Γραμμική & Συνδυαστική Βελτιστοποίηση Εργασία #1

Αβούρης Λάμπρος

Α.Μ.:1092732

Γραμμική & Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

Διδάσκων:ΔΑΣΚΑΛΑΚΗ ΣΟΦΙΑ

Γραμμική & Συνδυαστική Βελτιστοποίηση Εργασία #1

Ασκηση 1.

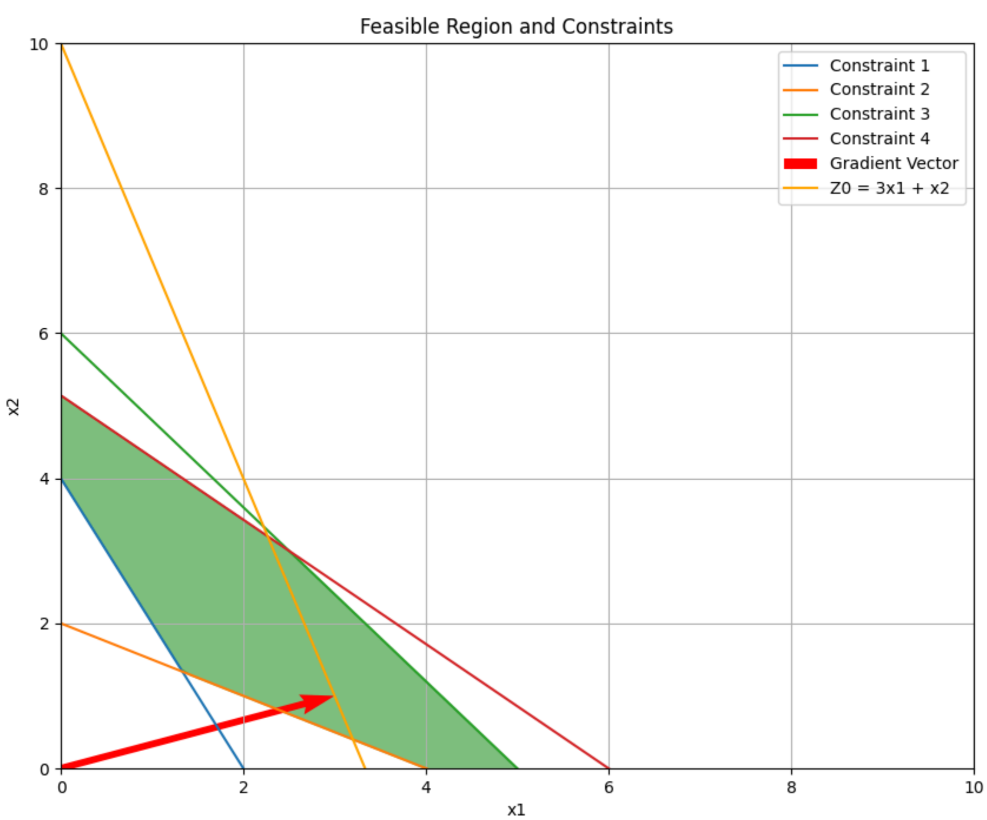
Στην άσκηση αυτή, πρώτων σχεδιάζουμε τις ευθείες τον περιορισμών και μετέπειτα να γραμμοσκιάσουμε την εφικτή περιοχή.

Κατόπιν, δημιουργούμε μια arbitrary Z0 ευθεία, η οποία προφανώς ορίζεται από την αντικειμενική συνάρτηση για δεδομένη τιμη x1 x2.

Μετέπειτα, υπολογίζουμε και αναπαριστούμε το gradient της Z0 ως διάνυσμα που δειχνει προς τα πού μεγιστοποιείτε.

Τέλος, “τραβαμε” νοητά την Z0 , κατα την φορά του διανύσματος. Το τελευταίο vertex εκ του οποίου περνά η ευθεία, θα είναι και η λύση μας.

Προφανώς προκύπτει το [x1,x2] = [5,0] βελτιστη λύση



Γραμμική & Συνδυαστική Βελτιστοποίηση Εργασία #1

Ασκ 1 β)

Για να ισχύει ότι η κορυφή σχηματιζώμενη εκ του Π1 Π2 είναι η βέλτιστη για μια συνάρτηση Ζ θα πρέπει να ίσχύει ότι το gradient της Ζ βρισκετει ανάμεσα στα gradients των δύο περιορισμών, έτσι ώστε οταν “Τραβάμε” την συνλαρτηση Ζ κατα μήκως του gradient να είναι σίγουρο οτι το vertex <Π1, Π2> είναι το τελευταίο το οποίο η συνάρτηση συναντά.

Ανασχηματίζω τους περιορισμούς μου:

$x2 = -2x1 + 4$ (Π1)

$x2 = -0.5x1 + 2$ (Π2)

$x2 = Z - 1/c2 * x1$

Εύκολα υπολογίζω τα gradients

Π1 gradient = -2

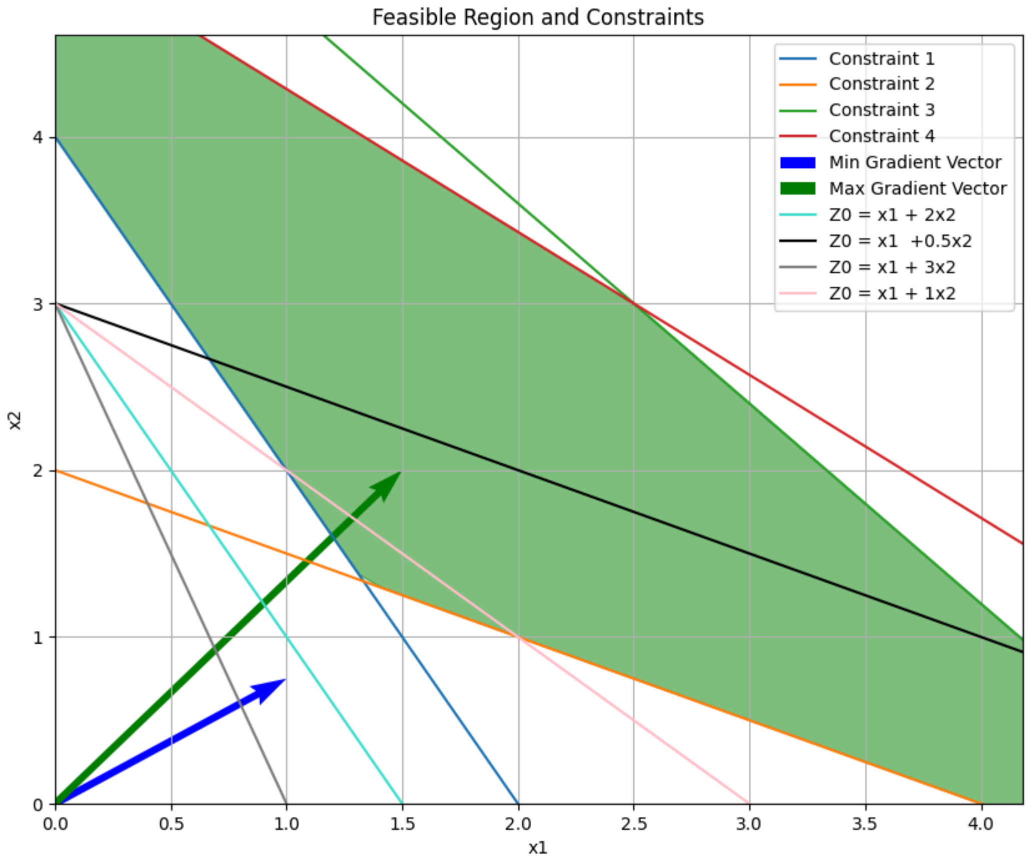
Π2 gradient   -0.5

Z gradient = -1/C2

Αρα απο τα παραπάνω έχουμε : $0.5 < C2 < 2$

Μπορώ να επαληθεύσουμε τα παραπάνω μεσω της επακόλουθης γραφικής, όπου έχουν σχεδιαστεί διαφορα Ζ για 4 διαφορετικά C, στο οριο(οπου έχω δυο βέλτιστες λύσεις) εντος(η ζητουμενη κορυφή είναι μοναδική βελτιστη λύση) και εκτός(η κορυφή δεν είναι βέλτιστη λύση) του διαστίματος [0.5,2] για κοινο Z=3

Σαφώς καθώς η Ζ ελαχιστοποιείται κινείται αντίθετα του gradient



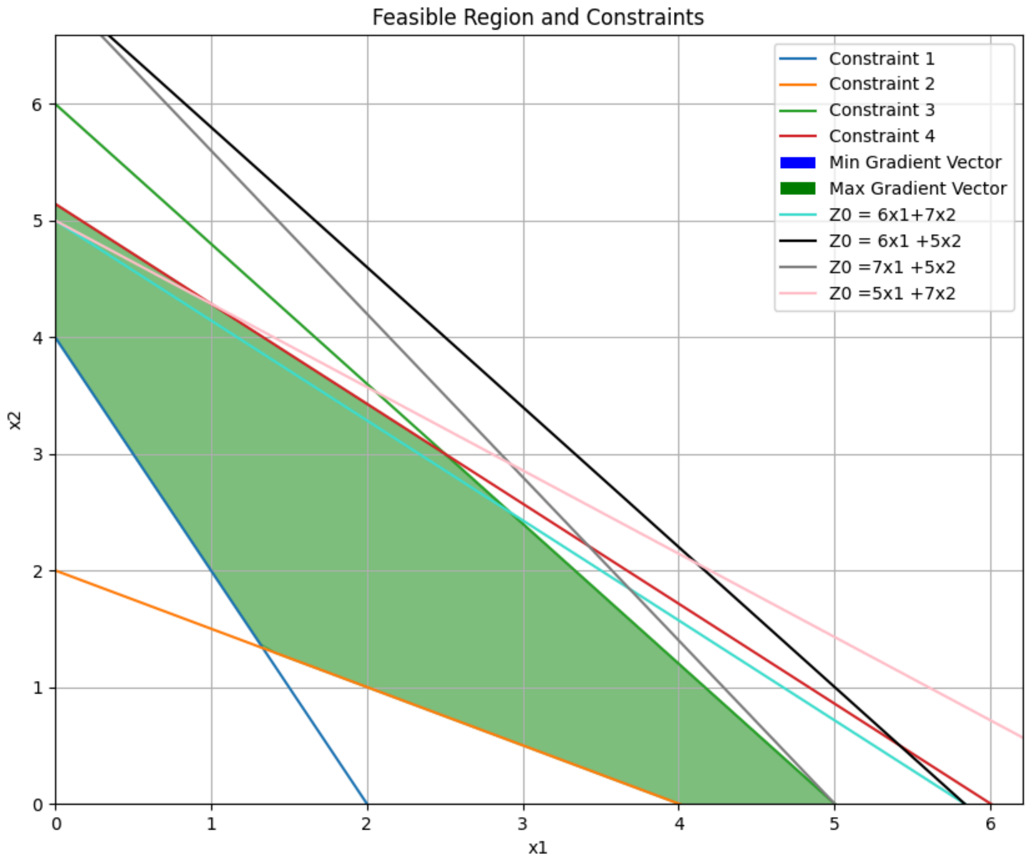
Ασκ 1 γ)

Ομοίως λειτουργώ και στην Γ όπου έχω ως αντίστοιχους περιορισμούς gradient:

$-6/5 < -C1/C2 < -6/7 \Rightarrow 6/5 > C1/C2 > 6/7$(Βρίσκονται εύκολα με την ίδια διαδικασία με παραπάνω)

Άρα για C1, c2 πρεπει να ισχύει $6/5 > C1/C2 > 6/7$

Παρόμοια με παραπάνω έχουμε κάνει plot διάφορα Z για να επαληθεύσουμε τα παραπάνω.



Ο κώδικας για τη παραπάνω ασκηση είναι ο εξής:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
f_objective = np.array([3, 1])

A = np.array([[6, 3], [4, 8], [6, 5], [6, 7]])
b = np.array([12, 16, 30, 36])
x1_bounds = (0, None)  # x1 >= 0
x2_bounds = (0, None)  # x2 >= 0
def plot_constraints():
    x1 = np.linspace(0, 10, 100)
    plt.figure(figsize=(10, 8))
```

```
    x2_values = []
    for i in range(A.shape[0]):
        if A[i, 1] != 0:
            x2 = (b[i] - A[i, 0] * x1) / A[i, 1]
            x2_values.append(x2)
            plt.plot(x1, x2, label=f'Constraint {i+1}')
        else:
            plt.axvline(x=b[i]/A[i, 0], label=f'Constraint {i+1}')

    lower_bound = np.maximum(x2_values[0], x2_values[1])
    upper_bound = np.minimum(x2_values[2], x2_values[3])

    # Fill the feasible region
    mask = (lower_bound <= upper_bound)


    plt.fill_between(x1, lower_bound, upper_bound, where=mask,
color='green', alpha=0.5)
    #plot gradient vector
    gradient_vector = np.array([3, 1])
    origin = np.array([0, 0])
    plt.quiver(*origin, *gradient_vector, angles='xy',
scale_units='xy', scale=1, color='red', label='Gradient Vector')

    ## arbitrary  Z0
    Z0 = 10
    x2_line = Z0 - 3 * x1
    plt.plot(x1, x2_line, label='Z0 = 3x1 + x2', color='orange')


    plt.xlim(0, 10)

    plt.ylim(0, 10)
    plt.xlabel('x1')
    plt.ylabel('x2')
    plt.title('Feasible Region and Constraints')
    plt.axhline(0, color='black', lw=0.5)
    plt.axvline(0, color='black', lw=0.5)
```

```
    plt.grid()
    plt.legend()
    plt.show()

if __name__ == "__main__":
    plot_constraints()
    # We can solve the problem graphicaly by creating an arbitrary
    #  line Z0 = 3x1 + x2
    #and moving it parallel to the vector (3, 1)
    # tHE optimal solution is the last vertex touched by the line.
    #obviosly that is the
    # [x1, x2] = [5,0]
    #C3 and C4  INTERSECTION
    print("the maxixmum is at the intersection of C3 and C4")
    print("x1 = 5, x2 = 0")

    print(f"Z ={5*3+0} ")
```

β)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import sympy as sp
f_objective = np.array([1, 1])
A = np.array([[6, 3], [4, 8], [6, 5], [6, 7]])
b = np.array([12, 16, 30, 36])
x1_bounds = (0, None)  # x1 >= 0
x2_bounds = (0, None)  # x2 >= 0
def plot_constraints():
    x1 = np.linspace(0, 10, 100)
    plt.figure(figsize=(10, 8))

    x2_values = []
    for i in range(A.shape[0]):
        if A[i, 1] != 0:
            x2 = (b[i] - A[i, 0] * x1) / A[i, 1]
            x2_values.append(x2)
            plt.plot(x1, x2, label=f'Constraint {i+1}')
```

```python
        else:
            plt.axvline(x=b[i]/A[i, 0], label=f'Constraint {i+1}')

    lower_bound = np.maximum(x2_values[0], x2_values[1])
    upper_bound = np.minimum(x2_values[2], x2_values[3])

    # Fill the feasible region (intersection of all constraints)
    mask = (lower_bound <= upper_bound)


    plt.fill_between(x1, lower_bound, upper_bound,
                     where=mask,
                     color='green', alpha=0.5)
    #plot max and min gradient vector

    P1_gradient =  -np.array([6, 3])
    P2_gradient = -np.array([4, 8])
    origin = np.array([0, 0])
    min_gradient = np.minimum(P1_gradient, P2_gradient)
    max_gradient = np.maximum(P1_gradient, P2_gradient)
    #plot max and min gradient vector
    plt.quiver(*origin, *min_gradient, angles='xy', scale_units='xy',
scale=4, color='blue', label='Min Gradient Vector')
    plt.quiver(*origin, *max_gradient, angles='xy', scale_units='xy',
scale=4, color='green', label='Max Gradient Vector')


    #plt.quiver(*origin, *gradient_vector, angles='xy',
scale_units='xy', scale=1, color='red', label='Gradient Vector')

    Z0 = 3
    x2_line = Z0  -2 * x1
    plt.plot(x1, x2_line, label='Z0 = x1 + 2x2', color='turquoise')
    Z0 = 3
    x2_line2 = Z0 - 0.5 * x1
    plt.plot(x1, x2_line2, label='Z0 = x1  +0.5x2', color='black')
    Z0 = 3
    x2_line3 = Z0 - 3 * x1
    plt.plot(x1, x2_line3, label='Z0 = x1 + 3x2', color='grey')
```

```
Z0 = 3
x2_line4 = Z0 - 1 * x1
plt.plot(x1, x2_line4, label='Z0 = x1 + 1x2', color='pink')
plt.xlim(0, 10)
plt.ylim(0, 10)
plt.xlabel('x1')
plt.ylabel('x2')
plt.title('Feasible Region and Constraints')
plt.axhline(0, color='black', lw=0.5)
plt.axvline(0, color='black', lw=0.5)
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
```

Στην γ απο τη β αλλάζουν μονο οι συναρτήσεις Z που σχεδιάζουμε αρα δε παραθέτω τον κώδικα.

Ασκ 2. 2

Στην άσκηση 2 καλούμαστε να μοντελοποιήσουμε το παραπάνω πρόβλημα και να το επιλύσουμε γραφικά.

Αρχικά ορίζω τους περιορισμούς ως εξής:

min Z = 0.6x_1 + 0.5x_2

(minimize την ραδιενέργεια στην υγιή περιοχή)

Υπο περιορισμούς ανισότητας:

Ευαίσθητος ιστός: 0.3x_1 + 0.1x_2 <= 2.7

Κεντρο μάζας: 0.6x_1 + 0.4x_2 >= 6

Υπο περιορισμούς ισότητας:

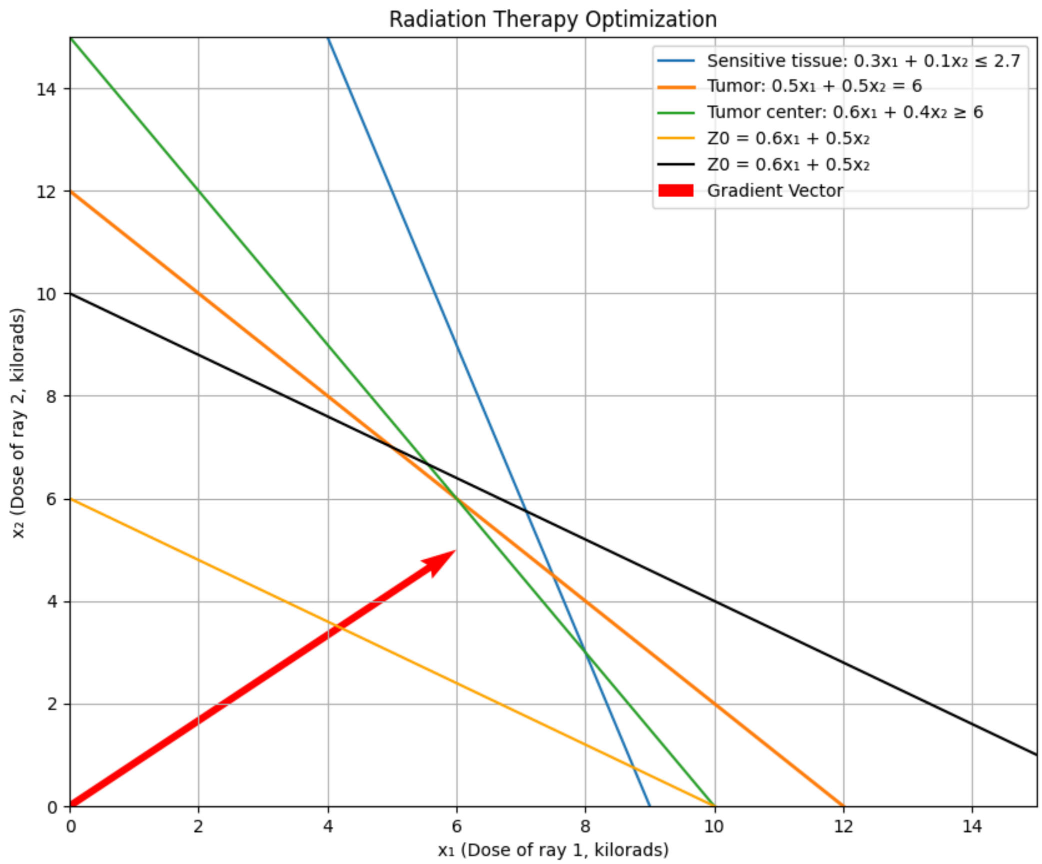
Tumor: 0.5x_1 + 0.5x_2 = 6

Και περιορισμούς μη μηδενικής τιμής:

x_1 >= 0

X_2 >= 0

Λύνω ακριβώς με την ίδια διαδικασία που έλυσα το πρώτο ερώτημα της πρώτης ασκησης σχεδιάζοντας ένα αυθαίρετο Z και μετακινώντας το κατα το gradient του ώστε να βρώ την κατάλληλη κορυφή, μονο που αυτή την φορά η feasible region θα είναι μια ευθεία, λόγω του περιορισμού ισοτητας. Γραφικά προκείπτει το σημείο τομής [x1,x2] = [6,6]



Κώδικας:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import linprog

# Visualize
def plot_solution():
```

```
    x1 = np.linspace(0, 15, 1000)

    x2_1 = (2.7 - 0.3*x1)/0.1

    x2_2 = 12 - x1

    x2_3 = (6 - 0.6*x1)/0.4

    # Plotting
    plt.figure(figsize=(10, 8))

    # Plot constraints
    plt.plot(x1, x2_1, label='Sensitive tissue: 0.3x₁ + 0.1x₂ ≤ 2.7')
    plt.plot(x1, x2_2, label='Tumor: 0.5x₁ + 0.5x₂ = 6', linewidth=2)
    plt.plot(x1, x2_3, label='Tumor center: 0.6x₁ + 0.4x₂ ≥ 6')

    #plot objective function at Z0 = 6 and Z0 = 10
    Z0 = 6
    x2_line = Z0 - 0.6 * x1
    plt.plot(x1, x2_line, label='Z0 = 0.6x₁ + 0.5x₂', color='orange')
    Z0 = 10
    x2_line2 = Z0 - 0.6 * x1
    plt.plot(x1, x2_line2, label='Z0 = 0.6x₁ + 0.5x₂', color='black')
    # plot the z gradient
    gradient_vector = np.array([0.6, 0.5])
    origin = np.array([0, 0])
    plt.quiver(*origin, *gradient_vector, angles='xy', scale_units='xy',
scale=0.1, color='red', label='Gradient Vector')

    plt.xlim(0, 15)
    plt.ylim(0, 15)
    plt.xlabel('x₁ (Dose of ray 1, kilorads)')
    plt.ylabel('x₂ (Dose of ray 2, kilorads)')
    plt.title('Radiation Therapy Optimization')
    plt.grid(True)
    plt.legend(loc='upper right')
    plt.show()

plot_solution()
```

Γραμμική & Συνδυαστική Βελτιστοποίηση Εργασία #1

Ασκ 4

Μεταβλητές απόφασης θα ορίσω τα κιλά καθε πρώτης ύλης που χρησιμοποιούνται για κάθε ζωοτροφή:

xij όπου i αντιστοιχεί στις πρώτες ύλες, και j στις τροφές αριθμιμένες όπως στο πρόβλημα

i: 1)Καλαμπόκι 2)Ασβεστόλιθος 3)Σόγια 4)Ιχθυάλευρο

j: τροφή I II III

Αντικειμενική συνάρτηση είναι αυτή του κόστους, η οποία προφανώς ελαχιστοποιείται :

$$\min Z = 0.20(x_{11}+x_{12}+x_{13})+0.12(x_{21}+x_{22}+x_{23})+0.24(x_{31}+x_{32}+x_{33})+0.12(x_{41}+x_{42}+x_{43})$$

Εξισώσεις ισότητας προκύπτουν από τις απαιτήσεις για κάθε ζωοτροφή

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 12000$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 8000$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 9000$$

Εξισώσεις ανισότητας προκύπτουν ως:

1)Περιορισμοί Διαθεσιμότητας Πρώτων Υλών:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 9000$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 12000$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 5000$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} \leq 6000$$

2)Περιορισμοί Θρεπτικών Συστατικών για κάθε ζωοτροφή

Πολλαπλασιάζω με την συνολική ποσότητα της ζωοτροφής ώστε να έχω την συνολική ποσότητα της ουσίας και οχι την ανα kg

Ζωοτροφή Τύπου I (Αγελάδες)

Βιταμίνες/kg ≥ 6:

$$8x_{11} + 6x_{21} + 10x_{31} + 4x_{41} \geq 72000$$

Πρωτεΐνες/kg ≥ 6:

$$10x_{11} + 5x_{21} + 12x_{31} + 8x_{41} \geq 72000$$

Ασβέστιο/kg ≥ 7:

$$6x_{11} + 10x_{21} + 6x_{31} + 6x_{41} \geq 84000$$

4 ≤Λίπος/kg ≤ 8:

$$8x_{11} + 6x_{21} + 6x_{31} + 9x_{41} \geq 48000$$

$$8x_{11} + 6x_{21} + 6x_{31} + 9x_{41} \leq 96000$$

Ζωοτροφή Τύπου II (Πρόβατα)

Βιταμίνες/kg ≥ 6:

$$8x_{12} + 6x_{22} + 10x_{32} + 4x_{42} \geq 48000$$

Πρωτεΐνες/kg ≥ 6:

$$10x_{12} + 5x_{22} + 12x_{32} + 8x_{42} \geq 48000$$

Γραμμική & Συνδυαστική Βελτιστοποίηση Εργασία #1

Ασβέστιο/kg ≥ 6:

$$6x_{12} + 10x_{22} + 6x_{32} + 6x_{42} \geq 48000$$

4 ≤ Λίπος/kg ≤ 6:

$$8x_{12} + 6x_{22} + 6x_{32} + 9x_{42} \geq 32000$$

$$8x_{12} + 6x_{22} + 6x_{32} + 9x_{42} \leq 48000$$

Ζωοτροφή Τύπου ΙΙΙ (Κοτόπουλα)

4 ≤ βιταμίνες/kg ≤ 6:

$$8x_{13} + 6x_{23} + 10x_{33} + 4x_{43} \geq 36000$$

$$8x_{13} + 6x_{23} + 10x_{33} + 4x_{43} \leq 54000$$

Πρωτεΐνες/kg ≥ 6:

$$10x_{13} + 5x_{23} + 12x_{33} + 8x_{43} \geq 54000$$

Ασβέστιο ≥ 6

$$6x_{13} + 10x_{23} + 6x_{33} + 6x_{43} \geq 54000$$

4 ≤ λίπος/kg ≤ 5:

$$8x_{13} + 6x_{23} + 6x_{33} + 9x_{43} \geq 36000$$

$$8x_{13} + 6x_{23} + 6x_{33} + 9x_{43} \leq 45000$$

3) Μη Αρνητικότητα

Όλες οι μεταβλητές απόφασης >= 0

Ασκηση 4:

(α) {(x1, x2) ∈ R 2 | x 2 1 + x 2 2 ≥ 3}

Αν πάρουμε τα σημεία $(2,0)$ και $(-2,0)$, το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ τους περνάει από το $(0,0)$, το οποίο δεν ανήκει στο σύνολο. Άρα, το σύνολο ***δεν είναι κυρτό***

(β) {(x1, x2, x3) ∈ R 3 | x1 + 2x2 ≤ 1, x1 − 2x3 ≤ 2}

Το σύνολο $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 \leq 1, x_1 - 2x_3 \leq 2\}$ είναι η τομή δύο ημιχώρων.

Οι ημιχώροι είναι κυρτά σύνολα, και η τομή κυρτών συνόλων ***είναι κυρτή***.

(γ) {(x1, x2, x3) ∈ R 3 | x2 ≥ x 2 1 , x1 + 2x2 + x3 ≤ 4}

Το σύνολο $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 \geq x_1^2, x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4\}$ είναι η τομή της περιοχής πάνω από μια παραβολή (που κυρτό συνολο) και ενός ημιχώρου (που είναι κυρτό συνολο).

Επομένως το συνολο ***είναι κυρτό*** .

(δ) {(x1, x2, x3) ∈ R 3 |x3 = |x2| , x1 ≤ 3}

Αν πάρουμε τα σημεία $(0,1,1)$ και $(0,-1,1)$, το μέσο $(0,0,1)$ δεν ανήκει στο σύνολο, αφού $1 \neq |0|$. Άρα, το σύνολο ***δεν είναι κυρτό***

Γραμμική & Συνδυαστική Βελτιστοποίηση Εργασία #1

Ασκηση 5

Για την άσκηση 5 πρέπει αρχικά να ορίσουμε κάθε περιορισμό ώς ημιεπίπεδο.

Αυτό θα το πετύχουμε κατασκευάζοντας ένα λεξικό που αντιστοιχεί την εξίσωση του κάθε περιορισμού με πίνακα που αντιπροσωπεύει τους συντελεστές, και ενα float που αντιπροσοπεύει την δεξιά μεριά της εξίσωσης.

Μετά κατασκευάζουμε απαραίτητες βοηθητικές συνρτήσεις οι οποίες είναι :

1) ενας solver για γραμμικές εξισώσεις 3 μεταβλητών.
2) Μια συνάρτηση που εφαρμόζει τους περιορισμούς
3) Σαφώς η αντικειμενική συνάρτηση
4) Συνάρτηση που υπολογίζει αν η κορυφή είναι εκφυλισμένη

Έχουμε μετα την εξής αλγοριθμική διαδικασία

Για κάθε συνδυασμό C(set(υπερεπιπέδων), 3):

Επιλύω το σύστημα για να βρω το σημείο x

Εφαρμόζω τους περιορισμούς στο x για να δω αν εφικτό

Βρισκω Z(x)

Υπολογίζω αν το x είναι εκφυλισμένο

Σώζω όλα αυτά τα δεδομένα σε δυο λιστες vertex_info και vertices

Αποθηκεύω μετά τις λιστες μεσω pandas ως dataframe για να μπορώ να τις τυπώσω εύκολα.

Γραμμική & Συνδυαστική Βελτιστοποίηση Εργασία #1

Έχω ως αποτέλεσμα:

Found 32 potential vertices

Of these, 6 are feasible

Feasible vertices (sorted by objective value):

Vertex: (np.float64(3.5), np.float64(6.5), np.float64(8.5))

  Formed by: x1 + x2 = 10, x2 + x3 = 15, x1 + x3 = 12

  Active constraints: x1 + x2 = 10, x2 + x3 = 15, x1 + x3 = 12

  Degenerate: False

  Objective value: 94.5 ……. Τα υπόλοιπα vertices

B :

Εδώ πρέπει να τοποθετήσω slack μεταβλητές, και να βρώ για κάθε έναν από τους συνδυασμούς μεταβλητών βασης της αντίστοιχη βασική λύση, και αν η λύση αυτή είναι εφικτή.

Για κάθε συνδιασμό εκτελώ την εξής διαδικασία:

Αρχικά προφανώς ελέγχω ότι η βάση είναι αναστρέψιμη για να μπορώ να προχωρήσω.

Βρίσκω λύση του συστήματος

Ελέγχω αν είναι εφικτή

Ελέγχω αν είναι εκφυλισμένη

Υπολογίζω την αντικειμενική συνάρτηση

Αποθηκεύω με τον ίδιο τρόπο με πρίν τα data σε λίστα και τα επιστρέφω

Μετά εφτιαξα και μια συνάρτηση που τυπώνει τα αποτελέσματα μορφοποιημένα μεσω pandas

Γραμμική & Συνδυαστική Βελτιστοποίηση Εργασία #1

Έχω output :

Original constraints:

$x1 + x2 \geq 10$

$x2 + x3 \geq 15$

$x1 + x3 \geq 12$

$20x1 + 10x2 + 15x3 \leq 300$

With slack variables:

$x1 + x2 - s1 = 10$

$x2 + x3 - s2 = 15$

$x1 + x3 - s3 = 12$

$20x1 + 10x2 + 15x3 + s4 = 300$

$x1, x2, x3, s1, s2, s3, s4 \geq 0$

Found 32 basic solutions

Of these, 6 are feasible and 26 are infeasible

There are 0 degenerate basic solutions

All basic solutions:

Solution 1: FEASIBLE, NON-DEGENERATE

Basis variables: x1, x2, x3, s1

x1 = 6.000000, x2 = 9.000000, x3 = 6.000000

s1 = 5.000000, s2 = 0.000000, s3 = 0.000000, s4 = 0.000000

Objective value: 117.000000 ……. Κλπ

Γραμμική & Συνδυαστική Βελτιστοποίηση Εργασία #1

Στο Γ απλά επιλέγω όλες τις βασικές εφικτές λύσεις και τις αντιστοιχώ σε ένα σημείο, ελέγχωντας αν το σημείο αυτό αντιστοιχεί στα [x1,x2,x3] της λύσης.

Έχω αποτέλεσμα:

Vertex (np.float64(3.5), np.float64(6.5), np.float64(8.5)) corresponds to Basic Feasible Solution 1

Basis variables: x1, x2, x3, s4

Objective value: 94.500000

THIS IS THE OPTIMAL SOLUTION….. Κλπ για τις υπόλοιπες

Προφανώς από πάνω καταλαβαίνουμε ότι η βελτιστη κορυφή είναι [3.5,6.5,8.5] και βελτιστη λύση 94.5 ενώ υπάρχουν 6 εφικτές κορυφές και καμία εκφυλισμένη.

```
Κώδικας:
import numpy as np
from itertools import combinations
import pandas as pd
from scipy.optimize import linprog


# Define the constraints as hyperplanes
hyperplanes = [
    {'name': 'x1 + x2 = 10', 'coeffs': [1, 1, 0], 'rhs': 10},
    {'name': 'x2 + x3 = 15', 'coeffs': [0, 1, 1], 'rhs': 15},
    {'name': 'x1 + x3 = 12', 'coeffs': [1, 0, 1], 'rhs': 12},
    {'name': '20x1 + 10x2 + 15x3 = 300', 'coeffs': [20, 10, 15],
'rhs': 300},
    {'name': 'x1 = 0', 'coeffs': [1, 0, 0], 'rhs': 0},
    {'name': 'x2 = 0', 'coeffs': [0, 1, 0], 'rhs': 0},
    {'name': 'x3 = 0', 'coeffs': [0, 0, 1], 'rhs': 0}
]

def solve_system(eq1, eq2, eq3):
```

```
    """Solve  system of 3 linear equations with 3 variables 3x3
system"""
    A = np.array([eq1['coeffs'], eq2['coeffs'], eq3['coeffs']])
    b = np.array([eq1['rhs'], eq2['rhs'], eq3['rhs']])

    try:
        x = np.linalg.solve(A, b)
        return x
    except np.linalg.LinAlgError:
        return None

def is_feasible(point):
    """Check if a point satisfies all constraints"""
    x1, x2, x3 = point

    #Check n-negativity
    if x1 < -1e-10 or x2 < -1e-10 or x3 < -1e-10:
        return False

    #Check other constraints with a small tolerance
    if x1 + x2 < 10 - 1e-10:
        return False
    if x2 + x3 < 15 - 1e-10:
        return False
    if x1 + x3 < 12 - 1e-10:
        return False
    if 20*x1 + 10*x2 + 15*x3 > 300 + 1e-10:
        return False

    return True

def objective_value(point):
    """Calculate the objective function value"""
    x1, x2, x3 = point
    return 8*x1 + 5*x2 + 4*x3

def check_degeneracy(vertex, hyperplanes_list):
    """Check if a vertex is degenerate """
    active_planes = []
```

```
    for hp in hyperplanes_list:
        x1, x2, x3 = vertex


        a, b, c = hp['coeffs']

        rhs = hp['rhs']
        if abs(a*x1 + b*x2 + c*x3 - rhs) < 1e-10:
            active_planes.append(hp['name'])

    return len(active_planes) > 3, active_planes

# Find all  vertices by solving systems of 3x3 equations
vertices = []
vertex_info = []
for eqs in combinations(hyperplanes, 3):
    point = solve_system(eqs[0], eqs[1], eqs[2])

    if point is not None:
        is_feas = is_feasible(point)
        is_deg, active_planes = check_degeneracy(point, hyperplanes)

        obj_val = objective_value(point) if is_feas else None

        vertex_info.append({
            'point': tuple(np.round(point, 10)),
            'equations': [eq['name'] for eq in eqs],
            'feasible': is_feas,
            'degenerate': is_deg,
            'active_planes': active_planes,
            'objective_value': obj_val
        })

        if is_feas:
            vertices.append(point)

# Sort and display the results
vertex_df = pd.DataFrame(vertex_info)
```

```
feasible_df = vertex_df[vertex_df['feasible']].copy()
feasible_df = feasible_df.sort_values(by='objective_value')

# Part B:
def find_basic_solutions():
    """Find all basic solutions after adding slack variables"""
    # A matrix
    A = np.array([
        [1, 1, 0, -1, 0, 0, 0],
        [0, 1, 1, 0, -1, 0, 0],
        [1, 0, 1, 0, 0, -1, 0],
        [20, 10, 15, 0, 0, 0, 1]
    ])

    # B matrix
    b = np.array([10, 15, 12, 300])

    # Variables
    var_names = ['x1', 'x2', 'x3', 's1', 's2', 's3', 's4']

    basic_solutions = []

    # Try all combinations of 4 variables to be in the basis
    for basis_indices in combinations(range(7), 4):
        # Extract variables columns φορ hte basis
        B = A[:, basis_indices]

        # Try to solve the system
        try:
            # Check if invertible
            if abs(np.linalg.det(B)) > 1e-10:
                #Solve
                basis_values = np.linalg.solve(B, b)

                # Create  solution vector
                solution = np.zeros(7)
                for i, idx in enumerate(basis_indices):
                    solution[idx] = basis_values[i]
```

```
                #Check if feasible
                is_feasible = np.all(solution >= -1e-10)

                #Check if  degen
                zero_basics = sum(1 for i, idx in
enumerate(basis_indices) if abs(basis_values[i]) < 1e-10)
                is_degenerate = zero_basics > 0

                # Calculate Z for feasible solutions
                obj_val = None
                if is_feasible:
                    obj_val = 8*solution[0] + 5*solution[1] +
4*solution[2]

                # Store the solution info
                basic_solutions.append({
                    'basis_variables': [var_names[idx] for idx in
basis_indices],
                    'solution': solution,
                    'feasible': is_feasible,
                    'degenerate': is_degenerate,
                    'objective_value': obj_val,
                    'x1': solution[0],
                    'x2': solution[1],
                    'x3': solution[2],
                    's1': solution[3],
                    's2': solution[4],
                    's3': solution[5],
                    's4': solution[6]
                })
        except np.linalg.LinAlgError:
            # no solution
            continue

    return basic_solutions

def add_slack_variables():
    """Convert the problem to standard form with slack variables """
    print("\nPart B: ")
```

```
    print("Original constraints:")
    print("x1 + x2 >= 10")
    print("x2 + x3 >= 15")
    print("x1 + x3 >= 12")
    print("20x1 + 10x2 + 15x3 ≤ 300")

    print("\nWith slack variables:")
    print("x1 + x2 - s1 = 10")
    print("x2 + x3 - s2 = 15")
    print("x1 + x3 - s3 = 12")
    print("20x1 + 10x2 + 15x3 + s4 = 300")
    print("x1, x2, x3, s1, s2, s3, s4 >= 0")

    # Find all basic solutions
    basic_solutions = find_basic_solutions()

    # Create a DataFrame for better display
    df = pd.DataFrame(basic_solutions)

    # Count solutions
    feasible_count = df['feasible'].sum()
    infeasible_count = len(df) - feasible_count

    # Count degenerate solutions
    degenerate_count = df['degenerate'].sum()

    print(f"\nFound {len(df)} basic solutions")
    print(f"Of these, {feasible_count} are feasible and
{infeasible_count} are infeasible")
    print(f"There are {degenerate_count} degenerate basic solutions")

    # Display all basic solutions
    print("\nAll basic solutions:")
    for i, sol in enumerate(basic_solutions):
        basis_str = ', '.join(sol['basis_variables'])
        status = "FEASIBLE" if sol['feasible'] else "INFEASIBLE"
        degeneracy = "DEGENERATE" if sol['degenerate'] else
"NON-DEGENERATE"
```

```
        print(f"\nSolution {i+1}: {status}, {degeneracy}")
        print(f"Basis variables: {basis_str}")
        print(f"x1 = {sol['x1']:.6f}, x2 = {sol['x2']:.6f}, x3 =
{sol['x3']:.6f}")
        print(f"s1 = {sol['s1']:.6f}, s2 = {sol['s2']:.6f}, s3 =
{sol['s3']:.6f}, s4 = {sol['s4']:.6f}")

        if sol['feasible']:
            print(f"Objective value: {sol['objective_value']:.6f}")

    return basic_solutions

# Part C: Find optimal solution and establish correspondence
def compare_solutions(vertices_df, basic_solutions):
    """Compare vertices from Part A with basic feasible solutions
from Part B"""
    print("\nPart C: Correspondence between vertices and basic
feasible solutions")

    # Filter for feasible basic solutions
    feasible_basic = [sol for sol in basic_solutions if
sol['feasible']]

    #Sort by Z
    feasible_basic.sort(key=lambda x: x['objective_value'] if
x['objective_value'] is not None else float('inf'))

    #Find the optimal solution
    optimal = feasible_basic[0]
    print(f"\nOptimal solution:")
    print(f"x1 = {optimal['x1']:.6f}, x2 = {optimal['x2']:.6f}, x3 =
{optimal['x3']:.6f}")
    print(f"s1 = {optimal['s1']:.6f}, s2 = {optimal['s2']:.6f}, s3 =
{optimal['s3']:.6f}, s4 = {optimal['s4']:.6f}")
    print(f"Objective value: {optimal['objective_value']:.6f}")

    #Createvertices το solutions map
    print("\nCorrespondence between vertices and basic feasible
solutions:")
```

```
    for i, vertex_row in
vertices_df[vertices_df['feasible']].iterrows():
        vertex = vertex_row['point']
        #Find matching basic feasible solution
        for j, basic_feasible_solution in enumerate(feasible_basic):
            if (abs(vertex[0] - basic_feasible_solution['x1']) <
1e-10 and
                abs(vertex[1] - basic_feasible_solution['x2']) <
1e-10 and
                abs(vertex[2] - basic_feasible_solution['x3']) <
1e-10):

                print(f"\nVertex {vertex} corresponds to Basic
Feasible Solution {j+1}")
                print(f"Basis variables: {',
'.join(basic_feasible_solution['basis_variables'])}")
                print(f"Objective value:
{basic_feasible_solution['objective_value']:.6f}")

                if j == 0:
                    print("THIS IS THE OPTIMAL SOLUTION")
                break

# Display ----------------------------
print("Part A:")
print(f"Found {len(vertex_info)} potential vertices")
print(f"Of these, {len(vertices)} are feasible")

print("\nFeasible vertices (sorted by objective value):")
for idx, row in feasible_df.iterrows():
    print(f"Vertex: {row['point']}")
    print(f"  Formed by: {', '.join(row['equations'])}")
    print(f"  Active constraints: {', '.join(row['active_planes'])}")
    print(f"  Degenerate: {row['degenerate']}")
    print(f"  Objective value: {row['objective_value']}")
    print()

basic_solutions = add_slack_variables()
compare_solutions(vertex_df, basic_solutions)
```

Ασκ 6.

Για την υλοποίηση simplex αρχικά χρειαζόμαστε τις εξής βοηθητικές συναρτήσεις:

1) Display function για να τυπώνει τα tableaux
2) Function που βρίσκει όλες τις πιθανές εισερχόμενες μεταβλητές βρίσκει δηλαδή αυτές που έχουν συντελεστή <0
3) Function που βρίσκει όλες τις πιθανές εξερχόμενες μεταβλητές μεσω minimum ratio test
4) Function που ελέγχει αν είναι optimal η λύση
5) Function που εκτελεί το pivot, αλλάζοντας την εξερχόμενη με εισερχόμενη.

Μετά απλά εφαρμόζω τον αλγόριθμο simplex ως εξής:

Ωσω η λύση δεν είναι optimal:

Βρες πιθανές εισερχόμενες

Βρες πιθανές εξερχόμενες

Αν δεν υπά΄ρχουν το πρόβλημα είναι unbounded, σταμάτα

Διάλεξε εισερχόμενη και εξερχόμενη βάση κριτηρίων

Εκτέλεσε pivot

Υπολόγισε την νέα λύση.

Τύπωσε ότι έκανες.