Geometric Deep Learning

17 settembre 2021

Reti Convoluzionali

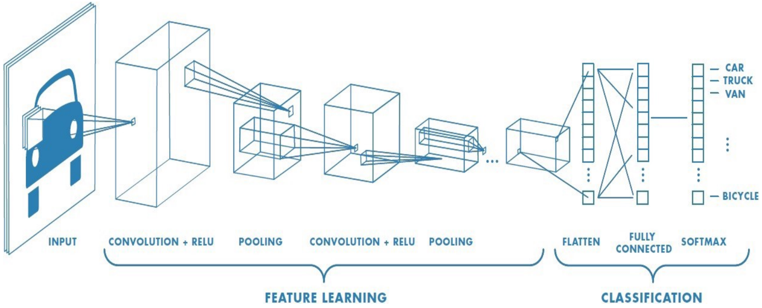

Figura: Una rete neurale convoluzionale.

Convoluzione su Domini Euclidei

Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} dx' f(x') g(x - x').$$

Cosa significa $(x - x')$ in un dominio diverso da $\mathbb{R}$?

Cosa significa $(x - x')$ **in** $\mathbb{R}$?

Notare:

Il gruppo $(\mathbb{R}, +)$ è una simmetria globale del dominio $\mathbb{R}$.

Possiamo definire una convoluzione a partire da una simmetria?

Impostazione del problema

Operatore Posizione

$$\widehat{x}|x\rangle = x|x\rangle \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x'), \quad \int_{\mathbb{R}} dx|x\rangle\langle x| = \widehat{1}.$$

Operatore Impulso

$$\widehat{p}|p\rangle = p|p\rangle,$$

$$\langle p|p'\rangle = \delta(p - p'), \quad \int_{\mathbb{R}} dp|p\rangle\langle p| = \widehat{1}.$$

L'operatore $\widehat{p}$ genera le traslazioni

$$\langle x|e^{-i\widehat{p}x'}|p\rangle = \langle x|p\rangle\langle -x'|p\rangle\sqrt{2\pi} = \langle x - x'|p\rangle,$$

$$\langle x|e^{-i\widehat{p}x'} = \langle x - x'|.$$

Teorema della Convoluzione

Trasformata di Fourier

$$\langle p|\psi\rangle = \langle p|\left(\int_{\mathbb{R}} dx|x\rangle\langle x|\right)|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dx\langle p|x\rangle\langle x|\psi\rangle.$$

Dove $\langle x|p\rangle = \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\pi}}$ e $\langle x|\psi\rangle := \psi(x)$.

Teorema della Convoluzione

$$\langle p|\psi * \phi\rangle = \sqrt{2\pi}\langle p|\psi\rangle\langle p|\phi\rangle.$$

$$\widehat{C}_\phi|\psi\rangle := |\psi * \phi\rangle.$$

Il teorema della convoluzione piò essere visto come

$$\langle p|\psi * \phi\rangle =: \langle p|\widehat{C}_\phi|\psi\rangle = \sqrt{2\pi}\langle p|\psi\rangle\langle p|\phi\rangle$$

$$\langle p|\widehat{C}_\phi = \sqrt{2\pi}\langle p|\psi\rangle\langle p|$$

Definizione di Convoluzione

Definizione di Convoluzione

$$\widehat{C}_\phi = \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp |p\rangle \langle p|\phi\rangle \langle p|.$$

Convoluzione $\mathbb{R}$-Equivariante

$$[\widehat{p}, \widehat{C}_\phi] = 0.$$

Recuperiamo l'altra definizione

$$\langle x|\widehat{C}_\phi|\psi\rangle = \sqrt{2\pi}\int_{\mathbb{R}} dp\langle x|p\rangle\langle p|\phi\rangle\langle p|\psi\rangle =$$

$$= \sqrt{2\pi}\int_{\mathbb{R}} dx' \int_{\mathbb{R}} dy \left(\int_{\mathbb{R}} dp\langle x|p\rangle\langle p|x'\rangle\langle p|y\rangle\right)\langle x'|\phi\rangle\langle y|\psi\rangle =$$

$$= \sqrt{2\pi}\int_{\mathbb{R}} dx' \int_{\mathbb{R}} dy \frac{\delta(x-x'-y)}{\sqrt{2\pi}}\langle x'|\phi\rangle\langle y|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dx'\langle x-x'|\phi\rangle\langle x'|\psi\rangle.$$

Da cui

$$\langle x|\psi * \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dx'\langle x-x'|\phi\rangle\langle x'|\psi\rangle.$$

Convoluzione su Domini non Euclidei

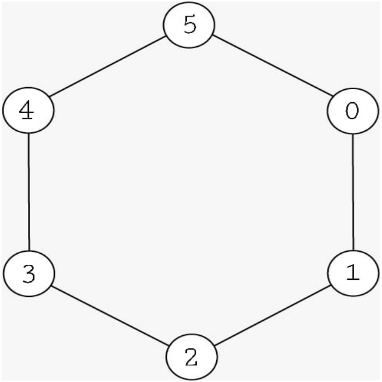

Figura: Un dominio non euclideo $\mathcal{G}$.

Impostazione del problema

Operatore Posizione

$$\widehat{x}|i\rangle = i|i\rangle \quad i \in C_0$$

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}, \quad \sum_{i \in \mathbb{Z}_6} |i\rangle\langle i| = \widehat{1}.$$

Operatore impulso che genera $\mathbb{Z}_6$

$$\langle i|\widehat{S} = \langle i+1|,$$

Azione del generatore sulle componenti

$$\langle i|\widehat{S}|\psi\rangle = \sum_{j\in\mathbb{Z}_6} \langle i+1|j\rangle\langle j|\psi\rangle = \psi_{i+1} = \langle i+1|\psi\rangle,$$

dove $\langle i|\widehat{S}|j\rangle = \langle i+1|j\rangle = circ(0,1,0,0,0,0) =: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

L'operatore $\widehat{S}$ è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$ con una base **ortonormale**

$$\widehat{S}|s_i\rangle = s_i|s_i\rangle,$$

$$\langle s_i|s_j\rangle = \delta_{ij}, \quad \sum_{i\in\mathbb{Z}_6} |s_i\rangle\langle s_i| = \widehat{1}.$$

Teorema della Convoluzione

Trasformata di Fourier

$$\langle s_i|\psi\rangle = \langle s_i| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}_6} |j\rangle\langle j| \right) |\psi\rangle = \sum_{j\in\mathbb{Z}_6} \langle s_i|j\rangle\langle j|\psi\rangle.$$

Teorema della Convoluzione

$$\langle s_i|\psi * \phi\rangle = \langle s_i|\psi\rangle\langle s_i|\phi\rangle.$$

$$\widehat{C}_\phi|\psi\rangle := |\psi * \phi\rangle.$$

Il teorema della convoluzione piò essere visto come

$$\langle s_i|\psi * \phi\rangle =: \langle s_i|\widehat{C}_\phi|\psi\rangle = \langle s_i|\psi\rangle\langle s_i|\phi\rangle$$

$$\langle s_i|\widehat{C}_\phi = \langle s_i|\psi\rangle\langle s_i|$$

Definizione di Convoluzione

Definizione di Convoluzione

$$\widehat{C}_\phi = \sum_{j \in \mathbb{Z}_6} |s_j\rangle\langle s_j|\phi\rangle\langle s_j|.$$

Convoluzione $\mathbb{Z}_6$-Equivariante

$$[\widehat{S}, \widehat{C}_\phi] = 0.$$

Un'Altra Simmetria

Equazione del Calore

$$\frac{d}{dt}|\psi\rangle = -\widehat{\Delta}|\psi\rangle,$$

dove $\widehat{\Delta} = \mathrm{diag}(\deg(i)) - A$.

Convoluzione Equivariante Rispetto alla Diffusione

$$\widehat{C}_\phi = \sum_{i=1}^{\dim C_0} |e_i\rangle\langle e_i|\phi\rangle\langle e_i|,$$

dove $\widehat{\Delta}|e_i\rangle = \lambda_i|e_i\rangle$.

Equivarianza

Simmetrie di una classificazione $\mathcal{C} : \mathcal{S} \to \mathcal{L}$

$$\mathrm{Sym}(\mathcal{C}) := \{g : \mathcal{S} \to \mathcal{S} \ : \ \mathcal{C}(f) = \mathcal{C}(f \circ g)\ \forall f \in \mathcal{S}\}.$$

$(\mathrm{Sym}(\mathcal{C}), \circ)$ è un gruppo.

Grazie per l'attenzione