供参考

2021 秋季 A

一、

1. $\frac{21}{64}$**；2. 2–2Φ(1)；3. 2; 4.一定；5. 0.8；6.** $\pm\sqrt{2}$**；7.** $\frac{2}{3}$**；8. 一，二；9. 不一定**

二、0.526

三、2. 1/2,1/3;　　3． $Y \sim U(0,1)$**.**

四、1. 2, $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases} 2y, & 0<y<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

$$=\begin{cases} 2z+2e^{-z}-2, & 0\le z<1 \\ 2e^{-z}, & z\ge 1 \\ 0, & 其他 \end{cases} \qquad +6$$

五、0.0228

六、4, 29

七、1. $\hat{\theta}=\frac{\bar{X}}{e-\bar{X}}$**.　　2.** $\hat{\theta}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i-1}$　**3.** $EX=\frac{e}{2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$

2021 秋季 B

一、1. $\frac{11}{12}$　**2.** e^{-2}　**3. 1/3;　4.** $\frac{1}{12}$　**5.** $1-\Phi(0.75)$**. 6. 1–α　7.** $1-\Phi(1.2)$ **或者** $\Phi(-1.2)$

二、1/2，2/5

三、 $Y \sim U(0,1)$

四、

U	0	1	2
P	6/9	2/9	1/9

五、F（1，3）

六、1. $2e^{-\frac{1}{4}}-1$**，2. 7/6，11/36，7/6，11/36，4/3，-1/36，-1/11，5/9**

七、$\hat{\theta}=\frac{1}{\overline{X}}+1$**，**$\hat{\theta}=1+\frac{1}{\overline{X}}$.**，**$\hat{R}=e^{-\frac{1}{\overline{X}}}$

假设检验例题

一、某织物强力指标 X 的均值 μ_0=21 公斤.改进工艺后生产一批织物，今从中取 30 件，测得 $\bar{x}=21.55$公斤. 假设强力指标服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，已知 σ =1.2 公斤.问在显著性水平$\alpha=0.01$下，新生产织物比过去的织物强力是否有提高？$\sqrt{30}=5.48$.

解 提出假设H_0: $\mu\le 21$, H_1: $\mu>21$.

选取检验统计量

$$Z=\frac{\overline{X}-21}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

构造拒绝域

$$z=\frac{\overline{x}-21}{\sigma/\sqrt{n}}\ge z_{\alpha}.$$

显著性水平$\alpha=0.01$,查表得$z_{0.01}=2.33$.

$$z=\frac{21.55-21}{1.2/\sqrt{30}}=2.51>2.33.$$

样本值落入拒绝域，因此，在显著性水平α= 0.01 下，拒绝 H_0，接受 H_1，认为新生产织物比过去的织物强力有提高.

不同写法

解 提出假设 H_0: $\mu\le\mu_0=21$, H_1: $\mu>\mu_0$.

选取检验统计量

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

构造拒绝域

$$z=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\ge z_\alpha.$$

显著性水平$\alpha=0.01$,查表得$z_{0.01}=2.33$. 计算得

$$z=\frac{21.55-21}{1.2/\sqrt{30}}=2.51>2.33.$$

样本值落入拒绝域，因此，在显著性水平α= 0.01 下，拒绝 H_0，接受 H_1，认为新生产织物比过去的织物强力有提高.

二、设炮弹的炮口速度（单位：米/秒）服从正态分布，某种炮弹出厂时，其炮口速度的方差为 16. 经过 5 年贮存后，随机抽取该种炮弹 9 发做试验，得样本方差为 s^2=36.

（1）问能否认为经过 5 年贮存后该种炮弹炮口速度的方差有变化，显著水平α=0.10.

（2）若希望知道经过 5 年贮存后该种炮弹炮口速度的方差是无

变化还是变大，给定原假设为炮口速度的方差无变化，备择假设为方差变大. 针对拒绝域 $W=\{S^2>26.724\}$，问该检验犯第一类错误的概率为多少？

解

（1）提出假设

$$H_0:\sigma^2=\sigma_0{}^2=16, H_1:\sigma^2\neq\sigma_0{}^2.$$

选取检验统计量

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0{}^2}.$$

构造拒绝域

$$\chi^2\leq\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\text{或}\ \chi^2\geq\chi^2_{\alpha/2}(n-1).$$

查表得$\chi^2_{0.95}(8)=2.7333$， $\chi^2_{0.05}(8)=15.507$.

计算得

$$\chi^2=\frac{(9-1)36}{16}=18.$$

样本值落入拒绝域，在显著性水平α= 0.10 下，拒绝 H_0，接受 H_1，认为经过 5 年贮存后该种炮弹炮口速度的方差有变化.

（2）

假设

$$H_0:\sigma^2=16, H_1:\sigma^2>16.$$

$$P_{\sigma^2=16}\left(\text{拒绝}H_0\right)=P_{\sigma^2=16}\left(W\right)$$

$$=P_{\sigma^2=16}\{S2>26.724\}$$

$$=P_{\sigma^2=16}\left\{\frac{(n-1)S2}{\sigma^2}>\frac{(9-1)\times 26.724}{16}\right\}$$

$= P_{\sigma^2=16}\left\{\frac{(n-1)S2}{\sigma^2} > 13.362\right\}$

$= 0.10.$ （查表得 $\chi^2_{0.10}(8) = 13.362.$）

该检验犯第一类错误的概率为 0.10.

注：C 中的三、四、五题分别为作业题（5.10，6.16，6.19），为此前问卷调查中反映较难的题目，感谢反馈问题的同学，感谢分享答案的各位同学。

5.10 设随机变量序列$X_1, X_2, \cdots, X_n$独立同分布，共同的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\alpha)}, x > \alpha, \\ 0, \quad \text{其他}, \end{cases}$$

其中$\alpha > 0$为常数，令$Y_n = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$.

证明$Y_n \xrightarrow{P} \alpha$.

分析 设$Y_n \sim f_n(x)$. 参见 133-134 页最大值和最小值的分布，可得Y_n的概率密度函数为

$$f_n(x) = \begin{cases} ne^{-n(x-\alpha)}, x > \alpha, \\ 0, \quad \text{其他}. \end{cases}$$

对任意的$\varepsilon > 0$,

$1 \geq P(|Y_n - \alpha| < \varepsilon)$

$= P(\alpha - \varepsilon < Y_n < \alpha + \varepsilon)$

$= \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} f_{Y_n}(x)dx$

$= \int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} ne^{-n(x-\alpha)}dx$

$= 1 - e^{-n\varepsilon} \to 1 (n \to \infty).$

$Y_n \xrightarrow{P} \alpha.$

6.16 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自于总体 X 的样本，且$X \sim U(a,b)$，分别求顺序统计量$X_{(1)}, X_{(n)}$的概率密度函数.

分析

$$X_{(1)} = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n),$$

$$X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n).$$

解

$$X \sim f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, a < x < b, \\ 0, \qquad \text{其他}. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \qquad x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, a \le x < b, \\ 1, \qquad x \ge b. \end{cases}$$

参见 133-134 页最小值的分布，可得$X_{(1)} = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的概率分布函数为

$$F_{min}(z) = 1 - [1 - F(z)]^n \ ,$$

故$X_{(1)}$的概率密度函数为

$$f_{min}(z) = n[1 - F(z)]^{n-1} f(z) = \begin{cases} \dfrac{n(b-z)^{n-1}}{(b-a)^n}, a < z < b, \\ 0, \qquad \text{其他}. \end{cases}$$

同理，参见 133-134 页最大值的分布，可得

$X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的概率密分布函数与概率密度函数，从略.

6.19 设$X_1, X_2, \cdots, X_9$是来自于正态总体 X 的样本，且$X \sim N(1,9)$.

求（1）$P\{\bar{X} > 2\}$. （2）$P\{X_{(1)} > 4\}, P\{X_{(n)} < 4\}$.

分析

（1） $X \sim N(1,9)$，$\mu = 1, \sigma^2 = 9$，

$$\bar{X} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} X_i \sim N(1,1),$$

$$\frac{\bar{X} - 1}{1} \sim N(0,1).$$

$$P\{\bar{X} > 2\} = P\left\{\frac{\bar{X} - 1}{1} > \frac{2 - 1}{1}\right\} = 1 - \Phi(1).$$

（2）

$$\frac{X - 1}{3} \sim N(0,1),$$

其分布函数分别为 $\Phi(x)$.

$P\{X_{(1)} > 4\} = P\{\min(X_1, X_2, \cdots, X_9) > 4\}$

$= P\{X_1 > 4, X_2 > 4, \cdots, X_9 > 4\}$

$= P\{X_1 > 4\}P\{X_2 > 4\} \cdots P\{X_9 > 4\}$ （独立性）

$= P\{X > 4\}^9$ （同分布）

$= P\left\{\frac{X-1}{3} > \frac{4-1}{3}\right\}^9$

$= [1 - \Phi(1)]^9$

$= \cdots$ （查表）