Geometric Deep Learning

Tommaso Lamma

2021

Geometric Deep Learning

Tommaso Lamma

2021

Reti Convoluzionali

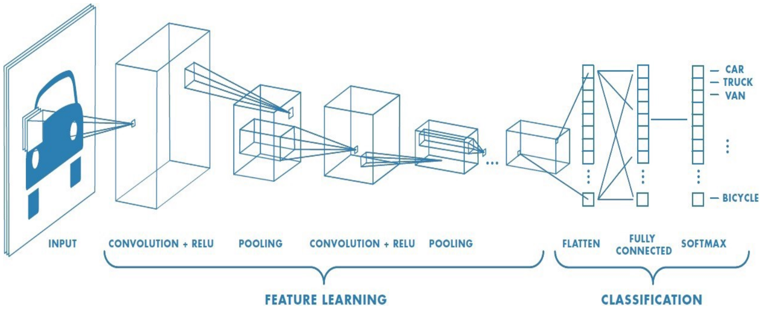

Figura: Una rete neurale convoluzionale.

Convoluzione su Domini Euclidei

Siano $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} dx' f(x') g(x - x').$$

Cosa significa $(x - x')$ in un dominio diverso da $\mathbb{R}^n$?

Cosa significa $(x - x')$ **in** $\mathbb{R}^n$?

Possiamo vedere $(x - x')$ come l'azione dell'elemento $(-x')$ del gruppo delle traslazioni $(\mathbb{R}^n, +)$ sul dominio $\mathbb{R}^n$(A priori della struttura di spazio vettoriale).

Notare:

Il gruppo $(\mathbb{R}^n, +)$ è una simmetria globale del dominio $\mathbb{R}^n$.

Possiamo definire una convoluzione su un dominio a partire dalla simmetria globale del dominio?

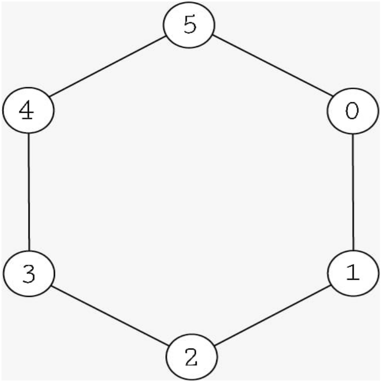

Figura: Un dominio non euclideo $\mathcal{G}$.

Spazio dei Segnali su $\mathcal{G}$

Lo spazio dei segnali a valori reali definiti su questo dominio può essere rappresentato come

$$\mathcal{S} = \{|\psi\rangle = \sum_{i \in \mathbb{Z}_6} \psi_i |i\rangle \ : \psi_i \in \mathbb{R}\},$$

dove devono valere

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij},$$

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}_6} |i\rangle\langle i| = \widehat{1}.$$

Una simmetria di questo spazio è il gruppo ciclico $(\mathbb{Z}_6, +)$ rispetto all'azione che segue.

Azione di $\mathbb{Z}_6$ su $\mathcal{S}$

Un'azione di $\mathbb{Z}_6$ sullo spazio dei segnali è data da

$$. : \mathbb{Z}_6 \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}$$

$$(j, |\psi\rangle) \mapsto j.|\psi\rangle = \sum_{i \in \mathbb{Z}_6} \psi_{i+j} |i + j\rangle \in \mathcal{S}.$$

Vediamo come agisce il generatore del gruppo

Azione del generatore

$$1.|\psi\rangle = \sum_{i \in \mathbb{Z}_6} \psi_{i+1}|i+1\rangle.$$

Le componenti trasformano nel seguente modo

$$\langle i|\psi\rangle = \psi_i \mapsto \sum_{i,j \in \mathbb{Z}_6} S_{ij}\psi_j = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}_6} \langle i|\widehat{S}|j\rangle\langle j|\psi\rangle,$$

dove $S_{ij} = circ(0,1,0,0,0,0) =: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Convoluzione Spettrale

Data la simmetria avremo che per qualsiasi osservabile $\widehat{O}$

$$[\widehat{S}, \widehat{O}] = 0.$$

L'operatore $\widehat{S}$ è diagonalizzabile $\widehat{S}|s_i\rangle = s_i|s_i\rangle$,
sfruttando l'analogia con $\mathbb{R}^n$ otteniamo una trasformata.

Trasformata di Fourier in $\mathcal{S}$

$$\langle i|\psi\rangle \mapsto \langle s_i|\psi\rangle.$$

Dalla traformata definiamo per le componenti una convoluzione in analogia con $\mathbb{R}^n$.

Convoluzione su $\mathcal{S}$

$$\langle s_i|\psi * \phi\rangle = \langle s_i|\psi\rangle\langle s_i|\phi\rangle.$$

Convoluzione Equivariante

Sia $\widehat{C}_\phi|\psi\rangle = |\psi * \phi\rangle$, possiamo decidere di definire questa convoluzione solo a partire da

$$[\widehat{S}, \widehat{C}_\phi] = 0,$$

ciò implica che la matrice associata a $\widehat{C}_\phi$ è circolante.

Notare:

In entrambi i casi abbiamo ridotto il numero di parametri da imparare da **36** a **6**.