CHUYÊN ĐỀ 1: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM

A. ÔN TẬP CÁC KIẾN THỨC VỀ ĐẠO HÀM

1. Quy tắc cơ bản.

$(c)' = 0$ $\qquad$ $(u \pm v)' = u' \pm v'$

$(u.v)' = u'v + v'u$ $\qquad$ $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

2. Bảng công thức tính đạo hàm.

$(k.x)' = k$	$(k.u)' = k.u'$
$(x^n)' = n.x^{n-1}$	$(u^n)' = n.u^{n-1}.(u)'$
$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$	$(\frac{1}{u})' = -\frac{(u)'}{u^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u.(u)'$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u.(u)'$
$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = (1 + \tan^2 u).u' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -(1 + \cot^2 u).u' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u.u'$
$(a^x)' = a^x.\ln a$	$(a^u)' = a^u.\ln a.u'$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x.\ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u.\ln a}$

*__Đặc biệt :__

- $y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y' = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$
- $y = \dfrac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2} \Rightarrow y' = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x^2 + 2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{(a_2x^2 + b_2x + c_2)^2}$

3. Phương trình tiếp tuyến

Cho hàm số $y = f(x)$ *(C)* và điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$. Phương trình tiếp tuyến với *(C)* tại *M* là:

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ với $y_0 = f(x_0)$

4. Ý nghĩa vật lý của đạo hàm

a) Vận tốc tức thời, gia tốc tức thời

Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình *s=s(t), với s=s(t)* là hàm số có đạo hàm đến cấp 2. Khi đó vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 là đạo hàm của hàm số *s=s(t)* tại t_0 : $\boldsymbol{v(t_0)=s'(t_0)}$. Gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 là đạo hàm cấp 2 của hàm số *s=s(t)* tại t_0: $\boldsymbol{a(t_0)=s''(t_0)}$.

b) Cường độ tức thời

Nếu điện lượng *Q* truyền trong dây dẫn là một hàm số của thời gian: *Q=Q(t)* thì cường độ tức thời của dòng điện tại thời điểm t_0 là đạo hàm của hàm số *Q=Q(t)* tại t_0: $\mathbf{I(t_0)=Q'(t_0)}$.

B. ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM

VẤN ĐỀ 1: SỰ ĐỒNG BIẾN VÀ NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

@ **Điều kiện đủ**: Nếu $\mathbf{f'(x)>0, \forall x\in (a;b)}$ thì hàm số f(x) ***đồng biến*** trên khoảng (a;b)

Nếu $\mathbf{f'(x)<0, \forall x\in (a;b)}$ thì hàm số f(x) ***nghịch biến*** trên khoảng (a;b)

@ **Điều kiện cần**: Nếu hàm số f(x) ***đồng biến*** trên khoảng (a;b) thì $\mathbf{f'(x)\ge 0\ \forall x\in (a;b)}$

Nếu hàm số f(x) ***nghịch biến*** trên khoảng (a;b) thì $\mathbf{f'(x)\le 0\ \forall x\in (a;b)}$

(trong điều kiện đủ nếu đạo hàm bằng 0 tại hữu hạn điểm thuộc khoảng (a;b) thì kết luận vẫn đúng)

@ **Phương pháp tìm các khoảng đồng biến_nghịch biến của một hàm số**

1. Tìm tập xác định của hàm số
2. Tính $f'(x)$ .Tìm các điểm x_i (i = 1,2,…,n) mà tại đó $f'(x)=0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.
3. Lập bảng xét dấu của $f'(x)$
4. Sử dụng điều kiện đủ để kết luận các khoảng đồng biến, nghịch biến.

VẤN ĐỀ 2: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

@ Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua điểm x_0 thì x_0 là điểm cực đại.

Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm x_0 thì x_0 là điểm cực tiểu.

@ **Để hàm số đạt cực tiểu tại điểm** $x=x_0$ **thì** $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)>0 \end{cases}$

@ **Để hàm số đạt cực đại tại điểm** $x=x_0$ **thì** $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)<0 \end{cases}$

@ **Qui tắc tìm cực trị của một hàm số**

Quy tắc 1	**Quy tắc 2**
1) Tìm tập xác định.	1) Tìm tập xác định.
2) Tính $f'(x)$. Giải $f'(x)=0$	2) Tính $f'(x)$. Giải $f'(x)=0$ tìm nghiệm x_i
3) Lập bảng biến thiên. Kết luận	3) Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$. Kết luận.

VẤN ĐỀ 3: TÌM GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT_GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ	
Trên đoạn [a; b]	**Trên khoảng (a; b)**
1) Hàm số liên tục trên đoạn [a;b] 2) Tính $f'(x)$. Giải $f'(x)=0$ tìm nghiệm $x_i\in(a;b)$ 3) Tính f(a), f(b), $f(x_i)$ 4) Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên. Ta có $\max\limits_{[a;b]} f(x)=M$, $\min\limits_{[a;b]} f(x)=m$	1) Tính $f'(x)$. Giải pt $f'(x)=0$ 2) Lập bảng biến thiên 3) Dựa vào BBT để kết luận : $\max\limits_{(a;b)} f(x)=y_{CD}$, $\min\limits_{(a;b)} f(x)=y_{CT}$ (Nếu trên (a; b) hàm số có duy nhất một cực trị)

VẤN ĐỀ 4: ĐƯỜNG TIỆM CẬN

+ Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=y_0$ **hoặc** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=y_0$

Thì y = y_0 là tiệm cận ngang của (C): y = f(x)

+ Nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\pm\infty$ **hoặc** $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\pm\infty$ **thì x = x_0 là tiệm cận đứng của (C): y = f(x).**

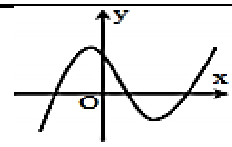
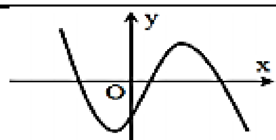
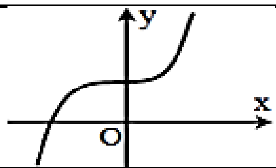
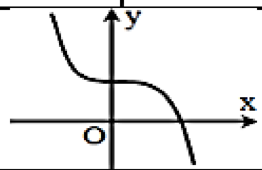
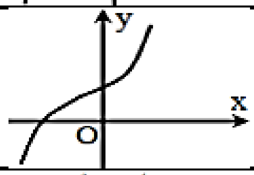
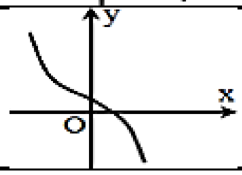
VẤN ĐỀ 5: KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

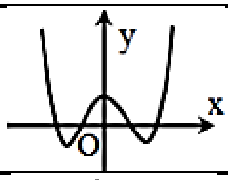
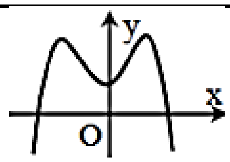
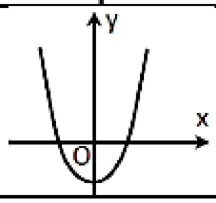
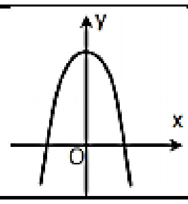
1. Tập xác định của hàm số

2. Sự biến thiên

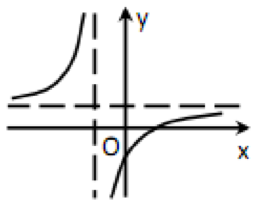
- Tìm giới hạn $\Rightarrow$ tiệm cận (nếu có)
- Tính đạo hàm y'. Giải phương trình y' = 0
- Lập bảng biến thiên
- Kết luận về đồng biến - nghịch biến và cực trị.

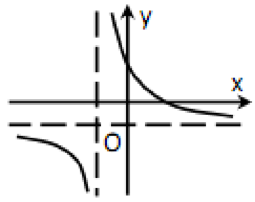
3. Đồ thị: Tìm giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (nếu dễ), tìm thêm vài điểm đặc biệt rồi vẽ đồ thị

Dạng của đồ thị hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$		
	a > 0	**A < 0**
Ph.trình y' = 0 có hai nghiệm phân biệt.		
Ph.trình y' = 0 Có nghiệm kép.		
Ph.trình y' = 0 vô nghiệm.		
Chú ý: *Đồ thị hàm bậc 3 đối xứng qua điểm uốn* $I(x_0;y_0)$, *với* x_0 *là nghiệm pt* $y''=0$ *và* $y_0=f(x_0)$.		

Dạng của đồ thị hàm trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ $(a\neq 0)$		
	a > 0	**a < 0**
Ph.trình y' = 0 có ba nghiệm phân biệt.		
Ph.trình y' = 0 có một nghiệm .		
Chú ý: *Đồ thị hàm trùng phương đối xứng qua Oy*		

Dạng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$	
D = ad – bc > 0	**D = ad – bc < 0**





Chú ý: Đồ thị hàm b1/b1 đối xứng qua giao điểm của 2 đường tiệm cận

VẤN ĐỀ 6: SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ

Cho hai đường cong (C_1): y = f (x) và (C_2): y = g (x) .

Ph.trình: **f (x) = g (x)** (*) gọi là ***ph.trình hoành độ giao điểm*** của (C_1) và (C_2).

Số nghiệm ph.trình (*) chính là số giao điểm của (C_1) và (C_2).

BIỆN LUẬN SỐ NGHIỆM PH.TRÌNH BẰNG ĐỒ THỊ

Dùng đồ thị (C) của hàm số y = f(x), biện luận theo m số nghiệm của ph.trình F (x,m) = 0

B1)Biến đổi ph.trình F(x,m) = 0 ⇔ **f (x)=g(m)** (*)

B2)Pt (*) là ph.trình hoành độ giao điểm của (C): y = f (x) và đ.thẳng d: y = g (m) ⇒ Số nghiệm ph.trình đã cho chính là số giao điểm của (C) và d.

B3)Dựa vào đồ thị (C) để biện luận (*Lưu ý các giá trị cực trị (nếu có) của hàm số*).

CHUYÊN ĐỀ 2: HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LOGARIT

VẤN ĐỀ 1: CÔNG THỨC LŨY THỪA-LOGARIT

LŨY THỪA

$a^0 = 1$ $\quad a^{\alpha}.a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$ $\quad {a^{\alpha}}^{\beta} = a^{\alpha.\beta}$ $\quad a^{\alpha}.b^{\alpha} = ab^{\alpha}$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $\quad \dfrac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta}$ $\quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha} = \dfrac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$ $\quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$$a^{\alpha} > a^{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > \beta \text{ khi } & a > 1 \\ \alpha < \beta \text{ khi } & 0 < a < 1 \end{cases}$$

Căn bậc n

$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$; $\quad \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $\quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}^{\,m}$ $\quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

LOGARIT

* **Định nghĩa:** Cho $a,b > 0; a \neq 1$: $\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^{\alpha} = b$

* **Tính chất:**

$\log_a 1 = 0;$ $\quad \log_a a = 1;$ $\quad \log_a a^{\alpha} = \alpha;$ $\quad a^{\log_a b} = b$

* **Quy tắc tính:**

$\log_a b_1.b_2 = \log_a b_1 + \log_a b_2$ $\quad \log_a \dfrac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$

$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$ $\qquad\qquad$ $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha}\log_a b$

*** Công thức đổi cơ số:**

$\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$ hay $\log_a b.\log_b c = \log_a c$ $\qquad \boxed{a^{\log_b c} = c^{\log_b a}}$

$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ hay $\log_a b.\log_b a = 1$;

Khi cơ số $\mathbf{a = 10}$ thì $\mathbf{\log_{10} b}$ (***logarit thập phân***) thường được viết là $\mathbf{\log b}$ **hay** $\mathbf{\lg b}$

Khi cơ số $\mathbf{a = e}$ thì $\mathbf{\log_e b}$ (***logarit tự nhiên***) được viết là $\mathbf{\ln b}$

VẤN ĐỀ 2: KHẢO SÁT HÀM SỐ MŨ- HÀM SỐ LŨY THỪA-HÀM SỐ LOGARIT

	HÀM SỐ LŨY THỪA		*HÀM SỐ MŨ*		*HÀM SỐ LOGARIT*	
Đặc điểm	$y = x^\alpha$ (α tùy ý)		$y = a^x (0 < a \neq 1)$ ***Chú ý:*** $a > 0: a^x > 0, \forall x$		$y = \log_a x (0 < a \neq 1)$	
Tập xác định ***Điều kiện của x để hs có nghĩa:***	$+\ \alpha \in Z_+^*$: có nghĩa với mọi x. $+\ \alpha \in Z_-$: có nghĩa với $x \neq 0$. $+\ \alpha \notin Z$: có nghĩa với $x > 0$		có nghĩa $\forall x$		có nghĩa với $x > 0$	
Đạo hàm	$(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$		$(a^x)' = a^x \ln a$		$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x.\ln a}$	
Sự biến thiên	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$	$a > 1$	$0 < a < 1$	$a > 1$	$0 < a < 1$
	Hàm số đb trên $(0;+\infty)$	Hàm số nb trên $(0;+\infty)$	Hàm số đb trên D	Hàm số nb trên D	Hàm số đb trên D	Hàm số nb trên D
Đồ thị	Luôn qua điểm $1;1$.		Nằm hoàn toàn phía trên trục hoành và luôn qua hai điểm $A(0;1)$ và $B(1;a)$.		Nằm hoàn toàn phía bên phải trục tung và luôn qua hai điểm $A(1;0)$ và $B(a;1)$.	

MỘT SỐ CÔNG THỨC LIÊN QUAN ĐẾN HÀM MŨ ĐƯỢC VẬN DỤNG TRONG CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ

1) **Công thức lãi kép:** $P_n = P(1+r)^n$, trong đó P là số vốn ban đầu, r là lãi suất, P_n là tổng số tiền được lĩnh (cả vốn lẫn lãi) sau *n* năm.
2) **Công thức sự phân rã của các chất phóng xạ:** $m(t) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T}}$, trong đó m_0 là khối lượng phóng xạ ban đầu (*t=0*), *m(t)* là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm *t*, *T* là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa số nguyên tử của chất phóng xạ bị biến thành chất khác).
3) **Công thức tính dân số thế giới:** $S = Ae^{ni}$, trong đó *A* là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau *n* năm, *i* là tỉ lệ tăng dân số hàng năm

VẤN ĐỀ 3: ĐẠO HÀM CỦA HÀM MŨ VÀ HÀM LOGARIT

$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u.u'$
$(a^x)' = a^x.\ln a$	$(a^u)' = a^u.\ln a.u'$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x.\ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u.\ln a}$

VẤN ĐỀ 4: PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ- LOGARIT

PHƯƠNG TRÌNH MŨ_LOGARIT

a. Phương trình mũ cơ bản : $a^x = b$ $b > 0$: Pt có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$ $b \le 0$: Phương trình vô nghiệm.	**a. Phương trình lôgarit cơ bản: $\log_a x = b$** Pt luôn có nghiệm duy nhất $x = a^b$
b. Phương trình mũ đơn giản + *Đưa về cùng cơ số:* $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ + *Đặt ẩn phụ:* •Đặt $t = a^x$ (đk t> 0), biến đổi phương trình mũ thành phương trình đại số theo t •Giải phương trình theo t và chọn $t > 0$ •Tìm x từ $a^x = t \Leftrightarrow x = \log_a t$ + ***Lôgarit hóa***: Lôgarit 2 vế của pt cùng 1 cơ số	**b. Phương trình logarit đơn giản** + *Đưa về cùng cơ số:* $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$ + *Đặt ẩn phụ:* •Đặt $t = \log_a x$ đưa về phương trình ẩn t •Giải phương trình theo t •Tìm x từ $t = \log_a x \Leftrightarrow x = a^t$ + ***Mũ hóa***: Mũ 2 vế của pt cùng 1 cơ số

c. Bất phương trình mũ, bất phương trình lôgarit:

Cơ số	*Bất phương trình mũ*	*Bất phương trình lôgarit*
$a > 1$	$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$	$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
$0 < a < 1$	$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$	$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

CHUYÊN ĐỀ 3: NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN

VẤN ĐỀ 1: ĐỊNH NGHĨA NGUYÊN HÀM VÀ BẢNG NGUYÊN HÀM

NGUYÊN HÀM

@ **Định nghĩa**: Cho hàm số f(x) xác định trên K. Hàm số F(x) là **nguyên hàm** của hàm số f(x) trên K nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in K$.

@ **Sự tồn tại nguyên hàm**: Mọi hàm số f(x) liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K

@ **Chú ý**: $\int k.f(x)dx = k.\int f(x)dx$ (k là hằng số khác 0)

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Bảng công thức nguyên hàm

STT	*Nguyên hàm theo biến số x*	*Nguyên hàm theo biến số u*
1	$\int 1dx = x + C$	$\int 1du = u + C$
2	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$	$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$
3	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\|x\| + C$	$\int \frac{1}{u}du = \ln\|u\| + C$
4	$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$
5	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
6	$\int \cos xdx = \sin x + C$	$\int \cos udu = \sin u + C$
7	$\int \sin xdx = -\cos x + C$	$\int \sin udu = -\cos u + C$
8	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u}du = \tan u + C$
9	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 u}du = -\cot u + C$

@ Một số công thức mở rộng

$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln\|ax+b\| + C$	$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$
$\int \tan xdx = -\ln\|\cos x\| + C,$ $\int \cot xdx = \ln\|\sin x\| + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$

VẤN ĐỀ 2: PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM

@ Phương pháp đổi biến số

Nếu $\int f(u)du = F(u) + C$ và u=u(x) là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$\int f[u(x)]u'(x)dx = F[u(x)] + C$

@ Phương pháp tính nguyên hàm từng phần: $\int udv = u.v - \int vdu$ ***Nhớ:***

$$\begin{cases} u \xrightarrow{daoham} du \\ dv \xrightarrow{nguyenham} v \end{cases}$$

***Lưu ý*:Thứ tự đặt u: Nhất:lnx , Nhì: Đa thức , Tam: lượng giác , Tứ : mũ, luỹ thừa**

Cho P (x) là một đa thức, cách đặt u và dv của một số nguyên hàm:

Đặt	$\int P(x).e^x dx$	$\int P(x).\sin xdx$	$\int P(x).\cos xdx$	$\int P(x).\ln xdx$
u =	P (x)(3)	P (x)(2)	P (x)(2)	Lnx (1)
dv =	$e^x dx$	sinxdx	cosxdx	P (x)dx

VẤN ĐỀ 3: TÍCH PHÂN

TÍCH PHÂN

@ **Công thức Newton Leibniz** : $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

@ **Phương pháp đổi biến số**

đổi biến; đổi cận; tính tích phân mới với biến số mới và cận mới.

Lưu ý : Khi gặp dạng: $\int_\alpha^\beta \frac{1}{a^2+x^2}dx$; $\int_\alpha^\beta (a^2+x^2)dx \rightarrow$ đặt x = atant

Khi gặp dạng: $\int_\alpha^\beta \sqrt{a^2-x^2}dx$; $\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$ đặt x = asint

@ **Phương pháp tích phân từng phần**: Cách đặt u và dv **tương tự như bài nguyên hàm.**

Công thức: $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$ *Nhớ*: $\begin{cases} u \xrightarrow{daoham} du \\ dv \xrightarrow{nguyenham} v \end{cases}$

VẤN ĐỀ 4: ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

@ **Diện tích hình phẳng**

1. Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x); y = 0; x = a; x = b$ là $S = \int_a^b |f(x)|dx$

Lưu ý : Nếu $f(x) = 0$ có nghiệm $x = c \in [a,b]$ thì $S = \int_a^c |f(x)|.dx + \int_c^b |f(x)|.dx$

2. Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x); y = 0$ là $S = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|dx$ với x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là hai nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. **(Lập phương trình hoành độ giao điểm)**

3. Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x); y = g(x); x = a; x = b$ là $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$

Lưu ý: Nếu $f(x) - g(x) = 0$ có nghiệm $x = c \in (a;b)$ thì

$S = \int_a^c |f(x) - g(x)|dx + \int_c^b |f(x) - g(x)|dx$

4. Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x); y = g(x)$ là $S = \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)|dx$ với x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là hai nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. **(Lập phương trình hoành độ giao điểm)**

@ **Thể tích khối tròn xoay khi hình (H) quay quanh Ox**
1. (H): $\begin{cases} y=f(x); y=0 \\ x=a; x=b \end{cases} \Rightarrow V=\pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$
2. (H): $\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow V=\pi\int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2 dx$ với x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là hai nghiệm của phương trình $f(x)=0$.

CHUYÊN ĐỀ 4: SỐ PHỨC

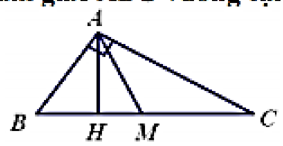
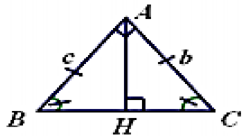
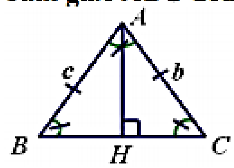
1. **Số phức:** là biểu thức có dạng *a+bi* trong đó $a, b \in R$; $i^2 = -1$
   Kí hiệu: $z = a+bi$ trong đó a gọi là ***phần thực***, b gọi là ***phần ảo***; i gọi là ***đơn vị ảo***
   Chú ý: + Tập số phức kí hiệu là C (Complex)
   + Mỗi số thực a được coi là số phức với phần ảo bằng 0 (số thực cũng là số phức tức $R \subset C$)
   + Số 0 + bi gọi là số ***thuần ảo***
2. **Biểu diễn hình học của số phức**
   Mỗi số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi một điểm M(a;b) trong hệ trục tọa độ Oxy
3. **Mô đun của số phức:** Độ dài của $\overrightarrow{OM}$ được gọi là mô đun của số phức Z. Kí hiệu:
   $|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$
4. **Số phức liên hợp:** Số phức liên hợp của $z = a+bi$ là $\bar{z} = a - bi$ *Chú ý*:
   $\bar{\bar{z}} = z$; $|\bar{z}| = |z|$
5. **Các phép toán về số phức**: cho $z_1 = a_1 + b_1 i$; $z_2 = a_2 + b_2 i$

Số phức bằng nhau (thực = thực; ảo = ảo)	$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$
Cộng, trừ số phức (tương ứng)	$z_1 + z_2 = (a_1+b_1 i)+(a_2+b_2 i) = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$ $z_1 - z_2 = (a_1+b_1 i)-(a_2+b_2 i) = (a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$
Nhân 2 số phức	$z_1.z_2 = (a_1+b_1 i).(a_2+b_2 i) = (a_1.a_2 - b_1 b_2)+(a_1 b_2 + a_2 b_1)i$
Chia số phức cho số phức	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1.\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1.\overline{z_2}}{\lvert z_2\rvert^2}$ hay $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i} = \frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{a_2^2+b_2^2}$

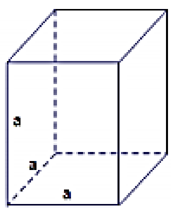
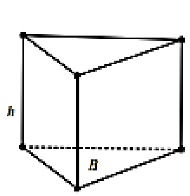
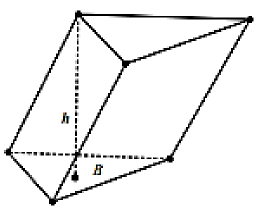
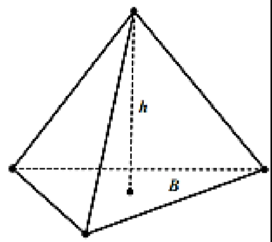
Nghịch đảo của số phức	$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\lvert z\rvert^2}$

6. **Phương trình bậc hai với hệ số thực** $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ $a, b, c \in R$
   Tính $\Delta = b^2 - 4ac$
   + Nếu $\Delta > 0$ thì ph.trình có 2 nghiệm thực phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
   + Nếu $\Delta = 0$ thì ph.trình có 1 nghiệm thực $x = -\frac{b}{2a}$
   + Nếu $\Delta < 0$ thì ph.trình có 2 nghiệm phức phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$
   Chú ý: trên tập số phức C mọi ph.trình bậc hai đều có nghiệm (không nhất thiết phân biệt)

CHUYÊN ĐỀ 5: THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

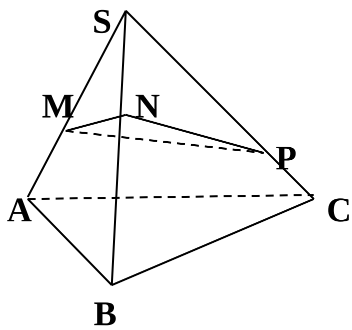
MỘT SỐ VẤN ĐỀ CẦN NẮM		
Tam giác ABC vuông tại A  Pitago $BC^2 = AB^2 + AC^2$ $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ $AH^2 = BH.CH$; $AM = \frac{BC}{2}$ $AB^2 = AB.BH$; $AC^2 = AC.CH$ $S = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}BC.AH$	**Tam giác ABC vuông cân tại A**  AB=AC $\hat{B} = \hat{C} = 45^0$ $AH = AB\frac{\sqrt{2}}{2}$ $S = \frac{1}{2}BC.AH = \frac{AB^2}{2}$ $S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A$	**Tam giác ABC đều**  AB=AC=BC $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^0$ $AH = AB\frac{\sqrt{3}}{2}$ $S = \frac{1}{2}BC.AH = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$ $S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A$
Hình chữ nhật ABCD $BD^2 = AB^2 + AD^2$ $S = AB.AD$	**Hình vuông ABCD** $AC = BD = AB\sqrt{2}$ $S = AB^2$	**Hình thang ABCD** $S = \left(\frac{AD + BC}{2}\right)AH$

1) Công thức tính thể tích

KHỐI LĂNG TRỤ	KHỐI CHÓP	KHỐI CHÓP CỤT
$V = B.h$ Trong đó: B,B' là diện tích đáy và h là chiều cao. ○Thể tích của khối hộp chữ nhật. $\boxed{V = abc}$ (a, b, c là 3 kích thước) ○ Thể tích của khối lập phương. $\boxed{V = a^3}$   	 $V = \frac{1}{3}B.h$	$V = \frac{1}{3}(B + B' + \sqrt{BB'}).h$

2) Công thức tỷ số thể tích

$$\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC}$$

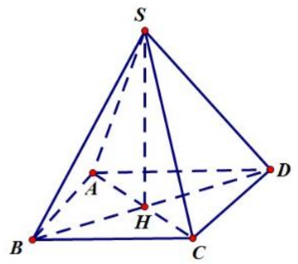


3) Ứng dụng thể tích để tính khoảng cách.

$$d_{(S;(ABC))}=\frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta ABC}},\ d_{(A;(SBC))}=\frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SBC}},\ldots\ldots$$

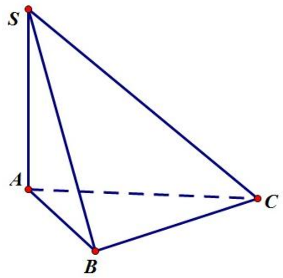
4) Một số hình chóp thường gặp và cách xác định chiều cao.

- Hìn chóp đều: Đường cao là đường nối đỉnh của hình chóp với tâm của đa giác đáy



- **Hình Chóp có cạnh bên vuông góc với đáy:**

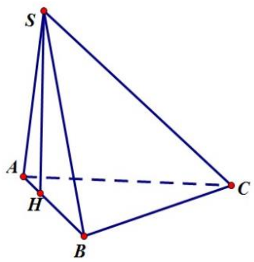
  + Nếu cạnh bên *SA* vuông góc với đáy thì đường cao chính *SA*



  + Nếu giả thiết cho hai mặt bên *(SAB)* và *(SAC)* cùng vuông góc với đáy thì vì $(SAB)\cap(SAC)=SA\Rightarrow SA\perp(ABC)$ nên đường cao là *SA*.

- **Hình chóp có mặt bên vuông góc với đáy**

  Giả sử hình chóp *S.ABC* có mặt bên *SAB* vuông góc với đáy. Khi đó đường cao hình chóp chính là đường cao *SH* của tam giác *SAB*



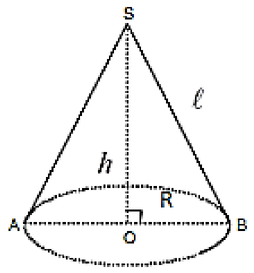
5) Chiều cao của lăng trụ:

+ Nếu là lăng trụ đứng thì chiều cao chính là cạnh bên của lăng trụ

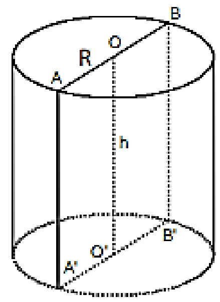
+ Nếu là lăng trụ thường thì chiều cao là khoảng cách từ 1 đỉnh bất kỳ tới mặt phẳng đáy còn lại

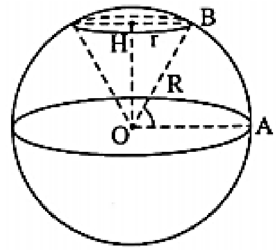
CHUYÊN ĐỀ 6: MẶT CẦU – MẶT TRỤ - MẶT NÓN

MẶT CẦU, MẶT TRỤ, MẶT NÓN		
NÓN	TRỤ	CẦU
$S_{xq}=\pi.R.l$ $S_{tp}=S_{xq}+S_{day}$ $V=\frac{1}{3}\pi R^2h$ (R: bán kính đáy, l : độ dài đường sinh, h : đường cao)	$S_{xq}=2\pi R.l$ $S_{tp}=S_{xq}+2S_{day}$ $V=\pi R^2h$ Hình	$S=4\pi R^2$ $V=\frac{4}{3}\pi R^3$



$\ell^2 = h^2 + R^2$





CHUYÊN ĐỀ 7: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

VẤN ĐỀ 1: CÁC CÔNG THỨC TOẠ ĐỘ CẦN NẮM

TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM & VECTƠ	
Vectơ $\vec{a}=(x_a;y_a;z_a)\Leftrightarrow \vec{a}=x_a\vec{i}+y_a\vec{j}+z_a\vec{k}.$ $\vec{0}=(0;0;0)$ *(vec tơ không)* $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$ *(sau – trước)* **Độ dài** $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$	* M là **trung điểm** của AB: $M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$ * G là **trọng tâm** tam giác ABC $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$

BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ	
Trong không gian Oxyz cho $\vec{a}=(x_a;y_a;z_a)$ $\vec{b}=(x_b;y_b;z_b)$	
$\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}x_a=x_b\\y_a=y_b\\z_a=z_b\end{cases}$; $\left\|\vec{a}\right\|=\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}$	$\vec{a}+\vec{b}=(x_a+x_b;y_a+y_b;z_a+z_b)$ $\vec{a}-\vec{b}=(x_a-x_b;y_a-y_b;z_a-z_b)$
Nhân vectơ với 1số (<u>kq là 1vectơ cùng hướng nếu k>0 và ngược hướng nếu k<0</u>)	*Tích có hướng(<u>kq là 1 vectơ vuông góc với cả 2 vectơ thành phần</u>)*

$k.\vec{a}=(kx_a;ky_a;kz_a),\ k\in R$ *Ứng dụng: chứng minh 2 vectơ cùng phương* Với $\vec{b}\neq\vec{0},\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}$ $\Leftrightarrow\vec{a}=k\vec{b}\Leftrightarrow x_a=kx_b,y_a=ky_b,z_a=kz_b$	$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}y_a&z_a\\y_b&z_b\end{vmatrix};\begin{vmatrix}z_a&x_a\\z_b&x_b\end{vmatrix};\begin{vmatrix}x_a&y_a\\x_b&y_b\end{vmatrix}\right)$ *Ứng dụng: chứng minh 2 vec tơ cùng phương* $\vec{a}$ cp $\vec{b}\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$ (sgk HH12 nâng cao) *Ứng dụng: tính diện tích tam giác* $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right\|$ *Ứng dụng: tính thể tích tứ diện ABCD* $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right\|$
Tích vô hướng: $\vec{a}.\vec{b}=x_ax_b+y_ay_b+z_az_b$ *Ứng dụng:* $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0$	
Góc giữa 2 vec tơ $\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}$ $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left\|\vec{a}\right\|.\left\|\vec{b}\right\|}=\frac{x_ax_b+y_ay_b+z_az_b}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}.\sqrt{x_b^2+y_b^2+z_b^2}}$	

<u>@Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M(x;y;z) trên các trục và mặt phẳng tọa độ</u>

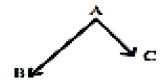
Hình chiếu trên Ox	Hình chiếu trên Oy	Hình chiếu trên Oz	Hình chiếu trên (Oxy)	Hình chiếu trên (Oyz)	Hình chiếu trên (Oxz)
$M_1(x;0;0)$	$M_2(0;y;0)$	$M_3(0;0;z)$	$M_4(x;y;0)$	$M_5(0;y;z)$	$M_6(x;0;z)$

(khi chiếu vuông góc một điểm lên trục nào(mp tọa độ nào) thì tọa độ hình chiếu của nó chỉ còn thành phần tương ứng với trục đó(mp tọa độ đó))

@ Tọa độ điểm đối xứng của điểm M(x;y;z) qua các trục, mặt phẳng tọa độ, gốc tọa độ

Đối xứng qua Ox	Đối xứng qua Oy	Đối xứng qua Oz	Đối xứng qua (Oxy)	Đối xứng qua (Oyz)	Đối xứng qua (Oxz)	Đối xứng qua O
$M_1(x;-y;-z)$	$M_2(-x;y;-z)$	$M_3(-x;-y;z)$	$M_4(x;y;-z)$	$M_5(-x;y;z)$	$M_6(x;-y;z)$	$M_7(-x;-y;-z)$

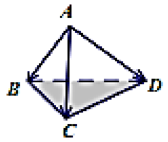
@ Chứng minh A, B, C không thẳng hàng (hay là 3 đỉnh của 1 tam giác)



○ A, B, C không thẳng hàng $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] \neq \vec{0}$

○ Hoặc viết ptts đ.thẳng BC, kiểm tra thấy A không thuộc BC (*tức là khi thay tọa độ của A vào ph.trình đường BC thấy không thỏa*)

@ Chứng minh A, B, C, D không đồng phẳng (hay là 4 đỉnh của 1 tứ diện)



○ A, B, C, D không đồng phẳng $\Leftrightarrow$ $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} \neq 0$

○ Hoặc viết pttq của mp (BCD)

Kiểm tra thấy A không thuộc mp (BCD). (*tức là thay tọa độ điểm A vào ph.trình mp (BCD) thấy không thỏa*)

VẤN ĐỀ 2: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

MẶT PHẲNG

@ Phương trình tổng quát của mp (P): $\mathbf{Ax+By+Cz+D=0}$ trong đó $\mathbf{A^2+B^2+C^2 \neq 0}$

@ Công thức viết pttq mp (P) khi biết **1 điểm** $\mathbf{M_0(x_0;y_0;z_0)}$ và **1 vectơ pháp tuyến** $\vec{n} = (A;B;C)$ là $\mathbf{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$ **(*)**

(Chú ý: *vectơ pháp tuyến có thể tìm từ* ***tích có hướng của 2 vec tơ không cùng phương*** *với mặt phẳng***)**

@ Phương trình các mp tọa độ

Mp Oxy	Mp Oxz	Mp Oyz
z = 0	**y = 0**	**x = 0**

@ Một số trường hợp đặc biệt của mặt phẳng

- Phương trình mặt phẳng qua gốc toạ độ là Ax+By+Cz = 0
- Phương trình mặt phẳng qua ba điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$, với $abc \neq 0$ là

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

@ Tính khoảng cách: từ điểm $\mathbf{M_0(x_0;y_0;z_0)}$ **đến mặt phẳng (P):** $\mathbf{Ax+By+Cz+D=0}$

$$\boxed{d(M_0,(P)) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

@ Vị trí tương đối giữa 2 mặt phẳng (P): $\mathbf{A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0}$ **và (Q):** $\mathbf{A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0}$

VTPT của (P) là $\vec{n}_P = (A_1;B_1;C_1)$

VTPT của (Q) là $\vec{n}_Q = (A_2;B_2;C_2)$

$\vec{n}_P \neq k\vec{n}_Q$ → (P) cắt (Q)

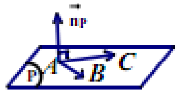
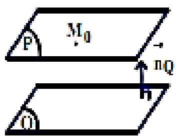
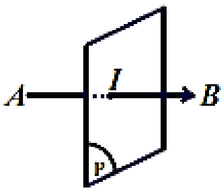
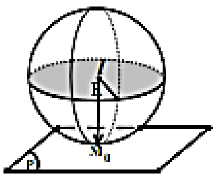
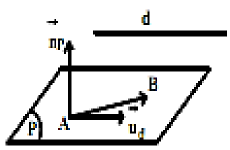
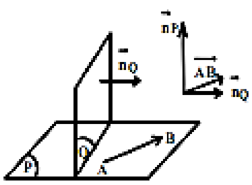
$\vec{n}_P = k\vec{n}_Q$:
- $D_1 \neq kD_2$ → (P) // (Q)
- $D_1 = kD_2$ → (P) ≡ (Q)

Lưu ý: (P)⊥ (Q) $\Leftrightarrow \vec{n}_P.\vec{n}_Q = 0$

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_1}\neq\frac{D_1}{D_2}$$ thì **(P) song song (Q)**

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_1}=\frac{D_1}{D_2}$$ **thì (P) trùng với (Q**

CÁC DẠNG TOÁN VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG THƯỜNG GẶP:

DẠNG TOÁN	CÁCH GIẢI
Dạng 1: Viết ph.trình mp đi qua 3 điểm A, B, C không thẳng hàng 	○ $A \in (P)$ (hoặc B, hoặc C) ; VTPT là $\vec{n}_P = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$
Dạng 2 : Viết ph.trình mp(P) đi qua điểm M0(x0;y0;z0) và song song với mp (Q):Ax+By+Cz+D=0. 	Cách 1: ○ $M_0 \in (P)$; VTPT là $\vec{n}_P = \vec{n}_Q = (A;B;C)$ Cách 2: ○ Vì (P) // (Q) nên ph.trình (P) có dạng: Ax+By+Cz+D'=0 $M_0 \in (P)$. Thế tọa độ M_0 vào pt (P) tìm D'
Dạng 3: Viết ph.trình mp(P) đi qua điểm $A(x_A;y_A;z_A)$ và vuông góc với đ.thẳng d:	○ $A \in (P)$; VTCP của d cũng là VTPT của mp (P): $\vec{n}_P = \vec{u}_d = (a;b;c)$
Dạng 4: Viết ph.trình mp trung trực của đoạn AB với $A(x_A;y_A;z_A)$ $B(x_B;y_B;z_B)$ 	○ Gọi I là trung điểm của AB, ta có $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right) \in (P)$ VTPT là $\vec{n}_P = \overrightarrow{AB}$
Dạng 5: Viết ph.trình mp (P) tiếp xúc mặt cầu (S) tại $M_0(x_0;y_0;z_0)$ (p): Mặt phẳng tiếp diện 	○ Tìm tâm I của mặt cầu (S) ○ $M_0 \in (P)$; VTPT là $\overrightarrow{M_0I}$ (hay $\overrightarrow{IM_0}$)
Dạng 6: Viết ph.trình mp (P) qua 2 điểm phân biệt A, B và song song với đ.thẳng d $\begin{cases} x = x_0 + a.t \\ y = y_0 + b.t \\ z = z_0 + c.t \end{cases}$ 	○ $A \in (P)$ (hoặc là B); VTPT $\overrightarrow{n_P} = \left[\vec{u}_d, \overrightarrow{AB}\right]$
Dạng 7: Viết ph.trình mp(P) qua 2 điểm phân biệt A, B và vuông góc với mp (Q):Ax+By+Cz+D=0. 	○ $A \in (P)$ (hoặc là B); VTPT $\vec{n}_P = \left[\vec{n}_Q, \overrightarrow{AB}\right]$ ○ Thay vào pt (*)

VẤN ĐỀ 3: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

ĐƯỜNG THẲNG

@ <u>Đường thẳng</u> d đi qua điểm $M_0\ x_0;y_0;z_0$ và có 1 vectơ chỉ phương $\overline{u} = (x_u;y_u;z_u)$

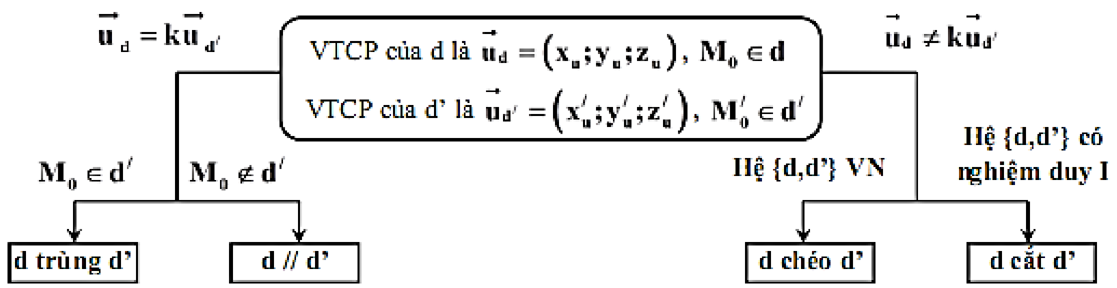
có ph.trình tham số $\begin{cases} x = x_0 + x_u t \\ y = y_0 + y_u t \\ z = z_0 + z_u t \end{cases}$ $(t \in R)$ (*) và ph.trình chính tắc $\dfrac{x - x_0}{x_u} = \dfrac{y - y_0}{y_u} = \dfrac{z - z_0}{z_u}$

@ <u>Phương trình các trục tọa độ</u>

Trục Ox	Trục Oy	Trục Oz
$x = t; y = 0; z = 0$	$x = 0; y = t; z = 0$	$x = 0; y = 0; z = t$

@ <u>Vị trí tương đối của 2 d.thẳng</u>

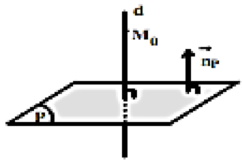
Trong không gian Oxyz cho 2 đường thẳng d $\begin{cases} x = x_0 + x_u t \\ y = y_0 + y_u t \\ z = z_0 + z_u t \end{cases}$ $(t \in R)$ và d' $\begin{cases} x = x'_0 + x'_u t' \\ y = y'_0 + y'_u t' \\ z = z'_0 + z'_u t' \end{cases}$ $(t' \in R)$

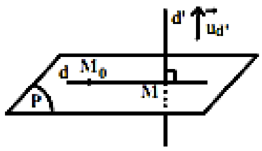
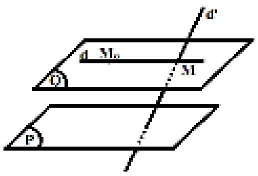


XÉT HỆ PHƯƠNG TRÌNH : $\begin{cases} x_o + a_1 t = x'_o + a'_1 t' \\ y_o + a_2 t = y'_o + a'_2 t' \\ z_0 + a_3 t = z'_o + a'_3 t' \end{cases}$ (I)

Quan hệ giữa $\vec{u}$ và $\vec{u'}$	Hpt (I)	Vị trí giữa d và d'
Cùng phương	Có nghiệm	$d \equiv d'$
	Vô nghiệm	d //d'
Không cùng phương	Có nghiệm **duy I**	d cắt d'
	Vô nghiệm	d và d' chéo nhau

Một số bài toán thường gặp về phương trình đường thẳng

DẠNG	CÁCH GIẢI
Dạng 1: Viết ph.trình đ.thẳng d đi qua 2 điểm $A(x_A;y_A;z_A)$ $B(x_B;y_B;z_B)$ 	○ $A \in d$ (hoặc B) ; VTCP $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$. ○ Thế vào phương trình (*) Có thể dùng pt: $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}$
Dạng 2: Viết ph.trình đ.thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và song song với đ.thẳng $d': \begin{cases} x = x'_0 + x'_u t \\ y = y'_0 + y'_u t \\ z = z'_0 + z'_u t \end{cases}$	○ $M_0 \in d$; VTCP $\overrightarrow{u}_d = \overrightarrow{u}_{d'} = (x'_u; y'_u; z'_u)$. ○ Thế vào phương trình (*) *(Nếu d song song với trục tọa độ thì có thể dùng vectơ đơn vị làm VTCP cho d)*
Dạng 3: Viết ph.trình đ.thẳng d đi qua 1 điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc với mặt phẳng (P): Ax+By+Cz+D=0 	○ $M_0 \in d$; VTPT của (P) cũng là VTCP của d $\overrightarrow{n}_P = \overrightarrow{u}_d = (A;B;C)$ ○ Thế vào phương trình (*)

Dạng 4: Viết ph.trình đ.thẳng d qua điểm M_0, vuông góc và cắt d' 	○ Viết pttq mp (P) qua M_0 và vuông góc với d' ○ Xác định $M = d' \cap (P)$ *(giải hpt {d',(P)})* ○ Viết ptts của d qua 2 điểm M_0, M
Dạng 5: Viết ph.trình đ.thẳng d qua điểm M_0, song song với mp (P) và cắt đ.thẳng d' 	○ Viết pttq mp (Q) qua M_0 và song song mp (P) ○ Tìm $M = d' \cap (Q)$ ○ Viết ptts của d qua 2 điểm M_0, M

@ Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Trong không gian Oxyz cho đường thẳng d $\begin{cases} x = x_0 + x_u t \\ y = y_0 + y_u t \\ z = z_0 + z_u t \end{cases}$ và mặt phẳng (P): $Ax + By + Cz + D = 0$

Xét phương trình $A(x_0 + x_u t) + B(y_0 + y_u t) + C(z_0 + z_u t) + D = 0$ (*) (t là ẩn)		
Nếu (*) vô nghiệm thì $d \,//\, (P)$	Nếu (*) có đúng 1 nghiệm $t = t_0$ thì d cắt (P) tại 1 điểm là $M_0(x_0 + x_u t_0; y_0 + y_u t_0; z_0 + z_u t_0)$	Nếu (*) có vô số nghiệm thì $d \subset (P)$

Chú ý:

+ Nếu $\overrightarrow{n_p}.\overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow d \subset (P)$ hoặc $d // (P)$

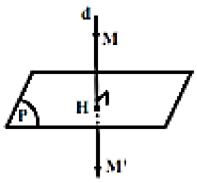
+ Nếu $\overrightarrow{n_p} = k\overrightarrow{u_d}$ thì $d \perp (P)$

+ Nếu gọi φ là góc giữa *d* và *(P)* thì

$$\sin\varphi = \left|\cos(\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{n_p})\right| = \frac{\left|\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_p}\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|.\left|\overrightarrow{n_p}\right|}$$

MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN GIỮA ĐƯỜNG THẲNG & MẶT PHẲNG

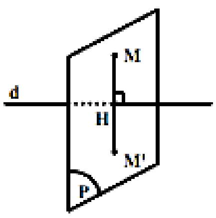
Dạng 1 : Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của M trên mp (P)

	○ Viết ptts của đ.thẳng d qua M và vuông góc mp (P) ○ Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên (P), H là giao điểm của d và (P). Giải hpt $\begin{cases} d \\ (P) \end{cases}$ tìm H **Giải nhanh :** Trong không gian Oxyz cho mp(α): $Ax + By + Cz + D = 0$. Hình chiếu $H(x;y;z)$ của điểm $M(x_M;y_M;z_M)$ lên mặt phẳng (α) được xác định theo công thức : $\begin{cases} x = x_M + A.k \\ y = y_M + B.k \\ z = z_M + C.k \end{cases}$ Với $k = -\left(\dfrac{A.x_M + B.y_M + C.z_M + D}{A^2 + B^2 + C^2}\right)$ *(Nếu M' là điểm đối xứng với M qua (P) thì H là trung điểm của MM', áp dụng công thức tọa độ trung điểm ta tìm tọa độ của M')* **Giải nhanh :** Trong không gian Oxyz cho mp(α): $Ax + By + Cz + D = 0$. Tọ độ của Điểm $M'(x;y;z)$ đối xứng với $M(x_M;y_M;z_M)$ qua mặt phẳng (α) được xác định theo công thức :

	$\begin{cases} x = x_M + 2A.k \\ y = y_M + 2B.k \\ z = z_M + 2C.k \end{cases}$ Với $k = -\left(\dfrac{A.x_M + B.y_M + C.z_M + D}{A^2 + B^2 + C^2}\right)$

Dạng 2: Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của M trên d.thẳng d

PHƯƠNG PHÁP: Giống như Tìm toa độ hình chiếu vuông góc của điểm M trên mp (P)

	○ Viết pttq của mp (P) qua M và vuông góc đ.thẳng d ○ Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên d, H là giao điểm của d và (P). Giải hpt $\begin{cases} d \\ (P) \end{cases}$ tìm H

Cách khác: Giả sử $d \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ x = z_0 + ct \end{cases}$

+ Gọi H là hình chiếu của M trên $d \Rightarrow H(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$

+ $MH \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{u_d} = 0 \Rightarrow t \Rightarrow H$

VẤN ĐỀ 4 : GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN

◈ GÓC:

1. ***Góc giữa hai đường thẳng : Góc giữa hai VTCP***

Cho $\overrightarrow{u_1}$ là VTCP của đường thẳng Δ_1 và $\overrightarrow{u_2}$ là VTCPcủa đường thẳng Δ_2

$$\text{Cos}(\Delta_1 ; \Delta_2) = /\text{Cos}(\overrightarrow{u_1} ; \overrightarrow{u_2})/ = \frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$$

2. ***Góc giữa hai mặt phẳng : Góc giữa hai VTPT***

Cho $\overrightarrow{n_1}$ là VTPT của mp (α) và $\overrightarrow{n_2}$ là VTPT của mp (β)

$$\text{Cos}\left((\alpha);(\beta)\right) = /\text{Cos}(\overrightarrow{n_1} ; \overrightarrow{n_2})/ = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$$ (Tích vô hướng chia tích độ dài)

3.Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng : Là góc giữa làVTCP $\vec{u}$ của đường thẳng Δ và VTPT$\vec{n}$ của mp (α)

$$\text{Sin}(\Delta;(\alpha)) = /\text{Cos}(\vec{u} ; \vec{n})/ = \frac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|}$$

◈ KHOẢNG CÁCH :

LOẠI 1 : KHOẢNG CÁCH CỦA MẶT PHẲNG .

1. ***Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng:***

Cho điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và mặt phẳng (α): A.x + B.y + Cz + D = 0

$$\Rightarrow \boxed{d(M; (\alpha)) = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

2. ***Khoảng cách từ đường thẳng đến mặt phẳng song song***

Cho đường thẳng $\Delta \parallel (\alpha)$: $Ax + By + Cz + D = 0$, $M_0(x_0;y_0;z_0)$ là một điểm thuộc Δ

$$\boxed{d\left(\Delta,(\alpha)\right) = d\left(M_0;(\alpha)\right) = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

3. **Khoảng *cách giữa hai mặt phẳng song song :*** Bằng khoảng cách từ một điểm nằm trên mặt phẳng này đến mặt phẳng còn lại

Cho hai mặt phẳng song song $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và $(\beta): A'x + B'y + C'z + D' = 0$, $M_0(x_0;y_0;z_0)$ là một điểm $\in (\alpha)$. Khi đó

$$\boxed{d\left((\alpha),(\beta)\right) = d\left(M_0;(\beta)\right) = \frac{\left|A'x_0 + B'y_0 + C'z_0 + D'\right|}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}}$$

LOẠI 2 : KHOẢNG CÁCH CỦA ĐƯỜNG THẲNG .

1. *Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng:* Khoảng cách từ điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ đến đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$; $M_0(x_0; y_0; z_0) \in \Delta, VTCP\ \vec{u} = (a;b;c)$; được tính bởi CT:

$$\boxed{d(M,\Delta) = \frac{\left|\left[\vec{u}, \overrightarrow{M_0M}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}}$$

2. *Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song :*

Bằng khoảng cách từ một điểm nằm trên đường thẳng này đến đường thẳng còn lại, nghĩa là

$$\boxed{d(\Delta,\Delta') = d(M_0,\Delta') = \frac{\left|\left[\vec{u'}, \overrightarrow{M_0M_0'}\right]\right|}{\left|\vec{u'}\right|}}\ ,\ M_0 \in \Delta.$$

3. *Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau*

Nếu đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có $VTCP\ \vec{u} = (a;b;c)$

Đường thẳng Δ' đi qua điểm $M_0'(x_0'; y_0'; z_0')$ và có $VTCP\ \vec{u'} = (a';b';c')$ thì

$$\boxed{d(\Delta,\Delta') = \frac{\left|\left[\vec{u}, \vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'}\right|}{\left|\left[\vec{u}, \vec{u'}\right]\right|}}$$

VẤN ĐỀ 5: MẶT CẦU

Trong không gian Oxyz, mặt cầu (S) tâm I(a;b;c) và bán kính R có phương trình là

Dạng 1: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

Dạng 2: $x^2 + x^2 + z^2 - 2Ax - 2By - 2Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 - D > 0$

Tâm $I(A;\ B;\ C)$; bán kính $R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}$

MỘT SỐ DẠNG TOÁN VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

✍1: Nếu có dữ kiện liên quan đến bán kính hoặc tiếp xúc

⇒ Phương trình mặt cầu có dạng : $\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2}$

✍2: Nếu không có dữ kiện liên quan đến bán kính hoặc tiếp xúc

⇒ Phương trình mặt cầu có dạng : $\boxed{x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0}$

Dạng	Cách giải
Dạng 1: (S) có tâm I (a; b; c) và đi qua điểm $M(x_M; y_M; z_M)$	○Bán kính $R = IM = \sqrt{(x_M - a)^2 + (y_M - b)^2 + (z_M - c)^2}$ ○Viết phương trình dạng 1.
Dạng 2: (S) có đường kính AB với $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$	○Tâm I là trung điểm của AB $\to I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$ ○Bán kính $R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}{2}$ ○Viết phương trình dạng 1.

Dạng 3: (S) có tâm I(a;b;c), tiếp xúc với mp(P) Ax+By+Cz+D=0	○Bán kính $R = d(I,(P)) = \frac{\lvert Aa+Bb+Cc+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ ○Viết phương trình dạng 1.
Dạng 4: (S) đi qua 4 điểm A, B, C, D không đồng phẳng *(hay (S) ngoại tiếp tứ diện ABCD)*	○Viết phương trình mặt cầu (S) **dạng 2.** ○Lần lượt **thay các điểm vào phương trình mặt cầu,** ta được hệ phương trình với các ẩn cần tìm là **A, B, C, D.** ○Thay A, B, C, D vào phương trình của (S)
Dạng 5: (S) có tâm thuộc trục tọa độ và qua 2 điểm	○Nhận dạng tọa độ tâm I Nếu I∈Ox thì I(A;0;0); I∈Oy thì I(0;B;0); I∈Oz thì I(0;0;C) ○Thay tọa độ các điểm vào ph.trình (S) ta được hệ 2 ph.trình 2 ẩn ○Giải hpt tìm 2 ẩn thay vào ph.trình (S)
Dạng 6: (S) có tâm thuộc mp tọa độ và qua 3 điểm	○Nhận dạng tọa độ tâm I Nếu I∈(Oxy) thì I(A;B;0); I∈(Oyz) thì I(0;B;C); I∈(Oxz) thì I(A;0;C) ○Thay tọa độ các điểm vào ph.trình (S) ta được hệ 3 ph.trình 3 ẩn ○Giải hpt tìm 3 ẩn thay vào ph.trình (S)
Dạng 7: Tìm tọa độ tâm I và bán kính R.	○Nếu phương trình mặt cầu dạng 1: **Xác định các số a, b, c, R** → Tâm I(a;b;c) ; bán kính là R ○Nếu phương trình mặt cầu dạng 2: **So sánh hệ số x,y,z tìm A, B, C, D** $\rightarrow \begin{cases} \text{Tâm } I(A;B;C) \\ \text{BK } R = \sqrt{A^2+B^2+C^2-D} \end{cases}$

1. Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu

Cho mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và mặt cầu $(S): (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

(S) có tâm $I(a;b;c)$, bán kính R . Gọi $d = d(I;(\alpha)) = \frac{\lvert A.a+B.b+C.c+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

+Nếu $d > R \Rightarrow$ (α) và (S) không giao nhau.

+Nếu $d = R \Rightarrow$ (α) và (S) tiếp xúc nhau tại một điểm H. ((α) gọi là tiếp diện của mặt cầu (S)).

+Nếu $d < R \Rightarrow$ (α) *và (S) cắt nhau theo giao tuyến là một đường tròn (C) có bán kính*

$r = \sqrt{R^2-d^2}$ *và có tâm H là hình chiếu vuông góc của I trên* (α).

2. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu

Cho đường thẳng thẳng $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ và mặt cầu (S):$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

Gọi $d = d(I,\Delta) = \frac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{M_0I}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$, trong đó $M_0(x_0;y_0;z_0)\in\Delta$, $\vec{u}=(a;b;c)$ là VTCP của Δ

+Nếu $d > R \Rightarrow$ Δ và (S) không có điểm chung

+Nếu $d = R \Rightarrow$ Δ tiếp xúc với (S) (Δ là tiếp tuyến của mặt cầu (S))

+Nếu $d < R \Rightarrow$ Δ cắt (S) tại hai điểm A, B (Δ gọi là cát tuyến của mặt cầu (S))

3. Vị trí tương đối giữa một điểm và mặt cầu

Cho điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và mặt cầu (S): $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$, tâm $I(a;b;c)$, bán kính R thì $MI=\sqrt{(a-x_0)^2+(b-y_0)^2+(c-z_0)^2}$

+ Nếu $MI>R$ thì điểm M nằm ngoài mặt cầu (S)

+ Nếu $MI=R$ thì điểm M nằm trên mặt cầu (S)

+ Nếu $MI<R$ thì điểm M nằm trong mặt cầu (S)