

# Tecniche Algoritmiche I: Classificazione del Problema

## I. Progettazione di Algoritmi

Dato un problema, non esistono ricette generali per progettare algoritmi efficienti che lo risolvano. Tuttavia, durante la progettazione di un algoritmo si possono individuare 4 **fasi** distinte:

1. **Classificazione del problema**
2. **Caratterizzazione della soluzione**
3. **Tecnica di Progetto**
4. **Strutture Dati**

## II. Classificazione dei Problemi

I problemi si possono **classificare** in:

1. **Problemi di Ricerca**
2. **Problemi di Decisione**
3. **Problemi di Ottimizzazione**

## III. Fase di Caratterizzazione: Specifica di un Problema

Nella fase di concettualizzazione si fornisce una **specifica del problema**, cioè si definiscono le caratteristiche del problema senza però trattare i metodi di risoluzione.

Questa **specifica** definisce:

- **Input** → *Spazio degli Input*  
Si definiscono quali sono le variabili in input, che definiranno quindi lo *spazio degli input*.
- **Scopo della Risoluzione** → *Spazio delle Soluzioni*  
Si stabilisce quali valori delle variabili saranno soluzione al problema, definendo lo *spazio delle soluzioni*.
- **Vincoli** → *Relazione Caratteristica*  
Si stabiliscono i vincoli tra lo i valori dello spazio degli input e quello delle soluzioni.  
Questo definisce la *relazione caratteristica* del problema.
- **Output** → *Spazio degli Output / Quesito*  
Si determinano quali saranno le informazioni in uscita dal processo di risoluzione del problema. Queste informazioni definiscono lo *spazio di output* ed il *quesito* del problema.

### 3.1 - Specifica di un Problema: Definizione Formale

La **specifica di un problema** è quindi una **quintupla**:

$$\langle I, S, R, O, Q \rangle$$

dove:

- **$I$** : spazio degli input
- **$S$** : spazio delle soluzioni
- **$R \subseteq I \times S$** : **relazione caratteristica** su  $I$  ed  $S$
- **$O$** : spazio degli output
- **$Q$** : è la regola detta **quesito**, consente di definire una relazione su  $I$  e  $O$ , sulla base della relazione caratteristica.  
Il quesito definisce che, per ogni possibile soluzione, **l'output deve essere un qualunque elemento dello spazio delle soluzioni legato alla relazione caratteristica**.



### Esempio di Concettualizzazione

**Problema:** Determinare la posizione di un numero intero in un vettore di interi

**Spazio degli Input:** Insieme delle possibili coppie formate da un vettore  $v$  ed un intero  $m$

**Relazione Caratteristica:** Associa ad ogni coppia  $\langle v, m \rangle$  una posizione  $k$  solo se il  $k$ -esimo elemento di  $v$  è uguale a  $m$ . Chiamiamo la relazione  $R_{\text{vett}}$ .

**Spazio di Output:** Contiene lo spazio delle soluzioni più un simbolo che indica l'assenza di soluzioni.

**Quesito:** Stabilisce che per ogni istanza che ammette soluzione, ci si aspetta una soluzione qualsiasi legata a quell'istanza della relazione caratteristica.

## 3.2 - Definizione: Soluzione di un Problema per una sua Istanza

Una particolare **istanza** di un problema si ottiene ogni volta che si scelgono valori di input diversi per il problema.



Sia  $P = \langle I, S, R, O, Q \rangle$  un problema e sia  $i \in I$  una sua istanza.

Una **soluzione**  $S_i$  per una data istanza è un elemento di  $S$  tale che  $\langle i, S_i \rangle \in R$ .

## 3.3 - Definizione: Risposta ad un Problema per una sua Istanza



Sia  $P = \langle I, S, R, O, Q \rangle$  un problema e sia  $i \in I$  una sua istanza.

Una **risposta**  $r_i$  per una data istanza è un elemento di  $O$  tale che  $\langle i, r_i \rangle \in R_Q$  dove  $R_Q$  è la relazione su  $I$  e  $O$  definita in base ad  $R$  applicando la regola  $Q$ .

## IV. Problemi di Ricerca

Quando **ricerchiamo delle soluzioni** in una particolare istanza, ci interessa:

- **conoscere una qualsiasi soluzione**, se ne esiste almeno una;
- **sapere che non ci sono soluzioni**, altrimenti.

Per quest'ultimo caso, cioè l'assenza di soluzioni, introduciamo nello **spazio di output** il simbolo  $\perp$ , che individua l'assenza di soluzioni.

### 3.1 - Specifica di un Problema di Ricerca

Un **problema di ricerca**  $P$  è un problema specificato con una **quintupla** del tipo:

$$\langle I, S, R, S \cup \{\perp\}, \text{qric} \rangle$$

dove:

- **qric**: regola che definisce, in base ad  $R$ , la relazione  $R_{\text{qric}}$ , che contiene:
  - ogni coppia contenuta in  $R$
  - una coppia  $\langle i, \perp \rangle$  per ogni istanza  $i$  di  $P$  per la quale  $P$  non ha soluzioni.

## IV. Problemi di Decisione

I **problemi di decisione** sono fondamentali in teoria della computazione e possono essere posti come una domanda che ammette una risposta vero/falso su un determinato input.

Lo **spazio di output** conterrà quindi solo i due valori di verità.

Formalmente diciamo che un **problema di decisione**  $P$  è un problema specificato con una **quintupla** del tipo:

$$\langle I, S, R, \{\text{true}, \text{false}\}, q_{\text{dec}} \rangle$$

dove  $q_{\text{dec}}$  definisce la **funzione**:

$$R_{\text{qdec}} : I \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\}$$

tale che, per ogni istanza  $i$  di  $P$ , la funzione  $R_{\text{qdec}}(i)$  vale:

- **true**: se esiste una  $s$  di  $S$  tale che  $\langle i, s \rangle \in R$   
(in altre parole se esiste una soluzione all'istanza del problema);
- **false**: altrimenti.

Per la **risoluzione** di questi problemi è possibile adottare **due approcci**:

- **Costruttivo**  
Si cerca una risposta ad un problema di ricerca equivalente (detto **problema sottostante**).  
Se la risposta al problema sottostante è  $\perp$ , allora la risposta sarà **false**, altrimenti sarà **true**.
- **Non Costruttivo**  
Si determina la risposta direttamente, senza ricorrere al problema di ricerca sottostante.



#### Esempio di Problema di Decisione: Problema di Partizionamento

Sono dati  $k$  numeri interi positivi  $n_1, \dots, n_k$  la cui somma è  $2m$  (per un certo intero  $m$ ).  
Decidere se i  $k$  numeri possono essere ripartiti in due gruppi in modo che la somma dei componenti di ogni gruppo sia  $m$ .

**Spazio di Input:** insieme

## V. Problemi di Ottimizzazione

Un **problema di ottimizzazione** consiste nel trovare una soluzione ottimale tra tutte le soluzioni possibili.  
Alle soluzioni, infatti, è associata una **misura** (costo, obiettivo)

Formalmente, diciamo che un problema di ottimizzazione è un problema specificato con una quintupla del tipo:

$$\langle I, S, R, S \cup \{\perp\}, q_{\text{ott}}(M, m, \subseteq) \rangle$$

dove:

- $M$  è un **insieme** qualsiasi;
- $m$  è una **funzione obiettivo** (ad esempio la funzione costo);
- $\subseteq$  è una relazione di ordinamento su  $M$ ;

Anche qui si definisce una relazione  $R_{q_{\text{ott}}} \subseteq I \times S$  per la quale si ha, data un'istanza  $i$  ed una soluzione  $s$ :

- una coppia  $(i, s)$  per la quale non esiste una soluzione migliore per l'istanza;
- una coppia  $(i, \perp)$  per la quale l'istanza non ha soluzione.

## VI. Spazio di Ricerca

Lo **spazio di ricerca** è uno strumento che aiuta a caratterizzare le potenziali soluzioni ad una generica istanza di un problema per facilitare la scelta di un algoritmo risolutivo.

In pratica, lo spazio di ricerca stabilisce un metodo per ogni generica istanza che definisce un insieme con due funzioni associate:

- **Funzione di Ammissibilità**  
Funzione che permette di verificare se un elemento dello spazio di ricerca è una soluzione per l'istanza del problema.
- **Funzione di Risposta**  
Permette di ottenere le risposte per l'istanza dagli elementi dello spazio di ricerca.