Маятник Капицы

Исследовательская работа

Грошева Максима

МФТИ, Б01-206, 1 курс

2022 год

Маятник Капицы –

Система из грузика, прикрепленного к легкой нерастяжимой спице, которая прикреплена к подвесу. Маятник получим своё название в честь одного из основателей МФТИ – К.П. Капицы.

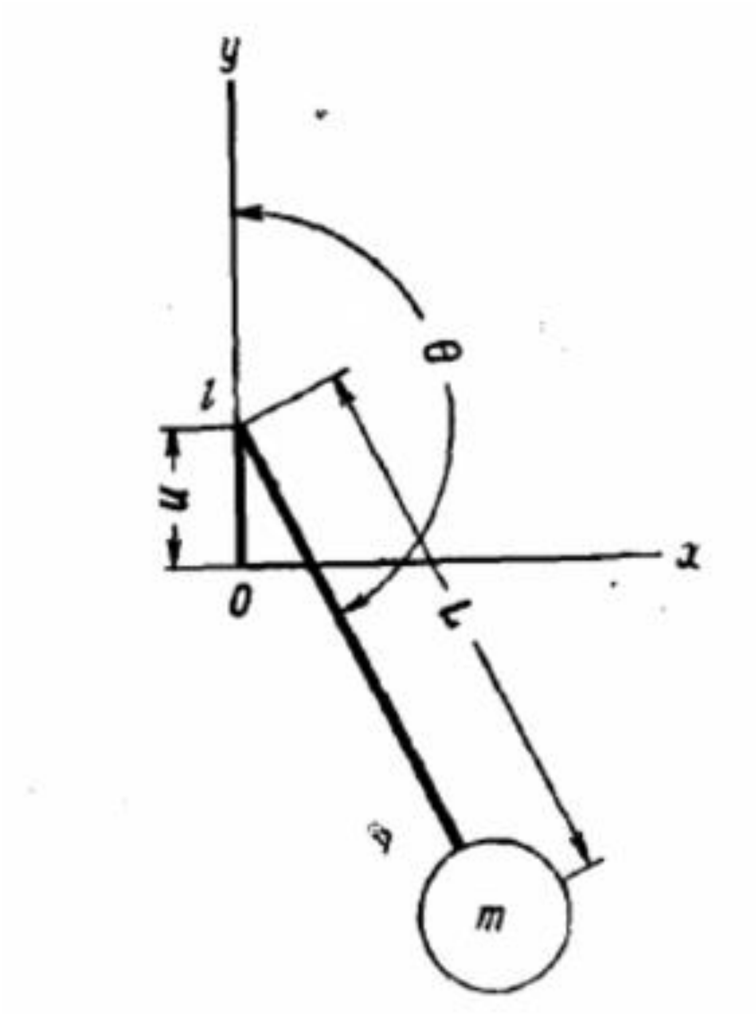


Рис. 1. Схема маятника

Энергия маятника

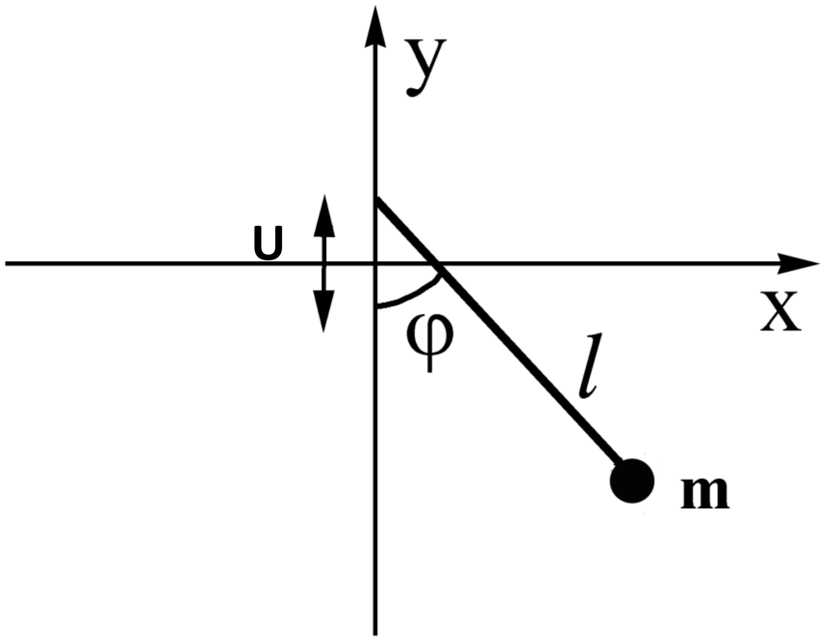


Рис. 2. Схема маятника

Тогда потенциальная энергия:

$$\Pi = -mg(l\cos(\varphi) + \mathrm{u}\cos(\Omega t))$$

Кинетическая энергия:

$$K = \frac{m}{2}(\dot{x} + \dot{y}) =$$

$$\frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mul\Omega(\sin(\Omega \mathrm{t}))(\sin(\varphi))\dot{\varphi} + \frac{mu^2\Omega^{\dot{2}}}{2}sin^2(\Omega t)$$

Лагранжиан системы:

$$L = K - \Pi =$$

$$\frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mul\Omega(\sin(\Omega \mathrm{t}))(\sin(\varphi))\dot{\varphi} + \frac{mu^2\Omega^{\dot{2}}}{2}sin^2(\Omega t) + mg(l\cos(\varphi) + \mathrm{u}\cos(\Omega t))$$

Кординаты по осям:

$$\begin{cases} x = l\sin(\varphi) \\ y = -ucos(\Omega t) - lcos(\varphi) \end{cases}$$

Уравнение движения маятника

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi}$ - уравнение движения маятника будет удовлетворять условиям уравнения Эйлера – Лагранжа, тогда вычислим:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mathrm{m}l^2\dot{\varphi} + mul\Omega\big(\sin(\Omega t)\big)(\sin(\varphi))$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = mul\Omega\big(\sin(\Omega t)\big)(\cos(\varphi))\dot{\varphi} - mgl(sin(\varphi))$$

После упрощения получаем:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{u\Omega^2}{l}\cos(\Omega t)\,(\sin(\varphi)) - \frac{g}{l}(\sin(\varphi))$$

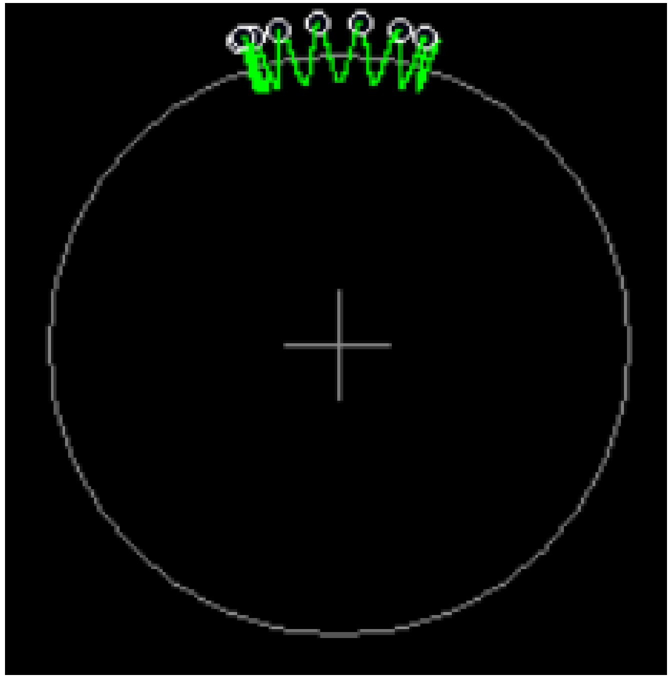


Рис. 3. Траектория движения маятника Капицы

Момент инерциальной силы

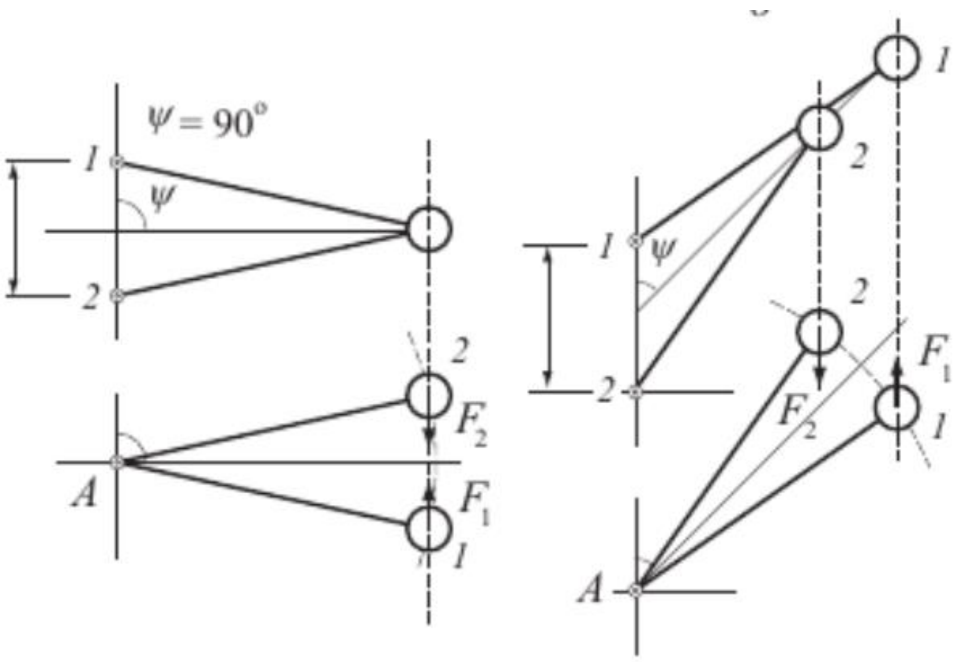


Рис. 4. Момент инерциальной силы

В связи с тем, что в крайних положениях 1 и 2 модуль инерциальной силы $F = m\Omega^2 \mathrm{y}(\mathrm{t})$ одинаковый, а плечо разной длины. За период маятник начинает стремиться в положение равновесия в точке (0, l) т.к. средний момент инерциальной силы не отличен от нуля

$$M = \frac{m(lu\Omega)^2}{4}\sin(2\varphi)$$

Симуляция колебаний при помощи приложения “Nonlinear oscillations”

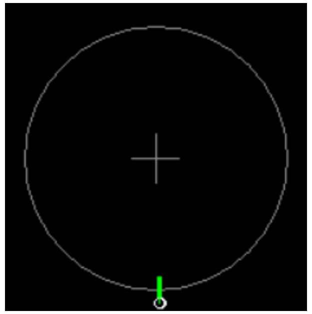
Зависимость траектории от угла начального отклонения

Рассмотрим три настройки маятника с различными углами отклонения.

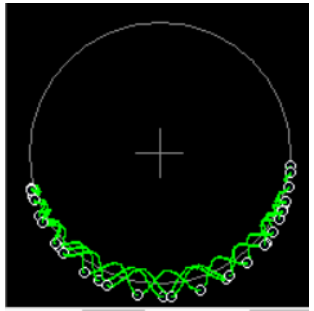
Опыт 1:

Таблица 1. Колебания при ф' << Ω						
масса, m (кг)	длина спицы, l (м)	амплитуда колебаний подвеса, u (м)	частота вынужденных колебаний, Ω (с^-1)	начальная частота собств.колеб., $\dot{\varphi}$ (с^-1)	g (м/с^2)	угол отклонения, φ (рад)
1	1	0,1	40	0,1	10	0
1	1	0,1	40	0,1	10	π/2
1	1	0,1	40	0,1	10	π
1	1	0,1	40	0,1	10	π/180

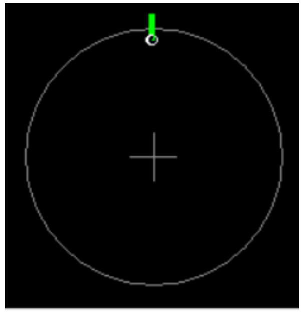
При углах отклонения $\varphi = \pi n$ колебания маятника вдоль оси x малы. Кроме того (0,l) абсолютно неустойчивого равновесия для математического маятника, может оказаться точкой устойчивого равновесия для маятника Капицы.



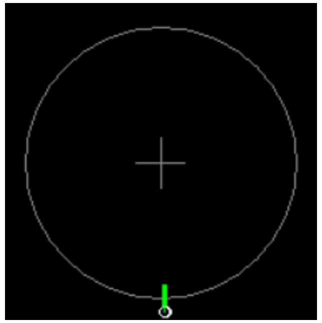
а)



б)



в)



г)

Рис. 5. Траектории движения маятника
а) φ = 0 б) φ = π/2 в) φ = π г) π/180

Зависимость колебаний от начально частоты $\dot{\varphi}$

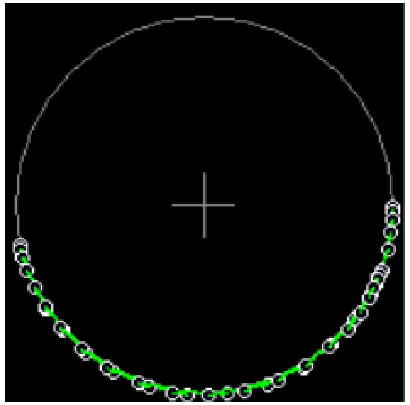
Настроим маятник так, чтобы амплитуда колебаний подвеса была мала. Частоту колебаний будем изменять.

Опыт 2:

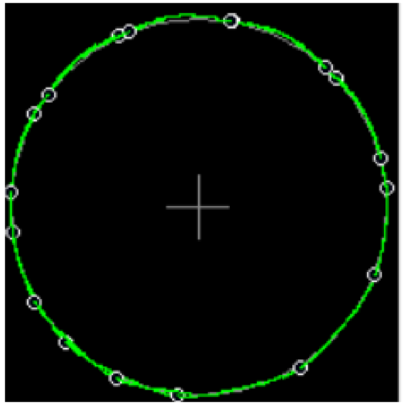
Таблица 2. Колебания при различных значения $\dot{\varphi}$

масса, m (кг)	длина спицы, l (м)	амплитуда колебаний подвеса, u (м)	частота вынужденных колебаний, Ω (с^-1)	начальная частота собств.колеб., $\dot{\varphi}$ (с^-1)	g (м/с^2)	угол отклонения, ϕ (рад)
1	1	0,01	40	0,1	10	π/2
1	1	0,01	40	5	10	π/2

При малых значениях амплитуда колебаний подвеса траектория колебаний маятника приобретает вид колебаний математического маятника.



а)



б)

Рис. 6. Траектории движения маятника а) $\dot{\varphi}$ = 0,1 б) $\dot{\varphi}$ = 5

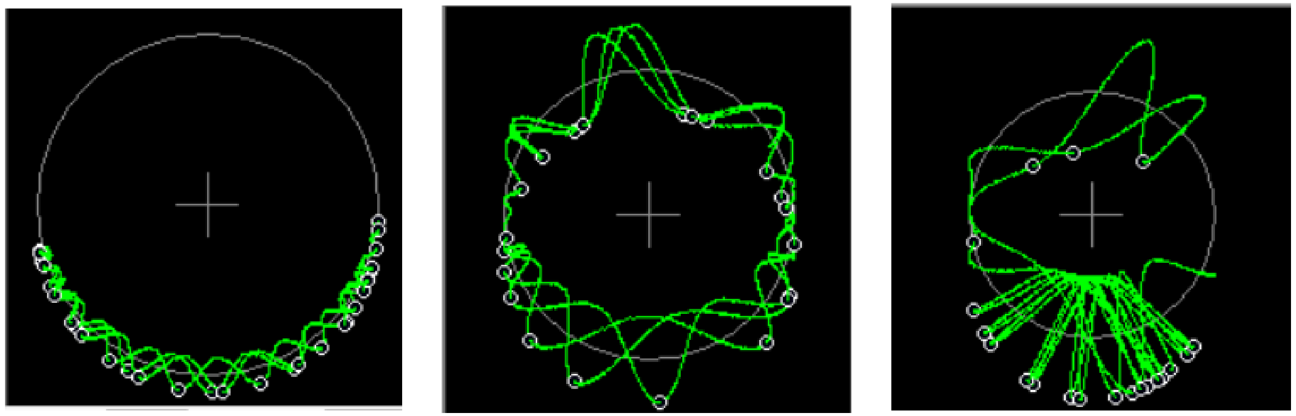
Колебания маятника при больших значениях амплитуды колебаний подвеса

Настроим маятник с различной амплитудой колебаний подвеса.

Опыт 3:

Таблица 3. Колебания при различных амплитудах колебаний подвеса						
масса, m (кг)	длина спицы, l (м)	амплитуда колебаний подвеса, u (м)	частота вынужденных колебаний, Ω (с^-1)	начальная частота собств.колеб., $\dot{\varphi}$ (с^-1)	g (м/с^2)	угол отклонения, ϕ (рад)
1	1	0,1	40	0,1	10	π/2
1	1	0,3	40	0,1	10	π/2
1	1	0,5	40	0,1	10	π/2

С увеличением амплитуды траектория движения маятника становится сложнее, при этом сам груз бывает в большем количестве точек координатного пространства.



а) б) в)

Рис. 7. Колебания маятника при различных значениях амплитуды u а) u = 0,1 б) u = 0,3 в) u = 0,5

Обоснование полученных результатов

1) Появление точки устойчивого равновесия (0, l) обусловлено возникновением вибрационного момента $M = \frac{m(lu\Omega)^2}{4}\sin(2\varphi)$, который при условии, что $mu^2 l\Omega^2$/2gl >1 стремится привести колебания маятника вдоль оси колебаний подвеса, кроме того, при выполнении этого условия, маятник будет иметь две токи неустойчивого равновесия $\pm\arccos(-\frac{2gl}{mu^2 l\Omega^2})$.
2) При малой амплитуде колебаний подвеса вибрационный момент мал, поэтому колебания маятника Капицы становятся похожими на колебания математического маятника, это связано с тем, что момент вибрационных сил мал.

Вывод:

1) В данной работе был изучен маятник Капицы и получены формулы для вычисления положений его равновесия: два устойчивых (l, 0), (0, l) и два неустойчивых

2) При помощи компьютерного моделирования была изучена траектория движения маятника в зависимости от изменений различных параметров.