КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ МОСКОВСКОГО ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ФАКУЛЬТЕТ РАДИОТЕХНИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Вопрос по выбору

Монополи и дионы

Дылько Арсений Б01-207

1 Вступление:

В 1974 году Джерард ‘т Хоофт (Gerard ’t Hooft) и Александр Поляков независимо обнаружили, что в некоторых теориях существование монополя не только возможно, но и необходимо. Например, в теории великого объединения такие монополи неизбежно возникают как топологические дефекты поля Хиггса. Рассмотрим простейшие задачи, связанные с магнитным монополем.

Далее в задаче будем рассматривать следующие параметры:

- Магнитный заряд $M = 0.32$ (СИ: $\dfrac{1}{\mu_0} \cdot 4 \cdot 10^{-8}$ Кл*Гн/с)
- Масса заряда m = 1 мкг
- Радиус кольца $a = 100$ см
- Индуктивность кольца $L = 10^4$ см
- Начальная скорость монополя $v_0 = 1$ км/с
- Удельное сопротивление кольца $\rho = 1 \cdot 10^{-18}$ с

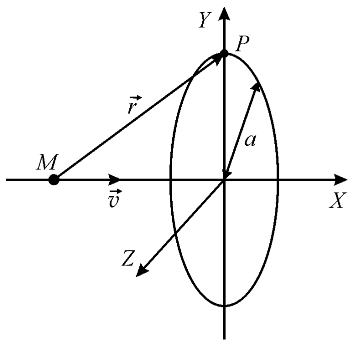
2 Регистрация пролета монополей:

Один из способов зарегистрировать магнитный монополь – зафиксировать индукционный ток при пролете монополя сквозь проводящий контур. В настоящее время в детекторах монополей используются сверхпроводящие контуры (такие установки называют SQUID – Superconduction Quantum Interference Device).

2.1 Общая модель.

Будем рассматривать монополь, пролетающий с большой скоростью вдоль оси сверхпроводящего кольца.

Магнитные монополи должны вводиться в электричество таким образом, чтобы поддерживалась "симметрия"электродинамических уравнений. То есть магнитное поле покоющегося магнитного заряда совпадает с электрическим полем покоющегося электрического заряда с точностью до замены $M \longleftrightarrow q$ и $\overrightarrow{B} \longleftrightarrow \overrightarrow{E}$. Из закона Био-Савара-Лапласа следует что равномерно движушийся электрический заряд создает поле $\overrightarrow{B} = \dfrac{1}{c}\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{E}$. Тогда в силу симметрии равномерно движущийся магнитный заряд будет создавать поле $\overrightarrow{E} = \dfrac{1}{c}\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}$.



Введем координатные оси, как показано на рисунке. В таком случае поле в точке P:

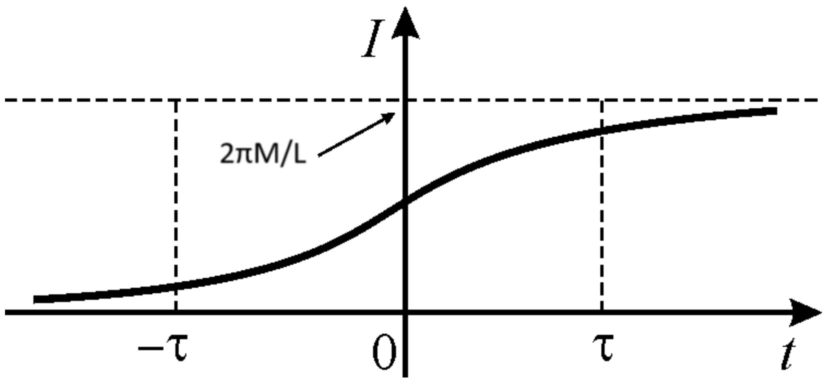
$$\overrightarrow{E} = \frac{1}{c}(v\overrightarrow{e_x} \times (a\overrightarrow{e_y} - vt\overrightarrow{e_x})) = \frac{1}{c}\frac{Mav}{(a^2+v^2t^2)^{3/2}}\overrightarrow{e_z}$$

Поскольку поле симметрично относительно оси oz, монополь будет создавать в кольце:

$$U_E = 2\pi a \cdot E = \frac{1}{c}\frac{2\pi M a^2 v}{(a^2+v^2t^2)^{3/2}} = \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{2\pi M vt}{\sqrt{a^2+v^2t^2}}\right)$$

С другой стороны, т.к. кольцо – идеальный проводник, эта ЭДС будет уравновешиваться ЭДС самоиндукции $U_L = -\frac{1}{c}L\frac{dI}{dt}$, откуда:

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{2\pi M vt}{\sqrt{a^2+v^2t^2}} - LI\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{2\pi Mc}{L}\left(1 + \frac{vt}{\sqrt{a^2+v^2t^2}}\right), \quad \tau \approx \frac{a}{v}$$



Такой же вывод можно было получить из более строгих соображений (напрямую рассчитать изменения магнитного потока через кольцо).

2.2 Учет сопротивления и изменения скорости.

Рассмотрим такой же пролет монополя, только учтем влияние кольца на монополь и его сопротивление. При движении монополя его кинетическая энергия переходит в энергию магнитного поля индукционного тока и теплоту. Будем рассматривать большие сопротивления кольца, которые позволяют принебречь ЭДС самоиндукции по сравненю с "внешней"ЭДС поля монополя. Тогда для тока в катушке можно записать:

$$I(x) = \frac{|U_E|}{R} = \frac{2\pi M}{cR}\frac{a^2}{(a^2+x^2)^{3/2}}v(x)$$

Тогда для мгновенной мощности тока:

$$P = I^2R = \frac{(2\pi M)^2}{c^2R}\frac{a^4}{(a^2+x^2)^3}v^2(x)$$

Допустим, что изменение скорости мало (позже это подтвердится). Также параметризуем координату $x : x = a \cdot ctg\alpha,\ \ dx = asin^{-2}\alpha d\alpha$. Тогда для выделившейся теплоты запишем:

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)dt = \frac{(2\pi M)^2 v_0}{c^2R}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a^4}{(a^2+x^2)^3}dx = \frac{(2\pi M)^2 v_0}{c^2Ra}\int_0^{\pi} sin^4\alpha d\alpha = \frac{3\pi(2\pi M)^2 v_0}{8c^2a}$$

Наконец, запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} \approx \frac{mv_0^2}{2} - Q \quad \Rightarrow \quad v_0^2 - v^2 = \frac{2Q}{m} = \frac{3\pi^3M^2v_0}{mc^2Ra}$$

С учетом малости изменения скорости $\Delta v \approx \dfrac{v_0^2 - v^2}{2v_0} = \dfrac{3\pi^3 M^2}{2mc^2Ra} \approx 6 \cdot 10^{-4}$ м/с

3 Дион и круговые орбиты:

Многие теории физики элементарных частиц, помимо магнитных монополей, предсказывают существование частиц, имеющих и электрический, и магнитный заряд (такие гипотетические частицы называют дионами).

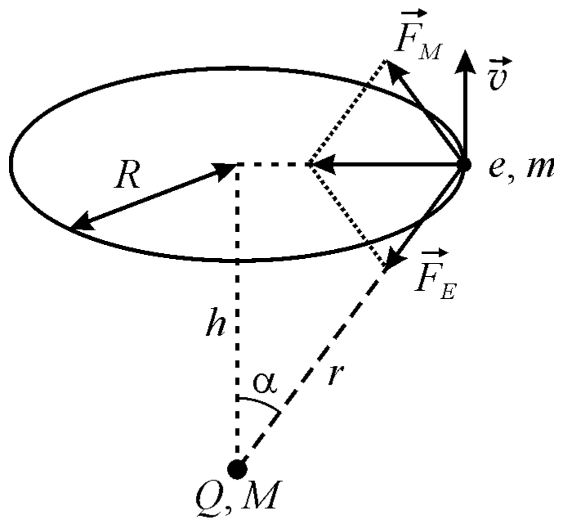
3.1 Круговая орбита.

Рассмотрим движение частицы массы m и зарядом q в поле неподвижного диона ($M > 0,\ Q > 0$) со скоростями $v << c$ (при таких скоростях излучением Эм-волн можно принебречь).

В такой конфигурации сохраняется сумма кинетической энергии частицы и потенциальной энергии ее взаимодействия с электрической состовляющей поля диона:

$$\frac{Qq}{r} + \frac{mv^2}{2} = const.$$

Откуда следует, что при постоянной по модулю скорости, расстояние до диона также постоянно, то есть дион должен находиться на оси симметри круговой орбиты. Действующая на заряд сила $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E} + \frac{q}{c}\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}$ должна быть направлена по радиусу орбиты к ее центру. С учетом радиальности поля $\overrightarrow{B}$ это возможно только при $q < 0$. Нормальные к плоскоти орбиты состовляющие магнитной и электрической компонент силы Лоренца при этом должны компенсировать друг-друга (см. рис.).



Количественно записав высказанные критерии движения, получим параметры расположения орбиты $tg\alpha$ и r:

$$\frac{|q|Q}{r^2}\mathbf{cos}\alpha = \frac{|q|M}{cr^2}v\mathbf{sin}\alpha \quad \Rightarrow \quad tg\alpha = \frac{Qc}{vM}$$

$$m\frac{v^2}{r\mathbf{sin}\alpha} = |q|\left(\frac{Q}{r^2}\mathbf{sin}\alpha + \frac{M}{cr^2}v\mathbf{cos}\alpha\right) \quad \Rightarrow \quad r = \frac{|q|Q}{mv^2}$$

Интересно, что эта формула не содержит М – расстояние до точек круговой орбиты заряженной частицы в электромагнитном поле диона совпадает с радиусом ее круговой орбиты в поле только электрического заряда диона. Но из-за наличия у диона магнитного заряда плоскость орбиты частицы смещается так, что дион находится вне этой плоскости.

3.2 Интегралы движения в общем случае.

Рассмотрим, какие характеристики движения сохраняются в общем случае.

Как было показано ранее, первым интегралом движения является скаляр – полная энергия:

$$\frac{m(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v})}{2} + \frac{qQ}{|\overrightarrow{r}|}$$

Рассмотрим изменения момента импулься заряда $\overrightarrow{L} = m\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v}$. Понятно, что изменения момента импульса будет связано только с магнитной состовляющей силы Лоренца:

$$\frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F_M} = \frac{M|q|}{r^2}[\overrightarrow{r} \times [\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v}]] = -M|q|\left(\frac{\overrightarrow{v}}{r} - \frac{(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{r})\overrightarrow{r}}{r^3}\right)$$

Учтем, что: $\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}$, а $\frac{(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{r})}{r} = \frac{vr\mathbf{cos}(\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{v})}{r} = v_r = \frac{dr}{dt}$.

$$\frac{\overrightarrow{v}}{r} - \frac{(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{r})\overrightarrow{r}}{r^3} = \frac{r\left(\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}\right)}{r^2} - \frac{\overrightarrow{r}\left(\frac{dr}{dt}\right)}{r^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\overrightarrow{r}}{r}\right)$$

Таким образом: $\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{L} + M|q|\frac{\overrightarrow{r}}{r}\right) = 0$, то есть второй интеграл движения в поле диона это вектор: $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{L} + M|q|\frac{\overrightarrow{r}}{r}$. Полученный результат обладает физическим смыслом. Момент импульса изолированной системы должен сохраняться, и в данном случае этот сохраняющийся момент есть сумма момента импульса частицы в системе отсчета, связанной с дионом, и момента импульса электромагнитного поля в той же системе отсчета (как видно, для нашей системы $\overrightarrow{S}_p \neq 0$). Значит, второе слагаемое в $\overrightarrow{J}$ есть момент импульса электромагнитного поля, а сама величина $\overrightarrow{J}$ имеет смысл полного момента импульса системы, состоящей из диона, заряженной частицы и электромагнитного поля.