2020 级概率与数理统计试题（A 卷）

（本试卷共八个大题，满分 100 分；将每道题的答案写在答题卡对应的位置上，答题卡共 8 页，需要分别在第 1 页和第 5 页对应的位置填写座号、姓名、学院、班级、学号等信息，并用 2B 铅笔在相应的位置填涂学号；本试卷最后一页空白纸为草稿纸，可撕下；考试结束后试卷及草稿纸不用上交，答案写在草稿纸及试卷上无效）

附表：$\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(1.64)=0.95$，$\Phi(1)=0.8413$，$t_{0.05}(24)=1.7109$，$t_{0.05}(25)=1.7081$

$t_{0.025}(24)=2.4922$，$t_{0.025}(25)=2.4851$，$\chi^2_{0.05}(24)=36.415$，$\chi^2_{0.05}(25)=37.652$，$\chi^2_{0.95}(24)=13.848$

$\chi^2_{0.95}(25)=14.611$，$\chi^2_{0.025}(24)=39.364$，$\chi^2_{0.025}(25)=40.646$，$\chi^2_{0.975}(24)=14.401$，

$\chi^2_{0.975}(25)=13.120$

一、填空题（14 分）

1. 若在区间（0,1）内任取两个数，则事件“两数之和小于 $\dfrac{6}{5}$”的概率为______.

2. 设随机变量 K 服从均匀分布 $U(0,5)$. 则关于 x 的方程 $4x^2+4Kx+K+2=0$ 有实根的概率为______.

3. 如果随机向量(X,Y)服从二维正态分布，则其边缘分布______（一定是，不一定是，一定不是）正态分布.

4. 设随机变量 $X\sim\chi^2(2)$，Y 服从二项分布 $b(4,0.5)$, 且相互独立，则 $D(XY)$=______.

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是互相独立的随机变量序列，且均服从参数为 3 的泊松分布 $P(3)$，则当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i(X_i-1)$ 依概率收敛于______.

6. 设总体 X 与 Y 相互独立，$X\sim N(0,3)$, $Y\sim N(0,9)$, X_1, X_2, X_3 与 Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 分别是取自 X 与 Y 的样本, 令 $T=\dfrac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2+Y_4^2}}$，则当 c=______时，统计量 cT 服从 t 分布 $t(4)$.

7. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 和 σ^2 均未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本。令 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，$Q=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，则对假设检验问题 $H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu\neq\mu_0$，使用的检验统计量为______（用 $\bar{X},Q$ 表示）.

二、（12 分）

设甲袋有 5 个白球 6 个红球，乙袋有 10 个白球 9 个红球. 先从甲袋任取一球放入乙袋，再从乙袋任取一球.

1. 求从乙袋取得的是一个白球的概率；2. 若已知从乙袋取得的球是白球，求它是取自“从甲袋取一白球放入乙袋中”这种情况的概率.

三、(12分)

1. 设顾客在某银行窗口等待服务的时间 X(分钟)服从期望为 5 的指数分布。某顾客在窗口等待服务,若超过 10 分钟他就离开。若该顾客一个月要到银行 5 次,以 Y 表示该顾客一个月未等到服务而离开窗口的次数.

(1)求 Y 的分布律;(2)求 $P\{Y\geq 1\}$.

2. 设 $X\sim N(0,1)$,令 $Y=|X|$,求 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

四、(12分)

设随机变量(X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} ke^{-2(x+y)}, & x>0,\ y>0 \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

1. 确定常数 k 的值;2. 求 X 和 Y 的边缘密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$;3. 判断 X 和 Y 是否相互独立,并给出理由;4. 求 $Z=\min(X,Y)$ 的分布函数 $F_Z(z)$ 和密度函数 $f_Z(z)$.

五、(8分)

某厂商生产一件产品是合格品的概率为 0.8。已知生产一件合格品获利 10 元,生产一件次品亏损 5 元。问这家工厂生产 1 万件产品至少获利 69400 元的概率是多少?

六、(16分)

二维随机变量(X,Y)在区域 $G=\{(x,y)\colon |x|<y<1\}$上服从均匀分布,随机变量 V 和(X,Y)独立,且 $V\sim N(0,\frac{1}{36})$,令 $U=2X-Y$,$Z=U+V+1$,

求 1. $E(X), E(Y), D(X), D(Y), Cov(X,Y)$;2. $E(Z), D(Z)$ 和 ρ_{ZU}.

七、(12分)

设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x,\theta)=\begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0 \\ 0, & x\leq 0 \end{cases}$$

其中$\theta>0$ 为未知参数. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为取自该总体的样本,$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为相应的样本观测值.

1. 求参数θ 的矩估计; 2.求参数θ 的最大似然估计;3. 求 DX 的最大似然估计.

八、(14分)

1. 叙述假设检验中犯第一类错误和犯第二类错误的定义。

2.某零件的长度服从正态分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$,按规定其方差σ^2不得超过 0.016。现从一批零件中随机抽取 25 件测量其长度,得样本方差为 0.025. 由此判断这批零件是否符合规定?(显著性水平α=0.05).