

Geometric Deep Learning

17 settembre 2021

- 1 Reti Convoluzionali
- 2 Convoluzione su Domini Euclidei
- 3 Convoluzione su Domini **non** Euclidei
- 4 Equivarianza

Reti Convoluzionali

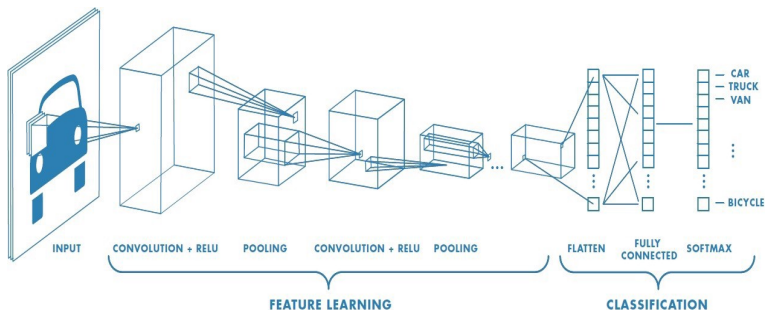


Figura: Una rete neurale convoluzionale.

Convoluzione su Domini Euclidei

Siano $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} dx' f(x') g(x - x').$$

Cosa significa $(x - x')$ in un dominio diverso da \mathbb{R} ?

Cosa significa $(x - x')$ in \mathbb{R} ?

Notare:

Il gruppo $(\mathbb{R}, +)$ è una simmetria globale del dominio \mathbb{R} .

Possiamo definire una convoluzione a partire da una simmetria?

Impostazione del problema

Operatore Posizione

$$\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x'), \quad \int_{\mathbb{R}} dx |x\rangle \langle x| = \hat{1}.$$

Operatore Impulso

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle,$$

$$\langle p|p'\rangle = \delta(p - p'), \quad \int_{\mathbb{R}} dp |p\rangle \langle p| = \hat{1}.$$

L'operatore \hat{p} genera le traslazioni

$$\langle x|e^{-i\hat{p}x'}|p\rangle = \langle x|p\rangle \langle -x'|p\rangle \sqrt{2\pi} = \langle x - x'|p\rangle,$$

$$\langle x|e^{-i\hat{p}x'} = \langle x - x'|.$$

Teorema della Convoluzione

Trasformata di Fourier

$$\langle p|\psi\rangle = \langle p|\left(\int_{\mathbb{R}} dx|x\rangle\langle x|\right)|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dx\langle p|x\rangle\langle x|\psi\rangle.$$

Dove $\langle x|p\rangle = \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\pi}}$ e $\langle x|\psi\rangle := \psi(x)$.

Teorema della Convoluzione

$$\langle p|\psi * \phi\rangle = \sqrt{2\pi}\langle p|\psi\rangle\langle p|\phi\rangle.$$

$$\widehat{C}_\phi|\psi\rangle := |\psi * \phi\rangle.$$

Il teorema della convoluzione può essere visto come

$$\langle p|\psi * \phi\rangle =: \langle p|\widehat{C}_\phi|\psi\rangle = \sqrt{2\pi}\langle p|\psi\rangle\langle p|\phi\rangle$$

$$\langle p|\widehat{C}_\phi = \sqrt{2\pi}\langle p|\phi\rangle\langle p|$$

Definizione di Convoluzione

Definizione di Convoluzione

$$\hat{C}_\phi = \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp |p\rangle \langle p|\phi\rangle \langle p|.$$

Convoluzione \mathbb{R} -Equivariante

$$[\hat{p}, \hat{C}_\phi] = 0.$$

Recuperiamo l'altra definizione

$$\begin{aligned}\langle x | \hat{C}_\phi | \psi \rangle &= \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp \langle x | p \rangle \langle p | \phi \rangle \langle p | \psi \rangle = \\ &= \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dx' \int_{\mathbb{R}} dy \left(\int_{\mathbb{R}} dp \langle x | p \rangle \langle p | x' \rangle \langle p | y \rangle \right) \langle x' | \phi \rangle \langle y | \psi \rangle = \\ &= \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dx' \int_{\mathbb{R}} dy \frac{\delta(x - x' - y)}{\sqrt{2\pi}} \langle x' | \phi \rangle \langle y | \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} dx' \langle x - x' | \phi \rangle \langle x' | \psi \rangle.\end{aligned}$$

Da cui

$$\langle x | \psi * \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} dx' \langle x - x' | \phi \rangle \langle x' | \psi \rangle.$$

Convoluzione su Domini non Euclidei

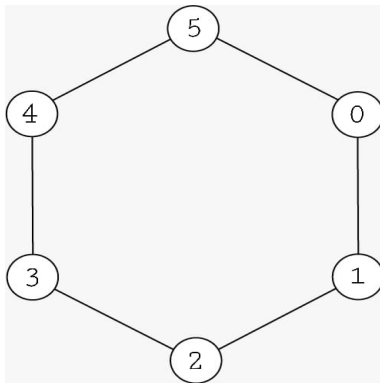


Figura: Un dominio non euclideo \mathcal{G} con simmetria \mathbb{Z}_6 .

Impostazione del problema

Operatore Posizione

$$\hat{x}|i\rangle = i|i\rangle \quad i \in I = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}, \quad \sum_{i \in I} |i\rangle \langle i| = \hat{1}.$$

Operatore impulso che genera \mathbb{Z}_6

$$\langle i|\hat{S} = \langle i+1|,$$

Azione del generatore sulle componenti

$$\langle i | \hat{S} | \psi \rangle = \sum_{j \in \mathbb{Z}_6} \langle i+1 | j \rangle \langle j | \psi \rangle = \psi_{i+1} = \langle i+1 | \psi \rangle,$$

dove $\langle i | \hat{S} | j \rangle = \langle i+1 | j \rangle = \text{circ}(0, 1, 0, 0, 0, 0) =:$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'operatore \hat{S} è diagonalizzabile in \mathbb{C} con una base **ortonormale**

$$\hat{S} |s_i\rangle = s_i |s_i\rangle,$$

$$\langle s_i | s_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \sum_{i \in \mathbb{Z}_6} |s_i\rangle \langle s_i| = \hat{1}.$$

Teorema della Convoluzione

Trasformata di Fourier

$$\langle s_i | \psi \rangle = \langle s_i | \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}_6} |j\rangle \langle j| \right) | \psi \rangle = \sum_{j \in \mathbb{Z}_6} \langle s_i | j \rangle \langle j | \psi \rangle.$$

Teorema della Convoluzione

$$\langle s_i | \psi * \phi \rangle = \langle s_i | \psi \rangle \langle s_i | \phi \rangle.$$

$$\widehat{C}_\phi | \psi \rangle := | \psi * \phi \rangle.$$

Il teorema della convoluzione può essere visto come

$$\langle s_i | \psi * \phi \rangle =: \langle s_i | \widehat{C}_\phi | \psi \rangle = \langle s_i | \psi \rangle \langle s_i | \phi \rangle$$

$$\langle s_i | \widehat{C}_\phi = \langle s_i | \psi \rangle \langle s_i |$$

Definizione di Convoluzione

Definizione di Convoluzione

$$\hat{C}_\phi = \sum_{j \in \mathbb{Z}_6} |s_j\rangle \langle s_j | \phi \rangle \langle s_j|.$$

Convoluzione \mathbb{Z}_6 -Equivariante

$$[\hat{S}, \hat{C}_\phi] = 0.$$

Equazione del Calore

$$\frac{d}{dt}|\psi\rangle = -\hat{\Delta}|\psi\rangle,$$

dove $\hat{\Delta} = \text{diag}(\text{deg}(i)) - A$.

Convoluzione Equivalente Rispetto alla Diffusione

$$\hat{C}_\phi = \sum_{i=1}^{\dim C_0} |e_i\rangle \langle e_i | \phi \rangle \langle e_i|,$$

dove $\hat{\Delta}|e_i\rangle = \lambda_i|e_i\rangle$.

Simmetrie di una classificazione $\mathcal{C} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{L}$

$$\text{Sym}(\mathcal{C}) := \{g : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} : \mathcal{C}(f) = \mathcal{C}(f \circ g) \forall f \in \mathcal{S}\}.$$

$(\text{Sym}(\mathcal{C}), \circ)$ è un gruppo.

Grazie per l'attenzione