2020 级概率与数理统计试题

（本试卷共 2 页，八个大题，请将每道题的答案写在答题纸对应的位置上，并在答题纸上的对应位置写上序号、姓名、学号等信息，答题纸共 5 页）

附表：Φ(1.96)=0.975，Φ(1.64)=0.95，Φ(1)=0.8413，Φ(0.32)=0.0.6255，Φ(0.8)=0.7881，Φ(1.2)=0.8849，Φ(0.4)=0.6554，Φ(1.8)=0.9641，Φ(8)=1，$t_{0.05}(8)=1.8595$，$t_{0.05}(9)=1.8331$，$t_{0.025}(8)=2.3060$，$t_{0.025}(9)=2.2622$，$\chi^2_{0.05}(8)=15.507$，$\chi^2_{0.05}(9)=16.919$，$\chi^2_{0.95}(8)=2.733$，$\chi^2_{0.95}(9)=3.325$，$\chi^2_{0.025}(8)=17.535$，$\chi^2_{0.025}(9)=19.023$，$\chi^2_{0.975}(8)=2.180$，$\chi^2_{0.975}(9)=2.700$，$1/\sqrt{10}=0.32$

一、（14 分）

1. 已知 A、B 为随机事件，且 $P(A)=0.5, P(B)=0.6, P(AB)=0.4$, 求 $P(\overline{A}\cup B)$.

2. 乒乓球盒中有 10 个球，其中 8 个新球，2 个旧球。第一次比赛时任取 3 个使用，用后放回（新球使用一次就成为旧球），第二次使用时任取 1 个球.（1）求第二次取到新球的概率;（2）若已知第二次取到的是新球，求第一次比赛取到 2 个新球的概率.

二、（14 分）

1. 设一袋子中有 3 个白球 3 个黑球，连续不放回的从袋子中取球，每次取 1 个，直到取到黑球为止，设此时取到白球的个数为随机变量 X. 求（1）X 的分布律;（2）X 的数学期望 EX.

2. 随机变量 X 服从数学期望为 1/2 的指数分布，令 $Y=1-e^{-2X}$. （1）写出 X 的概率密度函数 $f_X(x)$;（2）求 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

三、（16 分）

1. 命题 A：若二维随机变量（X，Y）服从二维正态分布，则 X 和 Y 都服从正态分布.

　命题 B：若 X 和 Y 都服从正态分布，则（X，Y）服从二维正态分布.

问：命题 A 和命题 B 是否成立？若不成立，请加一个条件，使得该命题成立.

2.设二维随机变量(X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} c, & 0<x\le y\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $c>0$ 为常数.（1）求常数 c 的值;（2）求 X 和 Y 的边缘密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$;（3）判断 X 与 Y 是否相互独立？说明理由;（4）令 $Z=X+Y$，求 Z 的密度函数 $f_Z(z)$。

四、（14 分）

1. 叙述两个随机变量相关系数ρ的含义。

2．命题 A：若随机变量 X 和 Y 相互独立，则 X 和 Y 不相关；命题 B：若随机变量 X 和 Y 不相关，则 X 和 Y 相互独立。问：命题 A 和命题 B 是否成立？若不成立，请举出一个反例.

3. 已知随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $X\sim N(0,1)$，Y 服从方差为 4 的χ^2分布. 令$U=X+Y$，$V=X-Y$. （1）求 $E(X-2Y)$和 $D(X-2Y)$;（2）求 $E(XY)$和 $D(XY)$;（3）求 U，V 的相关系数 ρ_{UV};（4）判断 U 和 V 是否独立，说明理由.

五、（8 分）

某零件的质量是随机变量，其数学期望为 0.5kg，标准差为 0.1kg，现采用有放回的抽取方式，从一批该零件中随机抽取 100 只. 求这 100 只零件的总质量超过 51kg 的概率.

六、（8 分）

设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，从中抽取一样本 $X_1, X_2, \dots, X_5, X_6$，记 $\bar{X}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}X_i$，$S^2=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(X_i-\bar{X})^2$，令 $T=\frac{X_6-\bar{X}}{S}$. 求 a 的值，使得 aT 服从自由度为 4 的 t 分布（写出求解过程）。

七、（14 分）

1. 设总体 X 服从参数为λ的泊松分布，其中$\lambda>0$ 未知，$X_1, X_2, \dots, X_n$ 为取自该总体的样本，现测得样本观测值为

2，1，3，1，1，5，1，1，0，1，3，2

求参数λ的矩估计值。

2. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为取自概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

的总体的样本，$x_1, x_2, \dots, x_n$ 为相应的样本观测值，θ未知. 求参数θ及 $\beta=e^{-1/\theta}$ 的最大似然估计.

3. 设 X_1, X_2, X_3 为取自总体 X 的样本，总体 X 均值μ、方差σ^2 均存在，定义两个统计量 $\hat{\mu}_1=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{3}X_3$，$\hat{\mu}_2=\frac{2}{3}X_1-\frac{5}{9}X_2+\frac{8}{9}X_3$. （1）证明 $\hat{\mu}_1$ 和 $\hat{\mu}_2$ 都是μ的无偏估计；（2）比较估计量 $\hat{\mu}_1$ 和 $\hat{\mu}_2$ 的有效性.

八、（12 分）

1. 假设检验中，（1）若检验的结果是接受了原假设，则可能犯第几类错误；（2）若检验的结果是接受了备择假设，则可能犯第几类错误。

2. 某饮料厂生产罐装饮料，每罐的重量服从正态分布，要求其平均重量为 500 毫升，且已知标准差为 1.2 毫升。某日开工后，随机抽取 9 罐装饮料，测得样本均值 $\bar{x}=499.5$毫升。设方差不变，在显著性水平α=0.05 下，问这天罐装饮料是否符合要求？