Un séquent est une expression

$$H_1,\dots,H_n \vdash C_1,\dots,C_p$$

où les H_i sont appelées hypothèses du séquent et les C_j les conclusions du séquent. Un séquent est vrai pour une interprétation I et une assignation ρ si et seulement si la formule

$$(H_1 \wedge \dots \wedge H_n) \Rightarrow (C_1 \vee \dots \vee C_p)$$

est vraie pour l'interpretation I et l'assignation ρ. On rappelle qu'une assignation associe à chaque variable libre un élément du domaine d'interprétation.

$$\begin{aligned}
[\![H_1,\dots,H_n \vdash C_1,\dots,C_p]\!]_{I\rho} &= [\![(H_1 \wedge \dots \wedge H_n) \Rightarrow (C_1 \vee \dots \vee C_p)]\!]_{I\rho} \\
&= [\![\neg H_1 \vee \dots \vee \neg H_n \vee C_1 \vee \dots \vee C_p]\!]_{I\rho} \\
&= [\![\neg H_1]\!]_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B [\![\neg H_n]\!]_{I\rho} \vee_B [\![C_1]\!]_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B [\![Cp]\!]_{I\rho} \\
&= \neg_B [\![H_1]\!]_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B \neg_B [\![H_n]\!]_{I\rho} \vee_B [\![C_1]\!]_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B [\![Cp]\!]_{I\rho}
\end{aligned}$$

Un séquent est vrai pour I et l'assignation ρ si et seulement si pour I et ρ l'une des formule H_i est fausse et l'une des formules C_j est vraie. Attention : lorsqu'un séquent est vrai pour toute assignation ρ le H_i (faux) ou le C_j (vrai) qui le rend vrai peut varier en fonction de ρ.

Une règle du calcul des séquents est dite valide (ou correcte, "*sound*") si étant donnée une interprétation I lorsque le ou les séquents prémisses (ceux qui sont au dessus de la règle) sont vrais pour I et pour toute assignation, alors le séquent conclusion (celui qui est au dessous de la règle) est vrai pour I et pour toute assignation.

Par exemple $P(x) \vdash P(x)$ (c'est-à-dire la formule $P(x) \Rightarrow P(x)$) est vrai pour toute interprétation I et pour toute assignation de x dans D le domaine de I. Considérons l'interprétation $D_I = \{a,b\}$ $i(P) = \{a\}$. Pour lassignation $\rho[a/x]$ c'est parce que $i(P)(a)$ (conclusion, à droite de "$\vdash$") est vraie que le séquent $P(x) \vdash P(x)$ est vrai, et pour l'assignation $\rho[b/x]$ c'est parce que $i(P)(b)$ (hypothèse, à gauche de "$\vdash$") est faux que le séquent est vrai.

L'objectif de ce TD est de vous aider à comprendre la signification des règles du calcul des séquents, qui ne sont pas ainsi "par hasard", et qui possèdent beaucoup de propriétés (symétrie, élmination des coupures,...).

Exercice A Correction des règles du calcul des séquents

Question A(a) Vérifier que chaque axiome est vrai pour toute interprétation et toute assignation.

Réponse: Soit I une interprétation de domaine D et une assignation ρ des variables libres du séquents dans le domaine D. Un axiome contient une même formule à gauche et à droite, disons A :

$$A, H_1, \ldots, H_n \vdash C_1, \ldots, C_p, A$$

comme toutes les variables libres du séquent et donc de A ont une assignation dans D, $[\![A]\!]_{I\rho}$ a une valeur et en développant la valeur de vérité du séquent pour I et ρ nous obtenons une expression booléenne de la forme $\neg_B [\![A]\!]_{I\rho} \vee_B [\![A]\!]_{I\rho} \vee_B \cdots$ qui vaut $\mathbf{1}$:

$$\begin{aligned}
& [\![A, H_1, \ldots, H_n \vdash C_1, \ldots, C_p, A]\!]_{I\rho} \\
= \; & [\![(A, H_1 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow (C_1 \vee \cdots \vee C_p, A)]\!]_{I\rho} \\
= \; & \underline{\neg_B [\![A]\!]_{I\rho}} \vee_B \neg_B [\![H_1]\!]_{I\rho} \vee_B \cdots \neg_B [\![H_n]\!]_{I\rho} \vee_B [\![C_1]\!]_{I\rho} \vee_B \cdots [\![Cp]\!]_{I\rho} \vee_B \underline{[\![A]\!]_{I\rho}} \\
= \; & \mathbf{1}
\end{aligned}$$

Question A(b) Vérifiez que les règles de contraction droite et gauche, sont correctes ainsi que les règles gauches et droites des connecteurs $\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg$. Cela fait 10 règles à vérfier, mais il n'est pas nécessaire de toutes les traiter, s'arrêter lorsque vous y arrivez facilement. Certains cas sont traitées (sans les assignations) dans les transparents sur la complétude du calcul des séquents propositionnel, vous pouvez regarder.

Question A(c) Vérifier que les règles des quantificateurs $\exists, \forall$ droite et gauche sont correctes et vous remarquerez que la restriction sur $\forall_d$ et $\exists_g$ est absolument nécessaire pour établir la correction : sans cette restriction la règle pourrait ne pas être correcte et conduire d'un séquent vrai à un séquent faux (comme vous l'avez vu dans le CC).

Réponse: A titre d'exemple je traite le $\exists_g$:

$$\frac{A(x), H_1, \ldots, H_n \vdash C_1, \ldots, C_p}{(\exists u.\ A(u)), H_1, \ldots, H_n \vdash C_1, \ldots, C_p} \exists_g \text{ aucun x libre dans les } H_i \text{ ni les } C_j$$

Supposons que le séquent $A(x), H_1, \ldots, H_n \vdash C_1, \ldots, C_p$ soit valide pour I et pour toute assignation ρ *et que x ne soit libre dans aucune des formules H_i ni C_j (*)* et montrons que le séquent $\exists u.\ A(u), H_1, \ldots, H_n \vdash C_1, \ldots, C_p$ est valide pour la même interprétation et pour toute assignation ρ.

Etant donnée une assignation du séquent conclusion ρ — dans lequel il n'y a pas de variable libre x, cette variable n'intervient pas dans l'assignation — montrons que le séquent conclusion est vrai pour cette assignation en supposant que pour chaque assignation du séquent prémisse, le séquent prémisse est vrai. Une assignation ρ' du séquent prémisse est une assignation du séquent conclusion complétée par n'importe l'assignation de $d_x \in D$ à x. Dire que le séquent prémissesest vrai pour une assignation complétée ρ', c'est dire que l'une des formules H_i ou $A(x)$ est fausse ou l'une des formules C_j est vraie poru cette assignation.

- Si, avec cette assignation ρ' complétée pour x par d_x, l'un des H_i est faux ou l'un des C_j est vrai alors le séquent conclusion est vrai.
- Si, pour ρ', aucun des H_i n'est faux et aucun des C_j n'est vrai alors c'est que $A(x)$ est faux, et alors $A(x)$ est faux pour n'importe quelle assignation d'un élément de D à x. C'est là où il y a "quelque chose à comprendre" et que nous utilisons la restriction (*). En effet, il se pourrait, en l'absence de (*), qu'en remplaçant l'assignation d_x de x par une autre, disons ρ'' qui assignerait à x la valeur e_x de D, que le séquent prémisse soit vrai pour ρ'' parce que l'une des formules H_i est fausse pour ρ'' ou parce que l'une des formules C_j est vraie pour ρ'', et nous ne pourrions plus affirmer que $A(x)$ avec l'assignation e_x pour x est fausse. Mais comme il n'y a pas de x libre dans les H_i ni dans les C_j leur valeur est inchangée, c'est comme pour l'assignation de x à d_x, les H_i sont vraies pour ρ'' et les C_j faux pour ρ'' donc $A(x)$ est faux pour ρ''. Ainsi pour toute assignation ρ' qui étend ρ à x, $A(x)$ est faux, et donc $\exists u.\ A(u)$ est faux pour ρ (il n' ya pas besoin d'une assignation pour x pour connaitre la valeur de $\exists u.A(u)$ qui ne contient plus de x libre). La forule $\exists u.A(u)$ à gauche du signe "$\vdash$ dans le séquent conclusion étant fausse pour ρ, le séquent conclusion est donc faux pour toute assignation ρ.

Question A(d) Montrer que la règle de coupure est valide.

Réponse:

$$\frac{H_1,\ldots,H_n \vdash C_1,\ldots,C_p,A \qquad A,H_1,\ldots,H_n \vdash C_1,\ldots,C_p}{H_1,\ldots,H_n \vdash C_1,\ldots,C_p}\text{cut}$$

Etant donnée une interprétation I et une assignation ρ des variables libres des séquents premisses, montrons que si

(1) $[\![H_1,\ldots,H_n \vdash C_1,\ldots,C_p,A]\!]_{I\rho} = \mathbf{1}$ et

(2) $[\![A,H_1,\vdash,H_nC_1,\ldots,C_p]\!]_{I\rho} = \mathbf{1}$

alors

$$[\![H_1,\ldots,H_n \vdash C_1,\ldots,C_p]\!]_{I\rho} = \mathbf{1}$$

Il n'est pas possible d'avoir que les séquents (1) et (2) soient vrais pour I,ρ à cause de A uniquement dans les deux cas. En effet, si le premier est valide à cause de A, c'est que $[\![A]\!]_{I\rho} = \mathbf{1}$ et si le second est vrai à cause de A qui apparaît à gauche du signe "$\vdash$" c'est que $[\![A]\!]_{I\rho} = \mathbf{0}$. Comme $[\![A]\!]_{I\rho}$ ne peut pas être à la fois égal à $\mathbf{1}$ et à $\mathbf{0}$ il y a une formule vraie parmi $\neg H_1,\ldots,\neg H_n,C_1,\ldots,C_p$ pourl'interprétation I et la valuation ρ et donc le séquent conclusion est vrai.

Exercice B Réversibilité des règles du calculs des séquents propositionnel

Une règle du calcul des séquents est dite réversible si lorsque le séquent conclusion est valide pour une interprétation et une assination alors il en est de même de tous les séquents premisses.

Question B(a) Vérifiez que les règles propositionnelles du calcul des séquents des connecteurs $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow$ gauches et droites sont réversibles —— attention les règles $\Leftrightarrow$ ne le sont pas, et les règles des quantificateurs non plus. Comme il ya beaucoup de règles, il n'est pas nécessaire de toutes les traiter : après avoir réussi à en à en faire deux ou trois il est possible de passer à autre chose.

Réponse: Certains cas sont traités dans les transparents sur la complétude du calcul des séquents propositionnel. A titre d'exemple je traiterai la règle $\Rightarrow_g$:

$$\frac{H_1, \ldots, H_n \vdash C_1, \ldots, C_p, A \qquad B, H_1, \ldots, H_n \vdash C_1, \ldots, C_p}{A \Rightarrow B, H_1, \ldots, H_n \vdash C_1, \ldots, C_p} \Rightarrow_g$$

Supposons que

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= [\![A \Rightarrow B, H_1, \ldots, H_n \vdash C_1, \ldots, C_p]\!]_{I\rho} \\ &= \neg_B [\![A \Rightarrow B]\!]_{I\rho} \vee_B \neg_B [\![H_1]\!]_{I\rho} \vee_B \cdots \neg_B [\![H_n]\!]_{I\rho} \vee_B [\![C_1]\!]_{I\rho} \vee_B \cdots [\![C_p]\!]_{I\rho} \end{aligned}$$

L'un au moins des éléments de cette disjonction est vrai, puisqu'elle vaut $\mathbf{1}$.

- Si $[\![C_{i_0}]\!]_{I\rho} = \mathbf{1}$ pour un certain i_0 alors les deux séquents prémisses sont vrais.
  - Pour le premier :

$$[\![H_1, \ldots, H_n \vdash C_1, \ldots, C_{i_0}, \ldots, C_p, A]\!]_{I\rho}$$
$$= \neg_B [\![H_1]\!]_{I\rho} \vee_B \cdots \neg_B [\![H_n]\!]_{I\rho} \vee_B [\![C_1]\!]_{I\rho} \vee_B \cdots \vee_B [\![C_{i_0}]\!]_{I\rho} \vee_B \cdots \vee_B [\![C_p]\!]_{I\rho} \vee_B [\![A]\!]_{I\rho}$$
$$\geq [\![C_{i_0}]\!]_{I\rho} = \mathbf{1}$$

  - pour le second :

$$[\![B, H_1, \ldots, H_n \vdash C_1, \ldots, C_{i_0}, \ldots, C_p]\!]_{I\rho}$$
$$= \neg_B [\![B]\!]_{I\rho} \vee \neg_B [\![H_1]\!]_{I\rho} \vee_B \cdots \neg_B [\![H_n]\!]_{I\rho} \vee_B [\![C_1]\!]_{I\rho} \vee_B \cdots \vee_B [\![C_{i_0}]\!]_{I\rho} \vee_B \cdots \vee_B [\![C_p]\!]_{I\rho}$$
$$\geq [\![C_{i_0}]\!]_{I\rho} = \mathbf{1}$$

- $\underline{\neg_B [\![H_{j_0}]\!]_{I\rho} = \mathbf{1} \text{ pour un certain } j_0}$ alors les deux séquents prémisses sont vrais.
  - Pour le premier :

$$
\begin{aligned}
&[\![H_1,\dots,H_{j_0},\dots,H_n \vdash C_1,\dots,C_p,A]\!]_{I\rho}\\
&= \neg_B [\![H_1]\!]_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B [\![H_{j_0}]\!]_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B \neg_B [\![H_n]\!]_{I\rho} \vee_B [\![C_1]\!]_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B [\![C_p]\!]_{I\rho} \vee_B [\![A]\!]_{I\rho}\\
&\geq [\![H_{j_0}]\!]_{I\rho} = \mathbf{1}
\end{aligned}
$$

  - pour le second :

$$
\begin{aligned}
&[\![B,H_1,\dots,H_{j_0},\dots,H_n \vdash C_1,\dots,C_p]\!]_{I\rho}\\
&= \neg_B [\![B]\!]_{I\rho} \vee \neg_B [\![H_1]\!]_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B [\![H_{j_0}]\!]_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B \neg_B [\![H_n]\!]_{I\rho} \vee_B [\![C_1]\!]_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B [\![C_p]\!]_{I\rho}\\
&\geq [\![H_{j_0}]\!]_{I\rho} = \mathbf{1}
\end{aligned}
$$

- $\underline{\text{Si } \neg_B [\![A \Rightarrow B]\!]_{I\rho} = \mathbf{1}}$, c'est-à-dire si $[\![A \Rightarrow B]\!]_{I\rho} = \mathbf{0}$ alors $[\![A]\!]_{I\rho} = \mathbf{1}$ et $[\![B]\!]_{I\rho} = \mathbf{0}$.
  - Le premier séquent prémisse est vrai parce que $[\![A]\!]_{I\rho} = \mathbf{1}$

$$
\begin{aligned}
&[\![H_1,\dots,H_{j_0},\dots,H_n \vdash C_1,\dots,C_p,A]\!]_{I\rho}\\
&= \neg_B [\![H_1]\!]_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B \neg_B [\![H_n]\!]_{I\rho} \vee_B [\![C_1]\!]_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B [\![C_p]\!]_{I\rho} \vee_B [\![A]\!]_{I\rho}\\
&\geq [\![A]\!]_{I\rho} = \mathbf{1}
\end{aligned}
$$

  - et le second séquent prémisse est vrai parce que $[\![B]\!]_{I\rho} = \mathbf{0}$

$$
\begin{aligned}
&[\![H_1,\dots,H_{j_0},\dots,H_n \vdash C_1,\dots,C_p,A]\!]_{I\rho}\\
&= \neg_B [\![H_1]\!]_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B \neg_B [\![H_n]\!]_{I\rho} \vee_B [\![C_1]\!]_{I\rho} \vee_B \dots \vee_B [\![C_p]\!]_{I\rho} \vee_B [\![A]\!]_{I\rho}\\
&\geq \neg_B [\![B]\!]_{I\rho} = \neg_B \mathbf{0} = \mathbf{1}
\end{aligned}
$$

Quand le séquent conclusion est vrai, nous sommes dans l'un (au moins) des trois cas ci-dessus, et chacun des deux séquents prémisse est vrai.