

# Chuyên đề: Phương trình quy về bậc hai

## I/. Phương trình trùng phương

1. Định nghĩa: Là phương trình có dạng:  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  ( $a \neq 0$ )  
VD:  $5x^4 - 7x^2 - 12 = 0$

2. Cách giải:  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  ( $a \neq 0$ ). Đưa về pt bậc hai bằng cách đặt ẩn phụ như sau:

• Đặt  $x^2 = t$  ( $t \geq 0$ ). Ta có pt bậc hai ẩn t:

$$at^2 + bt + c = 0.$$

3. Các ví dụ: Giải các pt sau:

a,  $x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$

Đặt  $x^2 = t$  ( $t \geq 0$ ). Ta có pt:  $t^2 - 13t + 36 = 0.$

$$\Leftrightarrow t^2 - 9t - 4t + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 9)(t - 4) = 0.$$

• TH<sub>1</sub>:  $t = 9 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3 \Rightarrow t \in \{9; 4\}.$

• TH<sub>2</sub>:  $t = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$

Vậy pt có 4 nghiệm phân biệt:  $x_1 = 3; x_2 = -3; x_3 = -2; x_4 = 2.$

b,  $4x^4 + x^2 - 5 = 0$

Đặt  $x^2 = t$ , ta có pt:  $4t^2 + t - 5 = 0$

( $t \geq 0$ ) có  $a + b + c = 0 \Rightarrow t_1 = 1; t_2 = -\frac{5}{4} < 0$  (bại)

•  $t = t_1 = 1$  ta có  $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ . Vậy pt có 2 nghiệm phân biệt  
 $x_1 = 1; x_2 = -1.$

c,  $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ . Đặt  $x^2 = t$  ( $t \geq 0$ ). Ta có phương trình

$$t^2 + 3t + 2 = 0$$

Có dạng  $a - b + c = 0 \Rightarrow t_1 = -1 < 0$  (bại)

$$t_2 = -2 < 0$$
 (bại)

Vậy phương trình vô nghiệm.

d,  $x^4 + 5x^2 + 7 = 0$ . Đặt  $x^2 = t$  ( $t \geq 0$ ) ta có pt:

$$t^2 + 5t + 7 = 0$$

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 7 = 25 - 28 = -3 < 0 : \text{pt vô nghiệm}$$

Vậy pt ban đầu vô nghiệm.



(\*) Tổng quát : cho  $p_T: ax^4 + bx^2 + c = 0$  ( $a \neq 0$ ). (1)

Đặt  $x^2 = t$  ( $t \geq 0$ ). Ta có  $p_T$  bậc 2 ẩn  $t$ :

$$at^2 + bt + c = 0 \quad (*)$$

•  $p_T(1)$  có 4 nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow p_T(*)$  có hai nghiệm  $p/b$  cùng dương  $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ t_1 \cdot t_2 = \frac{c}{a} > 0 \\ t_1 + t_2 = -\frac{b}{a} > 0 \end{cases}$$

•  $p_T(1)$  có hai nghiệm  $p/b \Leftrightarrow p_T(*)$  có 2 nghiệm trái dấu.  
 $\Leftrightarrow a \cdot c < 0$ . hay  $\frac{c}{a} < 0$ . hoặc  $p_T(1)$  có nghiệm kép  $> 0$   
 $(\Delta = 0 \text{ và } t_1 = t_2 = -\frac{b}{2a} > 0)$

•  $p_T(1)$  vô nghiệm  $\Leftrightarrow$   $\begin{cases} p_T(1) \text{ vô nghiệm: } \Delta < 0 \\ p_T(1) \text{ có 2 nghiệm } p/b \text{ cùng âm.} \end{cases}$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ t_1 \cdot t_2 > 0 \text{ và } t_1 + t_2 < 0 \end{cases}$

(\*) Các bài tập áp dụng

1. Cho  $p_T: x^4 - 2mx^2 + m^2 - 4 = 0$

a. Giải  $p_T$  khi  $m = -1$

b. Tìm  $m$  để  $p_T$  có 4 nghiệm phân biệt

2. Bài 2: Cho  $p_T: x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m+1 = 0$

a. Giải  $p_T$  khi  $m = 1$

b. Tìm  $m$  để  $p_T$  có hai nghiệm phân biệt.

3. Bài 3: Cho  $p_T: x^4 - (m+2)x^2 + m+1 = 0$

a. Giải  $p_T$  khi  $m = 2$ .

b. Tìm  $m$  để  $p_T$  có 4 nghiệm  $p/b$ .

(\*) Luôn tính  $\Delta$  hay áp dụng hệ thức Vi-et thì h/s phải đưa  $p_T$  về dạng  $p_T$  bậc hai 1 ẩn rồi mới làm tiếp.