2024年广东省大学生程序设计竞赛(GDCPC)暨CCPC广州邀请赛

2024 年 5 月 26 日

清华大学学生算法协会

感谢 Mys.C.K., liuzhangfeiabc, Itst, SpiritualKhorosho, EliminateSpace, xiaolilsq, gyh-20, JohnVictor36, Renshey, QAQAutoMaton 负责命题和验题工作.

A 田字格 by *Itst*

C DFS 序 by *EliminateSpace*

A 田字格 by *ltst*

题目大意

给定平面上与坐标轴平行的 $n \le 3 \times 10^5$ 条黑色线段，求出它们构成多少田字格。一个田字格由三元组 (x_0, y_0, d) 表示，一个三元组是田字格当且仅当正方形 $[x_0 - d, x_0 + d] \times [y_0 - d, y_0 + d]$ 与平面上黑色部分的交恰好等于

$x = x_0 - d, x = x_0, x = x_0 + d, y = y_0 - d, y = y_0, y = y_0 + d$ 六条直线与这个正方形的交。

题解

注意到一个田字格由三条等距的、中间没有插入其他横线的横线组，和三条等距的、中间没有插入其他竖线的竖线组构成。考虑先把这样的横线组和竖线组处理出来，然后计算所有横线组和竖线组可以合并出多少的田字格。

题解

考虑第一步，维护出所有的竖线组，横线组类似。按照纵坐标扫描线，每次维护与 $y = y_0$ 有交的竖线集合，按照横坐标排序。那么可能的竖线组在这个序列上一定是连续排列的（因为中间不能有其他竖线）。总共会形成 $O(n)$ 次插入，每次插入只会改变 $O(1)$ 个竖线组的存在情况，使用 'set' 维护。这样我们可以得到 $O(n)$ 个四元组 (x_0, x_1, y_0, y_1)，表示从 $y = y_0$ 到 $y = y_1$，三条竖线 $x = x_0, x = \frac{x_0+x_1}{2}, x = x_1$ 存在且中间没有其他竖线。

题解

处理出所有的横线组和竖线组之后，枚举 d，此时竖线组的 $x_1 - x_0$ 和横线组的 $y_1 - y_0$ 是确定的。一个横线组 (x_0, y_0, y_1) 和一个竖线组 (x_0', x_1', y_0') 是一个合法的田字格当且仅当

题解

处理出所有的横线组和竖线组之后，枚举 d，此时竖线组的 $x_1 - x_0$ 和横线组的 $y_1 - y_0$ 是确定的。一个横线组 (x_0, y_0, y_1) 和一个竖线组 (x_0', x_1', y_0') 是一个合法的田字格当且仅当

- $x_0' \le x_0 \le x_1' - 2d$；

题解

处理出所有的横线组和竖线组之后，枚举 d，此时竖线组的 $x_1 - x_0$ 和横线组的 $y_1 - y_0$ 是确定的。一个横线组 (x_0, y_0, y_1) 和一个竖线组 (x_0', x_1', y_0') 是一个合法的田字格当且仅当

- $x_0' \le x_0 \le x_1' - 2d$；
- $y_0 \le y_0' \le y_1 - 2d$。

题解

处理出所有的横线组和竖线组之后，枚举 d，此时竖线组的 $x_1 - x_0$ 和横线组的 $y_1 - y_0$ 是确定的。一个横线组 (x_0, y_0, y_1) 和一个竖线组 (x'_0, x'_1, y'_0) 是一个合法的田字格当且仅当

- $x'_0 \le x_0 \le x'_1 - 2d$；
- $y_0 \le y'_0 \le y_1 - 2d$。

这是一个二维偏序，对一维扫描线另一维树状数组统计即可。复杂度 $O(n \log n)$

C DFS 序 by *EliminateSpace*

题目大意

给定一棵 n 个点的有根树，1 号点为根。每个点有一个权值 w_i。

求一个最优的 DFS 序使得 $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i w_i$ 最大。

题解

决策是考虑进入每个点之后选子树的顺序。

题解

决策是考虑进入每个点之后选子树的顺序。

子树内部显然用内部的最优方案。

题解

决策是考虑进入每个点之后选子树的顺序。

子树内部显然用内部的最优方案。

然后子树之间的贡献是先走的子树的大小乘后走的子树的权值和。

题解

决策是考虑进入每个点之后选子树的顺序。

子树内部显然用内部的最优方案。

然后子树之间的贡献是先走的子树的大小乘后走的子树的权值和。

所以按照子树大小除以权值和从大到小排序访问就是最优的。可以用调整法证明贪心是对的。

题解

决策是考虑进入每个点之后选子树的顺序。

子树内部显然用内部的最优方案。

然后子树之间的贡献是先走的子树的大小乘后走的子树的权值和。

所以按照子树大小除以权值和从大到小排序访问就是最优的。可以用调整法证明贪心是对的。

时间复杂度 $O(n \log n)$。

F 图 by *xiaolilsq*

题目大意

给定一张 n 个点 m 条边的无向图，要求找到两个点 u, v 满足它们间的边不相交路径有至少 $\lceil m/(n-1) \rceil$ 条。

题解

看到 $n-1$ 联想到 n 个点的树恰好就是 $n-1$ 条边，或者说 n 个点的森林最多只有 $n-1$ 条边。这启发我们去维护若干棵森林。

题解

看到 $n-1$ 联想到 n 个点的树恰好就是 $n-1$ 条边，或者说 n 个点的森林最多只有 $n-1$ 条边。这启发我们去维护若干棵森林。

具体而言使用 kruskal 的方法维护至少 $\lceil m/(n-1)\rceil$ 个 n 个点的森林，初始所有森林都是没有边的，然后一条边一条边地加入森林中，每次加入边都将其添加到尽可能靠前的一个森林中去。

题解

看到 $n-1$ 联想到 n 个点的树恰好就是 $n-1$ 条边，或者说 n 个点的森林最多只有 $n-1$ 条边。这启发我们去维护若干棵森林。

具体而言使用 kruskal 的方法维护至少 $\lceil m/(n-1) \rceil$ 个 n 个点的森林，初始所有森林都是没有边的，然后一条边一条边地加入森林中，每次加入边都将其添加到尽可能靠前的一个森林中去。

由于前 $\lceil m/(n-1) \rceil - 1$ 个森林最多只能容纳 $(\lceil m/(n-1) \rceil - 1)(n-1) < m$ 条边，所以最后一个森林中一定至少包含一条边，也就是说在最后一个森林中至少存在 $u \neq v$ 满足 u, v 中至少有一条路径。

题解

注意到由于每次添加边我们都是将其添加到尽可能靠前的森林中去的，所以如果 u, v 在第 i 个森林中连通，那么它必然在第 $i-1$ 个森林中连通，否则容易导出矛盾。由此我们直到对于最后一个森林中任意两个连通的点 u, v，它们在前面的森林中都连通，所以每个森林中取一条路径即可构成 $\lceil m/(n-1) \rceil$ 条边不相交路径了。

题解

注意到由于每次添加边我们都是将其添加到尽可能靠前的森林中去的，所以如果 u,v 在第 i 个森林中连通，那么它必然在第 $i-1$ 个森林中连通，否则容易导出矛盾。由此我们直到对于最后一个森林中任意两个连通的点 u,v，它们在前面的森林中都连通，所以每个森林中取一条路径即可构成 $\lceil m/(n-1)\rceil$ 条边不相交路径了。

额外需要注意的就是将边加入尽可能靠前的森林的时候不能直接枚举，这样时间复杂度至少是 $O(m^2/n)$ 的，当 n 比较小 m 比较大的时候会超时，而根据我们维护的森林结构性质，可以使用二分的手段来找到应该加入哪个森林中，这样时间复杂度不超过 $O(m\log m)$。

感谢倾听!