Ting Fung Lam 2924629375

April 12, 2020

Programming HW#11 (Due: Apr 19, 11:59 PM):
1) Implement the Richardson extrapolation and run your own codes to solve Problem 2 on page 441.
2) Implement five-point Gaussian integration formula (on page 459) and run your own codes to evaluate two integrals in Problem 23 on page 464.

Richardson extrapolation

[14]:
```
import math
import numpy as np

def richardson(f, a):
    h = 1
    M = 30
    d = np.zeros(M + 1)
    r = np.zeros(M + 1)
    for k in range(0, M + 1):
        d[k] = (f(a + h) - f(a - h)) / (2 * h)
        h /= 2
    for k in range(1, M + 1):
        r[k] = d[k] + (d[k] - d[k - 1]) / 3
        print("k = " + str(k) + " d = " + str(d[k]) + " r = " + str(r[k]))
    return k, d, r
```

[15]:
```
# Define functions
f1 = lambda x: math.log(x)
f2 = lambda x: math.tan(x)
f3 = lambda x: math.sin(x ** 2 + 1 / 3 * x)

print("ln x at x = 3")
richardson(f1, 3)
print()
print("tan x at x = sin-1(0.8)")
richardson(f2, math.asin(0.8))
print()
print("sin(x ** 2 + 1/3 x) at x = 0")
richardson(f3, 0)
```

```
ln x at x = 3
k = 1 d = 0.33647223662121295 r = 0.33310511873495974
k = 2 d = 0.3341081693263326 r = 0.3333201468947058
k = 3 d = 0.33352643575620444 r = 0.33333252456616175
k = 4 d = 0.33338157120454426 r = 0.3333332830206575
k = 5 d = 0.33334539044547284 r = 0.33333333019244904
k = 6 d = 0.33333634746418284 r = 0.3333333331370862
k = 7 d = 0.3333340868568513 r = 0.3333333333210741
k = 8 d = 0.3333335217136266 r = 0.3333333333325517
k = 9 d = 0.33333338042837113 r = 0.33333333333328596
k = 10 d = 0.3333333451071212 r = 0.33333333333337123
k = 11 d = 0.33333333627683714 r = 0.33333333333340914
```

```
k = 12 d = 0.33333333406926613 r = 0.33333333333340914
k = 13 d = 0.3333333335167481 r = 0.3333333333325754
k = 14 d = 0.3333333333794144 r = 0.3333333333336365
k = 15 d = 0.3333333333466726 r = 0.33333333333575865
k = 16 d = 0.33333333333575865 r = 0.3333333333321207
k = 17 d = 0.3333333333430346 r = 0.3333333334545995
k = 18 d = 0.3333333333430346 r = 0.3333333333430346
k = 19 d = 0.3333333333139308 r = 0.3333333333042295
k = 20 d = 0.3333333332557231 r = 0.3333333332363206
k = 21 d = 0.3333333332557231 r = 0.3333333332557231
k = 22 d = 0.33333333348855376 r = 0.33333333356616396
k = 23 d = 0.33333333395421505 r = 0.3333333341094355
k = 24 d = 0.33333333395421505 r = 0.33333333395421505
k = 25 d = 0.3333333320915699 r = 0.33333333147068817
k = 26 d = 0.3333333358168602 r = 0.3333333370586236
k = 27 d = 0.3333333283662796 r = 0.3333333258827527
k = 28 d = 0.3333333432674408 r = 0.3333333482344945
k = 29 d = 0.3333333134651184 r = 0.3333333035310109
k = 30 d = 0.3333333730697632 r = 0.3333333929379781

tan x at x = sin-1(0.8)
k = 1 d = 6.46533638648716 r = 9.055843932436236
k = 2 d = 3.2090999247876604 r = 2.123687770887827
k = 3 d = 2.872980093930569 r = 2.760940150311539
k = 4 d = 2.800901808516196 r = 2.7768757133780713
k = 5 d = 2.783518000093654 r = 2.77772339728614
k = 6 d = 2.7792103068211063 r = 2.7777744090635905
k = 7 d = 2.7781357524792014 r = 2.7777775676985663
k = 8 d = 2.777867261611135 r = 2.777777764655113
k = 9 d = 2.7778001481210595 r = 2.777777776957701
k = 10 d = 2.7777833703250963 r = 2.777777777726442
k = 11 d = 2.777779175912201 r = 2.777777777774569
k = 12 d = 2.777778127311194 r = 2.777777777777525
k = 13 d = 2.777777865160715 r = 2.777777777777222
k = 14 d = 2.7777777996234363 r = 2.777777777777677
k = 15 d = 2.7777777832416177 r = 2.7777777777810115
k = 16 d = 2.7777777791488916 r = 2.7777777777846495
k = 17 d = 2.7777777781157056 r = 2.7777777777713104
k = 18 d = 2.777777777868323 r = 2.7777777777858623
k = 19 d = 2.7777777778101154 r = 2.7777777777907127
k = 20 d = 2.777777777868323 r = 2.7777777778877257
k = 21 d = 2.7777777777519077 r = 2.7777777777131027
k = 22 d = 2.7777777779847383 r = 2.7777777780623487
k = 23 d = 2.7777777779847383 r = 2.7777777779847383
k = 24 d = 2.7777777779847383 r = 2.7777777779847383
k = 25 d = 2.777777776122093 r = 2.7777777755012116
k = 26 d = 2.777777776122093 r = 2.777777776122093
k = 27 d = 2.7777777910232544 r = 2.7777777959903083
k = 28 d = 2.777777761220932 r = 2.7777777512868247
k = 29 d = 2.7777777910232544 r = 2.7777778009573617
k = 30 d = 2.7777777910232544 r = 2.7777777910232544
```

```
sin(x ** 2 + 1/3 x) at x = 0
k = 1 d = 0.3214776473608144 r = 0.36970884676548993
k = 2 d = 0.3322975880482895 r = 0.33590423494411453
k = 3 d = 0.33319621358431706 r = 0.3334957554296596
k = 4 d = 0.33330667825796906 r = 0.33334349981585304
k = 5 d = 0.33332714625962556 r = 0.3333339689268444
k = 6 d = 0.3333318163604198 r = 0.33333337306068456
k = 7 d = 0.3333329559523563 r = 0.3333333358163351
k = 8 d = 0.33333323910448026 r = 0.33333333348852157
k = 9 d = 0.3333333097833945 r = 0.33333333334303256
k = 10 d = 0.3333333274463033 r = 0.33333333333393955
k = 11 d = 0.3333333318616042 r = 0.3333333333333712
k = 12 d = 0.3333333329654028 r = 0.33333333333333565
k = 13 d = 0.33333333324135084 r = 0.33333333333333354
k = 14 d = 0.33333333331033765 r = 0.33333333333333326
k = 15 d = 0.3333333333275844 r = 0.3333333333333333
k = 16 d = 0.3333333333318961 r = 0.3333333333333333
k = 17 d = 0.333333333332974 r = 0.3333333333333333
k = 18 d = 0.3333333333332435 r = 0.3333333333333333
k = 19 d = 0.33333333333331083 r = 0.33333333333333326
k = 20 d = 0.3333333333333277 r = 0.3333333333333333
k = 21 d = 0.3333333333333319 r = 0.3333333333333333
k = 22 d = 0.333333333333333 r = 0.3333333333333333
k = 23 d = 0.3333333333333332 r = 0.33333333333333326
k = 24 d = 0.3333333333333333 r = 0.33333333333333337
k = 25 d = 0.3333333333333333 r = 0.3333333333333333
k = 26 d = 0.3333333333333333 r = 0.3333333333333333
k = 27 d = 0.3333333333333333 r = 0.3333333333333333
k = 28 d = 0.3333333333333333 r = 0.3333333333333333
k = 29 d = 0.3333333333333333 r = 0.3333333333333333
k = 30 d = 0.3333333333333333 r = 0.3333333333333333
```

[15]:
```
(30,
 array([0.17678405, 0.32147765, 0.33229759, 0.33319621, 0.33330668,
        0.33332715, 0.33333182, 0.33333296, 0.33333324, 0.33333331,
        0.33333333, 0.33333333, 0.33333333, 0.33333333, 0.33333333,
        0.33333333, 0.33333333, 0.33333333, 0.33333333, 0.33333333,
        0.33333333, 0.33333333, 0.33333333, 0.33333333, 0.33333333,
        0.33333333, 0.33333333, 0.33333333, 0.33333333, 0.33333333,
        0.33333333]),
 array([0.        , 0.36970885, 0.33590423, 0.33349576, 0.3333435 ,
        0.33333397, 0.33333337, 0.33333334, 0.33333333, 0.33333333,
        0.33333333, 0.33333333, 0.33333333, 0.33333333, 0.33333333,
        0.33333333, 0.33333333, 0.33333333, 0.33333333, 0.33333333,
        0.33333333, 0.33333333, 0.33333333, 0.33333333, 0.33333333,
        0.33333333, 0.33333333, 0.33333333, 0.33333333, 0.33333333,
        0.33333333]))
```

Gaussian conjecture

[16]:
```
def gaussian(a, b, c, d, f):
    x, w = np.zeros(3), np.zeros(3)
    x[0], x[1], x[2] = 0.0, 0.538469310105683, 0.906179845938664
    w[0], w[1], w[2] = 0.568888888888889, 0.478628670499366, 0.236926885056189
    u = ((b - a) * x[0] + a * d - b * c) / (d - c)
    S = w[0] * f(u)
    for i in range(1, 3):
        u = ((b - a) * x[i] + a * d - b * c) / (d - c)
        v = (-(b - a) * x[i] + a * d - b * c) / (d - c)
        S = S + w[i] * (f(u) + f(v))
    S = (b - a) * S / (d - c)
    return S
```

[17]:
```
f4 = lambda x: x
f5 = lambda x: math.sin(x) / x

print("Part a: " + str(gaussian(a=0, b=math.pi/2, c=-1, d=1, f=f4)))
print("Part b: " + str(gaussian(a=0, b=4, c=-1, d=1, f=f5)))
```

```
Part a: 1.2337005501361693
Part b: 1.7582031030792544
```