

Bài I (2 điểm). Cho hai biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+3}{x-9}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$

với $x \geq 0, x \neq 9$

1) Tính giá trị của Q tại $x = 36$.

2) Rút gọn P và tính $M = \frac{P}{Q}$.

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của M

Bài II (2,5 điểm).

1) Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Hai người thợ cùng làm chung một công việc sau 3 giờ 36 phút thì xong. Nếu mỗi người làm một mình thì người thứ nhất hoàn thành công việc chậm hơn người thứ hai là 3 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu giờ để xong việc?

2) Có hai lọ thủy tinh hình trụ, lọ thứ nhất phía bên trong có đường kính đáy là 30cm, chiều cao 20cm, đựng đầy nước. Lọ thứ hai bên trong có đường kính đáy là 40cm, chiều cao 12cm. Hỏi nếu đổ hết nước từ trong lọ thứ nhất sang lọ thứ hai nước có bị tràn ra ngoài không? Tại sao? (Lấy $\pi \approx 3,14$)

Bài III (2 điểm).

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x+y = \frac{4x-3}{5} \\ x+3y = \frac{15-9y}{14} \end{cases}$$

2) Cho đường thẳng d: $y = -mx + m + 1$ và Parabol (P): $y = x^2$.

a) Tìm tọa độ giao điểm của d và (P) khi $m = 2$.

b) Tìm các giá trị của m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 < 2$.

Bài IV (3,0 điểm)

Cho đường tròn tâm O và một dây cung AB. Từ điểm chính giữa P của cung lớn AB kẻ đường kính PQ, cắt dây AB tại D. Gọi M là một điểm bất kì trên cung lớn AB, QM cắt AB tại I, PM cắt AB tại C

1) Chứng minh tứ giác DIMP là tứ giác nội tiếp

2) Chứng minh $CM \cdot CP = CI \cdot CD$

3) Gọi N là giao điểm của đường tròn tâm O và đoạn thẳng CQ. Chứng minh PN, QI, AB đồng qui.

4) Xác định vị trí của điểm M trên cung lớn AB để tích $IM \cdot IQ$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài V (0,5 điểm)

Cho hai số dương a và b thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a^4 + b^2 + 2ab^2} + \frac{1}{b^4 + a^2 + 2ba^2}$$