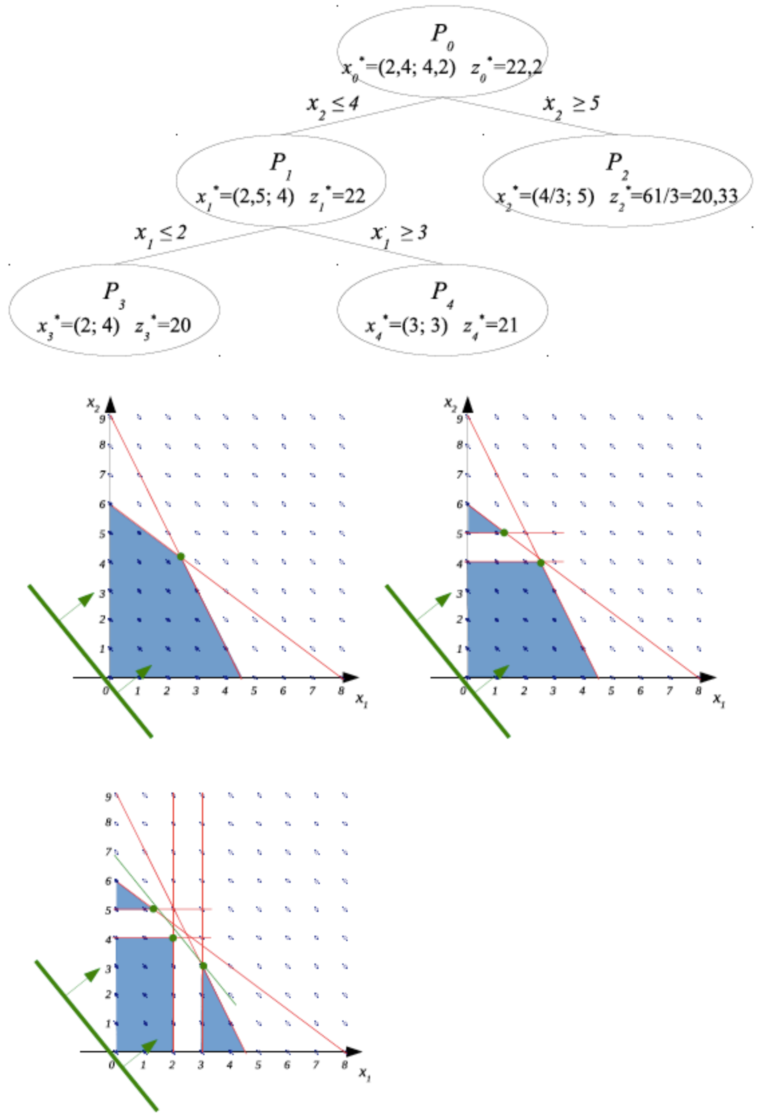
Cours 5 :
Lien Cours – TD
L’algèbre et la Dualité

Eric Bourreau

+ Vincent Boudet

Exemple PLNE

- $$\begin{cases} Max & 4x_1 + 3\,x_2 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$



La dualité Cours–TD

- Quel rapport y a t'il entre votre cours …
  - Forme canonique (n variables, m contraintes)

    $$\begin{array}{lll} \max & Cx & \\ \text{s.c.} & Ax & \leq b \\ & x & \geq 0^n \end{array}$$

    Forme standard (n+m variables, m contraintes / équations)

    $$\begin{array}{lll} \max & Cx & \\ \text{s.c.} & Ax' & = b \\ & x' & \geq 0^{n+m} \end{array}$$

    Simplexe

    Max coût réduit positif

    Min $\frac{b_j}{a_j^i}$

    Pivoter x_j et x_i

- Et la modélisation que l'on fait en TD ??

- Monsieur Clothes désire ouvrir trois nouvelles boutiques qui lui coûteront 250 000 €, 100 000 € et 170 000 €. Déterminez le montant à emprunter à chacune des banques ?

	Boutique de Nantes	Boutique de Troyes	Boutique de Lorient
Banque 1	5 %	6,5 %	6,1 %
Banque 2	5,2 %	6,2 %	6,2 %
Banque 3	5,5 %	5,8 %	6,5 %

$$(1) \quad \text{Min} \sum_{i=1}^{Ba} \sum_{j=1}^{Bo} x_{ij} \frac{T_{ij}}{1-\left(1+T_{ij}\right)^{-n}}$$

$$(2) \quad \forall j = 1 \ldots Bo : \sum_{i=1}^{Ba} x_{ij} = P_j$$

$$(3) \quad \forall i = 1 \ldots Ba : \sum_{i=1}^{Bo} x_{ij} \leq Mmax$$

$$(4) \quad \forall i = 1 \ldots Ba, \forall j = 1 \ldots Bo : x_{ij} \geq 0$$

La résolution des emprunts bancaires expliquée

- Monsieur Clothes, directeur d’une chaîne de magasins de vêtements, désire ouvrir trois nouvelles boutiques : une à Nantes, une à Troyes et une à Lorient. L’ouverture de chaque nouvelle boutique lui coûtera respectivement 250 000 €, 100 000 € et 170 000 €. Pour financer ses projets, il fait appel à trois différentes banques

	Boutique de Nantes	Boutique de Troyes	Boutique de Lorient
Banque 1	5 %	6,5 %	6,1 %
Banque 2	5,2 %	6,2 %	6,2 %
Banque 3	5,5 %	5,8 %	6,5 %

- En fonction de l’emplacement de ces boutiques et des risques évalués, chaque banque décide de financer au plus 300 000 € sur 8 ans et propose des taux différents suivant les boutiques. Déterminez le montant à emprunter à chacune des banques pour financer chaque boutique de façon à minimiser les dépenses totales de M. Clothes

Solution

$$(1)\quad \mathrm{Min} \sum_{i=1}^{Ba} \sum_{j=1}^{Bo} x_{ij} \frac{T_{ij}}{1-\left(1+T_{ij}\right)^{-n}}$$

$$(2)\quad \forall j = 1 \ldots Bo : \sum_{i=1}^{Ba} x_{ij} = P_j$$

$$(3)\quad \forall i = 1 \ldots Ba : \sum_{i=1}^{Bo} x_{ij} \leq Mmax$$

$$(4)\quad \forall i = 1 \ldots Ba, \forall j = 1 \ldots Bo : x_{ij} \geq 0$$

Dépenses totales	82 218,07 €

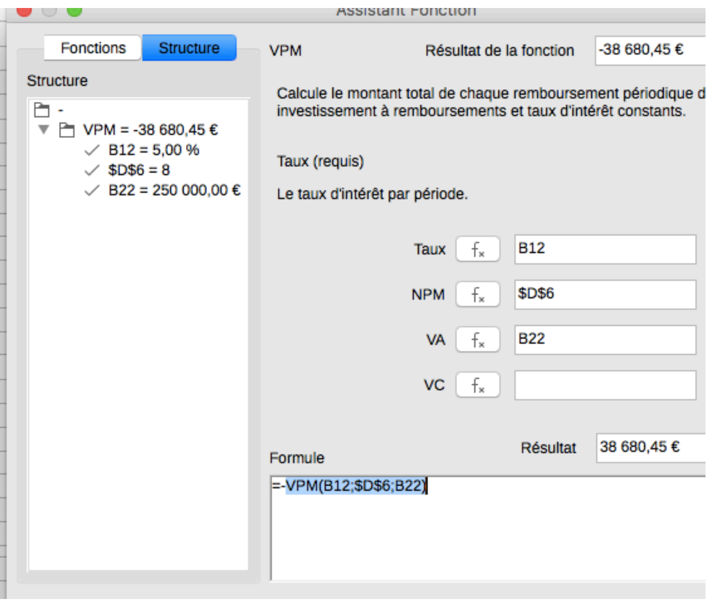
Emprunt maximum auprès des banques	300 000,00 €
Nombre d'années maximum pour l'emprunt	8

	Boutique de Nantes	Boutique de Troyes	Boutique de Lorient
Coût d'ouverture	250 000,00 €	100 000,00 €	170 000,00 €

Taux d'emprunt	Boutique de Nantes	Boutique de Troyes	Boutique de Lorient
Banque 1	5,0%	6,5%	6,1%
Banque 2	5,2%	6,2%	6,2%
Banque 3	5,5%	5,8%	6,5%

Annuités	Boutique de Nantes	Boutique de Troyes	Boutique de Lorient
Banque 1	38 680,45 €	0,00 €	8 083,69 €
Banque 2	0,00 €	0,00 €	19 477,56 €
Banque 3	0,00 €	15 976,36 €	0,00 €

Montant emprunté	Boutique de Nantes	Boutique de Troyes	Boutique de Lorient	Total emprunté
Banque 1	250 000,00 €		- € 50 000,00 €	300 000,00 €
Banque 2		- €	- € 120 000,00 €	120 000,00 €
Banque 3		- € 100 000,00 €		- € 100 000,00 €
Total emprunté	250 000,00 €	100 000,00 €	170 000,00 €	



Résolution manuelle en déroulant le simplexe

- On part des matrices A, B et C suivantes :

C

$$(0{,}154 \quad 0{,}164 \quad 0{,}161 \quad 0{,}156 \quad 0{,}162 \quad 0{,}162 \quad 0{,}158 \quad 0{,}160 \quad 0{,}164)$$

$$\begin{array}{c|ccccccccc|cc}
 & x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} & & \\
Banq_1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \leq & 300 \\
Banq_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \leq & 300 \\
Banq_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \leq & 300 \\
Bout_1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & = & 250 \\
Bout_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & = & 100 \\
Bout_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & = & 170
\end{array}$$

A

b

Partitionnement des indices

- On peut partitionner les indices des variables en deux parties :
  - Ceux des variables dans la base : B
  - Ceux des variables hors-base : N
- Cette partition se retrouve dans les contraintes

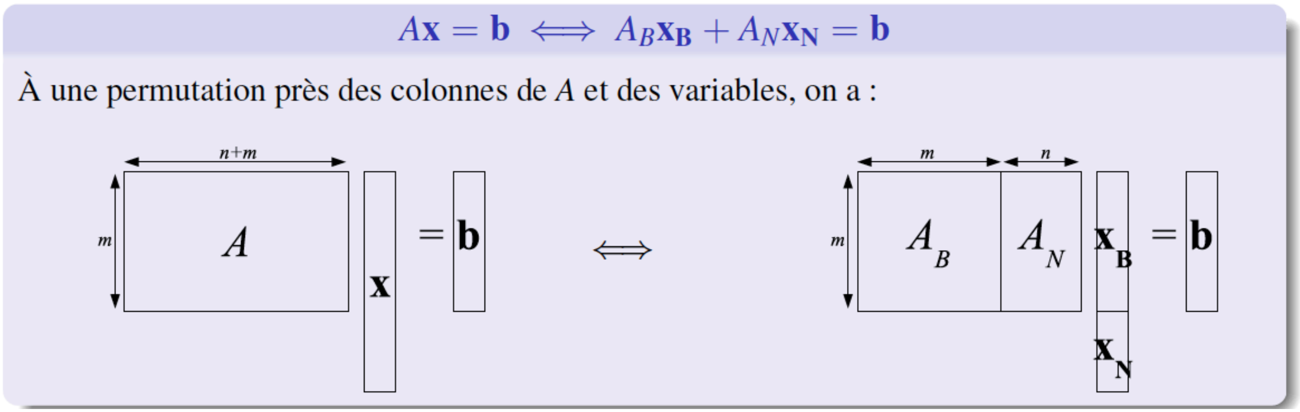
$$\sum_{j=0}^{j=n+m} a_{ij}x_j = \sum_{j \in B} a_{ij}x_j + \sum_{j \in N} a_{ij}x_j \qquad pour\ i = 1..m$$

- D'un point de vue matriciel, on partitionne les colonnes de A et les composantes de x et c

c = $(c_B \quad c_N)$

A = $(B \quad N)$

x = $(x_B \quad x_N)$



Décomposition matricielle

- Exprimons les variables en base* en fonction des variables hors bases:

$$
\begin{aligned}
Ax = b \iff & Bx_B + Nx_N = b \\
\iff & x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \\
\iff & x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N
\end{aligned}
$$

- Ce qui donne en remplaçant x_B dans la fonction objectif :

$$
\begin{aligned}
z = cx &= c_B x_B + c_N x_N \\
&= c_B(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N x_N \\
&= c_B B^{-1}b + (c_N - c_B B^{-1}N)x_N
\end{aligned}
$$

*si B^{-1} est inversibles (i.e. : colonnes linéairement indépendantes)

Cout réduit !!

Le dictionnaire matriciel

- Le dictionnaire s'écrit :

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c_B B^{-1} b + (c_N - c_B B^{-1} N) x_N \\ s.c. \quad & x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N \\ & x_B, x_N \geq 0 \end{aligned}$$

- Une solution est :

$$\begin{aligned} z &= c_B B^{-1} b \\ x_B &= B^{-1} b \end{aligned}$$

- Condition de réalisabilité : $B^{-1} b \geq 0$
- Condition d'optimalité : $c_N - c_B B^{-1} N \leq 0$

L'algorithme du simplexe matriciel

- Soit un dictionnaire

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = c_B B^{-1} b + (c_N - c_B B^{-1} N) x_N \\
s.c. \quad & x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N \\
& x_B, x_N \geq 0
\end{aligned}
$$

1. Si $\bar{c}_N = c_N - c_B B^{-1} N \leq 0$ alors la solution est optimale
   STOP
2. choisir une variable entrante $k \in N$ telle que $(\bar{c}_N)_k \geq 0$
3. Si $\left(\bar{a}_{i,k}\right)_{i=1,..,m} = (B^{-1}N)_k \leq 0$ alors le problème est non borné
   STOP
4. Choisir une variable sortant $s \in B$ telle que

$$
s = argmin_{j \in B} \left\{ \frac{\bar{b}_j}{\bar{a}_{j,k}} = \frac{B^{-1}_{j,.} b}{B^{-1}_{j,.} N_{.,k}} : \bar{a}_{j,k} \geq 0 \right\}
$$

5. Pivoter avec $B = (B \backslash \{s\}) \cup \{k\}$ et $N = (N \backslash \{k\}) \cup \{s\}$
   Retourner en 1