

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Кафедра Математической Физики



Выпускная квалификационная работа по теме:

**“Методы выявления скрытых периодичностей в
экономических процессах”**

Исполнитель: студент 431 группы
Нгуен Минь Лам

Научный руководитель:
профессор Дмитриев В.И.

Москва 2008

Содержание

1. Введение	3
2. Постановка задачи	5
3. Методы решения	6
3.1. Выделение тренда	7
3.2. Метод выявления низкочастотной части процесса.....	10
3.3. Метод усреднения процесса за пробный период	13
3.4. Корреляционные методы.....	14
3.5. Построение периодограммы.	18
4. Численное решение модельной задачи.....	21
5. Заключение	37
6. Приложение.....	38
7. Список литературы	44

1. Введение

Задача о выявление скрытой периодичности может быть сформулирована следующим образом. На конечном интервале $[-L, L]$ задана функция $x(t)$, представляющая собой результат наблюдения некоторого процесса. Может быть сказать, что функция $x(t)$ содержит слагаемое, представляющее собой периодическую функцию времени $s(t)$:

$$x(t) = s(t) + p(t) \quad (1.1)$$

$p(t)$ – некоторая функция.

$s(t)$ – периодическая функция, определяется значением ее периода T (или частоты $\omega = \frac{2\pi}{T}$), и значениями коэффициентов ряда Фурье:

$$s(t) = \sum_{r=1}^{\infty} (a_r \cos r\omega t + b_r \sin r\omega t) \quad (1.2)$$

Задача выявления скрытой периодичности $s(t)$ будет полностью решена, если вычислены параметры T, a_r, b_r .

Но решение часто ограничивают вычислением только параметров первой гармоники, т.е.

$$x(t) = a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + p(t) \quad (1.3)$$

В $p(t)$ возможно существующие в $x(t)$ высшие гармоники искомой периодической компоненты с периодом отличное от T , и мы получим:

$$x(t) = \sum_{n=1}^N s_n(t) + n(t) \quad (1.4)$$

$s_j(t)$ – периодических функций, имеют периоды T_n .

$n(t)$ – непериодическая функция.

Если $n(t) \approx 0$, то процесс называется почти-периодической (или полигармонической).

Предлагаем, что процесс $x(t)$ является полигармоническим, т.е. представляет собой сумму известного конечного числа гармоник с неизвестными амплитудами и частотами :

$$x(t) = \sum_{n=1}^N (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \quad (1.5)$$

В этом случае нужно искать $3N$ неизвестных параметров $a_n, b_n, T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$. $n \in [1, N]$. Это можно сделать если зная значения $x(t)$ в $3N$ точках. Определение линейно входящих параметров a_n, b_n при известных T_n не представляет особых трудностей. Основной проблемой является составление и решение уравнения для определения T_n , так называемого частотного уравнения.

Решение проблемы выявления скрытых периодичностей состоит в использовании различного вида преобразований исходного процесса $x(t)$, позволяющих усилить в преобразованном процессе $x^{(1)}(t)$ роль периодической компоненты (см. в п. 3).

В формуле (1.1) можно рассматривать $s(t)$ как «полезный», а $p(t)$ как «помеху». Нам нужно определить преобразования $F\{x(t)\}$, которое осуществляет приближение $x^{(1)}(t) = F\{x(t)\} \approx s(t)$.

Если считаем, что $x^{(1)}(t) \approx s(t)$, то задача определения параметров сводится к обычному гармоническому анализу периодической функций.

2. Постановка задачи

Мы знаем, что многие важные прикладные проблемы моделируются в виде временных процессов. В экономике часто изменяют цена акция, ... возникает вопрос как можно выделить периоды или циклы. Экономические циклы обозначающий регулярные колебания уровня деловой активности от экономического бума до экономического спада. Тоже самое и для выделения периоды в фондовом рынке (составная часть рынка капиталов, рынок торговли акциями, как допущенными к торгам на какой-либо бирже, так и торгуемыми вне биржи).

Nikkei 225 – один из важнейших биржевых индексов Японии. Индекс вычисляется как среднее взвешенное значение цен акций 225 наиболее активно торгуемых компаний первой секции Токийской фондовой биржи.

Впервые индекс был опубликован 7 сентября 1950 года Токийской фондовой биржей под названием «TSE Adjusted Stock Price Average». С 1970 года индекс вычисляется японской газетой Nihon Keizai Shimbun. Новое название индекса произошло от сокращенного названия газеты – Nikkei.

Мы будем исследовать процесс динамика изменения индекса Nikkei-225 (Япония) с 1/1/2000 – 31/3/2008.



**Рис. 1: Динамика изменения индекса Nikkei-225, Япония
1/1/2000 – 31/3/2008**

(Праздники и выходные дни не входят, то считаем, что 1 год \approx 250 дней).

В нашей задаче нужно выделить циклы на всем интервале с помощью методов выявления скрытых периодичностей.

3. Методы решения

Мы знаем, что изучаемый процесс состоит из нескольких независимых процессов. Каждый из этих процессов, являющийся составной частью общего процесса, имеет свое характерное время $T_n, n \in [1, N]$, за которое происходит существенное изменение процесса. Время изучения общего процесса T должно быть больше чем всех $T_n, n \in [1, N]$.

Основными составляющими общего процесса являются:

- **Тренд** – монотонная составляющая процесса, которая определяет медленное плавное изменение процесса на всей его длине T .
- **Низкочастотная составляющая процесса** – циклическая часть процесса с большим периодом, который сравним с длительностью изучаемого процесса.
- **Высокочастотная составляющая процесса** – циклическая часть процесса с малым периодом ($\ll T$).
- **Случайная составляющая часть процесса** – случайные ошибки в изучаемом процессе, возникающие за счет различных случайных внешних воздействий на процесс.

$$u(t) = \tau(t) + l(t) + h(t) + s(t), \quad t \in [0, T] \quad (3.1)$$

$u(t)$ – общий процесс с длительностью T .

$\tau(t)$ – тренд.

$l(t)$ – низкочастотная составляющая процесса с периодом T_1 .

$h(t)$ – высокочастотная составляющая процесса с периодом T_2 .

$s(t)$ – случайная составляющая часть процесса.

Основная идея нашей задачи это разделение изучаемого процесса на его основные составляющие. Мы рассмотрим:

1. Выделение тренда.
2. Разделение низкочастотной и высокочастотной части процесса.

3.1. Выделение тренда

Пусть задан $u(t)$, $t \in [0, T]$, где T – длительность изучения процесса.
Предложим, что тренд описывается монотонной функцией $\tau(t)$. Функция находится из условия минимизации функционала

$$\Phi(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T (u(t) - \tau(t))^2 dt \quad (3.1.1)$$

при дополнительном условии, что $\tau(t)$ монотонная функция.

Часто и достаточно определяют квадратичный тренд:

$$\tau(t) = a + \frac{bt}{T} + \frac{ct^2}{T^2} \quad (3.1.2)$$

Коэффициенты a, b, c находится из метода наименьшего квадрата, т.е.

$$\min_{a,b,c} \frac{1}{T} \int_0^T (u(t) - \tau(t))^2 dt \quad (3.1.3)$$

из (3.1.1) и (3.1.2)

$$\Rightarrow \Phi(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \left(u(t) - a - \frac{bt}{T} - \frac{ct^2}{T^2} \right)^2 dt$$

Находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial a} &= -\frac{2}{T} \int_0^T \left(u(t) - a - \frac{bt}{T} - \frac{ct^2}{T^2} \right) dt = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt - \frac{1}{T} \int_0^T a dt - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{bt}{T} dt - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{ct^2}{T^2} dt &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt - a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{3}c &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial b} &= -\frac{2}{T} \int_0^T \frac{t}{T} \left(u(t) - a - \frac{bt}{T} - \frac{ct^2}{T^2} \right) dt = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{T^2} \int_0^T u(t) t dt - \frac{1}{T} \int_0^T a \frac{t}{T} dt - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{bt^2}{T^2} dt - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{ct^3}{T^3} dt = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{T^2} \int_0^T u(t) t dt - \frac{1}{2} a - \frac{1}{3} b - \frac{1}{4} c = 0
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial c} &= -\frac{2}{T} \int_0^T \frac{t^2}{T^2} \left(u(t) - a - \frac{bt}{T} - \frac{ct^2}{T^2} \right) dt = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{T^3} \int_0^T u(t) t^2 dt - \frac{1}{T} \int_0^T a \frac{t^2}{T^2} dt - \frac{1}{T} \int_0^T b \frac{t^3}{T^3} dt - \frac{1}{T} \int_0^T c \frac{t^4}{T^4} dt = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{T^3} \int_0^T u(t) t^2 dt - \frac{1}{3} a - \frac{1}{4} b - \frac{1}{5} c = 0
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Обозначим:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \tag{3.1.7}$$

через среднее значение процесса,

$$m_1 = \frac{1}{T^2} \int_0^T u(t) t dt \tag{3.1.8}$$

– первый момент процесса,

$$m_2 = \frac{1}{T^3} \int_0^T u(t) t^2 dt \tag{3.1.9}$$

– второй момент процесса.

Тогда (3.1.4) – (3.1.9):

$$\begin{cases} a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c = \bar{u} \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c = m_1 \\ \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{5}c = m_2 \end{cases} \quad (3.1.10)$$

и мы получаем:

$$\begin{cases} a = 9\bar{u} - 36m_1 + 30m_2 \\ b = -36\bar{u} + 192m_1 - 180m_2 \\ c = 30\bar{u} - 180m_1 + 180m_2 \end{cases} \quad (3.1.11)$$

Наконец, мы получили тренд, и будем в дальнейшем исследовать процесс отклонение от тренда:

$$\begin{aligned} \omega(t) &= u(t) - \tau(t) \\ t &\in [0, T] \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Этот процесс имеет нулевое среднее значение $\bar{\omega} = \bar{u} - \bar{\tau} = 0$, т.к.

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \frac{1}{T} \int_0^T \left((9\bar{u} - 36m_1 + 30m_2) + (-36\bar{u} + 192m_1 - 180m_2) \frac{t}{T} \right. \\ &\quad \left. + (30\bar{u} - 180m_1 + 180m_2) \frac{t^2}{T^2} \right) dt = \bar{u} \end{aligned}$$

3.2. Метод выявления низкочастотной части процесса

После выделения тренда и отклонение его, мы переходим к разделению низкочастотной и высокочастотной части процесса с помощью гармонического анализа или методов выявления скрытых периодичностей.

Прочее, можно центрировать и разбивать процесс на четную и нечетную компоненты.

$$\tau = t - \frac{T}{2},$$
$$v(\tau) = \omega \left(\tau + \frac{T}{2} \right), \quad \tau \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right] \quad (3.2.1)$$

$$v^+(\tau) = \frac{v(\tau) + v(-\tau)}{2}, \quad v^-(\tau) = \frac{v(\tau) - v(-\tau)}{2} \quad (3.2.2)$$

Большинство реальных процессов имеют цикличность изменения во времени. Циклический процесс можно описать полигармонической функцией, представляет собой сумму известного конечного числа гармоник с неизвестными амплитудами и частотами:

$$v(t) = \sum_{n=1}^N (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$$
$$t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right] \quad (3.2.3)$$

ω_n – частоты составляющих процесса.

a_n и b_n – амплитуды четной и нечетной частей составляющих.

и

$$v^+(\tau) = \sum_{n=1}^N a_n \cos \omega_n t \quad (3.2.4)$$

$$v^-(\tau) = \sum_{n=1}^N b_n \sin \omega_n t \quad (3.2.5)$$

Цель исследования является нахождение $\omega_n, a_n, b_n, n \in [1, N]$.

Применим к $v^+(\tau)$ и $v^-(\tau)$, преобразование вида:

$$v^{(1)}(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau \quad (3.2.6)$$

$$t \in [0, T_1]$$

мы получаем:

$$v^{+(1)}(t) = \int_0^t \sum_{n=1}^N a_n \cos \omega_n \tau d\tau = \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (3.2.7)$$

т.е. в преобразованном процессе амплитуды гармоник изменяются обратно пропорционально их частотам, так что усиливается влияние гармоники с наименьшей частотой.

Произведем повторное преобразование:

$$v^{+(2)}(t) = \int_0^t v^{+(1)}(\tau) d\tau = - \sum_{n=1}^N \left(\frac{a_n}{\omega_n^2} \cos \omega_n t - \frac{a_n}{\omega_n^2} \right) \quad (3.2.8)$$

При этом кроме гармонических компонент выявляется постоянное слагаемое. Его необходимо выделить, при достаточно большом интервале обработки можно считать, что это слагаемое приблизительно равно среднему значению функции $v^{+(2)}(t)$:

$$\sum_{n=1}^N \frac{a_n}{\omega_n^2} \approx \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} v^{+(2)}(\tau) d\tau = \overline{v^{+(2)}} \quad (3.2.9)$$

Таким образом, второе преобразование (как и все последующие преобразования с четным номером) должно состоять в преобразовании функции вида:

$$v^{+(2)}(t) - \overline{v^{+(2)}} \quad (3.2.10)$$

Именно к этой функции и должно применяться последующее преобразование.

$$v^{+(2k-1)}(t) = (-1)^{k+1} \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{\omega_n^{2k-1}} \sin \omega_n t \quad (3.2.11)$$

$$v^{+(2k)}(t) = (-1)^k \sum_{n=1}^N \left(\frac{a_n}{\omega_n^{2k}} \cos \omega_n t - \frac{a_n}{\omega_n^{2k}} \right) \quad (3.2.12)$$

$k \in \mathbb{N}$

Аналогично для $v^-(t)$, применим (3.2.7) несколько раз:

$$v^{-(2k-1)}(t) = (-1)^k \sum_{n=1}^N \left(\frac{b_n}{\omega_n^{2k-1}} \cos \omega_n t - \frac{b_n}{\omega_n^{2k-1}} \right) \quad (3.2.13)$$

$$v^{-(2k)}(t) = (-1)^k \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{\omega_n^{2k}} \sin \omega_n t \quad (3.2.14)$$

$k \in \mathbb{N}$

И наконец легко можно выделить низкочастотной части.

В дискретном случае преобразование (3.2.6) можно записаться в виде:

$$v_k^{(1)} = \sum_{i=1}^k (v_i - \bar{v}) \quad (3.2.15)$$

где

$v_i = v(i)$.

\bar{v} – среднее значение процесса.

3.3. Метод усреднения процесса за пробный период

Метод усреднения процесса за пробный период основан на фильтрации высокочастотной части. Он имеет преобразование вида:

$$v^{(1)}(t) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} v(t - \tau) d\tau$$

$$t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$$
(3.3.1)

где T_0 – пробный период, T – временной интервал исследования процесса. Отметим, что при усреднении процесса интервал его определения уменьшается на длительный период, т.е. усредненный процесс $v^{(1)}(t)$ определен на $t \in \left[-\frac{T-T_0}{2}, \frac{T-T_0}{2}\right]$. Если усреднение проводится n раз, то интервал определения уменьшается на nT_0 .

Рассмотрим $v^+(t)$ и применим к нему преобразование (3.3.1):

$$\begin{aligned} v^{+(1)}(t) &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=1}^N a_n \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \cos \omega_n(t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{\omega_n} \left(-\sin \omega_n \left(t - \frac{T_0}{2} \right) + \sin \omega_n \left(t + \frac{T_0}{2} \right) \right) = \\ &= \sum_{n=1}^N a_n \frac{\sin \frac{\omega_n T_0}{2}}{\frac{\omega_n T_0}{2}} \cos \omega_n t = \sum_{n=1}^N a_n D \left(\frac{\omega_n T_0}{2} \right) \cos \omega_n t \end{aligned}$$
(см. прил. (6.1))

Если сделаем k усреднений, то получим:

$$v^{+(k)}(t) = \sum_{n=1}^N a_n D^k \left(\frac{\omega_n T_0}{2} \right) \cos \omega_n t$$
(3.3.2)

Аналогично для $v^-(t)$, применим (3.3.1) k раз:

$$v^{-(k)}(t) = \sum_{n=1}^N b_n D^k \left(\frac{\omega_n T_0}{2} \right) \sin \omega_n t \quad (3.3.3)$$

В дискретном случае преобразование (3.3.1) можно записаться в виде:

$$v_k^{(1)} = \frac{1}{2M} \sum_{i=-M}^M v_{k-i} = \frac{1}{2M} \sum_{i=k-M}^{k+M} v_i \quad (3.3.4)$$

где $v_i = v(i)$, $2M$ – пробный период.

3.4. Корреляционные методы

Корреляционные методы используют для выделения гармонической части с максимальной амплитудой. Он имеет преобразование вида:

$$v^{(1)}(t) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v(\tau) v(t + \tau) d\tau \quad (3.4.1)$$

Рассмотрим

$$v^+(\tau) = \sum_{n=1}^N a_n \cos \omega_n \tau \quad (3.4.2)$$

и применим к нему преобразование (3.4.1):

$$v^{+(1)}(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N a_n a_m \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \omega_n \tau \cdot \cos \omega_m (t + \tau) d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N a_n a_m \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \omega_n \tau (\cos \omega_m t \cdot \cos \omega_m \tau - \sin \omega_m t \cdot \sin \omega_m \tau) d\tau = \\
&= \frac{1}{T} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N a_n a_m \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \omega_n \tau \cdot \cos \omega_m t \cdot \cos \omega_m \tau d\tau = \\
&= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N a_n a_m A_{nm} \cos \omega_m t
\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

где

$$\begin{aligned}
A_{nm} &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \omega_n \tau \cdot \cos \omega_m \tau d\tau = \\
&= \frac{1}{2T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\cos(\omega_n - \omega_m)\tau + \cos(\omega_n + \omega_m)\tau) d\tau = \\
&= \frac{\sin\left((\omega_n - \omega_m)\frac{T}{2}\right)}{(\omega_n - \omega_m)T} + \frac{\sin\left((\omega_n + \omega_m)\frac{T}{2}\right)}{(\omega_n + \omega_m)T}
\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Если

$$T \cdot |\omega_n - \omega_m| \gg 1 \tag{3.4.5}$$

то

$$A_{nm} \approx \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \quad (3.4.6)$$

$$\Rightarrow v^{+(1)}(t) \approx \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N a_n^2 \cos \omega_n t \quad (3.4.7)$$

Если сделаем k раз, то очевидно получим:

$$v^{+(k)}(t) \approx \frac{1}{2^{2^k-1}} \sum_{n=1}^N a_n^{2^k} \cos \omega_n t \quad (3.4.8)$$

Аналогично для

$$v^-(\tau) = \sum_{n=1}^N b_n \sin \omega_n \tau \quad (3.4.9)$$

применим к нему преобразование (3.4.1):

$$\begin{aligned} v^{-(1)}(t) &= \frac{1}{T} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N b_n b_m \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \omega_n \tau \cdot \sin \omega_m (t + \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N b_n b_m \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \omega_n \tau (\sin \omega_m t \cdot \cos \omega_m \tau + \cos \omega_m t \cdot \sin \omega_m \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N b_n b_m \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \omega_n \tau \cdot \cos \omega_m t \cdot \sin \omega_m \tau d\tau = \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N b_n b_m B_{nm} \cos \omega_m t \quad (3.4.10)$$

где

$$\begin{aligned} B_{nm} &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \omega_n \tau \cdot \sin \omega_m \tau d\tau = \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\cos(\omega_n - \omega_m)\tau - \cos(\omega_n + \omega_m)\tau) d\tau = \\ &= \frac{\sin\left((\omega_n - \omega_m)\frac{T}{2}\right)}{(\omega_n - \omega_m)T} - \frac{\sin\left((\omega_n + \omega_m)\frac{T}{2}\right)}{(\omega_n + \omega_m)T} \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

При условии (3.4.5) получаем:

$$B_{nm} \approx \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \quad (3.4.12)$$

$$\Rightarrow v^{-(1)}(t) \approx \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N b_n^2 \cos \omega_n t \quad (3.4.13)$$

$$\Rightarrow v^{-(k)}(t) \approx \frac{1}{2^{2^k-1}} \sum_{n=1}^N b_n^{2^k} \cos \omega_n t \quad (3.4.14)$$

Это позволяет выделить гармонику с максимальной амплитудой.

В дискретном случае преобразование (3.4.1) можно записать в виде:

$$v_k^{(1)} = \frac{1}{2M} \sum_{i=-M}^M v_i \cdot v_{k+i} \quad (3.4.15)$$

3.5. Построение периодограммы.

Как мы видели выше :

$$v(t) = \sum_{n=1}^N (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \quad t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \quad (3.5.1)$$

ω_n – частоты составляющих процесса.

a_n и b_n – амплитуды четной и нечетной частей составляющих.

$$v^+(t) = \sum_{n=1}^N a_n \cos \omega_n t \quad (3.5.2)$$

$$v^-(t) = \sum_{n=1}^N b_n \sin \omega_n t \quad (3.5.3)$$

Задача оценки частот скрытых периодичностей процесса можно использовать синус-преобразование Фурье:

$$F_s(v) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v(t) \sin \omega t dt \quad (3.5.4)$$

и косинус-преобразование Фурье:

$$F_c(v) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v(t) \cos \omega t dt \quad (3.5.5)$$

Это один из наиболее эффективных методов приближенного поиска скрытых периодичностей, основанный на изучении характеристик временного процесса:

$$a(\omega) = F_c(v^+), \quad b(\omega) = F_s(v^-) \quad (3.5.6)$$

$$\begin{aligned}
a(\omega) &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{n=1}^N a_n \cos \omega_n t \cos \omega t dt = \\
&= \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\cos(\omega - \omega_n)t + \cos(\omega + \omega_n)t) dt = \\
&= \sum_{n=1}^N a_n \left(\frac{2 \sin(\omega - \omega_n) \frac{T}{2}}{(\omega - \omega_n)T} + \frac{2 \sin(\omega + \omega_n) \frac{T}{2}}{(\omega + \omega_n)T} \right) \\
\Rightarrow a(\omega) &= \sum_{n=1}^N a_n \left(D \left((\omega - \omega_n) \frac{T}{2} \right) + D \left((\omega + \omega_n) \frac{T}{2} \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.5.7}$$

$$\begin{aligned}
b(\omega) &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{n=1}^N b_n \sin \omega_n t \sin \omega t dt = \\
&= \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\cos(\omega - \omega_n)t - \cos(\omega + \omega_n)t) dt = \\
&= \sum_{n=1}^N b_n \left(\frac{2 \sin(\omega - \omega_n) \frac{T}{2}}{(\omega - \omega_n)T} - \frac{2 \sin(\omega + \omega_n) \frac{T}{2}}{(\omega + \omega_n)T} \right) \\
\Rightarrow b(\omega) &= \sum_{n=1}^N b_n \left(D \left((\omega - \omega_n) \frac{T}{2} \right) - D \left((\omega + \omega_n) \frac{T}{2} \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.5.8}$$

Периодиаграмм можно построить с помощью графики $(\omega, a(\omega))$ и $(\omega, b(\omega))$.

Максимальное значение функция $D(x)$ достигает при $D(0) = 1$. Такой характер поведения функции $D(x)$ приводит к появлению максимумов в частотных характеристиках $a(\omega)$ и $b(\omega)$ при $\omega = \omega_n$.

Если частоты гармонических составляющих достаточно сильно отличаются друг от друга, то по частотным характеристикам $a(\omega)$ и $b(\omega)$ можно оценить величину этих частот. Из-за колебательного характера функции $D(x)$ в частотных характеристиках появляются небольшие дополнительные максимумы, которые могут быть интерпретированы как частоты составляющих с малыми амплитудами. В этом случае требуется дополнительная проверка.

Если частоты двух составляющих близки, то они не разделяются и максимум на частотной характеристике появляется на частоте, равной полусумме близких частот (максимумы на двух близких частотах объединяются и дают общий максимум).

4. Численное решение модельной задачи

$$N \approx 2025$$

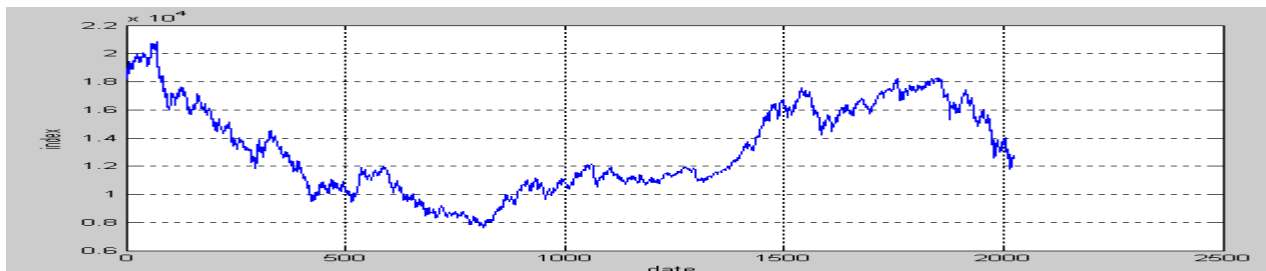


Рис. 2: Изучаемый процесс

$$u_i = u(i)$$

Выделяем тренд по п.3.1, но в нашей задаче имеет дискретном, то

$$\bar{u} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i = 13184$$

$$m_1 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N u_i \cdot i \approx 6789.7 \quad m_2 = \frac{1}{N^3} \sum_{i=1}^N u_i \cdot i^2 \approx 4771.2 \quad (4.1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 9\bar{u} - 36m_1 + 30m_2 \approx 17360 \\ b = -36\bar{u} + 192m_1 - 180m_2 \approx -29801 \\ c = 30\bar{u} - 180m_1 + 180m_2 \approx 32174 \end{cases} \quad (4.2)$$

Квадратичный тренд из (3.1.2):

$$\tau(t) = a + \frac{bt}{N} + \frac{ct^2}{N^2} \approx 17360 - 14.7166t + 0.0078t^2 \quad (4.3)$$

Построим график:

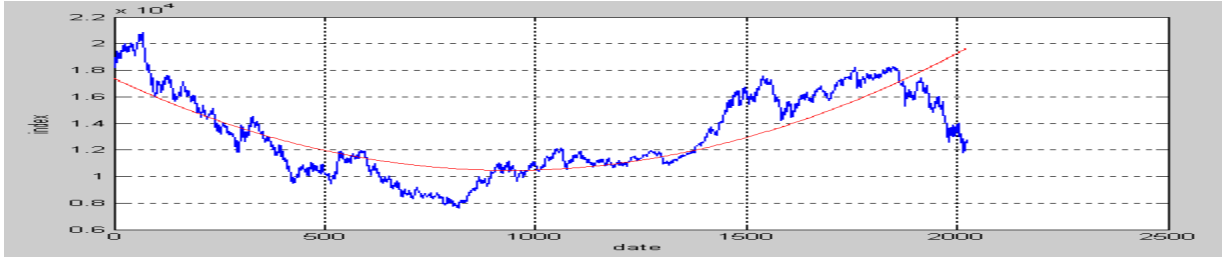


Рис. 3: Выделение тренда.

u_i : — : искомый процесс
 $\tau(t)$: — : тренд

Будем исследовать отклонение процесса от тренда:

$$\omega_i = u_i - \tau_i \quad i \in [1, N] \quad (4.4)$$

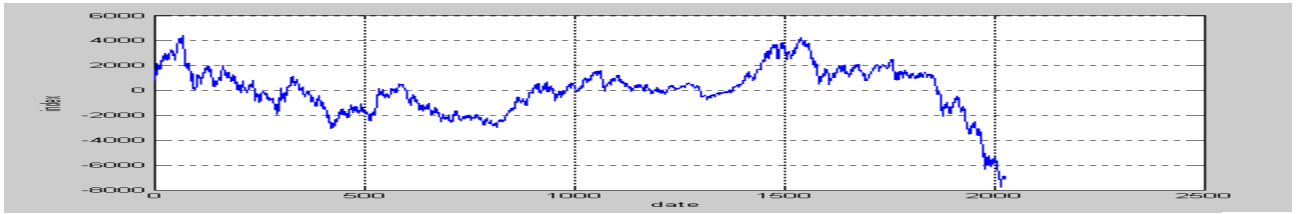


Рис. 4:

$$\omega_i = u_i - \tau_i$$

Центрируем и разбиваем процесс на четную и нечетную компоненты

$$v_j = v(j) = \omega \left(j + \frac{[N]}{2} \right) \quad j \in \left[-\frac{[N]}{2}, \frac{[N]}{2} \right] \quad (4.5)$$

$$v_j^+ = \frac{v(j) + v(-j)}{2} \quad (4.6)$$

$$v_j^- = \frac{v(j) - v(-j)}{2} \quad (4.7)$$

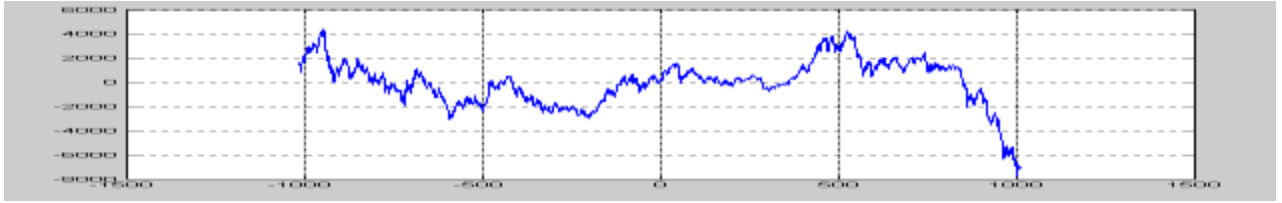


Рис. 5: Центрированный процесс $v_j = v(j)$

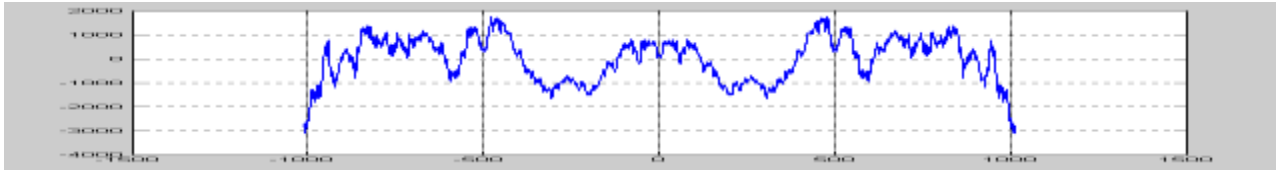


Рис. 6: Четный компонент v_j^+

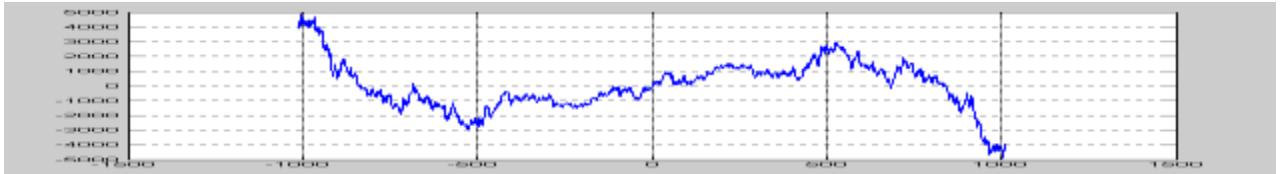


Рис. 7: Нечетный компонент v_j^-

Рассмотрим для v_j^+ , и применим метод выявления низкочастотной части процесса, т.е. преобразования вида (3.2.15):

$$v_k^{(1)} = \sum_{i=1}^k (v_i - \bar{v}) \quad (4.8)$$

где

$$v_i = v(i).$$

\bar{v} – среднее значение процесса.

$$\bar{v} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i \quad (4.9)$$

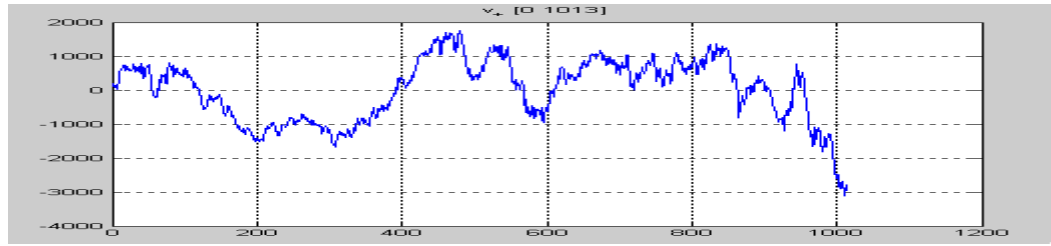


Рис. 8: Четный компонент v_j^+ на $[0, 1013]$.

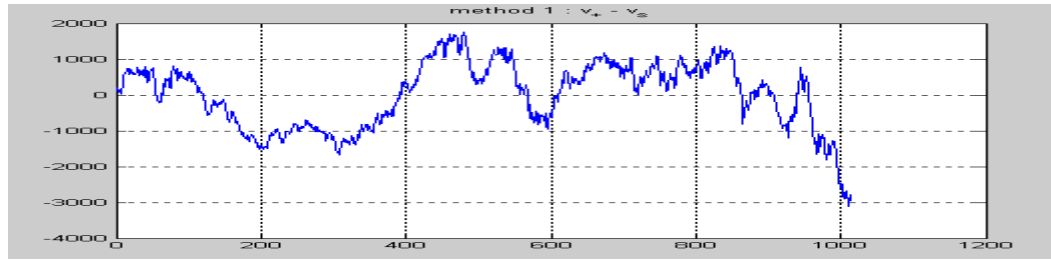


Рис. 9: $v_j^+ - \bar{v}^+$ на $[0, 1013]$.

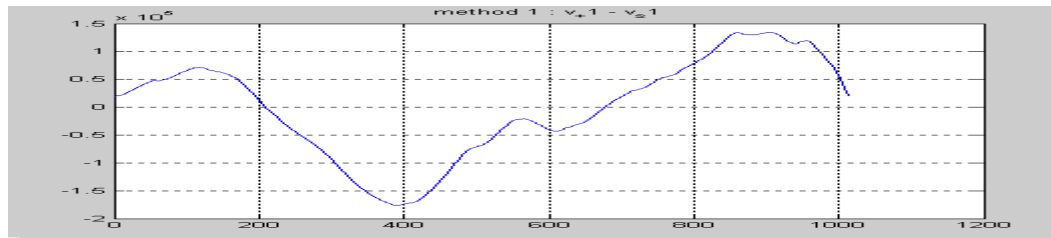


Рис. 10: $v_j^{+(1)} - \bar{v}^{+(1)}$ на $[0, 1013]$.

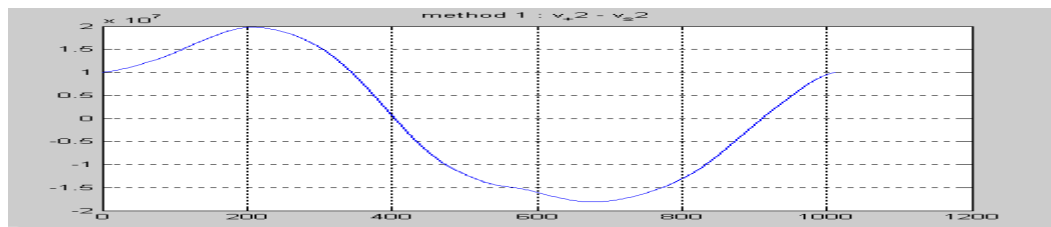


Рис. 11: $v_j^{+(2)} - \bar{v}^{+(2)}$ на $[0, 1013]$.

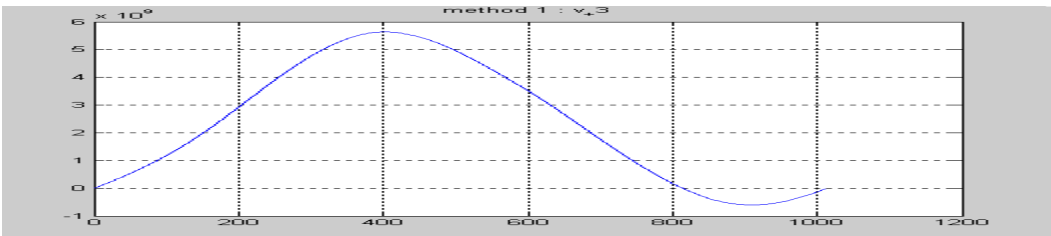


Рис. 12: $v_j^{+(3)}$ на $[0, 1013]$.

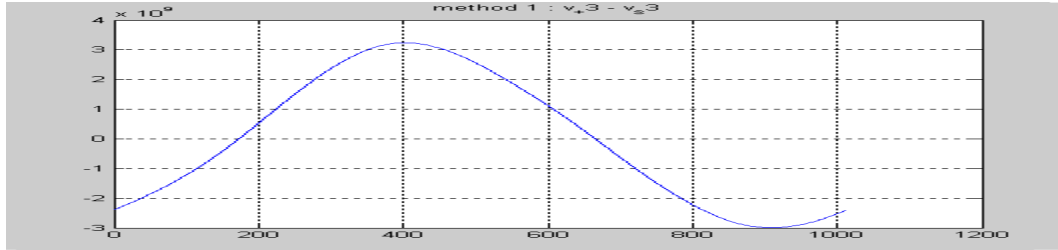


Рис. 13: $v_j^{(3)} - \overline{v^{(3)}}$ на $[0, 1013]$.

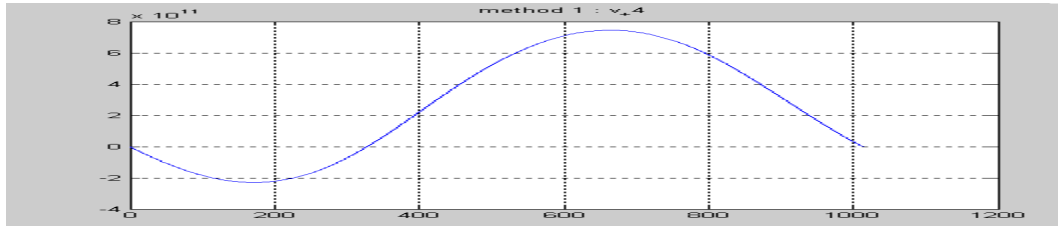


Рис. 14: $v_j^{(4)}$ на $[0, 1013]$.

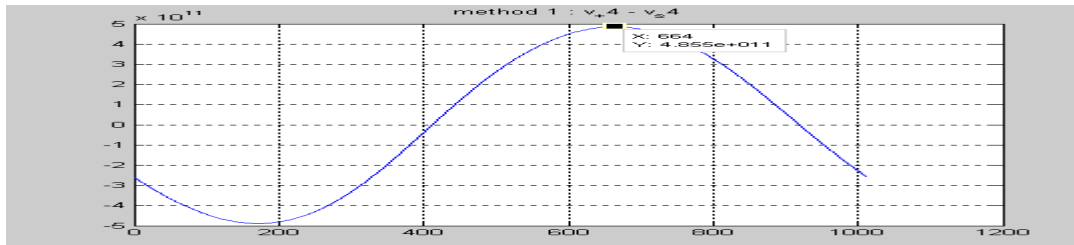


Рис. 15: $v_j^{(4)} - \overline{v^{(4)}}$ на $[0, 1013]$.

На рис. 15 имеет процесс с периодом равен $T_1 = 1013$ и амплитудом $4,855 \cdot 10^{11}$. Отсюда из (3.2.11) и (3.2.12) мы выделяем низкочастотной части процесса с амплитудом:

$$a_1 = 4,855 \cdot 10^{11} \cdot \left(\frac{2\pi}{1013} \right)^4 \approx 718.5731$$

$$\Rightarrow l_1(t) = 718.5731 \cos\left(\frac{2\pi}{1013}t\right) \quad (4.10)$$

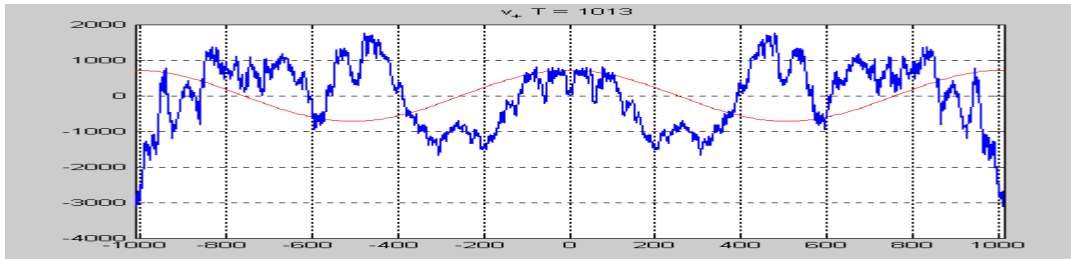


Рис. 16: --- : v_j^+ на $[-1013, 1013]$.

--- : низкочастотная часть процесса $l_1(t)$.

Теперь рассмотрим для v_j^- и сделаем тоже самое как в случае v_j^+ , но достаточно 3 раз воспользуемые преобразования (4.8):

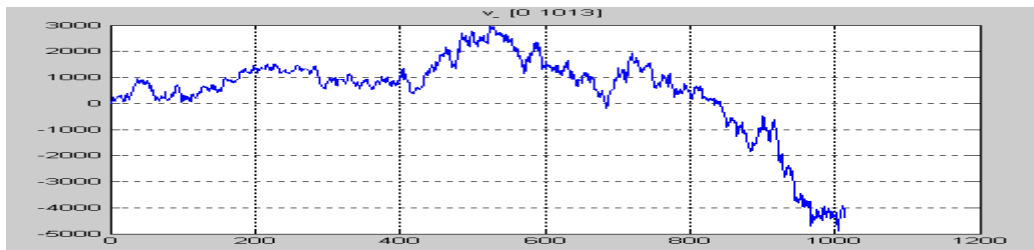


Рис. 17: Нечетный компонент v_j^- на $[0, 1013]$.

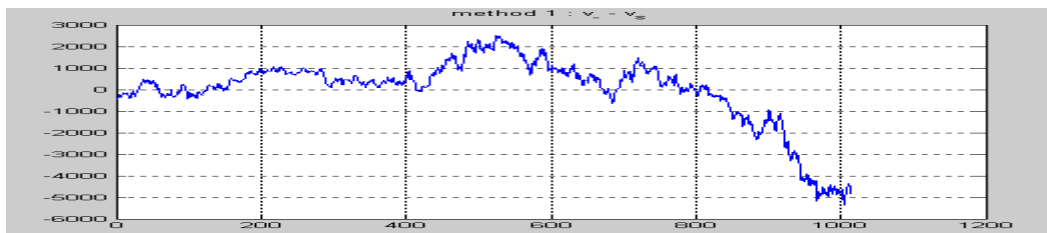


Рис. 18: $v_j^- - \bar{v}^-$ на $[0, 1013]$.

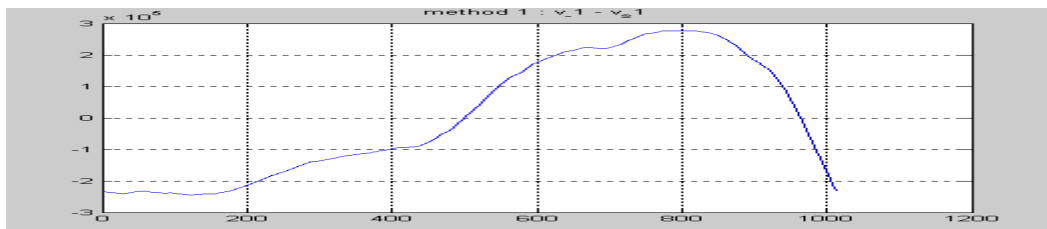


Рис. 19: $v_j^{-(1)} - \bar{v}^{-(1)}$ на $[0, 1013]$.

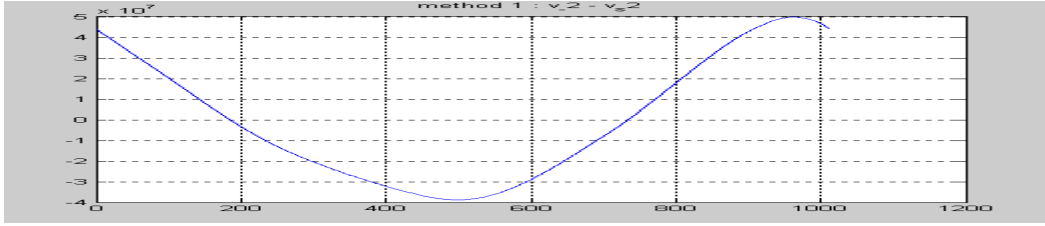


Рис. 20: $v_j^{-(2)} - \overline{v}^{-(2)}$ на $[0, 1013]$.

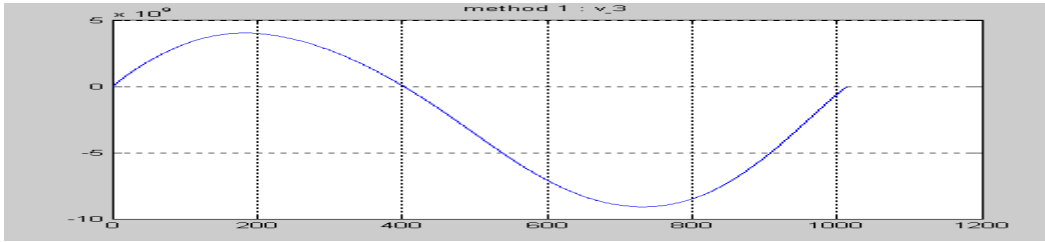


Рис. 21: $v_j^{-(3)} - \overline{v}^{-(3)}$ на $[0, 1013]$.

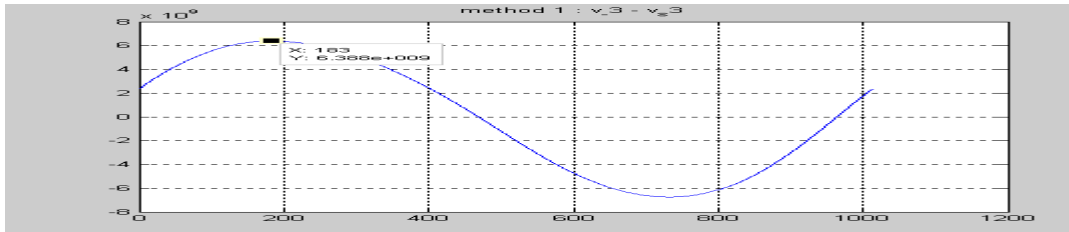


Рис. 22: $v_j^{-(3)} - \overline{v}^{-(3)}$ на $[0, 1013]$.

Из рис. 22 можно легко выделить низкочастотной части процесса для v_j^- , т.к. мы знали $T = 1013$ и

$$b_1 = 6,388 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{2\pi}{1013} \right)^3 \approx 1524.3$$

$$\Rightarrow l_2(t) = 1524.3 \sin\left(\frac{2\pi}{1013}t\right) \quad (4.11)$$

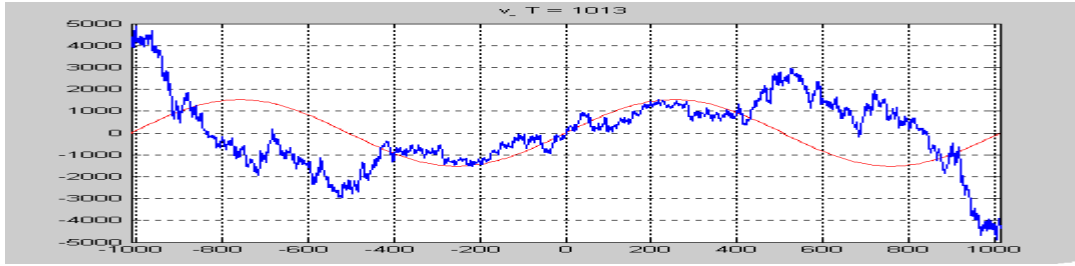


Рис. 23: --- : v_j^- на $[-1013, 1013]$.
 --- : низкочастотная часть процесса $l_2(t)$.

И рассмотрим для $v_j = v(j)$ (объединение v_j^+ и v_j^-)

$$\Rightarrow l_1(t) + l_2(t) = 718.5731 \cos\left(\frac{2\pi}{1013}t\right) + 1524.3 \sin\left(\frac{2\pi}{1013}t\right) \quad (4.11)$$

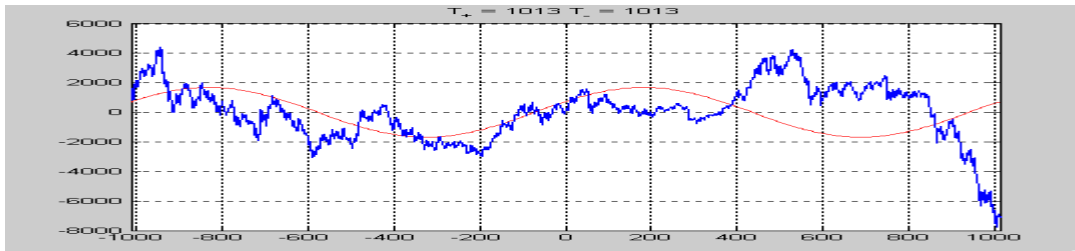


Рис. 24: --- : $v_j = v(j)$ на $[-1013, 1013]$.
 --- : $l_1(t) + l_2(t)$

Переходим к методу усреднения процесса за пробный период, используем преобразования (3.3.4):

$$v_k^{(1)} = \frac{1}{2M} \sum_{i=-M}^M v_{k-i} = \frac{1}{2M} \sum_{i=k-M}^{k+M} v_i \quad (4.12)$$

где $v_i = v(i)$, $2M$ – пробный период.

Возмем $M = 50$ и рассмотрим для v_j^+ :

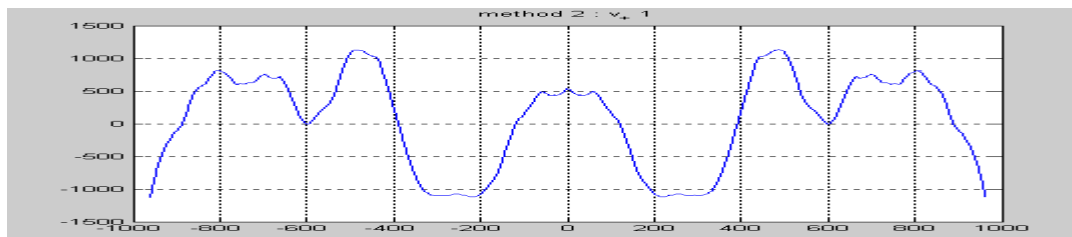


Рис. 25: --- : $v_j^{+(1)}$

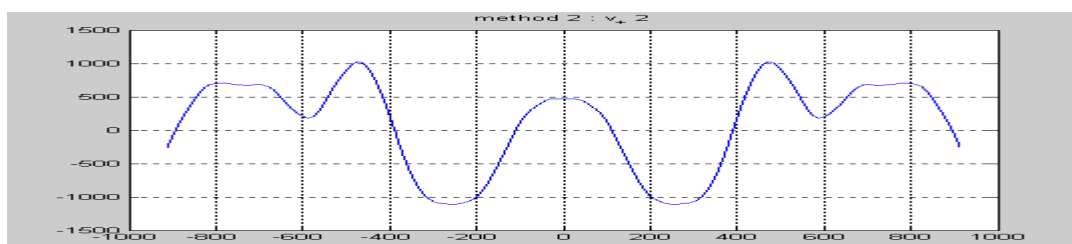


Рис. 26: --- : $v_j^{+(2)}$

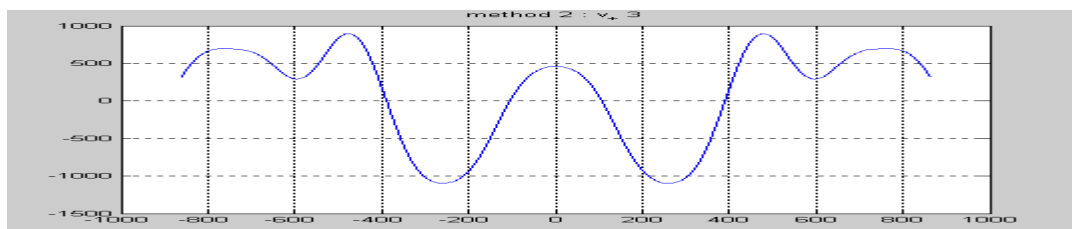


Рис. 27: --- : $v_j^{+(3)}$

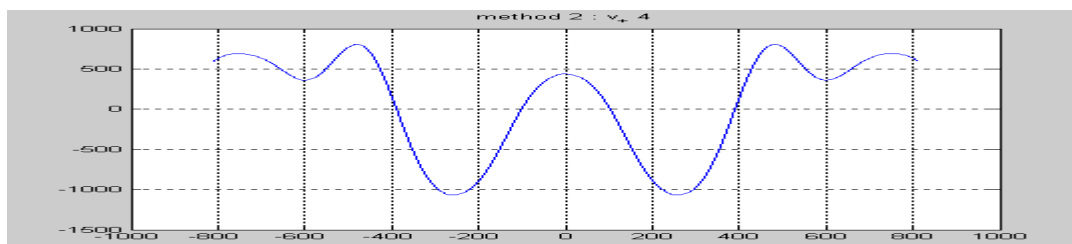


Рис. 28: --- : $v_j^{+(4)}$

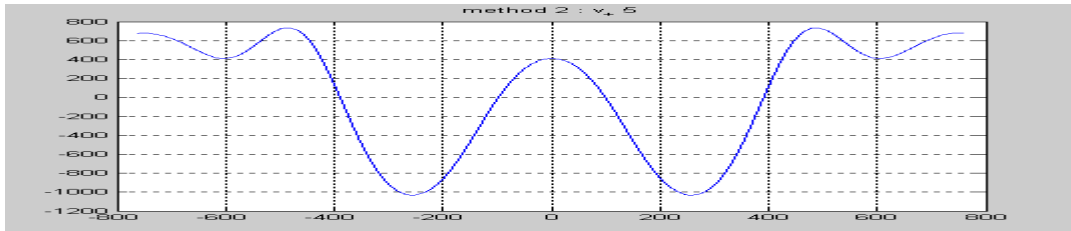


Рис. 29: --- : $v_j^{(5)}$

Заметим, что если сделать еще несколько усреднение, интервал будет уменьшаться, но периоды почти не изменяются, так, что рассмотрим на $v_j^{(5)}$ $[-400, 400]$ и его исследуем:

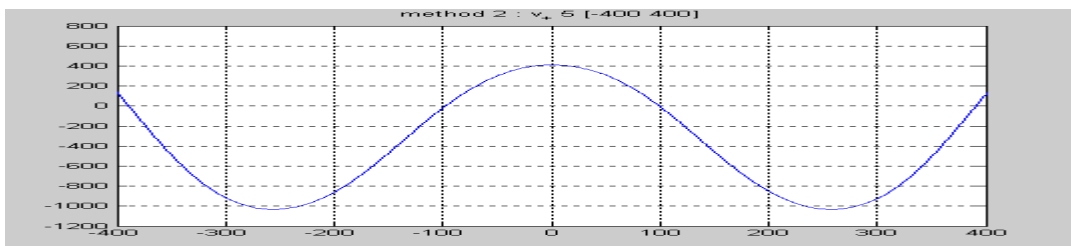


Рис. 30: --- : $v_j^{(5)}$ на $[-400, 400]$.

Сделаем чтобы график функций получен чисто косинус (рис. 31), т.е. возьмем точки max и min графика рис. 30 (410 и -1032):

$$v_s^{(5)} = 410 - \frac{(410 + 1032)}{2} = -311 \quad (4.13)$$

и

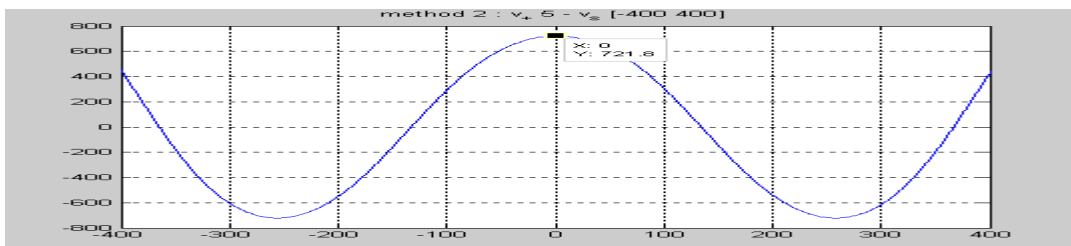


Рис. 31: --- : $v_j^{(5)} - v_s^{(5)}$ на $[-400, 400]$.

На рисунке мы увидим, что $T \approx 500$ (506) и $A \approx 722$, то из (3.3.2)

$$\Rightarrow a_3 = \frac{722}{D^5 \left(\frac{2\pi}{500} \cdot 50 \right)} \approx 1007.7$$

$$\Rightarrow l_3(t) = 1007.7 \cos\left(\frac{2\pi}{506} t\right)$$

(4.14)

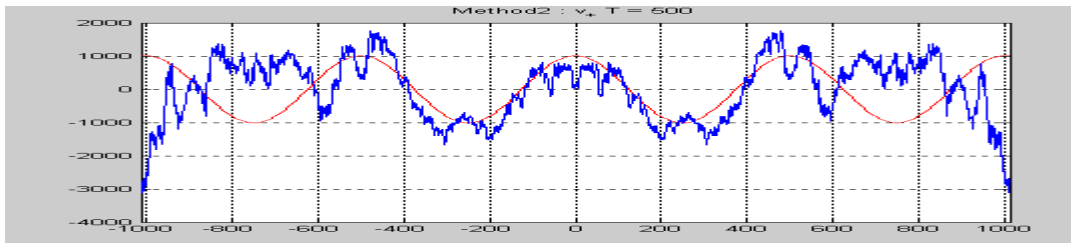


Рис. 32: --- : v_j^+ на $[-1013, 1013]$.
 --- : $l_3(t)$

Для случай v_j^- ничего не мог сказать, потому если применим к преобразования (4.12) то мы получаем рисунки:

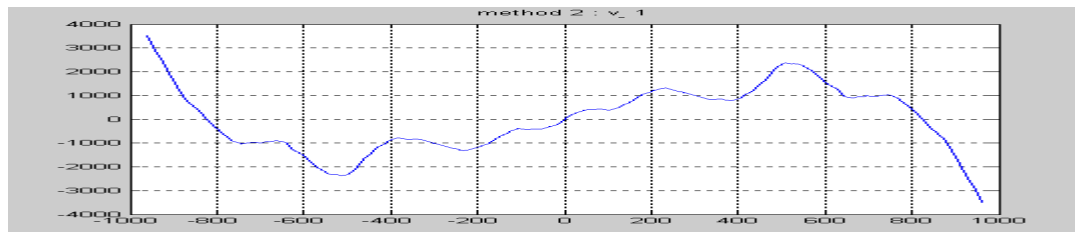


Рис. 32: --- : $v_j^{-(1)}$

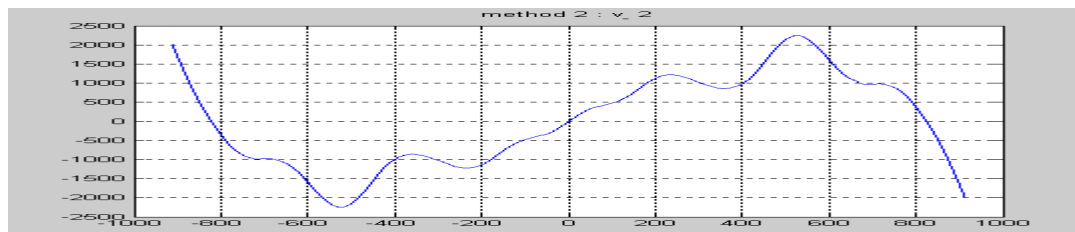


Рис. 33: --- : $v_j^{-(2)}$

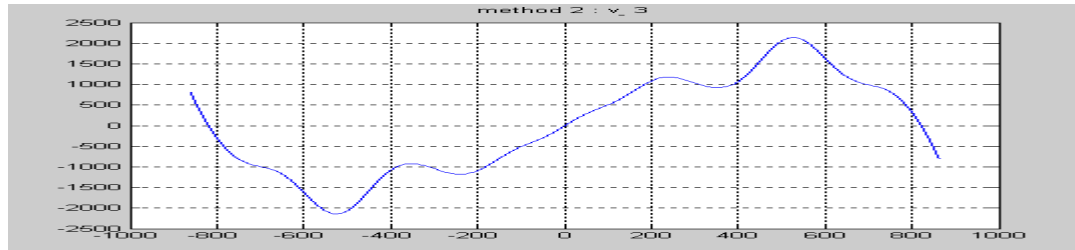


Рис. 34: --- : $v_j^{-(3)}$

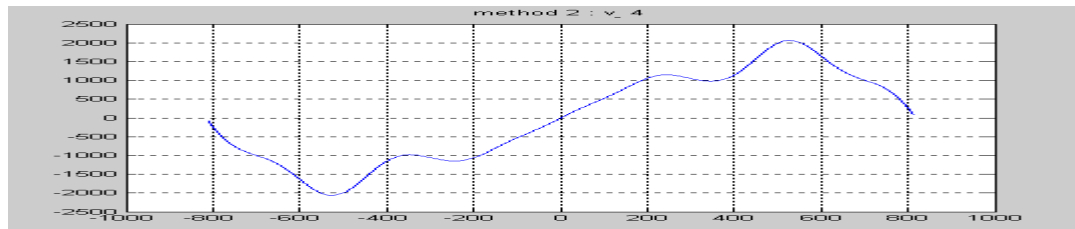


Рис. 35: --- : $v_j^{-(4)}$

Отсюда не мог сказать, что есть периоды. Так что в этом случае нечетная часть отсутствует.

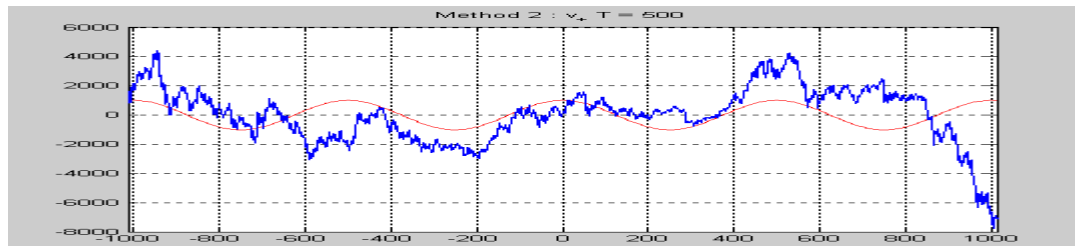


Рис. 36: --- : $v_j = v(j)$ на $[-1013, 1013]$.
--- : $l_3(t)$

Корреляционные методы для v_j^+ на $[-1013, 1013]$, используем преобразования (3.4.15):

$$v_k^{(1)} = \frac{1}{2M} \sum_{i=-M}^M v_i \cdot v_{k+i} \quad (4.15)$$

Возьмем большое число $M = 150$, чтобы выполнялось условие (3.4.5):

$$T \cdot |\omega_n - \omega_m| \gg 1 \quad (4.16)$$

На самом деле условия не выполняется, т.к. частоты составляющих не сильно отличаются друг от друга. Но мы увидим чуть позже, когда построим $a(w)$ и $b(w)$.

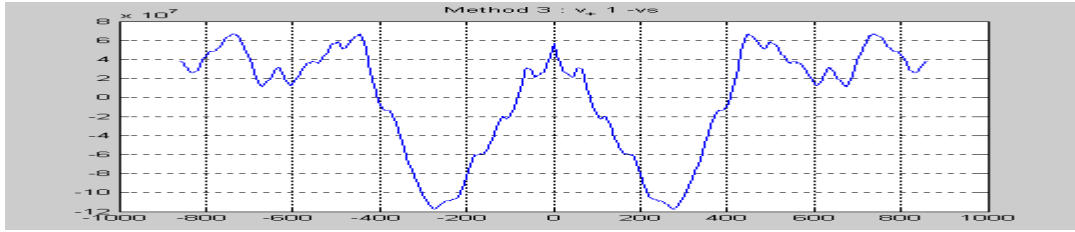


Рис. 37: $v_j^{+(1)} - \overline{v^{+(1)}}$

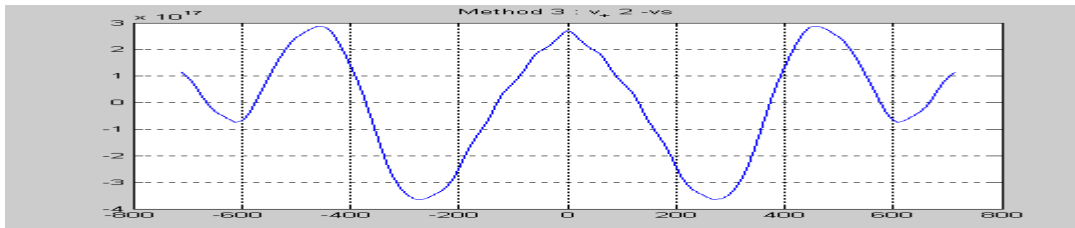


Рис. 38: $v_j^{+(2)} - \overline{v^{+(2)}}$

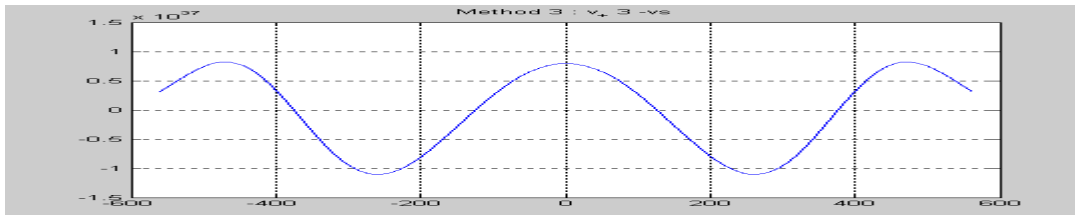


Рис. 39: $v_j^{+(3)} - \overline{v^{+(3)}}$

Сдвиг графика (возьмем точки max, min на рисунке 35):

$$v_s^{+(3)} = 7.961 \cdot 10^{36} - \frac{(7.961 \cdot 10^{36} + 1.102 \cdot 10^{37})}{2} = -1.5295 \cdot 10^{36}$$

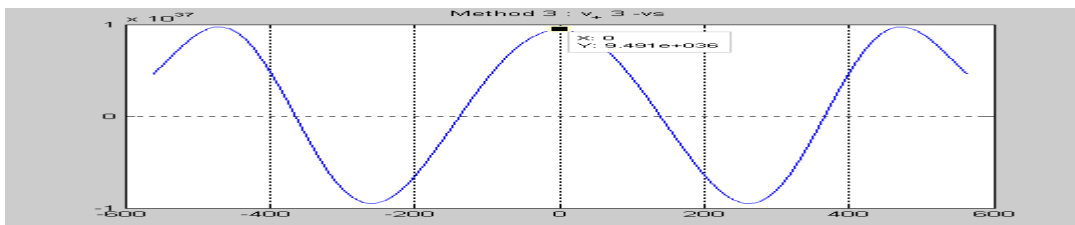


Рис. 40: --- : $v_j^{+(3)} - \overline{v^{+(3)}} - v_s^{+(3)}$

Из Рис. 36 показывает что $T \approx 500$ (506) и $A \approx 9.491 \cdot 10^{36}$, то из (3.4.8) дает амплитуда v_j^+ :

$$\sqrt[8]{9.491 \cdot 10^{36} 2^7} \approx 76836$$

Этот амплитуд слишком большое, он не входит в процессе, т.е. не эффективность преобразованного процесса, т.к. условия (4.16) не выполняется.

Для v_j^- условия (4.16) тоже самое не выполняется, но различие в том, что здесь даже не может сказать где у него периоды:

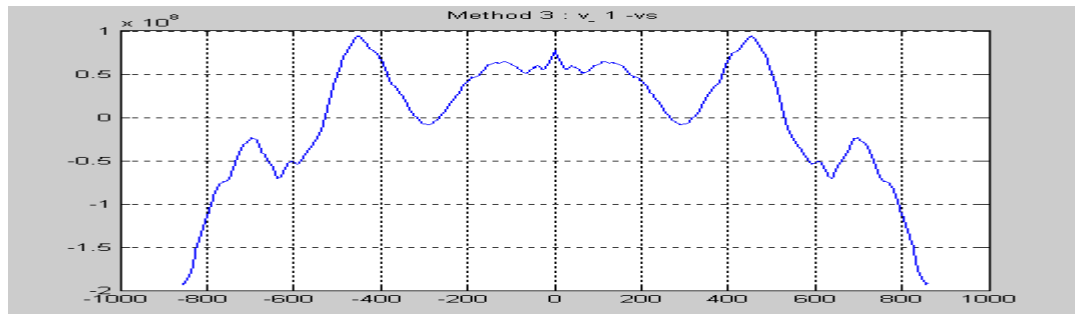


Рис. 41: $v_j^{-(1)} - \overline{v^{-(1)}}$

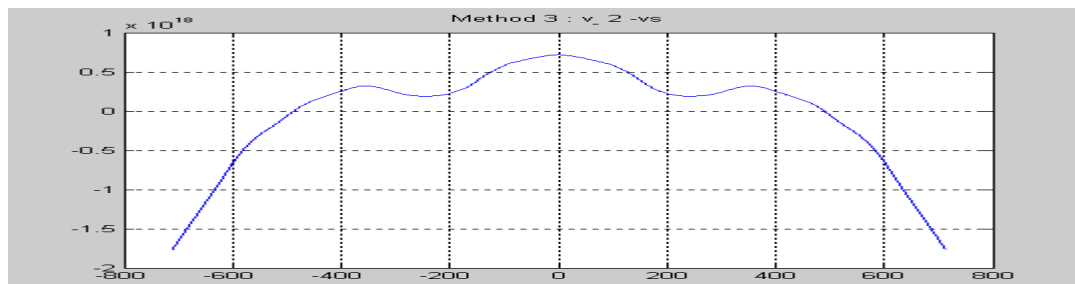


Рис. 42: $v_j^{-(2)} - \overline{v^{-(2)}}$

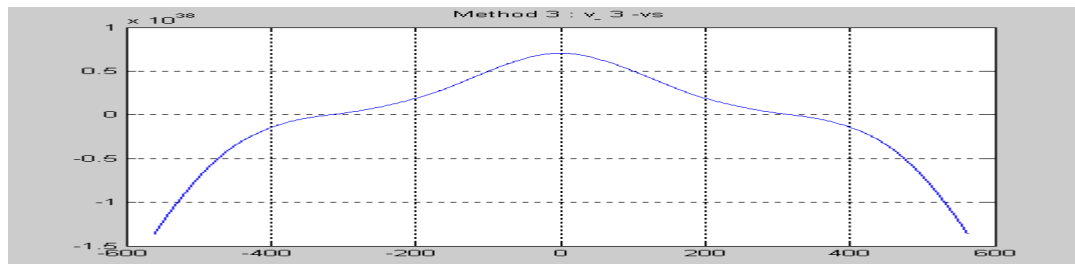


Рис. 43: $v_j^{-(3)} - \overline{v^{-(3)}}$

в этом случае нечетная часть тоже отсутствует.

Построим теперь графики $a(w)$, $b(w)$ и периодограммы:

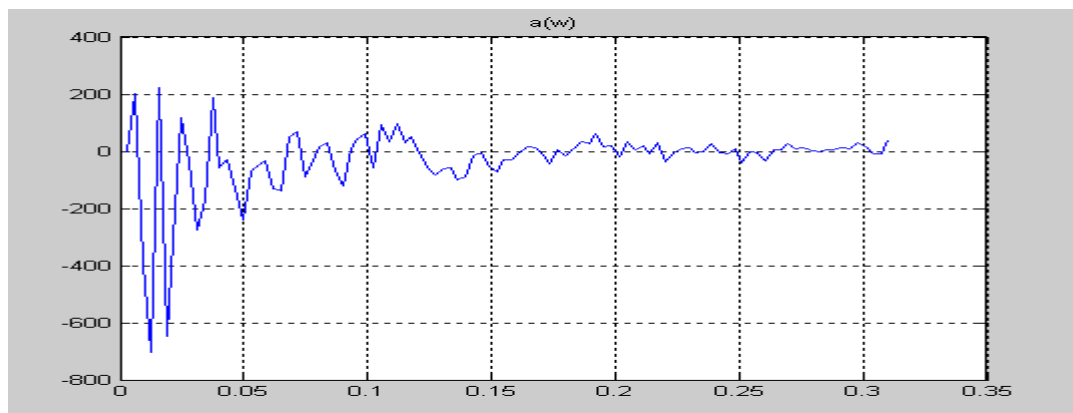


Рис. 44: $a(w)$

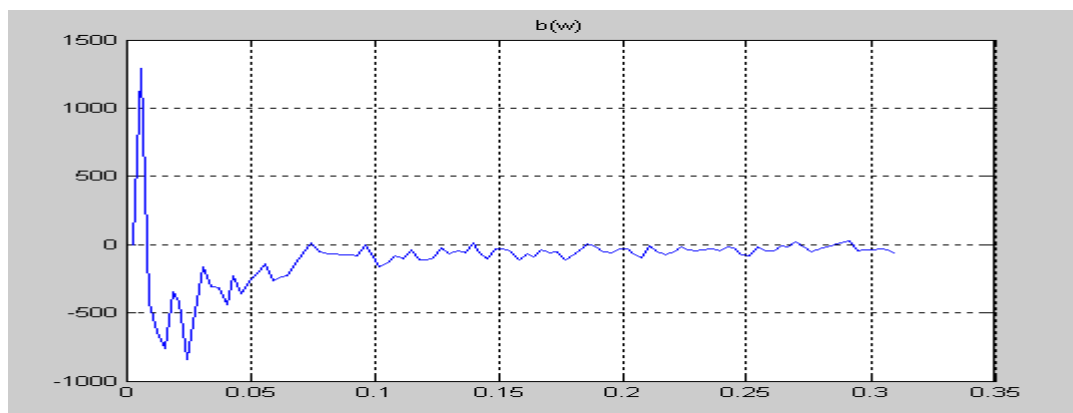


Рис. 45: $b(w)$

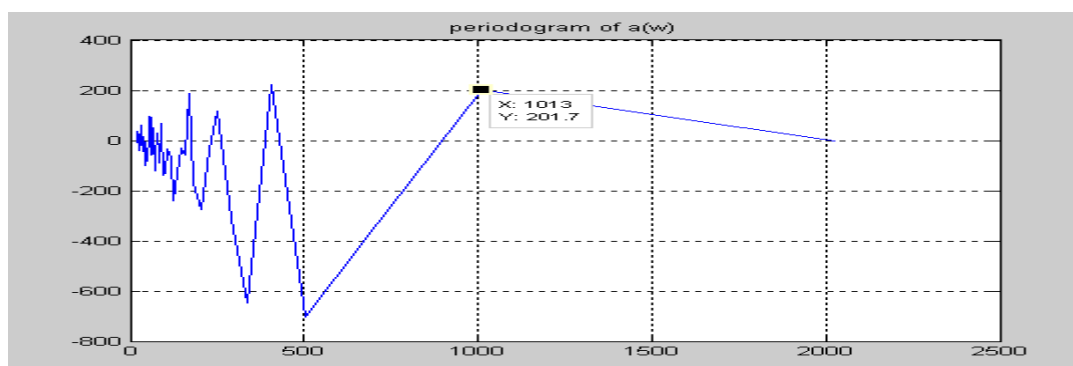


Рис. 46

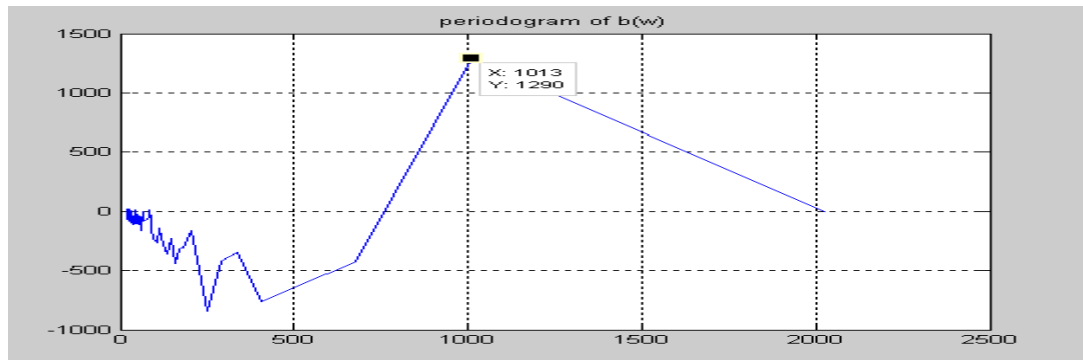


Рис. 47

$$\text{Рис. 46} \Rightarrow l_4(t) = 201.7 \cos\left(\frac{2\pi}{1013} t\right)$$

$$\text{Рис. 47} \Rightarrow l_5(t) = 1290 \sin\left(\frac{2\pi}{1013} t\right)$$

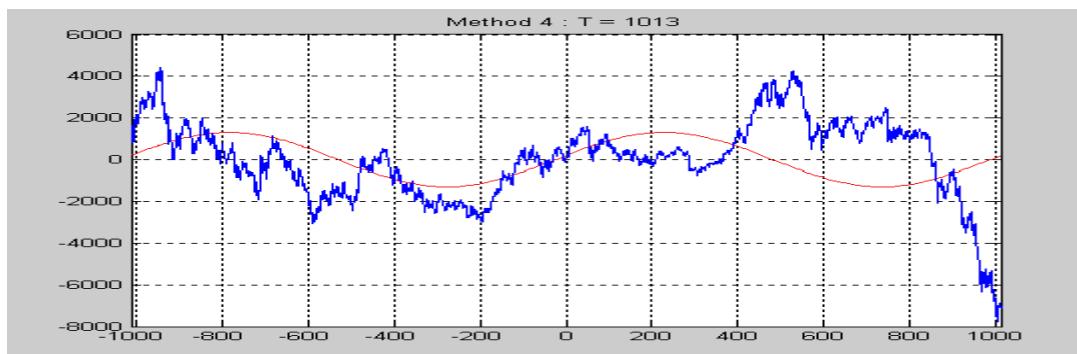


Рис. 48: --- : $v_j = v(j)$ на $[-1013, 1013]$.
 --- : $l_4(t) + l_5(t)$

5. Заключение

Мы использовали метод выявления низкочастотной части процесса, метод усреднения процесса за пробный период, корреляционные методы и построение периодиаграммы для выделения скрытых периодичностей. Мы увидели, что разные методы дают нам разные периоды и амплитуды.

В методе выявления низкочастотной части процесса мы выделили самый высокий период процесса и получили период равный 1013 дней (≈ 4 года). В методе усреднения процесса за пробный период мы выяснили, что период стал меньше чем период, найденный 1-м способом (период 506 ≈ 2 года), т.к он основан на фильтрации высокочастотной части. Корреляционные методы используют для выделения гармонической части с максимальной амплитудой, здесь мы тоже получили период равен 506. Для наиболее эффективного выявления скрытых периодичностей нужно построить периодиаграммы.

Основной период равен 506, индекс Nikkei падает, когда падает основной цикл периода. Мы можем предсказать, что индекс Nikkei падает в течение 3/2008-3/2009.

6. Приложение

$D(x)$ – функция Дирихле.

$$D(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (6.1)$$

a) Функция Дирихле монотонно убывает при $0 \leq x \leq \pi$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} D(x) = 1$

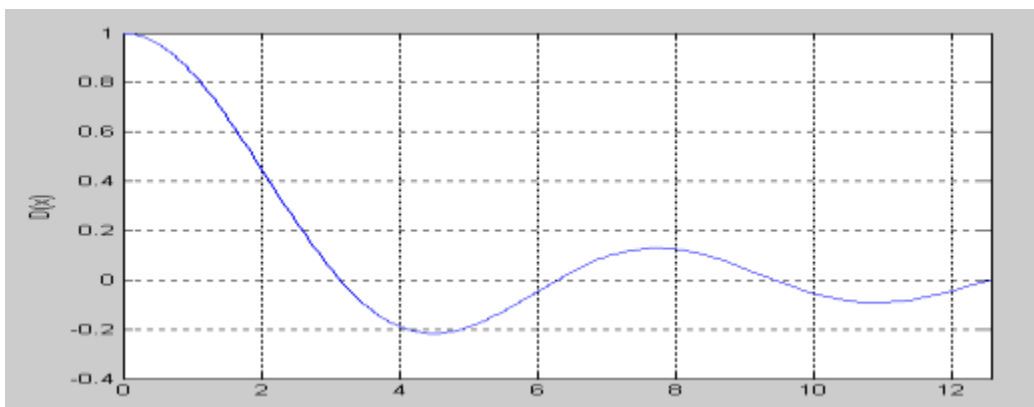


Рис. 49: График функции Дирихле.

Matlab:

Выделение тренда:

polyfit(x,y,2) : дает все коэффициенты $c/N^2, b/N, a$ функция $\tau(t), x = i, y = u_i$.

polyval(p,x) : получит все значение τ_i .

N = length(x) : длительность изучения процесса.

u = sum(y)/N : средние значение процесса.

m1 = sum(y.*x)/N^2 : первый момент процесса.

m2 = sum((x.*x).*y)/N^3 : второй момент процесса.

$$a = 9*u - 36*m1 + 30*m2$$

$$b = -36*u + 192*m1 - 180*m2$$

$$c = 30*u - 180*m1 + 180*m2$$

$$a + b*t/N + c*t^2/N^2$$

Method 1 : Методы выявления низкочастотной части процесса:

```
v_p_1 = v_p(1013:end);
```

```
v_p_s_1 = v_p_1 - sum(v_p_1)/length(v_p_1);
```

```
x2 = x1(1013:end);
```

```
plot(x2,v_p_s_1); grid on;
```

```
for i = 1:1013 v_p_11(i) = sum(v_p_s_1(1:i));  
end;
```

```
v_p_s_2 = v_p_11 - sum(v_p_11)/length(v_p_11);
```

```
plot(x2,v_p_s_2); grid on; title('method 1 : v_+1 - v_s1')
```

```
for i = 1:1013 v_p_12(i) = sum(v_p_s_2(1:i));  
end;
```

```
plot(x2,v_p_s_3); grid on; title('method 1 : v_+2 - v_s2')
```

```

for i = 1:1013 v_p_13(i) = sum(v_p_s_3(1:i));
end;

v_p_s_4 = v_p_13 - sum(v_p_13)/length(v_p_13);

plot(x2,v_p_s_4); grid on; title('method 1 : v_+3 - v_s3')

for i = 1:1013 v_p_14(i) = sum(v_p_s_4(1:i));
end;

v_p_s_5 = v_p_14 - sum(v_p_14)/length(v_p_14);

plot(x2,v_p_s_5); grid on; title('method 1 : v_+4 - v_s4')

v_m_1 = v_m(1013:end);

plot(x2,v_m_1); grid on;

v_m_s_1 = v_m_1 - sum(v_m_1)/length(v_m_1);

plot(x2,v_m_s_1); grid on; title('method 1 : v_- - v_s')

for i = 1:1013 v_m_11(i) = sum(v_m_s_1(1:i));
end;

v_m_s_2 = v_m_11 - sum(v_m_11)/length(v_m_11);

plot(x2,v_m_s_2); grid on; title('method 1 : v_-1 - v_s1')

for i = 1:1013 v_m_12(i) = sum(v_m_s_2(1:i));
end;

v_m_s_3 = v_m_12 - sum(v_m_12)/length(v_m_12);

plot(x2,v_m_s_3); grid on; title('method 1 : v_-2 - v_s2')

for i = 1:1013 v_m_13(i) = sum(v_m_s_3(1:i));
end;

plot(x2,v_m_13); grid on; title('method 1 : v_-3')

v_m_s_4 = v_m_13 - sum(v_m_13)/length(v_m_13);

plot(x2,v_m_s_4); grid on; title('method 1 : v_-3 - v_s3')

```


Method 2 : Метод усреднения процесса за пробный период:

```
for k1 = 51:2025-50 v_p_2_1(k1-50) = sum(v_p(k1-50:k1+50))/100;
end;

v_p_2_1_1 = v_p_2_1 - sum(v_p_2_1)/length(v_p_2_1);

for k2 = 51:2025-50-100 v_p_2_2(k2-50) = sum(v_p_2_1(k2-50:k2+50))/100;
end;

v_p_2_2_1 = v_p_2_2 - sum(v_p_2_2)/length(v_p_2_2);

for k3 = 51:2025-50-100*2 v_p_2_3(k3-50) = sum(v_p_2_2(k3-50:k3+50))/100;
end;

v_p_2_3_1 = v_p_2_3 - sum(v_p_2_3)/length(v_p_2_3);

for k4 = 51:2025-50-100*3 v_p_2_4(k4-50) = sum(v_p_2_3(k4-50:k4+50))/100;
end;

v_p_2_4_1 = v_p_2_4 - sum(v_p_2_4)/length(v_p_2_4);

for k5 = 55:2025-50-100*4 v_p_2_5(k5-50) = sum(v_p_2_4(k5-50:k5+50))/100;
end;

plot(x1(51:2025-50*1),v_p_2_1); grid on; title('method 2 : v_+ 1');

plot(x1(51+50:2025-50*2),v_p_2_2); grid on; title('method 2 : v_+ 2');

plot(x1(51+50*2:2025-50*3),v_p_2_3); grid on; title('method 2 : v_+ 3');

plot(x1(51+50*3:2025-50*4),v_p_2_4); grid on; title('method 2 : v_+ 4');

plot(x1(51+50*4:2025-50*5),v_p_2_5); grid on; title('method 2 : v_+ 5');

plot(x1(51+50*4:2025-50*5),v_p_2_5); grid on; title('method 2 : v_+ 5 [-400 400]'); axis([-400
400 -1200 800]);

plot(x1(51+50*4:2025-50*5),v_p_2_5+311); grid on; title('method 2 : v_+ 5 - v_s [-400 400]');
axis([-400 400 -800 800]);

for k1 = 51:2025-50 v_m_2_1(k1-50) = sum(v_m(k1-50:k1+50))/100;
end;

for k2 = 51:2025-50-100 v_m_2_2(k2-50) = sum(v_m_2_1(k2-50:k2+50))/100;
end;
```

```
for k3 = 51:2025-50-100*2 v_m_2_3(k3-50) = sum(v_m_2_2(k3-50:k3+50))/100;
end;
```

```
for k4 = 51:2025-50-100*3 v_m_2_4(k4-50) = sum(v_m_2_3(k4-50:k4+50))/100;
end;
```

Method 3 : *Корреляционные методы*:

```
for l1 = 1+150:2025-150 v_p_3_1(l1-150) = sum(v_p(l1-150:l1+150).*v_p(1013-150:1013+150));
end;
```

```
v_p_3_1_1 = v_p_3_1 - sum(v_p_3_1)/length(v_p_3_1);
```

```
for l2 = 1+150:2025-150-300 v_p_3_2(l2-150) = sum(v_p_3_1_1(l2-150:l2+150).*v_p_3_1_1(1013-300:1013));
end;
```

```
v_p_3_2_1 = v_p_3_2 - sum(v_p_3_2)/length(v_p_3_2);
```

```
for l3 = 1+150:2025-150-300*2 v_p_3_3(l3-150) = sum(v_p_3_2_1(l3-150:l3+150).*v_p_3_2_1(1013-450:1013-150));
end;
```

```
v_p_3_3_1 = v_p_3_3 - sum(v_p_3_3)/length(v_p_3_3);
```

```
for l4 = 1+150:2025-150-300*3 v_p_3_4(l4-150) = sum(v_p_3_3_1(l4-150:l4+150).*v_p_3_3_1(1013-600:1013-300));
end;
```

```
v_p_3_4_1 = v_p_3_4 - sum(v_p_3_4)/length(v_p_3_4);
```

```
plot(x1(1+150:2025-150),v_p_3_1); grid on; title('Method 3 : v_+ 1');
```

```
plot(x1(1+150*2:2025-150*2),v_p_3_2); grid on; title('Method 3 : v_+ 2');
```

```
plot(x1(1+150*3:2025-150*3),v_p_3_3); grid on; title('Method 3 : v_+ 3');
```

```
plot(x1(1+150*4:2025-150*4),v_p_3_4); grid on; title('Method 3 : v_+ 4');
```

```
plot(x1(1+150:2025-150),v_p_3_1_1); grid on; title('Method 3 : v_+ 1 -vs');
```

```
plot(x1(1+150*2:2025-150*2),v_p_3_2_1); grid on; title('Method 3 : v_+ 2 -vs');
```

```

plot(x1(1+150*3:2025-150*3),v_p_3_3_1); grid on; title('Method 3 : v_+ 3 -vs');
plot(x1(1+150*4:2025-150*4),v_p_3_4_1); grid on; title('Method 3 : v_+ 4 -vs');

$$7.961 \cdot 10^{36} - (7.961 \cdot 10^{36} + 1.102 \cdot 10^{37}) / 2 = -1.5295e+036$$

plot(x1(1+150*3:2025-150*3),v_p_3_3_1+1.5295e+036); grid on; title('Method 3 : v_+ 3 -vs');

```

Построение периодограммы:

```

vp = fft(v_p);
vm = fft(v_m);
vp1 = 2*(real(vp))/length(x);
vm2 = 2*(imag(vm))/length(x);
freq = x./2025;
freqw = 2*pi*freq;
period = 1./freq;
plot(freq(1:100),vp1(1:100)); grid on;
plot(freq(1:100),vm2(1:100)); grid on;
plot(freqw(1:100),vp1(1:100)); grid on; title('a(w)');
plot(freqw(1:100),vm2(1:100)); grid on; title('b(w)');
plot(period(1:100),vp1(1:100)); grid on; title('periodogram of a(w)');
plot(period(1:100),vm2(1:100)); grid on; title('periodogram of b(w)');

```

7. Список литературы

- 1) В. И. Дмитриев : Математическое моделирование и анализ временных процессов.
- 2) М.Г. Серебrenников, А.А. Первозванский : Выявление скрытых периодичностей.
- 3) В.В. Горбачев : Анализ и прогнозирование временных рядов.
- 4) Alexey A. Lyubushin : METHOD FOR DETECTING HIDDEN PERIODIC COMPONENTS WITHIN SEISMICITY.