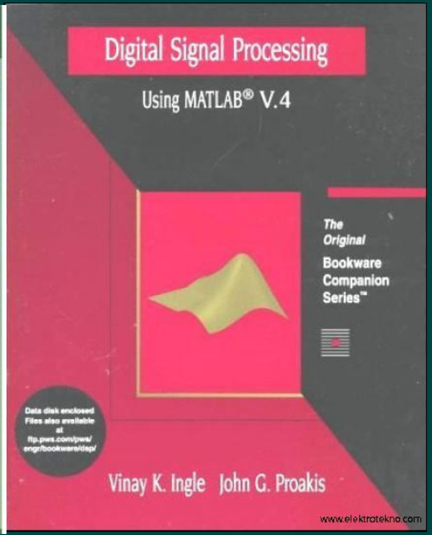
数字信号处理

任课教师：田春娜（博士）
单位：西安电子科技大学电子工程学院
Email: chnatian@xidian.edu.cn
chnatian@gmail.com

参考书籍



•高新波, 阔永红, 田春娜. 数字信号处理. 高等教育出版社, 2014.

•史林, 赵树杰. 数字信号处理. 科学出版社. 2007.

•Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer. Discrete-Time Signal Processing. 电子工业出版社, 2011.

•高西全, 丁玉美. 数字信号处理及其习题解答. 西电出版社, 2008.

•Vinay K.Ingle, John G. Proakis. Digital Signal Processing Using MATLAB®. Northeastern University, 1996.

引言

◆ 傅里叶变换的形式

时间信号 ⟷ 频率信号

周期 ⟷ 离散

非周期 ⟷ 连续

引言

- DTFT 时间域离散，频谱函数是以2π为周期的连续函数
- 离散傅立叶变换（DFT）是在时域和频域都离散的，有限长序列的DFT仍然是有限长序列
- 序列的DFT适合于用数字运算方法实现的数字信号处理，DFT存在快速算法，使得它在科学理论研究和工程技术上均有广泛的应用

第四章 离散傅里叶变换(DFT)

- **4.1 周期序列的离散傅立叶级数**
  - 4.1.1 离散傅立叶级数的定义
  - 4.1.2 离散傅立叶级数的性质
- **4.2 离散傅里叶变换**
  - 4.2.1 离散傅立叶变换的定义
  - 4.2.2 离散傅立叶变换的性质
  - 4.2.3 离散傅立叶变换的应用

4.1.1 离散傅立叶级数的定义

- 离散傅里叶级数: 可计算周期序列的**离散频率**
- 实际中大多数信号具有有限持续时间。设 $x(n)$ 是长度为N 的有限长序列，以 N 为周期对$x(n)$ 进行延拓得周期序列 $\tilde{x}(n)$，$\tilde{x}(n)$的离散傅里叶级数(DFS)为 $\tilde{X}(k)$

DFS变换对

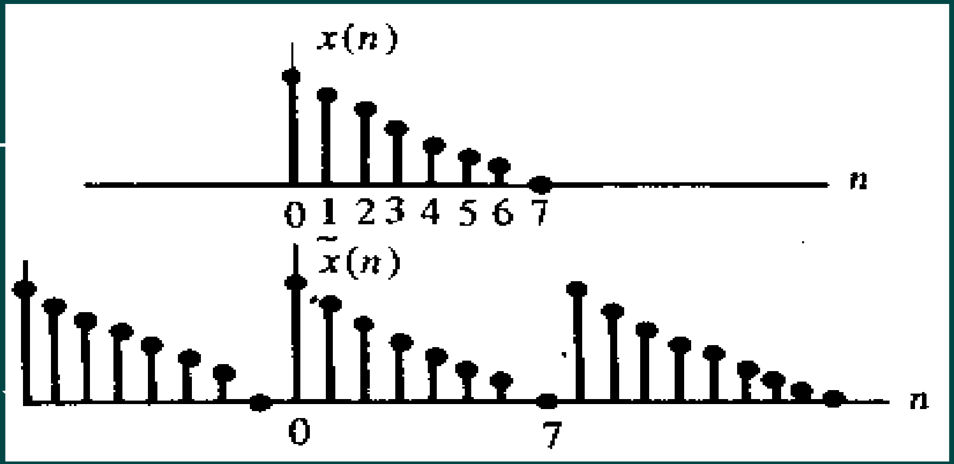
$$\tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\tilde{x}(n) = IDFS[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

4.1.1 离散傅立叶级数的定义

- $x(n)$是长度为 N 的有限长序列，$\tilde{x}(n)$是 $x(n)$ 的周期延拓

$$\tilde{x}(n)=\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n$$



- $x(n)$ 是 $\tilde{x}(n)$ 的

$$x(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)$$

- $x((n))_N$ 表示将 $x(n)$ 以 N 为周期进行周期延拓

$$\tilde{x}(n)=x((n))_N$$

4.1.1 离散傅立叶级数的定义

DFS变换对

$$\tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\tilde{x}(n) = IDFS[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

表明将周期序列分解成N次谐波，第 k 个谐波频率为

$\omega_k = \frac{2\pi}{N} k$, $k = 0, 1, 2 \ldots N\text{-}1$，幅度为 $(1/N)\tilde{X}(k)$

基波分量的频率是 $2\pi/N$，幅度是 $(1/N)\tilde{X}(1)$

4.1.1 离散傅立叶级数的定义

- 傅里叶级数，就是把序列表示成不同频率复指数序列之和的形式，这些复指数序列的频率为该周期序列基频$2\pi/N$的整数倍

k次谐波： $e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ l是整数

$k+lN$ 次谐波 $e^{j\frac{2\pi}{N}(k+lN)n}=e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ ，具有周期性

4.1.1 离散傅立叶级数的定义

DFS变换对

$$\tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\tilde{x}(n) = IDFS[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

一个周期序列可以用其DFS表示它的频谱分布规律

主值区间

$$x(n) = \tilde{x}(n) R_N(n)$$

$$X(k) = \tilde{X}(k) R_N(k)$$

4.1.1 离散傅立叶级数的定义

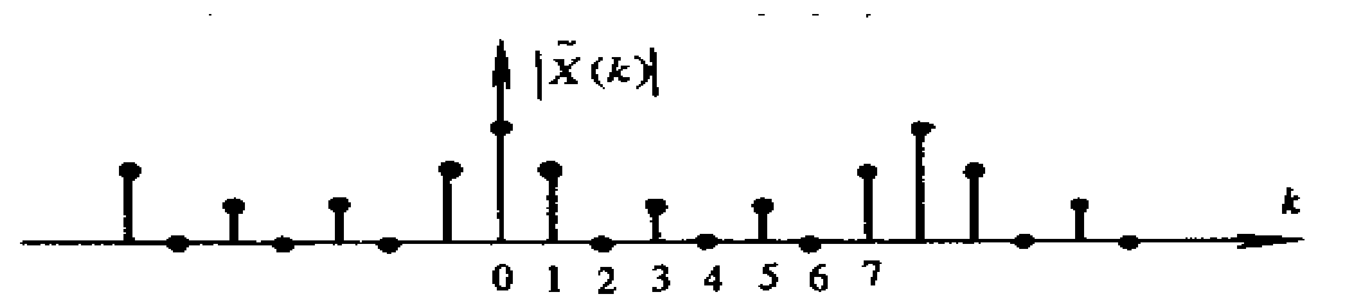
为方便表示，将因子$e^{-j(2\pi/N)}$ 表示为符号W_N

$$W_N = e^{-j(2\pi/N)}$$

4.1.1 离散傅立叶级数的定义

例 4.1.1设$x(n)=R_4(n)$，将$x(n)$以$N=8$为周期，进行周期延拓，得到如图所示的周期序列 $\tilde{x}(n)$，周期为8， 求$\tilde{x}(n)$的DFS

解:



$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{7}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{8}kn}=\sum_{n=0}^{3}e^{-j\frac{\pi}{4}kn}=\frac{1-e^{-j\frac{\pi}{4}k\cdot 4}}{1-e^{-j\frac{\pi}{4}k}}$$

$$=\frac{1-e^{-j\pi k}}{1-e^{-j\frac{\pi}{4}k}}=\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}k}\left(e^{j\frac{\pi}{2}k}-e^{-j\frac{\pi}{2}k}\right)}{e^{-j\frac{\pi}{8}k}\left(e^{j\frac{\pi}{8}k}-e^{-j\frac{\pi}{8}k}\right)}=e^{-j\frac{3}{8}\pi k}\frac{\sin\frac{\pi}{2}k}{\sin\frac{\pi}{8}k}$$

离散傅立叶级数与Z变换的关系

Z变换

$$x(n)=\begin{cases}Nonzero, & 0\le n\le N-1\\ 0, & elsewhere\end{cases}\qquad X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}$$

DFS变换

$$x(n)=\begin{cases}\tilde{x}(n), & 0\le n\le N-1\\ 0, & elsewhere\end{cases}$$

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\left[e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right]^{-n}$$

结论 $\tilde{X}(k)=X(z)\big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$

离散傅立叶级数与Z变换的关系

结论 $\tilde{X}(k) = X(z)\big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$

DFS $\tilde{X}(k)$等价于在 Z 变换 $X(z)$ 的单位圆上进行N 次等间隔采样的结果

离散傅立叶级数与DTFT的关系

DTFT

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jwn}$$

DFS变换

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\left[e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\right]^n$$

结论 $\tilde{X}(k) = X(e^{jw})|_{w=\frac{2\pi}{N}k}$

离散傅立叶级数与DTFT的关系

结论 $\tilde{X}(k) = X(e^{jw})|_{w=\frac{2\pi}{N}k}$

$$Let \quad w_1 = \frac{2\pi}{N},\ and\ w_k = \frac{2\pi}{N}k = kw_1$$

$$\tilde{X}(k) = X(e^{jw_k}) = X(e^{jkw_1})$$

DFS 等价于对 DTFT变换的结果以w_1 为间隔进行采样的结果

w_1即为频域的采样间隔，也被称为频率分辨率，因为它能反映频率取样点之间的紧密程度

第四章 离散傅里叶变换(DFT)

- **4.1 周期序列的离散傅立叶级数**
  - 4.1.1 离散傅立叶级数的定义
  - 4.1.2 离散傅立叶级数的性质
- **4.2 离散傅里叶变换**
  - 4.2.1 离散傅立叶变换的定义
  - 4.2.2 离散傅立叶变换的性质
  - 4.2.3 离散傅立叶变换的应用

4.1.2 离散傅立叶级数的性质

1. 线性

$$DFS[a\tilde{x}(n)+b\tilde{y}(n)]=a\tilde{X}(k)+b\tilde{Y}(k)$$

时域、频域线性组合的序列也都是以N为周期

2. 序列的移位

$$DFS[\tilde{x}(n+n_0)]=W_N^{-kn_0}\tilde{X}(k)$$

$$IDFS[\tilde{X}(k+l)]=W_N^{ln}\tilde{x}(n)$$

4.1.2 离散傅立叶级数的性质

3. 共轭对称性

$$DFS[\tilde{x}^*(n)] = \tilde{X}^*(-k) = \tilde{X}^*(N-k)$$

$$DFS[\tilde{x}^*(-n)] = \tilde{X}^*(k)$$

$$DFS[\tilde{x}_r(n)] = \frac{1}{2}[\tilde{X}(k) + \tilde{X}^*(N-k)] = \tilde{X}_{ep}(k)$$

$$DFS[j\tilde{x}_i(n)] = \frac{1}{2}[\tilde{X}(k) - \tilde{X}^*(N-k)] = \tilde{X}_{op}(k)$$

对比DTFT的共轭对称性

$$DTFT[x_r(n)] = X_e(e^{j\omega})$$

$$DTFT[jx_i(n)] = X_o(e^{j\omega})$$

4.1.2 离散傅立叶级数的性质

4. 圆周卷积定理

如果 $\tilde{F}(k)=\tilde{X}(k)\tilde{Y}(k)$ 周期都是N

$$\tilde{f}(n)=IDFS[\tilde{F}(k)]=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}(m)\tilde{y}(n-m)$$

和有限长度的非周期序列的线性卷积不同，这里

$\tilde{x}(m)$ $\tilde{y}(n-m)$都是变量m的周期函数，周期为N。卷积过程仅限于一个周期内，即m＝0～N-1

卷积结果 $\tilde{f}(n)$仍然是周期为N的周期序列

4.1.2 离散傅立叶级数的性质

圆周卷积满足交换律

$$\tilde{f}(n)=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{y}(m)\tilde{x}(n-m)$$

$$DFS[\tilde{x}(n)\tilde{y}(n)]=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{X}(l)\tilde{Y}(k-l)$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{Y}(l)\tilde{X}(k-l)$$

周期 N

第四章 离散傅里叶变换(DFT)

- **4.1 周期序列的离散傅立叶级数**
  - 4.1.1 离散傅立叶级数的定义
  - 4.1.2 离散傅立叶级数的性质
- **4.2 离散傅里叶变换**
  - 4.2.1 离散傅立叶变换的定义
  - 4.2.2 离散傅立叶变换的性质
  - 4.2.3 离散傅立叶变换的应用

4.2.1 离散傅里叶变换(DFT)的定义

- 离散傅里叶级数提供了一种计算离散频率点上序列频谱的公式，但针对的序列是周期序列

- 实际中大多数信号具有有限持续时间。设$x(n)$是长度为N的有限长序列，如果以 N 为周期对$x(n)$进行延拓，将获得周期为 N 的周期序列 $\tilde{x}(n)$ ，进而得到离散傅里叶级数 $\tilde{X}(k)$

$x(n)$ **周期延拓** $\tilde{x}(n)=x((n))_N$ **DFS变换** $\tilde{X}(k)$

4.2.1 离散傅里叶变换(DFT)的定义

- 由于 $x(n)$是 $\tilde{x}(n)$ 的主值序列，所以取 $\tilde{X}(k)$ 的主值序列 $X(k)$ 作为$x(n)$ 的频谱。这就产生了一种新的变换，称为有限长序列的离散傅里叶变换DFT

$x(n)$ **周期延拓** $\tilde{x}(n)=x((n))_N$ **DFS变换** $\tilde{X}(k)$

取主值

$$X(k)=\tilde{X}(k)R_N(k)$$

$$n=0,1,\cdots,N-1$$

$X(k)$ 实质上是 $x(n)$ 的周期延拓序列 $\tilde{x}(n)$ 的频谱特性

4.2.1 离散傅里叶变换(DFT)的定义

周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的DFS变换对：

$$\tilde{X}(k)=DFS[\tilde{x}(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{kn}$$

$$\tilde{x}(n)=IDFS[\tilde{X}(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-kn}$$

有限长序列$x(n)$的DFT

$$X(k)=DFT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn},\ k=0,1,\ldots,N-1 \qquad (4.2.1)$$

$$x(n)=IDFT[X(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn},\ n=0,1,\ldots,N-1 \qquad (4.2.2)$$

$W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ ，N 称为离散傅里叶变换的变换区间长度

4.2.1 离散傅里叶变换(DFT)的定义

例4.2.1： 试求有限长序列 $x(n)=\begin{cases}\cos(\frac{n\pi}{6}) & 0\le n\le 11\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ 的12点离散傅里叶变换。

解： 由题意知变换区域 N=12, 则

$$X(k)=\sum_{n=0}^{11}x(n)W_{12}^{nk},k=0,1,2,\cdots,11$$

$$X(k)=\begin{cases}6 & k=1,11\\ 0 & \text{其它}k\end{cases}$$

4.2.1 离散傅里叶变换(DFT)的定义

例 4.2.2　$x(n)=R_4(n)$， 求$x(n)$的8点和16点DFT.

解　设变换区间N=8，则

$$X(k)=\sum_{n=0}^{7}x(n)W_8^{kn}=\sum_{n=0}^{3}e^{-j\frac{2\pi}{8}kn}$$

$$=e^{-j\frac{3}{8}k\pi}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}k)}{\sin(\frac{\pi}{8}k)},$$

$k=0,1,\cdots,7$

设变换区间N=16， 则

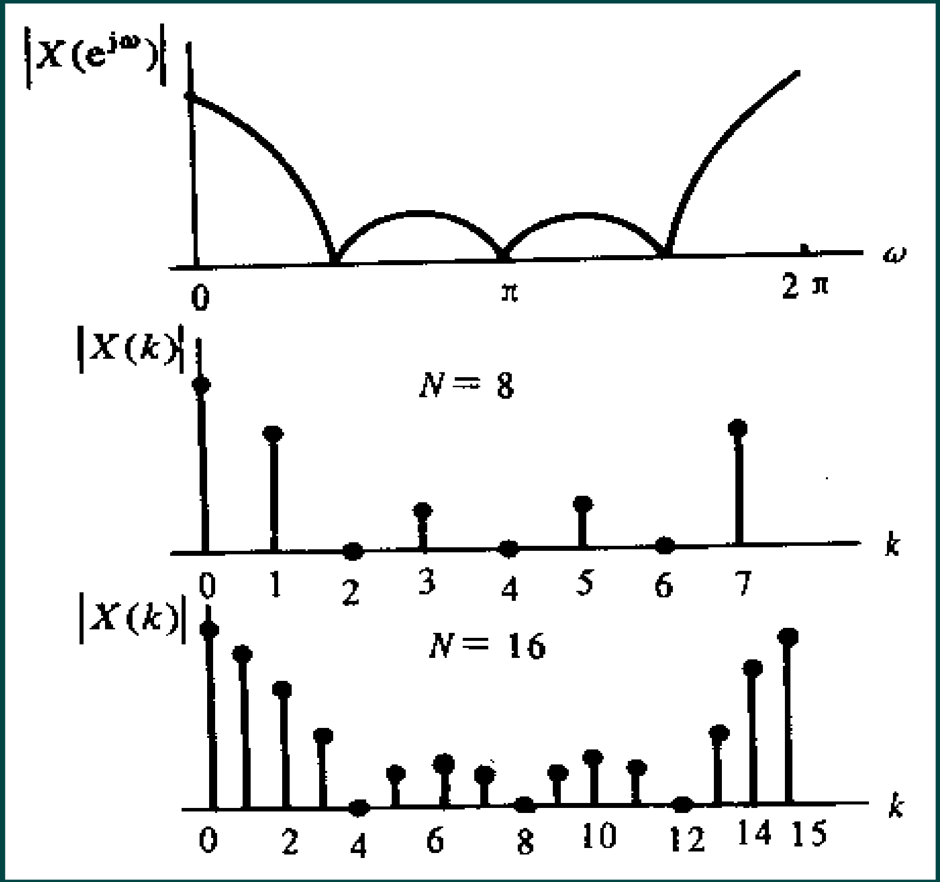
$$X(k)=\sum_{n=0}^{15}x(n)W_{16}^{kn}=\sum_{n=0}^{3}e^{-j\frac{2\pi}{16}kn}$$

$$=e^{-j\frac{3}{16}k\pi}\frac{\sin(\frac{\pi}{4}k)}{\sin(\frac{\pi}{16}k)},$$

$k=0,1,\cdots,15$

物理意义？

4.2.1 离散傅里叶变换(DFT)的定义



$X(k)$与$X(e^{j\omega})$的关系

$$Let \quad w_1 = \frac{2\pi}{N},$$

$$w_k = kw_1$$

$$\tilde{X}(k) = X(e^{jkw_1})$$

DFT 等价于对 DTFT变换的结果以w_1 为间隔进行采样的结果

4.2.1 离散傅里叶变换(DFT)的定义

DFT的矩阵表示

设

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}=\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix}$$

DFT矩阵方程可写成 $X = W_N x$

其中

$$\mathbf{W}_N=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{(N-1)} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & & & & \\ 1 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

对应变量k

每一行中
$n = 0 \sim N-1$

DFT

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn},$$

$k=0, 1, \ldots, N-1$

4.2.1 离散傅里叶变换(DFT)的定义

IDFT的矩阵表示

$$x = (W_N)^{-1} X$$

IDFT

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn},$$

n=0, 1, …, N-1

其中

$$\mathbf{W}_N^{-1} = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & W_N^{-2} & \cdots & W_N^{-(N-1)} \\ 1 & W_N^{-2} & W_N^{-4} & \cdots & W_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & & & & \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & W_N^{-2(N-1)} & \cdots & W_N^{-(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

对应变量n

每一行中k=0~N-1

长度为N的有限长序列$x(n)$，可以通过在序列后补零增加其长度，因此对$x(n)$可以做N点DFT，也可以作大于N点的DFT。即变换区间长度等于或大于序列长度

DFT和Z变换及DTFT的关系

- 有限长序列存在Z变换，DTFT和DFT，三种变换都与原序列存在一一对应关系

- 三种变换之间必然有联系

DFT和Z变换及DTFT的关系

设序列$x(n)$的长度为N，

ZT $X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}$ $\qquad 0<|z|\le\infty$

DFT $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\left[e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right]^{-n},\qquad 0\le k\le N\text{-}1$

DTFT $X(e^{jw})=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jwn}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)(e^{jw})^{-n}$

比较上式，可得如下结论

DFT和ZT的关系 $X(k)=X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}},\quad 0\le k\le N\text{-}1\quad (4.2.3)$

DFT和DTFT的关系 $X(k)=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k},\quad 0\le k\le N\text{-}1\quad (4.2.4)$

DFT和Z变换及DTFT的关系

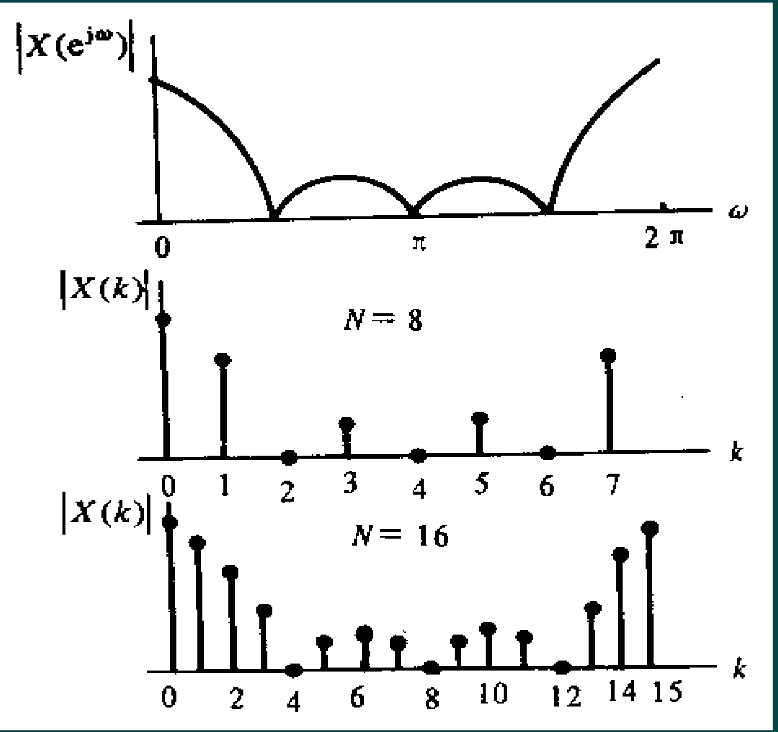
DFT和ZT的关系 $X(k)=X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}, \quad 0\le k\le N\text{-}1 \quad (4.2.3)$

DFT和DTFT的关系 $X(k)=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}, \quad 0\le k\le N\text{-}1 \quad (4.2.4)$

- 序列的N点DFT是序列的Z变换在单位圆上的N点等间隔采样
- 序列的N点DFT是序列的离散时间傅里叶变换(DTFT)在[0，2π)区间上的N点等间隔采样
- 序列的DFT是**对序列频谱函数的等间隔离散抽取**，称为**频域采样**。这就是DFT的物理意义

DFT和Z变换及DTFT的关系

- DFT变换区间长度N的不同，表示在频域采样的采样间隔和采样点数不同，因而DFT的变换结果就不同



- DFT的变换区间长度要等于或大于有限长序列长度。否则会改变序列的频谱特性

DFT和Z变换及DTFT的关系

- 长度为N的有限长序列的Z变换在单位圆上的N个等间隔采样值确定后，Z变换在整个z平面上的取值也就随之确定

$$X(z)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\phi_k(z) \qquad \phi_k(z)=\frac{1}{N}\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

- 序列的Z变换和DTFT可以由序列的DFT确定

$$X(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\phi_k(\omega) \qquad \phi_k(\omega)=\frac{1}{N}\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j(\omega-2\pi k/N)}}$$

可以由N个频率点上的离散值，求得频率域内所有频率点上的信号频谱函数$X(e^{j\omega})$

频域采样定理

如果序列$x(n)$的长度为M，则只有当频域采样点数$N \geq M$时，才有

$$x_N(n)=\mathrm{IDFT}[X(k)]=x(n)$$

即可由频域采样$X(k)$恢复原序列$x(n)$，否则产生**时域混叠现象**

4.2.1 离散傅里叶变换(DFT)的定义

下面推导用频域采样**$X(k)$**表示**$X(z)$**的内插公式和内插函数

设序列**$x(n)$**长度为**M**，在频域0~2**π**之间等间隔采样**N**点， **$N\geq M$**，则有

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}$$

式中 $$x(n)=IDFT[X(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}$$

对比 $$X(k)=X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}},k=0,1,2,\cdots,N-1$$

代入$X(z)$的表示式中得

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}]z^{-n}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{-kn}z^{-n}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{1-W_N^{-kN}z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

4.2.1 离散傅里叶变换(DFT)的定义

$$X(z)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{1-W_N^{-kN}z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

上式中$W_N^{-kN}=1$，因此

$$X(z)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}} \tag{4.2.5}$$

令

$$\varphi_k(z)=\frac{1}{N}\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}} \tag{4.2.6}$$

则

$$X(z)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\varphi_k(z) \tag{4.2.7}$$

式(4.2.7)称为用$X(k)$表示$X(z)$的<u>内插公式</u>，$\varphi_k(z)$称为<u>内插函数</u>

4.2.1 离散傅里叶变换(DFT)的定义

当$z=e^{jw}$时，上式就成为$x(n)$的DTFT $X(e^{jw})$的内插函数和内插公式，即

$$\varphi_k(z)=\frac{1}{N}\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

$$X(z)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\varphi_k(z)$$

$$\varphi_k(\omega)=\frac{1}{N}\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j(\omega-2\pi k/N)}}$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\varphi_k(\omega)$$

进一步化简可得

$$\varphi(\omega)=\frac{1}{N}\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega(\frac{N-1}{2})}$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\varphi(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$$

4.2.2 离散傅里叶变换的性质

DFT隐含的周期性

$$X(k)=DFT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn},\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ N\text{-}1 \qquad (4.2.1)$$

$$x(n)=IDFT[X(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn},\ n=0,\ 1,\ \ldots,\ N\text{-}1 \qquad (4.2.2)$$

DFT变换对中，$x(n)$与$X(k)$均为有限长序列，W_N^{kn}具有周期性，

$$W_N^k=W_N^{(k+mN)},\quad k,m,N\ \text{均为整数}$$

使得对任意整数m，总有 $X(k+mN)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{(k+mN)n}$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}=X(k)$$

所以$X(k)$具有隐含的周期性，且周期均为N。同理可证明(4.2.2)

式中 $x(n+mN)=x(n)$

4.2.2 离散傅里叶变换的性质

线性性质

如果x_1(n)和$x_2(n)$是两个有限长序列，长度分别为N_1和N_2

$$y(n)=ax_1(n)+bx_2(n)$$

式中a、b为常数，取$N=max$［N_1，N_2］，则$y(n)$的N点DFT为

$$Y(k)=\mathrm{DFT}[y(n)] = aX_1(k) +bX_2(k),\ 0\le k \le N\text{-}1$$

其中$X_1(k)$和$X_2(k)$分别为$x_1(n)$和$x_2(n)$的N点DFT

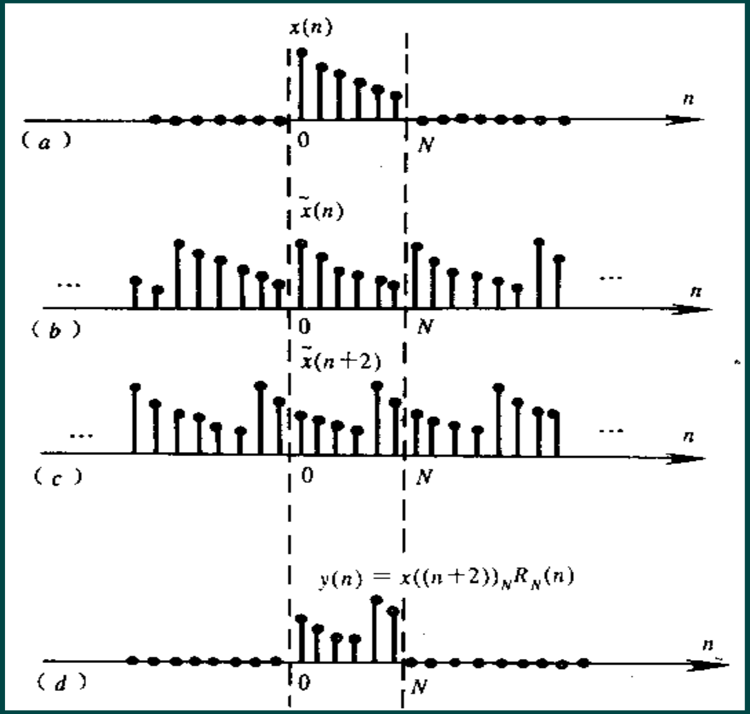
4.2.2 离散傅里叶变换的性质

循环移位性质

1. 序列的循环移位

设$x(n)$为有限长序列，长度为N，则$x(n)$的循环移位定义为

$$y(n)=x((n+m))_N R_N(N)$$



4.2.2 离散傅里叶变换的性质

2. 时域循环移位定理

设$x(n)$是长度为N的有限长序列，$y(n)$为$x(n)$的循环移位，即

$$y(n)=x((n+m))_N R_N(n)$$

则

$$Y(k)=\mathrm{DFT}[y(n)]=W_N^{-km}X(k)$$

其中$X(k)=\mathrm{DFT}［x(n)］$， $0\leq k\leq N-1$

4.2.2 离散傅里叶变换的性质

3. 频域循环移位定理

如果

$X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]$，$0\le k\le N-1$

$Y(k)=X((k+l))_N R_N(k)$

则 $y(n)=\mathrm{IDFT}[Y(k)]=W_N^{nl}x(n)$

直接对$Y(k)$进行IDFT即得证

循环卷积定理

有限长序列$x_1(n)$和$x_2(n)$，长度分别为N_1和N_2，$N=max$［N_1, N_2］。$x_1(n)$和$x_2(n)$的N点DFT分别为：

$$X_1(k)=\mathrm{DFT}[x_1(n)]$$

$$X_2(k)=\mathrm{DFT}[x_2(n)]$$

如果 $X(k)=X_1(k)\cdot X_2(k)$

则

$$x(n)=IDFT[X(k)]=\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2((n-m))_N R_N(n)$$

或

$$\boxed{x(n)=x_1(n)\otimes x_2(n)}$$

循环卷积的计算

对$x_2(m)$循环翻转，循环移位

与$x_1(m)$对应项相乘相加

$$x(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N R_N(n) \qquad (4.2.8)$$

循环卷积满足交换律

$$x_1(n) \otimes x_2(n) = x_2(n) \otimes x_1(n)$$

举例

设 $x_1(n)=\{1,2,2,1\}$　$x_2(n),=\{1,-1,-1,1\}$

请计算:

7点圆周卷积

6点圆周卷积

5点圆周卷积

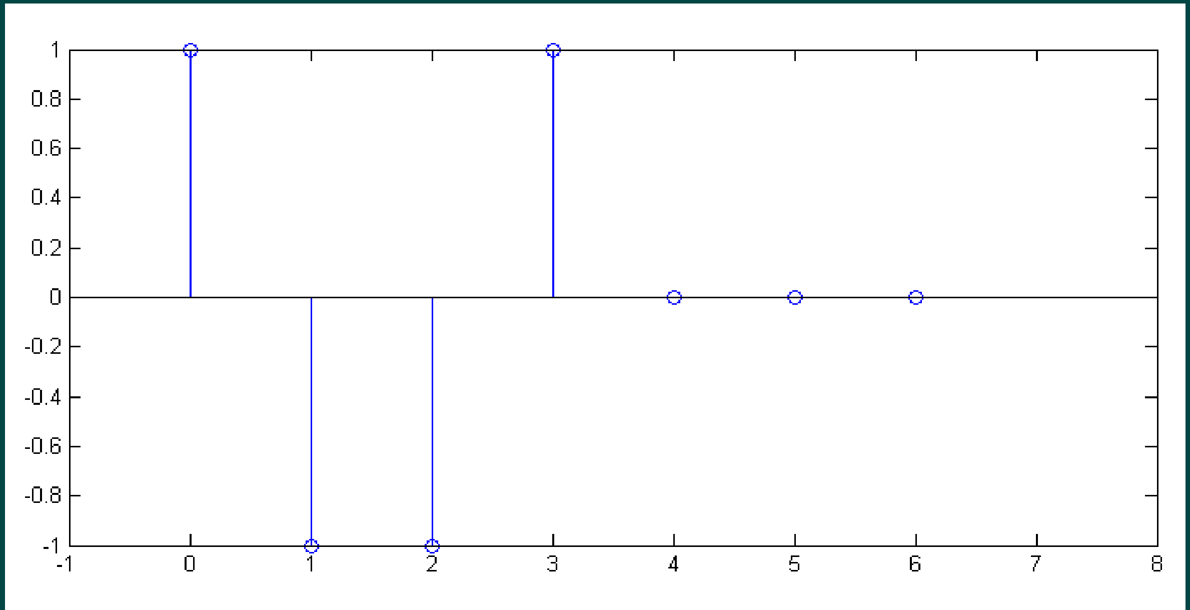
4点圆周卷积

线性卷积结果

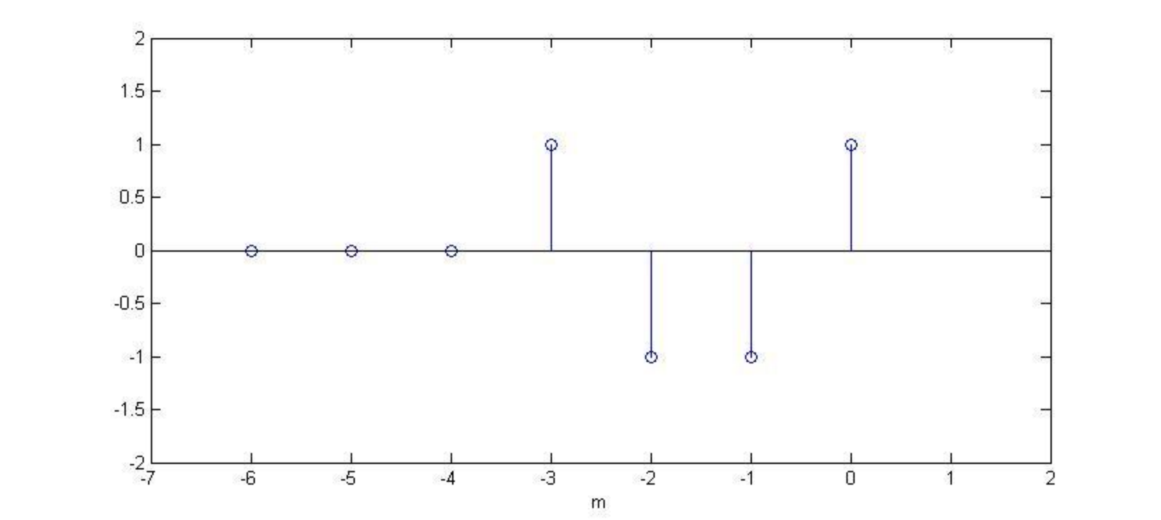
$$x(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$$
$$= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N R_N(n)$$

- $x_1(n)$和$x_2(n)$均是4点序列，将其扩展为7点序列：
- $x_1(m)$={1,2,2,1,0,0,0}，$x_2(m)$={1,-1,-1,1,0,0,0}

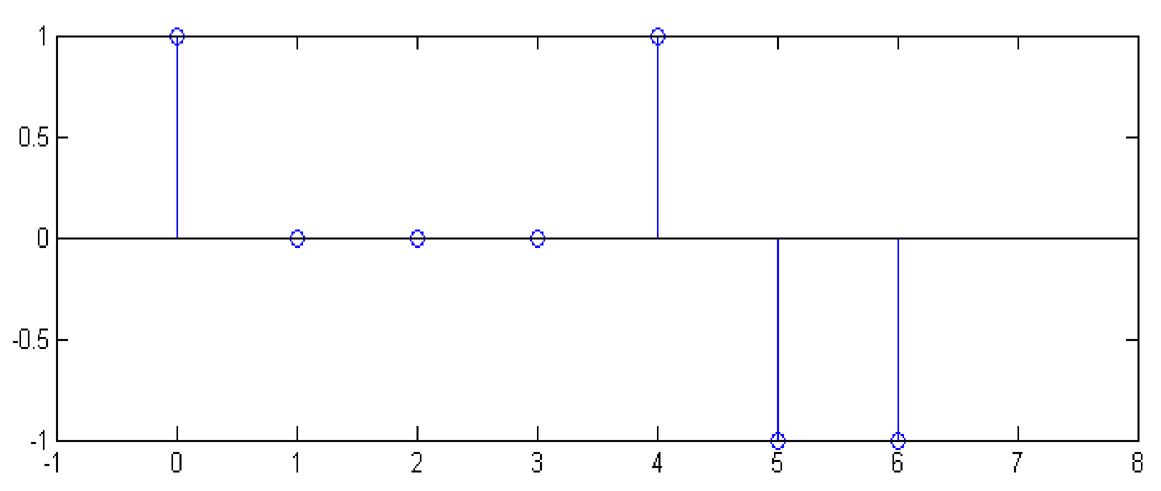
$x_2(m)$



将$x_2(m)$进行翻转得$x_2(-m)$

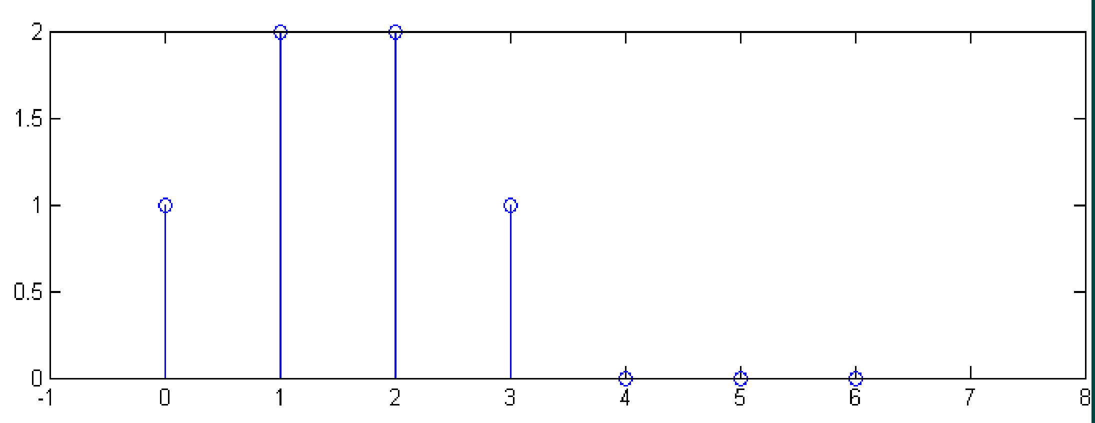


对$x_2(-m)$循环后取主值得$x_2((-m))_N R_N(n)$

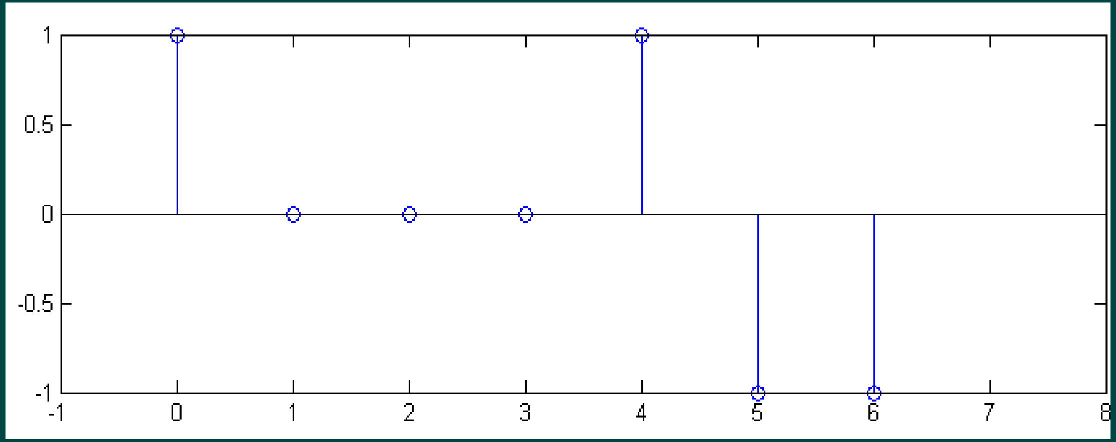


$$x(0)=\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2((-m))_N R_N(n)=1$$

$x_1(m)$



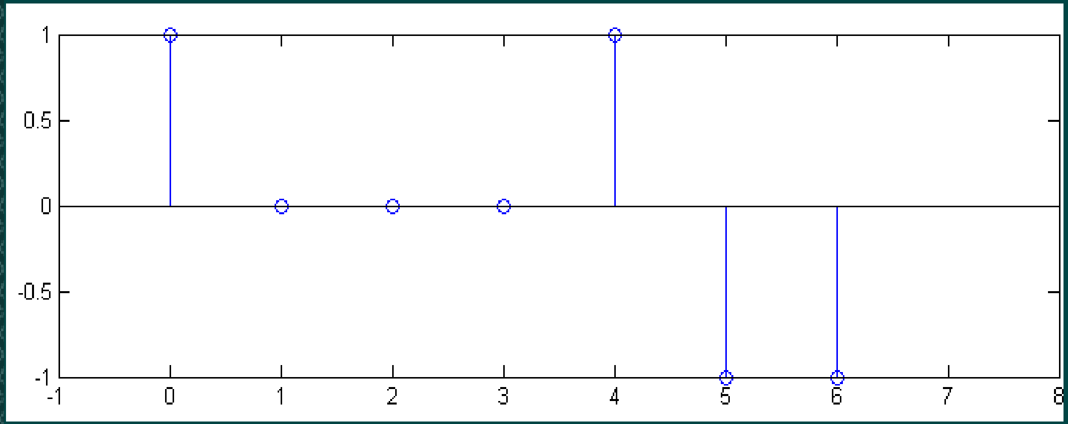
$x_2((-m))_N R_N(n)$



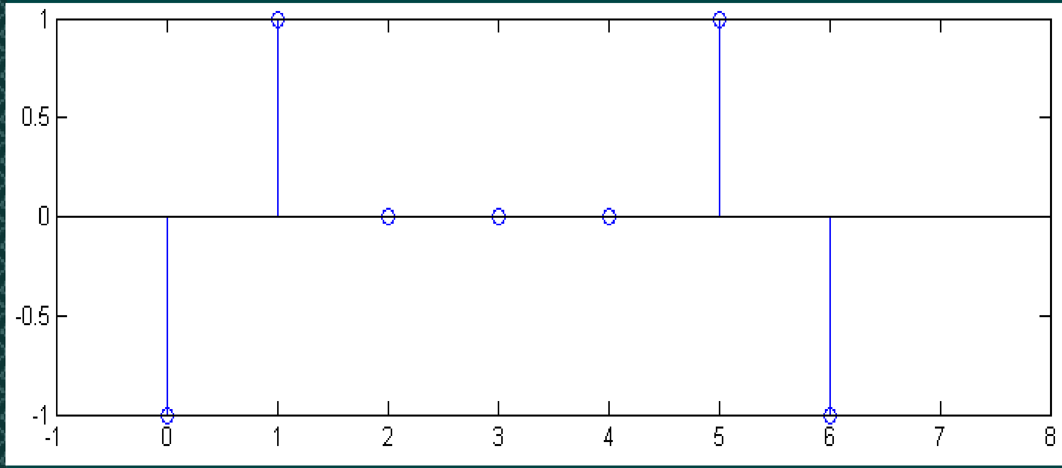
$$x(1)=\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2((1-m))_N R_N(n)$$

$$=-1+2$$

$$=1$$



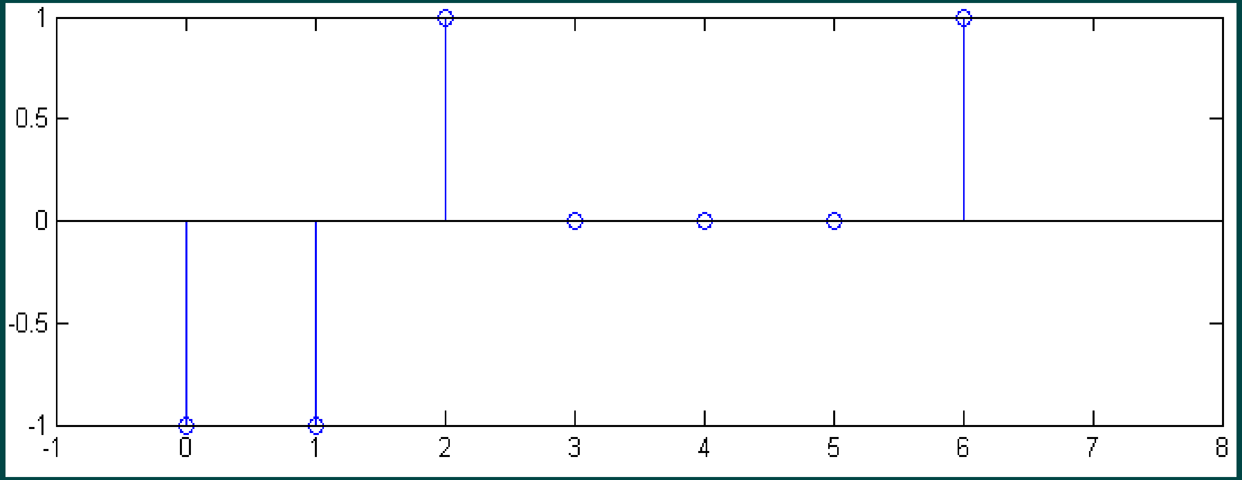
$x_2((-m))_N R_N(n)$



$x_2((1\text{-}m))_N R_N(n)$由$x_2((\text{-}m))_N R_N(n)$循环右移一位得到

$$x(2)=\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2((2-m))_N R_N(n)$$
$$=-1-2+2$$
$$=-1$$

$x_2((2\text{-}m))_N R_N(n)$由$x_2((\text{-}m))_N R_N(n)$循环右移两位得到



……

7点圆周卷积{1，1，-1，-2，-1，1，1}

结果

设 $x_1(n)=\{1,2,2,1\}$ $x_2(n),=\{1,-1,-1,1\}$

计算:

7点圆周卷积: { 1, 1, -1, -2, -1, 1, 1 }

6点圆周卷积: { 2, 1, -1, -2, -1, 1 }

5点圆周卷积: { 2, 2, -1, -2, -1 }

4点圆周卷积: { 0, 2, 0, -2}

线性卷积结果: { 1, 1, -1, -2, -1, 1, 1 }

循环卷积与线性卷积的比较

$$x_3(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m) \qquad (4.2.9)$$

- 将$x_1(n)$和$x_2(n)$用$x_1(m)$和$x_2(m)$表示，并将$x_2(m)$ 进行**翻转**，形成$x_2(-m)$
- 将$x_2(-m)$**移位**n，得到$x_2(n-m)$

  $n>0$时，序列右移

  $n<0$时，序列左移
- 将$x_1(m)$和$x_2(n-m)$对应项**相乘相加**得到$x_3(n)$

循环卷积与线性卷积的关系

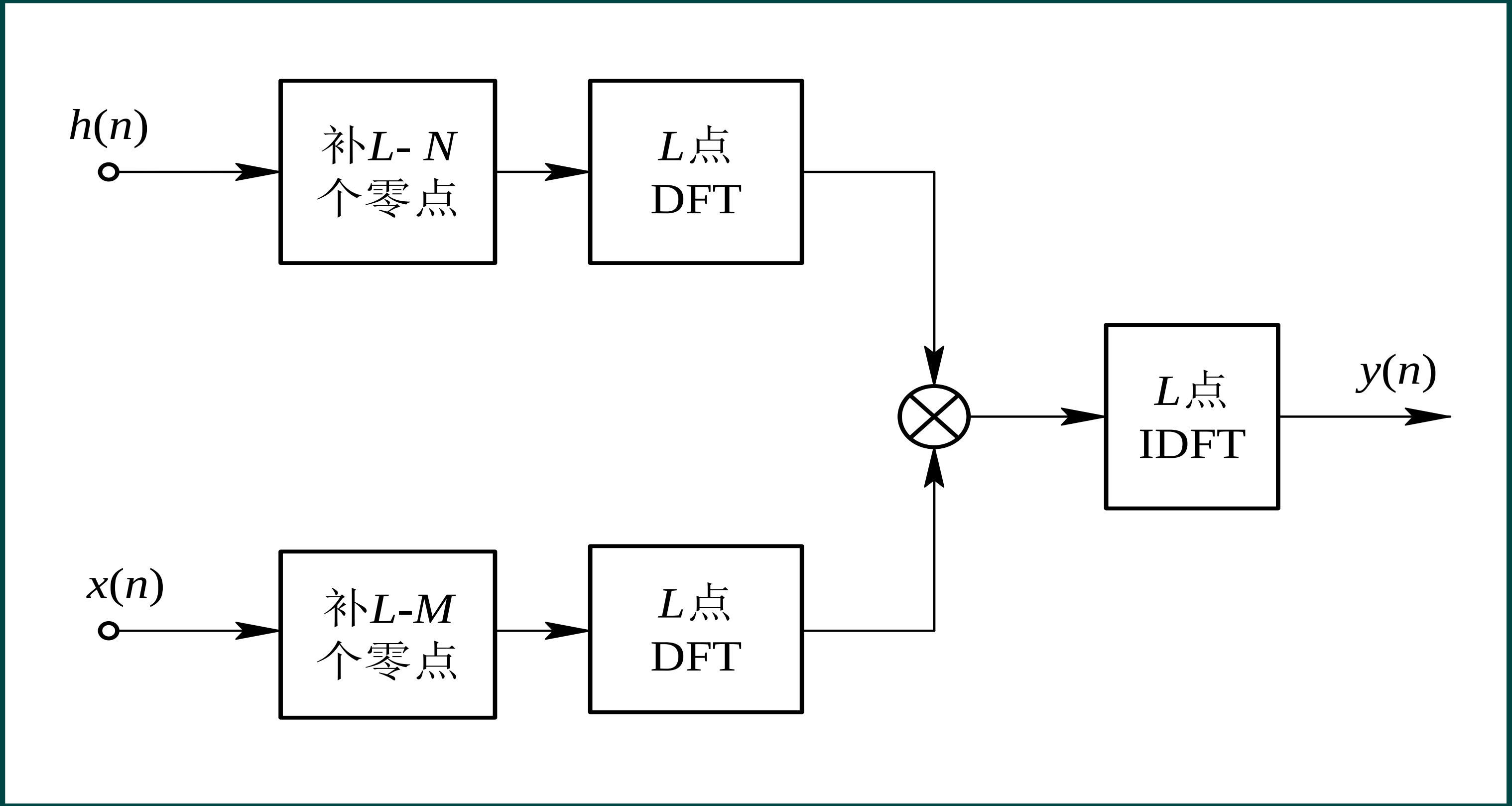
$$x_3(n) = x_1(n) * x_2(n)$$

$$x_4(n) = x_1(n) \otimes x_2(n) = \left[\sum_{r=-\infty}^{+\infty} x_3(n - rN)\right] R_N(n)$$

循环卷积可以看做是混叠后的线性卷积

循环卷积与线性卷积的关系

- 两个长度为N的序列的循环卷积长度仍为N
- 线性卷积的长度为 N_1+N_2-1
- 当 $N \geq N_1 + N_2 - 1$ 时，二者相等
- 当$N < N_1 + N_2 - 1$时，循环卷积为线性卷积混叠后的结果



用DFT计算线性卷积框图，也称为快速卷积

4.2.2 离散傅里叶变换的性质

4. 复共轭序列的DFT

设$x^*(n)$是$x(n)$的复共轭序列， 长度为N

$$X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]$$

则

$$\mathrm{DFT}[x^*(n)]=X^*(N-k),\quad 0\le k\le N-1 \qquad (4.2.10)$$

且

$$X(N)=X(0)$$

证明：根据DFT的唯一性，只要证明(4.2.10)式右边等于左边即可

$$
\begin{aligned}
X^*(N-k) &= [\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(N-k)n}]^* \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^{-(N-k)n} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^{kn} \\
&= \mathrm{DFT}[x^*(n)]
\end{aligned}
$$

又由$X(k)$的隐含周期性有$X(N)=X(0)$

用同样的方法可以证明

$\mathrm{DFT}［x^*(N-n)］=X^*(k)$

4.2.2 离散傅里叶变换的性质

5. DFT的共轭对称性

1. 有限长共轭对称序列和共轭反对称序列

为了区别于傅里叶变换中所定义的共轭对称(或共轭反对称)序列，下式中用$x_{ep}(n)$和$x_{op}(n)$分别表示有限长共轭对称序列和共轭反对称序列

$$x_{ep}(n) = x^*_{ep}(N-n), \quad 0\le n\le N-1 \quad (4.2.11)$$

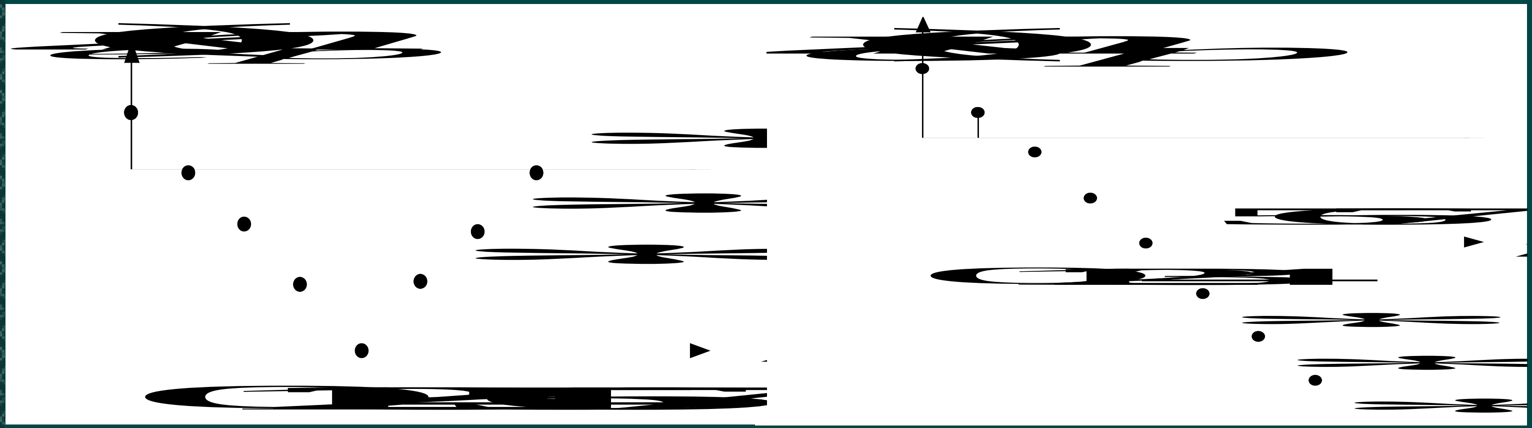
$$x_{op}(n) = -x^*_{op}(N-n), \quad 0\le n\le N-1 \quad (4.2.12)$$

当N为偶数时，将上式中的n换成 $\boxed{(\frac{N}{2}-n)}$ 可得到

$$x_{ep}(\frac{N}{2}-n)=x^{*}{}_{ep}(\frac{N}{2}+n),\qquad 0\le n\le\frac{N}{2}-1$$

$$x_{op}(\frac{N}{2}-n)=-x^{*}{}_{op}(\frac{N}{2}+n),\qquad 0\le n\le\frac{N}{2}-1$$

上式更清楚地说明了有限长序列共轭对称性的含义，如下图所示



共轭对称与共轭反对称序列示意图（*表示对应点为序列取共轭后的值）

共轭对称序列和有限长共轭对称序列的关系？

共轭反对称序列和有限长共轭反对称序列的关系？

由 $\tilde{x}(n)=\tilde{x}_e(n)+\tilde{x}_o(n)$

$\Rightarrow x(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)=[\tilde{x}_e(n)+\tilde{x}_o(n)]R_N(n)$

其中

$\tilde{x}_e^*(N-n)=\tilde{x}_e^*(-n)=\tilde{x}_e(n)\Rightarrow \tilde{x}_e^*(N-n)R_N(n)=\tilde{x}_e(n)R_N(n)$

$\tilde{x}_o^*(N-n)=\tilde{x}_o^*(-n)=-\tilde{x}_o(n)\Rightarrow \tilde{x}_o^*(N-n)R_N(n)=-\tilde{x}_o(n)R_N(n)$

所以

$$x_{ep}(n)=\tilde{x}_e(n)R_N(n)$$

$$x_{op}(n)=\tilde{x}_o(n)R_N(n)$$

任何有限长序列$x(n)$都可以表示成其共轭对称分量和共轭反对称分量之和， 即

$$x(n)=x_{ep}(n)+x_{op}(n),\ 0\le n\le N-1 \qquad (4.2.13)$$

将上式中的n换成$N-n$， 并取复共轭, 再将(4.2.11)式和(4.2.12)式代入得到

$$x^*(N-n)=x^*_{ep}(N-n)+x^*_{op}(N-n)$$

$$=x_{ep}(n)-x_{op}(n) \qquad (4.2.14)$$

$$x_{ep}(n)=1/2\left[x(n)+x^*(N-n)\right] \qquad (4.2.15)$$

$$x_{op}(n)=1/2\left[x(n)-x^*(N-n)\right] \qquad (4.2.16)$$

DFT的共轭对称性

（1）如果$x(n)=x_r(n)+jx_i(n)$

其中

$$x_r(n)=Re[x(n)]=1/2[x(n)+x^*(n)] \quad (4.2.17)$$

$$jx_i(\mathrm{n})=jIm[x(n)]=1/2[x(n)-x^*(n)] \quad (4.2.18)$$

由式(4.2.17) 和(4.2.10)DFT$[x^*(n)]=X^*(N-k), 0\le k\le N-1$可得

$$\underline{\mathrm{DFT}[x_r(n)]}=1/2\,\mathrm{DFT}[x(n)+x^*(n)]$$

$$=1/2[X(k)+X^*(N-k)]$$

$$=\underline{X_{ep}(k)} \quad (4.2.19)$$

由(4.2.10)式和(4.2.18)式得

$$\underline{\mathrm{DFT}[jx_i(n)]}=1/2\mathrm{DFT}[x(n)-x^*(n)]$$

$$=1/2[X(k)-X^*(N-k)]$$

$$=\underline{X_{op}(k)} \qquad (4.2.20)$$

由DFT的线性性质即可得

$$X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]=X_{ep}(k)+X_{op}(k) \qquad (4.2.21)$$

其中

$X_{ep}(k)=\mathrm{DFT}[x_r(n)]$, <u>$X(k)$的共轭对称分量</u>

$X_{op}(k)=\mathrm{DFT}[jx_i(n)]$, <u>$X(k)$的共轭反对称分量</u>

（2）如果$x(n)=x_{ep}(n)+x_{op}(n)$， $0\le n\le N-1$ (4.2.22)

其中

$x_{ep}(n)=1/2\,[x(n)+x^*(N-n)]$, $x(n)$的共轭对称分量

$x_{op}(n)=1/2\,[x(n)-x^*(N-n)]$ ，$x(n)$的共轭反对称分量

由(4.2.10)式得

$$\text{DFT}\,[x_{ep}(n)]=1/2\text{DFT}\,[x(n)+x^*(N-n)]$$

$$=1/2\,[X(k)+X^*(k)]$$

$$=Re\,[X(k)] \qquad (4.2.23)$$

$\mathrm{DFT}[x_{op}(n)]=1/2\,\mathrm{DFT}[x(n)-x^*(N-n)]=jIm[X(k)]$

因此 $X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]=X_R(k)+jX_I(k)$ (4.2.24)

其中 $X_R(k)=Re[X(k)]=\mathrm{DFT}[x_{ep}(n)]$

$jX_I(k)=jIm[X(k)]=\mathrm{DFT}[x_{op}(n)]$

$X_{ep}(k)=\mathrm{DFT}[x_r(n)]$, $\underline{X(k)\text{的共轭对称分量}}$ (4.2.25)

$X_{op}(k)=\mathrm{DFT}[jx_i(n)]$, $\underline{X(k)\text{的共轭反对称分量}}$ (4.2.26)

综上所述， 实部<——>共轭对称部分

虚部<——>共轭反对称部分

$x(n)$的实部和j乘以虚部的DFT分别为$X(k)$的共轭对称分量和共轭反对称分量

$x(n)$的共轭对称序列和共轭反对称序列的DFT分别为$X(k)$的实部和j乘以虚部

可以证明：设$x(n)$是长度为N的实序列，

且$X(k)=DFT[x(n)]$,则

(1) $X(k)=X^*(N-k),0\le k\le N-1$

(2) 如果 $x(n)=x(N-n)$，实偶对称序列

则$X(k)$实偶对称， 即

$$X(k)=X(N-k)$$

(3) 如果$x(n)= -x(N-n)$，实奇对称序列

则$X(k)$纯虚奇对称， 即

$$X(k)= -X(N-k)$$

利用DFT的共轭对称性，**通过计算一个N点DFT，可以得到两个不同实序列的N点DFT，**

设$x_1(n)$和$x_2(n)$为两个实序列，　构成新序列$x(n)$如下 ：

$$x(n)=x_1(n)+jx_2(n)$$

对$x(n)$进行DFT，　得到

$$X(k)=\mathrm{DFT}\,[x(n)]=X_{ep}(k)+X_{op}(k)$$

由(4.2.19)式和(4.2.22)式得到

$$X_{ep}(k)=DFT[x_1(n)]=1/2[X(k)+X^*(N-k)]$$

$$X_{op}(k)=DFT[jx_2(n)]=1/2[X(k)-X^*(N-k)]$$

所以

$$X_1(k)=DFT[x_1(n)]=1/2[X(k)+X^*(N-k)]$$

$$X_2(k)=DFT[x_2(n)]=-j/2[X(k)-X^*(N-k)]$$

4.2.2 离散傅里叶变换的性质

6. 选频性

设$x(n)$由复指数信号$x(t)=e^{jmw_0 t}$ 采样得到，即

$$x(n)=e^{jmw_0 n}$$ m为整数

其N点DFT为 $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} e^{j[-(2\pi/N)kn+mw_0 n]}$

当 $w_0=2\pi/N, X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)(m-k)n}$

$$=\frac{1-e^{j2\pi(m-k)}}{1-e^{j(2\pi/N)(m-k)}}=\begin{cases} N, & m=k \\ 0, & m\neq k \end{cases}$$

1）当输入幅度为1,频率为mw_0 ($w_0=2\pi/N$)的复信号时，变换后的N个$X(k)$ 中只有 $X(k)|_{k=m}=N$ ，其余皆为零。即DFT对频率mw_0有选择性；对若干不同频率信号的线性组合，不同频率点k将有对应的输出；

2）对幅度为1,频率为$2\pi m/N+2\pi Mmw_0$（M为整数)复信号的N点DFT，$X(k)|_{k=m}=N$ ，因此N点DFT实现了同频率信号的相

4.2.2 离散傅里叶变换的性质

7.帕塞瓦尔定理

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k)$$

证明：

$$\mathrm{DFT}[x(n)y^*(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n)W_N^{kn}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(l)Y^*((N-(k-l)))_N R_N(k)$$

令k=0,则

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k)$$

当$x(n)$=$y(n)$时，得有限长序列的DFT形式下的能量公式

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

第四章 离散傅里叶变换(DFT)

4.1 周期序列的离散傅立叶级数

4.1.1 离散傅立叶级数的定义

4.1.2 离散傅立叶级数的性质

4.2 离散傅里叶变换

4.2.1 离散傅立叶变换的定义

4.2.2 离散傅立叶变换的性质

4.2.3 离散傅立叶变换的应用

4.2.3 DFT的应用举例

DFT的快速算法FFT的出现，使DFT在数字通信、语言信号处理、 图像处理、 功率谱估计、 仿真、系统分析、 雷达理论、 光学、 医学、 地震以及数值分析等各个领域都得到广泛应用

4.2.3 DFT的应用举例

1. 用DFT对信号进行谱分析

- 所谓信号的谱分析就是计算信号的傅里叶变换
- 连续信号与系统的傅里叶分析显然不便于直接用计算机进行计算， 使其应用受到限制
- DFT是一种时域和频域均离散化的变换， 适合数值运算，成为分析离散信号和系统的有力工具

1. 用DFT对连续信号进行谱分析

2.用DFT进行谱分析的误差问题

3. 用DFT对序列进行谱分析

用DFT对序列进行频谱分析

1）对长度为N的序列 $x(n)$：

我们已知道单位圆上的Z变换就是DTFT，即

$$X(e^{j\omega}) = X(z)\big|_{z=e^{j\omega}} \qquad X(k) = X(e^{j\omega})\Big|_{w=\frac{2\pi}{N}k}$$

序列的频谱 $X(e^{j\omega})$ 是以 2π 为周期的 ω 的连续周期函数，如果对序列 $x(n)$ 进行 L 点DFT，得到 $X(k)$

$0 \le k \le L-1$ $X(k)$ 是[0,2pi) 区间上对 $X(e^{j\omega})$ 的L点等间隔采样，因此DTFT可用DFT来计算

4.2.3 DFT的应用举例

2. 用DFT进行谱分析的误差问题

由于离散采样、及截断处理，会产生三种情况：

1. 混叠现象：依据采样定理，通常采取预滤波、提高f_s等操作
2. 栅栏效应：时域补零，从而增加频域采样点
3. 截断效应：

   频谱泄漏：是频谱变模糊，谱分辨率降低；

   谱间干扰 ：影响谱分辨率，产生噪声；

下面重点分析截断效应的原因

4.2.3 DFT的应用举例

根据傅里叶变换的频域卷积定理有

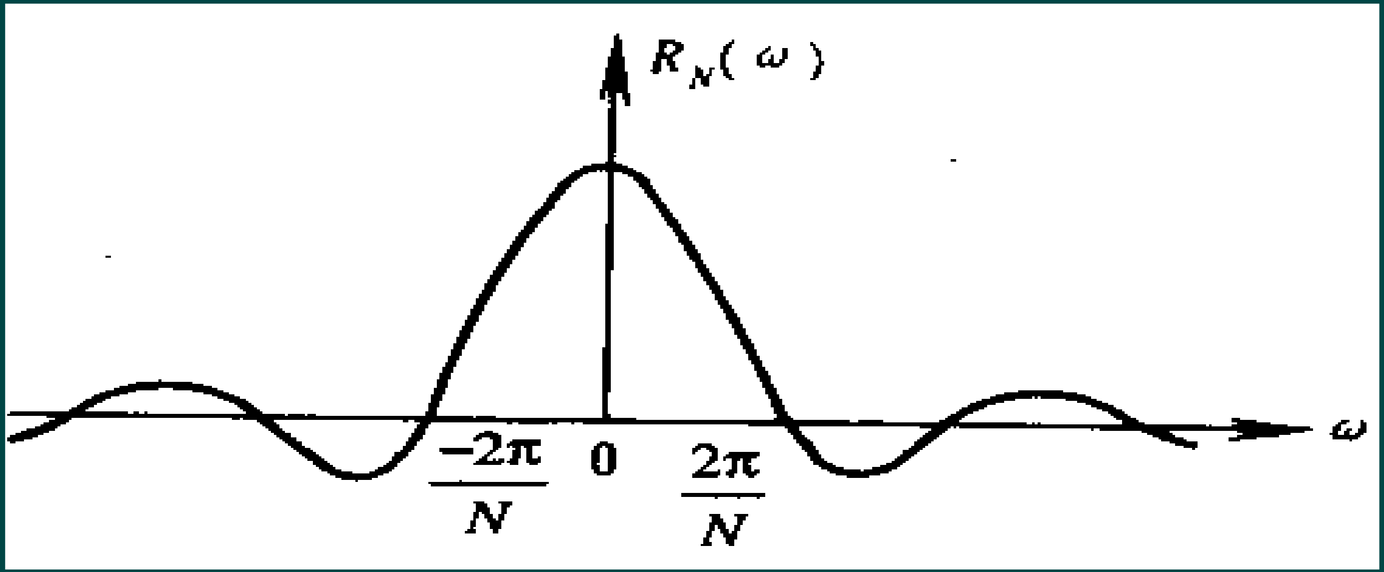
$$Y(e^{j\omega}) = FT[y(n)] = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * R_N(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) R_N(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

其中

$$X(e^{j\omega}) = DTFT[x(n)]$$

$$R_N(e^{j\omega}) = DTFT[R_N(n)] = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} = R_N(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

4.2.3 DFT的应用举例



矩形窗函数的幅度谱图

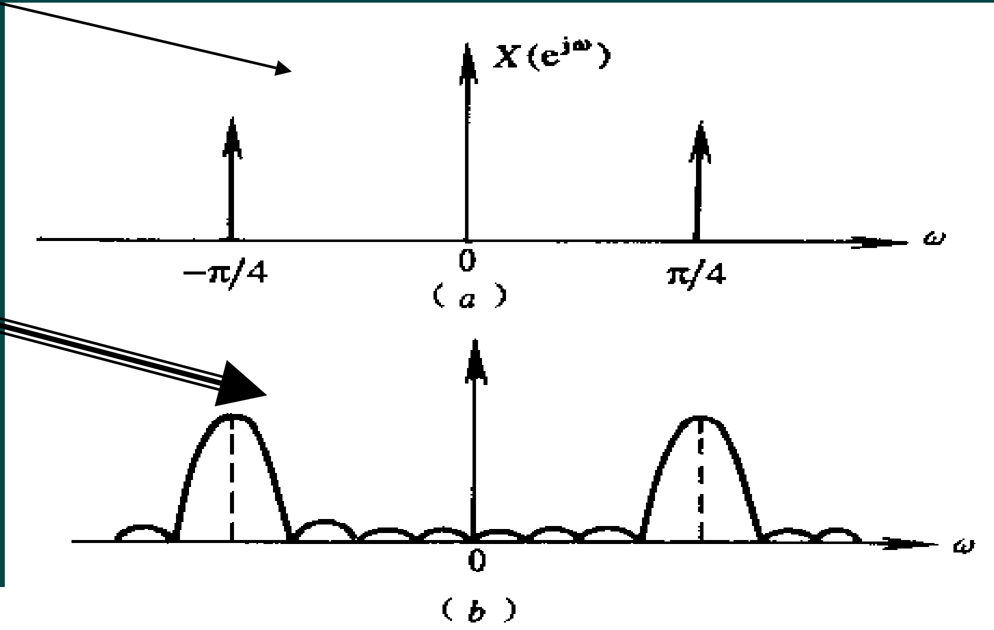
幅度谱$R_N(\omega)$~ω曲线如上图所示。$R_N(\omega)$以2π为周期， 只画低频部分）。 图中，$|\omega|<2\pi/N$的部分称为主瓣， 其余部分称为旁瓣

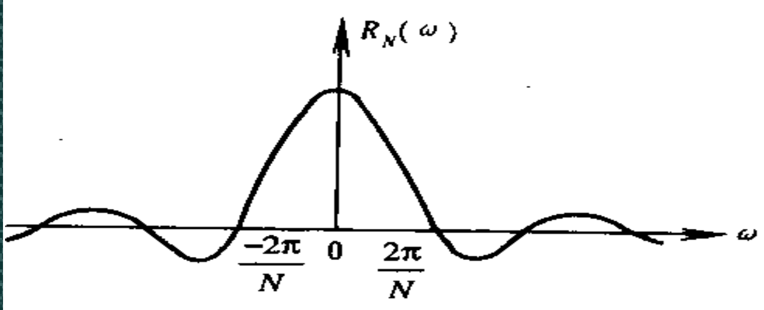
例4.3.1 $x(n)=cos(\omega_0 n), \omega_0=\pi/4$　　其频谱为

$$X(e^{j\omega})=\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}[\delta(\omega-\frac{\pi}{4}-2\pi l)+\delta(\omega+\frac{\pi}{4}-2\pi l)]$$

真实频谱

对$x(n)$加矩形窗截断后失真的频谱，存在频谱泄漏和谱间干扰





谢　谢　！

4.2.3 DFT的应用举例

用DFT对连续信号进行谱分析

工程实际中，设连续信号$x_a(t)$持续时间为T_p，最高频率为f_c，$x_a(t)$的频谱函数$X_a(j\Omega)$也是连续函数,为

$$X_a(\mathrm{j}\Omega)=\mathrm{FT}[x_a(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)e^{-\mathrm{j}\Omega t}d\Omega$$

对$x_a(t)$以采样间隔$T\leq 1/2f_c$(即$f_s=1/T\geq 2f_c$)采样得$x(n)=x_a(nT)$。设共采样N点，并对$X_a(j\Omega)$作零阶近似($t=nT$, $dt=T$)得

$$X(e^{j\omega})=\mathrm{DTFT}[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$