoluzione

Definiamo la convoluzione a partire dal teorema della convoluzione

$$\langle p|\psi * \phi\rangle = \langle p|\psi\rangle\langle p|\phi\rangle.$$

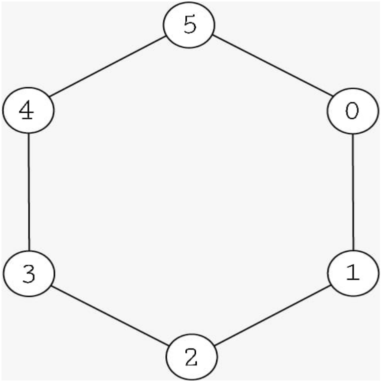

Figura: Un dominio non euclideo $\mathcal{G}$.

Spazio dei Segnali su $\mathcal{G}$

Lo spazio dei segnali a valori reali definiti su questo dominio può essere rappresentato come

$$\mathcal{S} = \{|\psi\rangle = \sum_{i \in \mathbb{Z}_6} \psi_i |i\rangle \ : \psi_i \in \mathbb{R}\},$$

dove devono valere

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij},$$

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}_6} |i\rangle\langle i| = \widehat{1}.$$

Una simmetria di questo spazio è il gruppo ciclico $(\mathbb{Z}_6, +)$ rispetto all'azione che segue.

Azione di $\mathbb{Z}_6$ su $\mathcal{S}$

Un'azione di $\mathbb{Z}_6$ sullo spazio dei segnali è data da

$$. : \mathbb{Z}_6 \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}$$

$$(j, |\psi\rangle) \mapsto j.|\psi\rangle = \sum_{i \in \mathbb{Z}_6} \psi_i |i + j\rangle \in \mathcal{S}.$$

Vediamo come agisce il generatore del gruppo $\widehat{S}|i\rangle = |i+1\rangle$.

Azione del generatore

$$\widehat{S}|\psi\rangle = \sum_{j\in\mathbb{Z}_6} \psi_i |j+1\rangle.$$

Le componenti del nuovo segnale saranno

$$\langle i|\widehat{S}|\psi\rangle = \sum_{j\in\mathbb{Z}_6} \psi_j \delta_{i,j+1} = \psi_{i-1} = \langle i-1|\psi\rangle,$$

dove $\delta_{i,j+1} = circ(0,1,0,0,0,0) =: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

L'operatore $\widehat{S}$ è diagonalizzabile in $\mathcal{C}$ con una base **ortonormale** $\widehat{S}|s_i\rangle = s_i|s_i\rangle$.

Trasformata di Fourier

Definiamo la trasformata di Fourier come $\langle i|\psi\rangle \mapsto \langle s_i|\psi\rangle$, che può essere calcolata nel seguente modo

$$\langle s_i|\psi\rangle = \langle s_i| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}_6} |j\rangle\langle j| \right) |\psi\rangle = \sum_{j\in\mathbb{Z}_6} \langle s_i|j\rangle\langle j|\psi\rangle.$$

Teorema della Convoluzione

Definiamo la convoluzione a partire dal teorema della convoluzione

$$\langle s_i|\psi * \phi\rangle = \langle s_i|\psi\rangle\langle s_i|\phi\rangle.$$

Equivarianza

Dall'ultima equazione notiamo che se definiamo l'operatore $\widehat{C}_\phi$ in modo che

$$\widehat{C}_\phi|\psi\rangle = |\psi * \phi\rangle,$$

abbiamo che se definiamo $\widehat{C}_\phi = \sum_{j\in\mathbb{Z}_6} |s_j\rangle\langle s_j|\phi\rangle\langle s_j|$ otteniamo

$$\langle s_i|\widehat{C}_\phi|\psi\rangle = \langle s_i| \sum_{j\in\mathbb{Z}_6} |s_j\rangle\langle s_j|\phi\rangle\langle s_j|\psi\rangle = \sum_{j\in\mathbb{Z}_6} \delta_{ij}\langle s_j|\phi\rangle\langle s_j|\psi\rangle = \langle s_i|\psi\rangle\langle s_i|\phi\rangle.$$

Notare

Essendo $\widehat{C}_\phi$ definito spettralmente sulle autofunzioni di $\widehat{S}$, avremo che

$$[\widehat{S}, \widehat{C}_\phi] = 0.$$