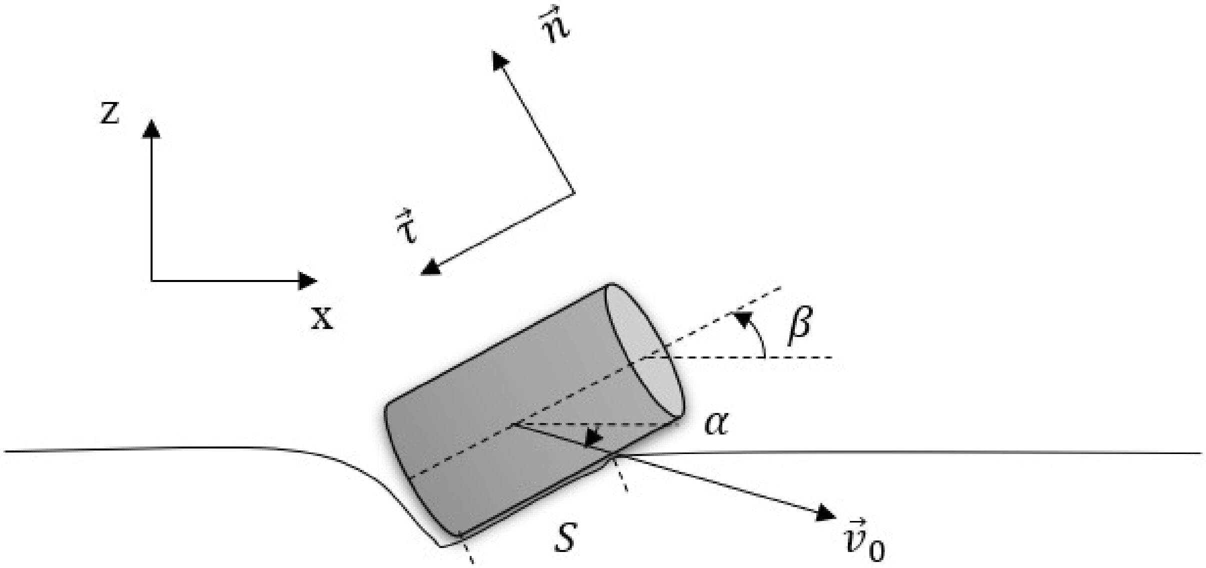
Прыгающая бомба

Прыгающая бомба – специальная авиабомба, предназначенная для разрушения плотин. Характерной особенностью бомбы является способность совершить перед окончательным погружением несколько прыжков по водной поверхности. Это, вкупе с предварительной раскруткой, позволяет бомбе вплотную приблизиться к плотине, защищенной металлическими сетями. Разберемся, почему при некоторых условиях тело способно отскочить от воды, а не утонуть.



Будем рассматривать цилиндрическую бомбу массы M, падающую со скорость v_o под углом α к горизонту, где угол между осью бомбы и горизонтом равен β. В общем случае требуется учитывать возникающие потоки воды, поэтому будем рассматривать следующую упрощенную модель:

- при ударе на бомбу (если она не погрузилась в воду полностью) действует сила вязкого трения, которая определяется выражением

  $$\vec{F} = C_n \rho v^2 S \vec{n} + C_\tau \rho v^2 S \vec{\tau}$$

  где ρ – плотность воды, v – модуль скорости бомбы, S – площадь погруженной части бомбы, C_n и C_τ – безразмерные коэффициенты, имеющие одинаковый порядок величины и зависящие от углов α и β, $\vec{n}$ и $\vec{\tau}$ – единичные векторы, указанные на рисунке;

- в процессе соударения скорость бомбы и угол α меняются незначительно, а угол β не меняется вовсе;
- в силу последнего приближения величины C_n и C_τ постоянны в процессе удара;
- начала отсчёта Oz и Ox выберем в месте, где бомба начинает соприкасаться с водой;
- в силу наличия набегающих волн, обтекающих бомбу при ударе, будем считать, что площадь погруженной части бомбы линейно зависит от глубины погружения: $S = -az$, величину a считаем известной.

Тогда второй закон Ньютоена в проекции на оси Ox и Oz запишется как:

$$\begin{cases} \mathrm{Ma}_z = -Mg + C_n\rho v^2 S\cos\beta - C_\tau\rho v^2 S\sin\beta \\ \mathrm{Ma}_x = -\rho v^2 S(C_n\sin\beta + C_\tau\cos\beta) \end{cases}$$

Запишем:

$$\begin{cases} \mathrm{C}_z = C_n\cos\beta - C_\tau\sin\beta \\ \mathrm{C}_x = C_n\sin\beta + C_\tau\cos\beta \\ \mathrm{S = \text{-}az} \end{cases}$$

Тогда получим:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g - \frac{C_z\rho v^2 a}{M}z \tag{1}$$

$$F_x = C_x\rho v^2 az \tag{2}$$

Перепишем уравнение (1) в виде:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega_o^2 z = -g$$

$$\omega_o^2 = \frac{C_z\rho v^2 a}{M}$$

Получили уравнение гармонических колебаний, которое объясняет почему бомба отскакивает. Найдем его решение и рассмотрим условия отскакивания. Бомба может не отскачить по двум причинам: в процессе удара она полностью погрузилась (тогда наши уравнения неприменимы) или сила действующая по оси Ox полностью погасила соответствующий импульс. Чтобы описать эти условия количественно, найдем среднее значение силы по оси Ox и время соудорения, а также максимальную глубину погружения:

$$z = z_o + A\cos(\omega t + \varphi)$$

Учитывая, что $\frac{dz}{dt}|_{t=0} = -v\sin\alpha$ и $z_o = -\frac{g}{\omega_o^2}$ получим:

$$A = \frac{g}{\omega_o^2}\sqrt{1 + \frac{\omega_o^2 v_o^2 \sin^2\alpha}{g^2}}$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}(\frac{\omega_o v_o \sin\alpha}{g})$$

Определим время соударения t_o. Для этого надо решить уравнение $z(t_o) = 0$. Один из корней $t = 0$, для второго корня должно быть то же значение косинуса, т.е.:

$$\omega_o t_o + \varphi = 2\pi - \varphi$$

$$t_o = \frac{2\pi - 2\varphi}{\omega_o}$$

Теперь, используя полученную зависимость $z(t)$ и уравнение (2) определим среднее значение силы F_x:

$$F_x = C_x \rho v^2 a z \approx C_x \rho v^2 a A \sin\omega_o t$$

(Здесь мы воспользовались тем, что при подстановке параметров бомбы окажется $z_o \ll A$ и $\varphi \approx 90°$)

$$\langle F_x \rangle = C_x \rho v^2 a A \langle \sin\omega_o t \rangle = \frac{2 C_x \rho v^2 a A}{\pi}$$

Теперь сформулируем вышепоставленные условия количественно:

$$\langle F_x \rangle t_o < M v_o \cos\alpha$$
$$|z_{min}| = A < \frac{S_o}{a}$$

Получив все нужные формулы, рассмотрим конкретный пример:

- $M = 4$ т
- $v_o = 100$ м/с
- $S_o = 2$ м^2
- $a = 8$ м
- $\alpha = \beta = 10°$
- $\rho = 1000$ кг/м^3
- $g = 9{,}81$ м/с^2

Для данных значений получается: $|z_{min}| = 0.19$м, $\dfrac{S_o}{a} = 0.25$м, $\langle F_x \rangle t_o = 2.0 \cdot 10^5$ кг·м/с, $M v_o \cos\alpha = 3.9 \cdot 10^5$ кг·м/с. Видно что бомба отскочит.

***

Также можно рассмотреть поведение бомбы после удара:

$$v'_x = \frac{M v_o \cos\alpha - \langle F_x \rangle t_o}{M} \approx 48,5\text{м/с}$$
$$v' = \sqrt{(v'_x)^2 + (v'_y)^2} = \sqrt{(v'_x)^2 + (v_0 \sin\alpha)^2} \approx 51,5 \text{ м/с}$$
$$\gamma = \mathrm{arctg}(\frac{v_o \sin\alpha}{v'_x}) \approx 19,7°$$

Стоит отметить что в данной модели воду можно рассматривать как твердое тело, где в качестве аналога коэффициента трение следует взять $\mu = \dfrac{F_{Bx}}{F_{Bz}} = \dfrac{C_n \sin\beta + C_\tau \cos\beta}{C_n \cos\beta - C_\tau \sin\beta} \approx 1,43$. Подставляя это в формулы для отскакивания от твердой поверхности получим:

$$v' = v_o(1 - 2\mu \sin\alpha) \approx 50,3\text{м/с}$$

$$\gamma = \mathrm{arctg}(\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - 2\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha}) \approx 19,6°$$