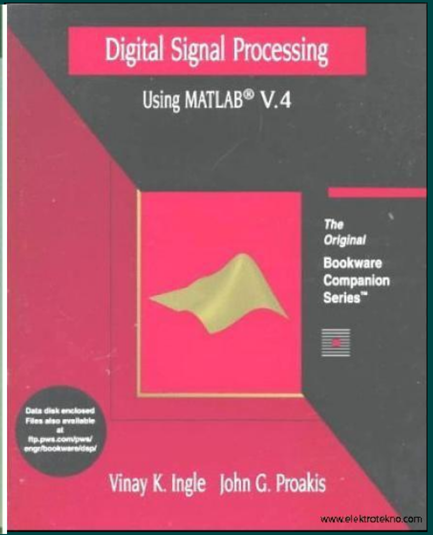
数字信号处理

任课教师: 田春娜 (教授)
单位：西安电子科技大学电子工程学院
Email: chnatian@xidian.edu.cn
chnatian@gmail.com

参考书籍



- 高新波, 阔永红, 田春娜. 数字信号处理. 高等教育出版社, 2014
- 史林, 赵树杰. 数字信号处理. 科学出版社. 2007
- Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer. Discrete-Time Signal Processing. 电子工业出版社, 2011
- 高西全, 丁玉美. 数字信号处理及其习题解答. 西电出版社, 2008
- Vinay K.Ingle, John G. Proakis. Digital Signal Processing Using MATLAB®. Northeastern University, 1996

第二章 离散时间信号和系统的时域描述分析

- 离散时间信号的序列描述
  - 常见的离散时间序列及其描述
  - 序列的基本运算
- 离散时间系统的时域分析
  - 离散时间系统
  - 线性系统
  - 线性时不变系统
  - 线性卷积
- 离散时间系统的差分方程描述及求解

引 言

- 三种主要的信号
  - 模拟信号（analog signal）
  - 离散时间（discrete time, DT）信号
  - 数字信号（digital signal）

- 根据输入\输出是哪种信号系统可分为
  - 模拟系统
  - 离散时间系统
  - 数字系统

2.1 离散时间信号的序列描述

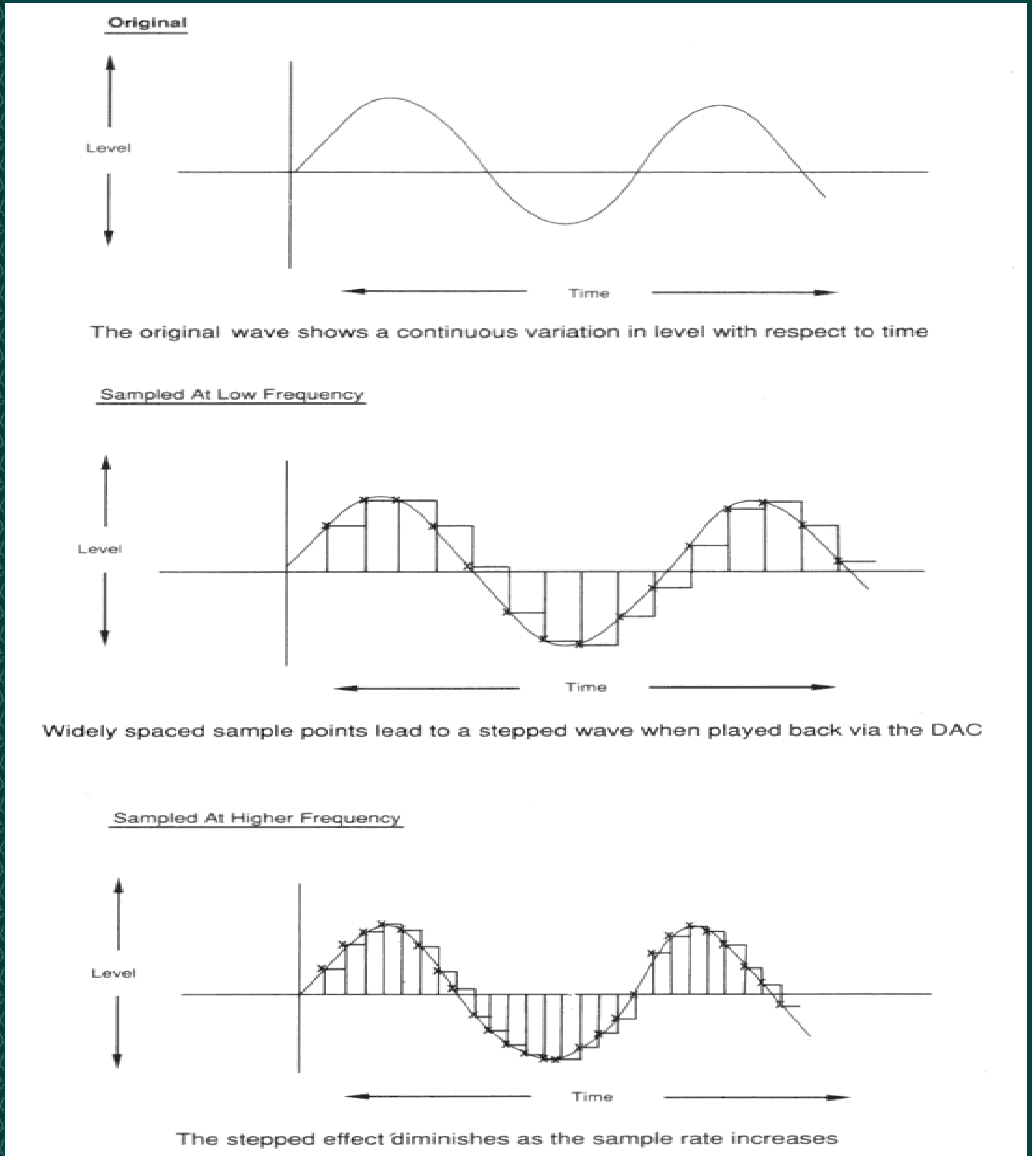
- 离散时间信号可视为连续时间信号的采样
- 若模拟信号为 $x_a(t)$，对它进行以周期为 T 的等间隔采样，则得到的离散时间信号为

$$x_a(t)|_{t=nT} = x_a(nT) = x(n),\quad -\infty < n < \infty$$

其中 $x(n)$ 称为离散时间信号(数值序列)，n 取整数

- 需要强调的是：n 只能取整数值

2.1 离散时间信号的序列描述



2.1 离散时间信号的序列描述

- 离散时间信号 $x(n)$ 有三种表示方法:

  用集合符合表示

  用公式表示

  用图形表示

- 下面是一个用集合符合表示离散时间信号的例子

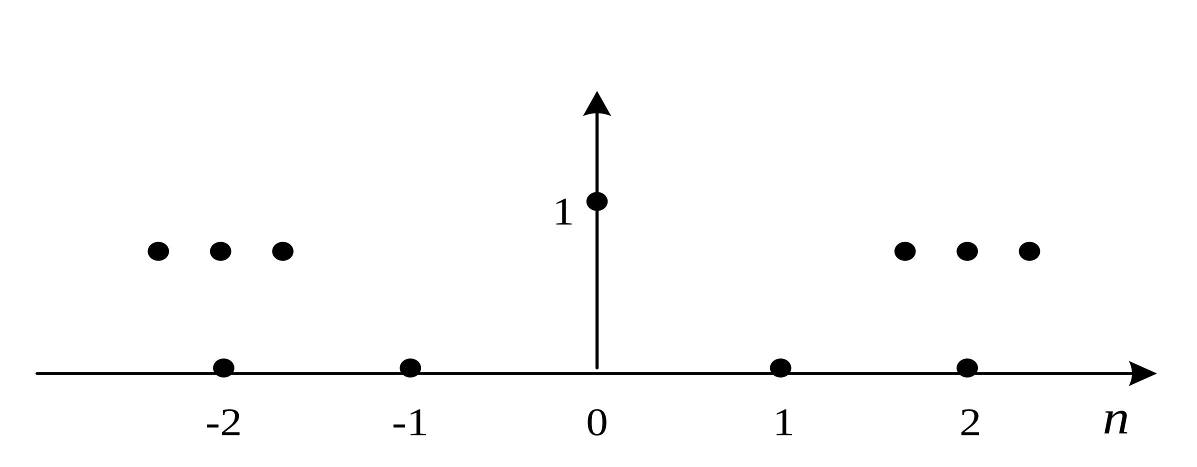
$$x(n)=\{7,1,2,\underline{0},3,-2,5\}$$

下划线表示零时刻的采样值

2.1.1 常用的典型序列

◆ 单位采样序列 $\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$

单位采样序列又称为单位脉冲序列，其特点是在 $n=0$ 时取值为1，其它 n 时刻取值均为零

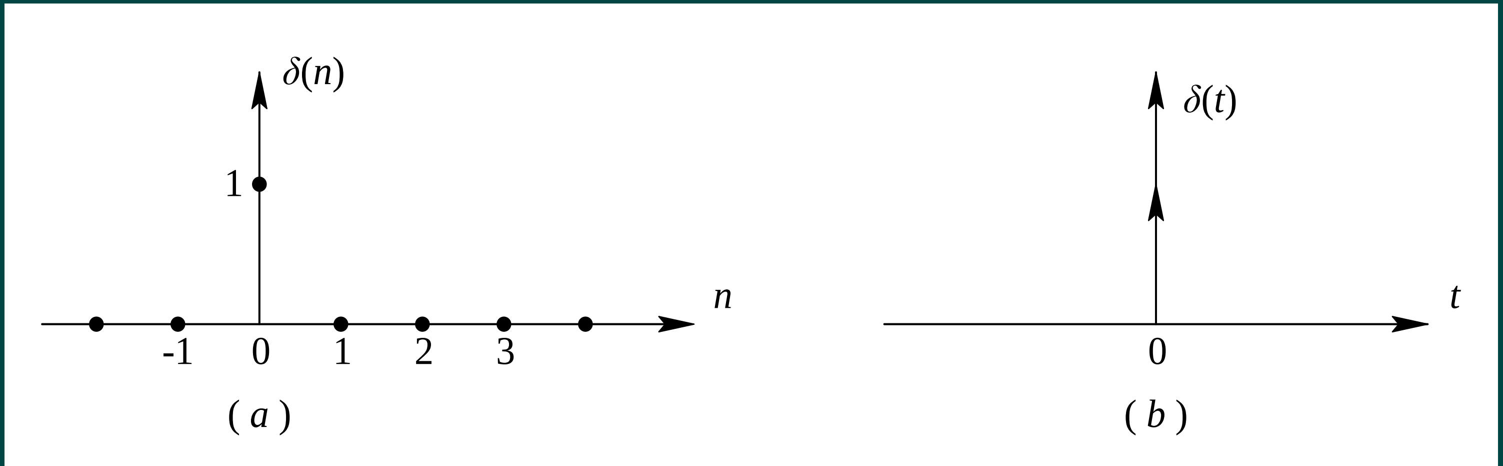


2.1.1 常用的典型序列

- 它类似于模拟信号和系统中的单位冲激函数$\delta(t)$
- 不同之处：

$\delta(t)$在t=0时，取值无穷大，t≠0时取值为零，对时间t的积分为1

$\delta(n)$在n=0时，取值为1，n≠0时的其他离散采样点上值为零



单位采样序列(a) 和单位冲激信号(b)图示

2.1.1 常用的典型序列

◆ 任意序列的表示

对于任意序列 $x(n)$，都可用单位脉冲序列 $\delta(n)$ 的移位加权和表示如下

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)\delta(n-k)$$

这在离散时间信号和系统的分析中很有用

2.1.1 常用的典型序列

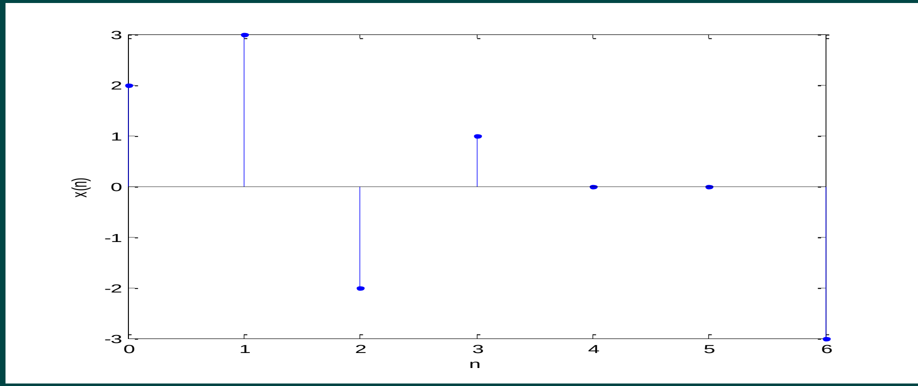
◆ 任意序列的表示

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)\delta(n-k)$$

例：设序列 $x(n)$={ $\underline{2}$, 3, -2, 1, 0, 0, -3}的波形如图所示，

可用如下序列来表示

$$x(n)=2\delta(0)+3\delta(n-1)-2\delta(n-2)+\delta(n-3)-3\delta(n-6)$$



2.1.1 常用的典型序列

MATLAB 表示

- *Function* [x,n]=*impseq*(n_0,n_1,n_2)

$$\delta(n-n_0)=\begin{cases}1, & n=n_0\\ 0, & n\neq n_0\end{cases}\quad n_1\le n\le n_2,\ n_1\le n_0\le n_2$$

- A: n=[n_1:n_2];

  x = zeros(1,n_2-n_1+1); x(n_0-n_1+1)=1;

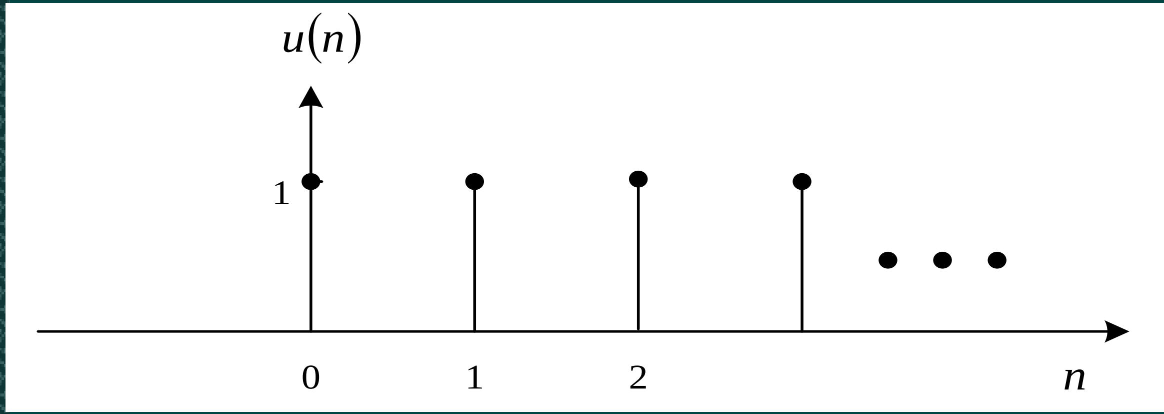
- B: n=[n_1:n_2]; x = [(n-n_0)==0];

  stem(n,x,'ro');

2.1.1 常用的典型序列

◆ 单位阶跃序列

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

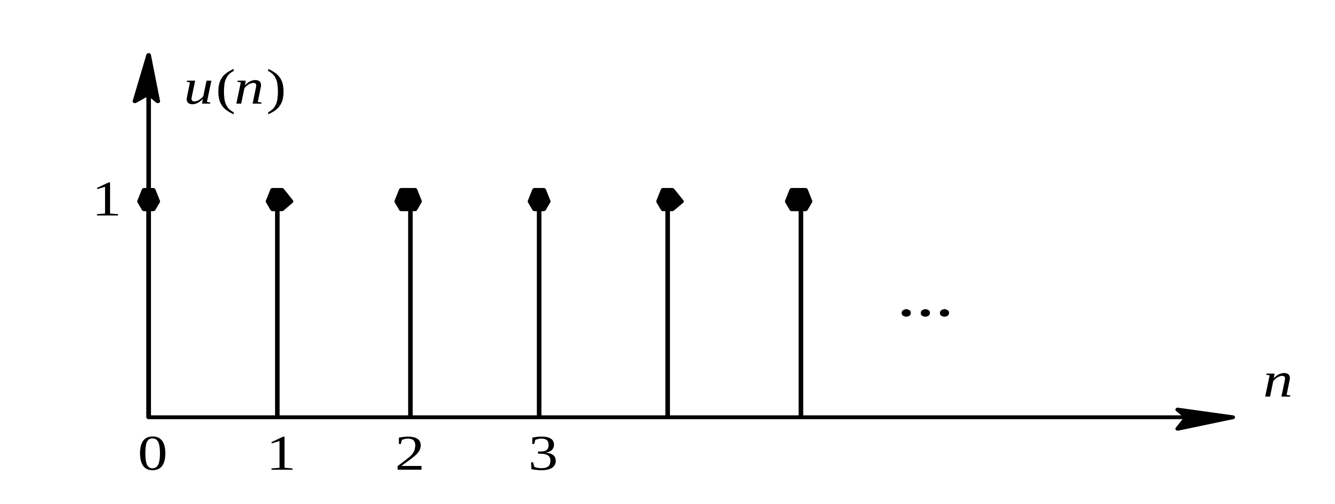


2.1.1 常用的典型序列

◆ 单位阶跃序列 $u(n)$ 与单位采样序列 $\delta(n)$ 的关系如下

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

$$u(n) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta(n-m) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \cdots$$

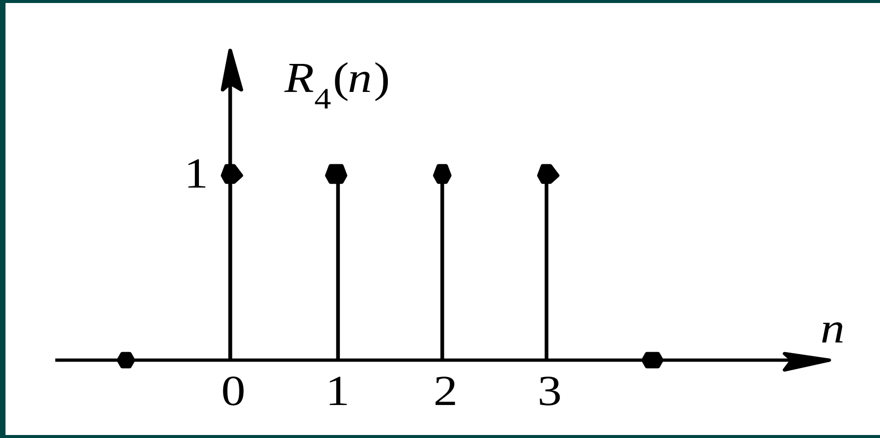


2.1.1 常用的典型序列

◆ 矩形序列

$$R_n=\begin{cases}1, & 0\le n\le N-1\\ 0, & else\end{cases}$$

当 N=4 时，



$$R_n=u(n-N_1)-u(n-N_2),\qquad N_2-N_1=N$$

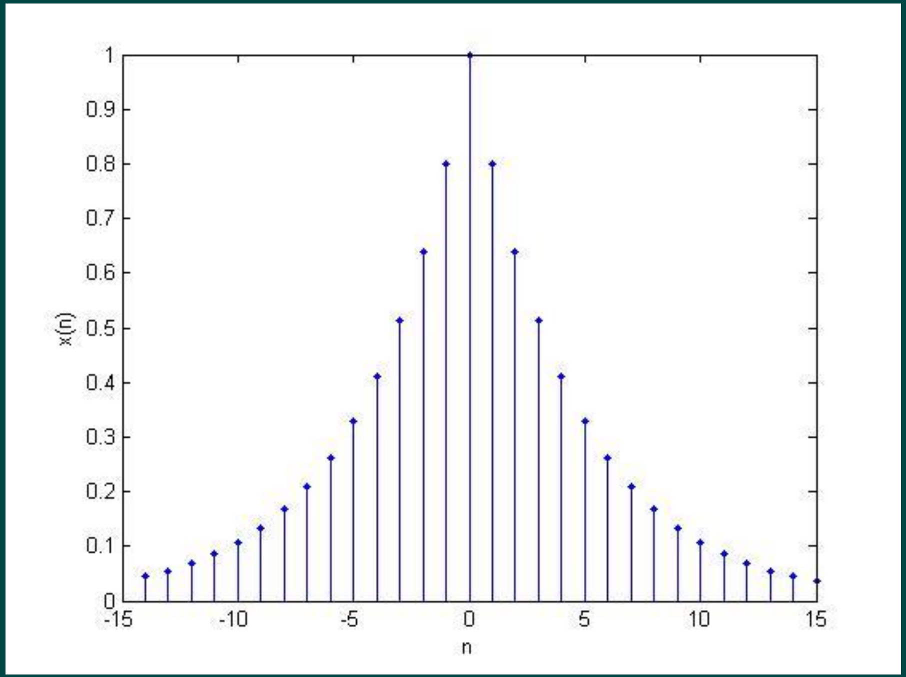
长度为 N 的矩形序列可以用单位阶跃序列表示为

$0 < a < 1$

2.1.1 常用的典型序列

◆ **实指数序列**

$$x(n) = a^{|n|}, \forall n, a \in R$$



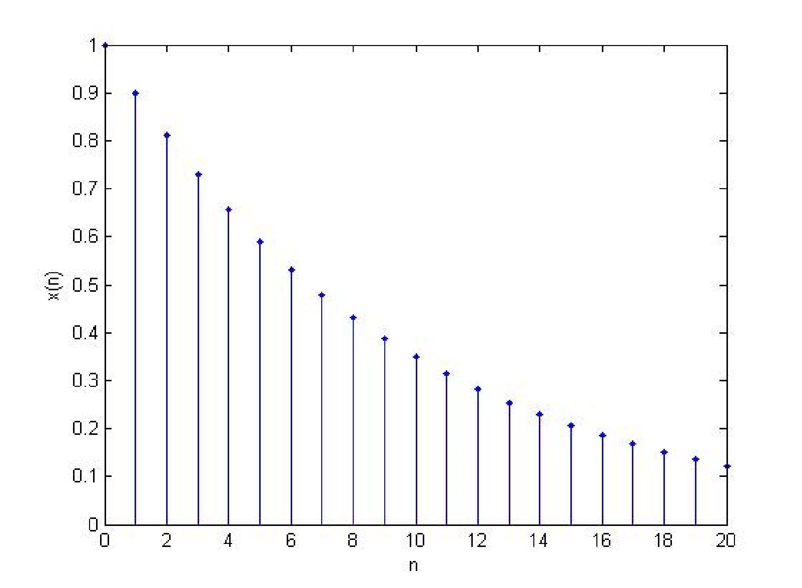
双边实指数序列($0 < a < 1$)

$0<a<1$

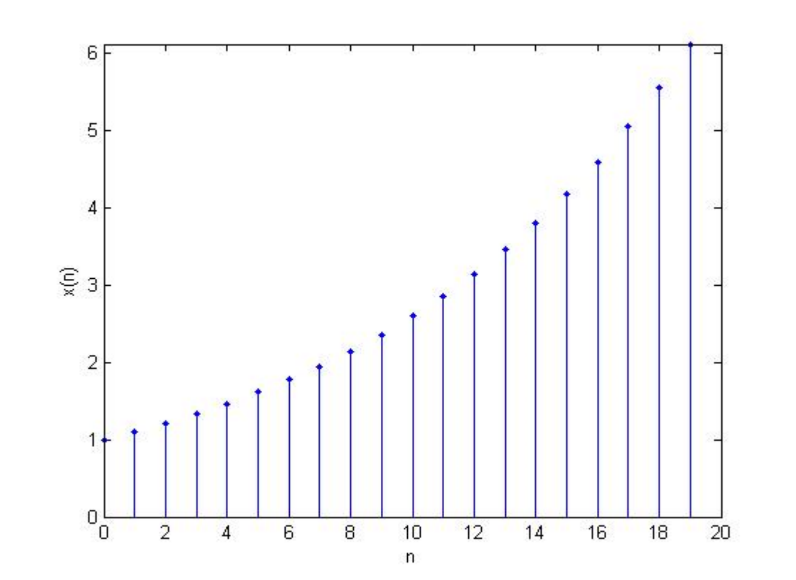
2.1.1 常用的典型序列

◆ 单边实指数序列

$$x(n)=a^n u(n),\quad \forall n; a\in R$$



单边实指数序列($0<a<1$)



单边实指数序列(a >)1

如果|a|<1，$x(n)$的幅度随n的增大而减小，称$x(n)$为收敛序列；如|a|>1，则称为发散序列

2.1.1 常用的典型序列

◆ 正弦序列

$$x(n) = \sin(\omega n)$$

式中 ω 称为正弦序列的数字域频率（简称数字频率），单位是弧度（rad），它表示正弦序列的变化速率，或者说表示相邻两个序列值之间的相位变化

2.1.1 常用的典型序列

给定模拟正弦信号$\sin(\Omega t)$，对其进行采样可得

$$\sin(\Omega t)\,|_{t=nT}=\sin(\Omega nT)=\sin(\omega n)=x(n)$$

由上式可得数字频率ω与模拟角频率Ω之间的关系为：

$$\omega=\Omega T$$

上式表明凡是由模拟信号采样得到的序列，模拟角频率Ω与序列的数字域频率ω成线性关系。

由于采样频率 f 和采样周期T 互为倒数，可进一步推出数字频率ω和模拟角频率Ω的关系为： $\omega=\dfrac{\Omega}{f}$

2.1.1 常用的典型序列

- 复指数序列 $x(n)=e^{(\sigma+j\omega_0)n}$

ω_0 为数字频率。σ 为衰减因子

当 $\sigma=0$ 时有 $x(n)=\mathrm{e}^{j\omega_0 n}=\cos(\omega_0 n)+j\sin(\omega_0 n)$

其实部和虚部分别是余弦序列和正弦序，由于n取整数值下面式子成立

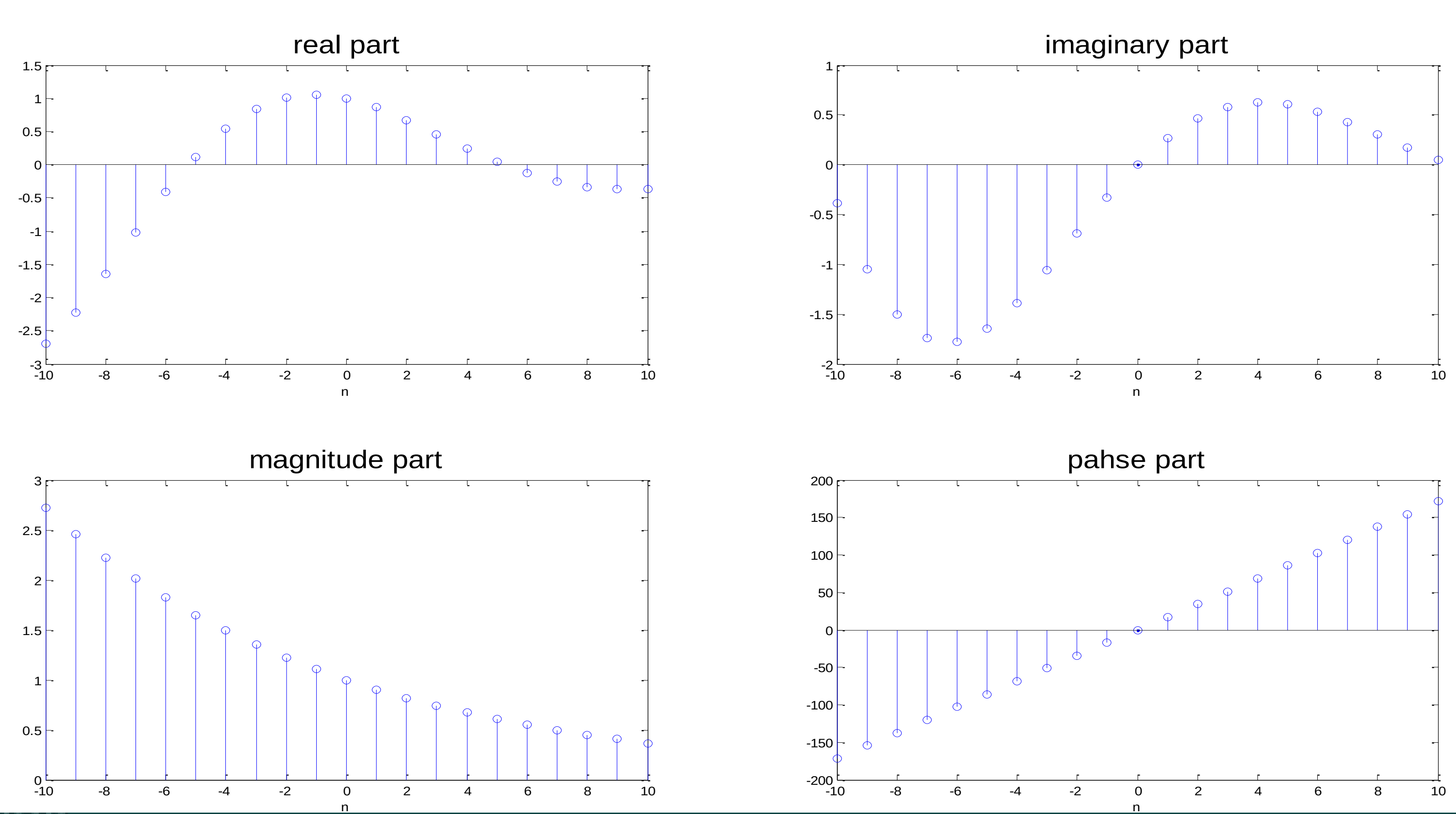
$$e^{j(\omega_0+2\pi M)n}=e^{j\omega_0 n}$$

复指数序列 $e^{j\omega_0 n}$ 是一个周期函数并以 2π 为周期。复指数序列 $e^{j\omega_0 n}$ 与连续时间信号中的复指数信号 $e^{j\Omega_0 t}$ 一样在信号分析中扮演着一个重要角色

2.1.1 常用的典型序列

复指数序列的图示

For Example: *n*=[-10:10]; *x*=exp((-0.1+0.3j)**n*);



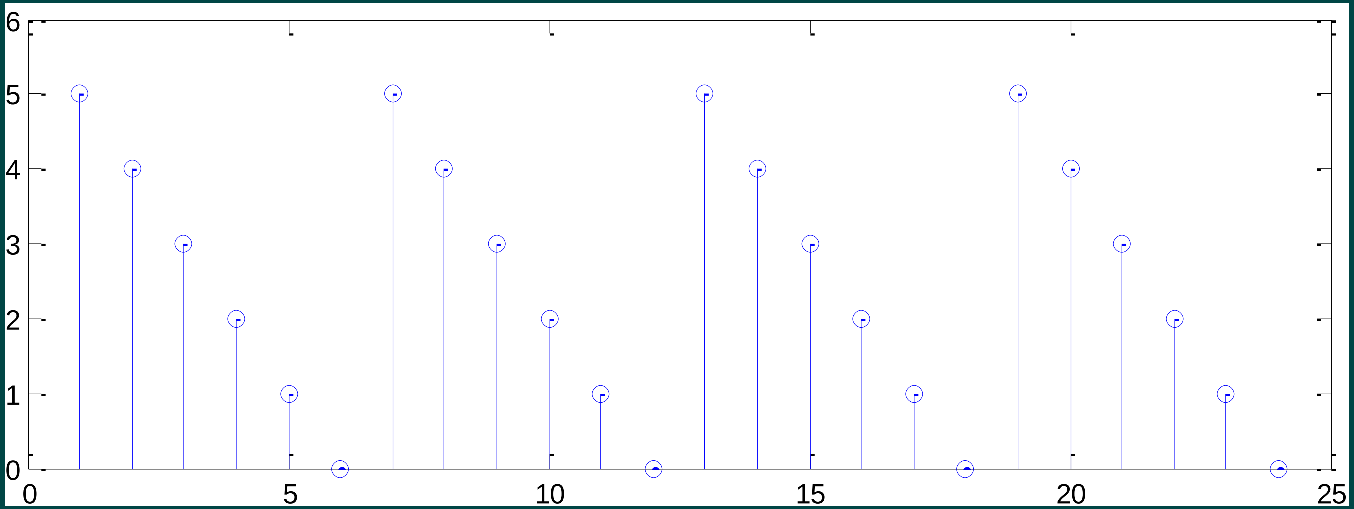
2.1.1 常用的典型序列

◆ 周期序列

设序列为$x(n)$, 如果对所有n 存在一个最小正整数N, 使下面等式成立：$x(n)=x(n+N)$

则称序列 $x(n)$ 为周期序列，周期为N

N=6



2.1.1 常用的典型序列

例：序列 $x(n)=\cos(\frac{\pi}{4}n)$ 可以写成如下形式

$$x(n)=\cos(\frac{\pi}{4}n)=\cos[\frac{\pi}{4}(n+8)]$$

这表明序列 $x(n)=\cos(\frac{\pi}{4}n)$ 是周期为8的周期序列

2.1.1 常用的典型序列

- 下面讨论一般正弦序列的周期性

  设 $x(n)=A\sin(\omega_0 n+\varphi)$

  那么 $x(n+N)=A\sin(\omega_0(n+N)+\varphi) = A\sin(\omega_0 n+\omega_0 N+\varphi)$

- 如果 $x(n+N)=x(n)$，$A\sin(\omega_0 n+\varphi)=A\sin(\omega_0 n+\omega_0 N+\varphi)$

  则要求 $\omega_0 N=2\pi k$，即 $N=(2\pi/\omega_0)k$，式中 k 与 N 均取整数，且 k 的取值要保证 N 是最小的正整数

- 满足上述条件，正弦序列才是以 N 为周期的周期序列

2.1.1 常用的典型序列

满足周期序列即是
$\omega_0 N=2\pi k$
$N=(2\pi/\omega_0)k$

具体正弦序列有以下三种情况：

(1) $2\pi/\omega_0$**为整数：**k**=1，正弦序列是以**$2\pi/\omega_0$**为周期的周期序列**

例：$\sin(\pi/8*n)$，$\omega_0=\pi/8$，$2\pi/\omega_0=16$,该正弦序列周期为16

(2) $2\pi/\omega_0$**是有理数：设**$2\pi/\omega_0=P/Q$**，式中**P**、**Q**是互为素数的整数，取**$k=Q$**,那么**$N=P$**，则正弦序列是以**P**为周期的周期序列**

例：$\sin(4/5)\pi n$， $\omega_0=(4/5)\pi$，$2\pi/\omega_0=5/2$，$k=2$，该正弦序列是以5为周期的周期序列

2.1.1 常用的典型序列

满足周期序列即是
$\omega_0 N=2\pi k$
$N=(2\pi/\omega_0)k$

(3) $2\pi/\omega_0$是无理数：任何整数k都不能使N为正整数，因此，此时的正弦序列不是周期序列

例: $\sin(1/4*n)$，$\omega_0=1/4$，满足$\omega_0 N=2\pi k$，即$1/4\ N=2\pi k$的正整数N不存在，所以$sin(\omega_0 n)$不是周期序列。对于复指数序列$e^{j\omega_0 n}$的周期性也有同样的分析结果

第二章 离散时间信号和系统的时域描述分析

- 离散时间信号的序列描述
  - 常见的离散时间序列及其描述
  - 序列的基本运算
- 离散时间系统的时域分析
  - 离散时间系统
  - 线性系统
  - 线性时不变系统
  - 线性卷积
- 离散时间系统的差分方程描述及求解

2.1.2 序列的基本运算

- 序列加法

$$x(n)=x_1(n)+x_2(n)$$

序列加法是指把两个序列 $x_1(n)$ 、$x_2(n)$ 中同序号的序列值逐项对应相加，形成新的序列

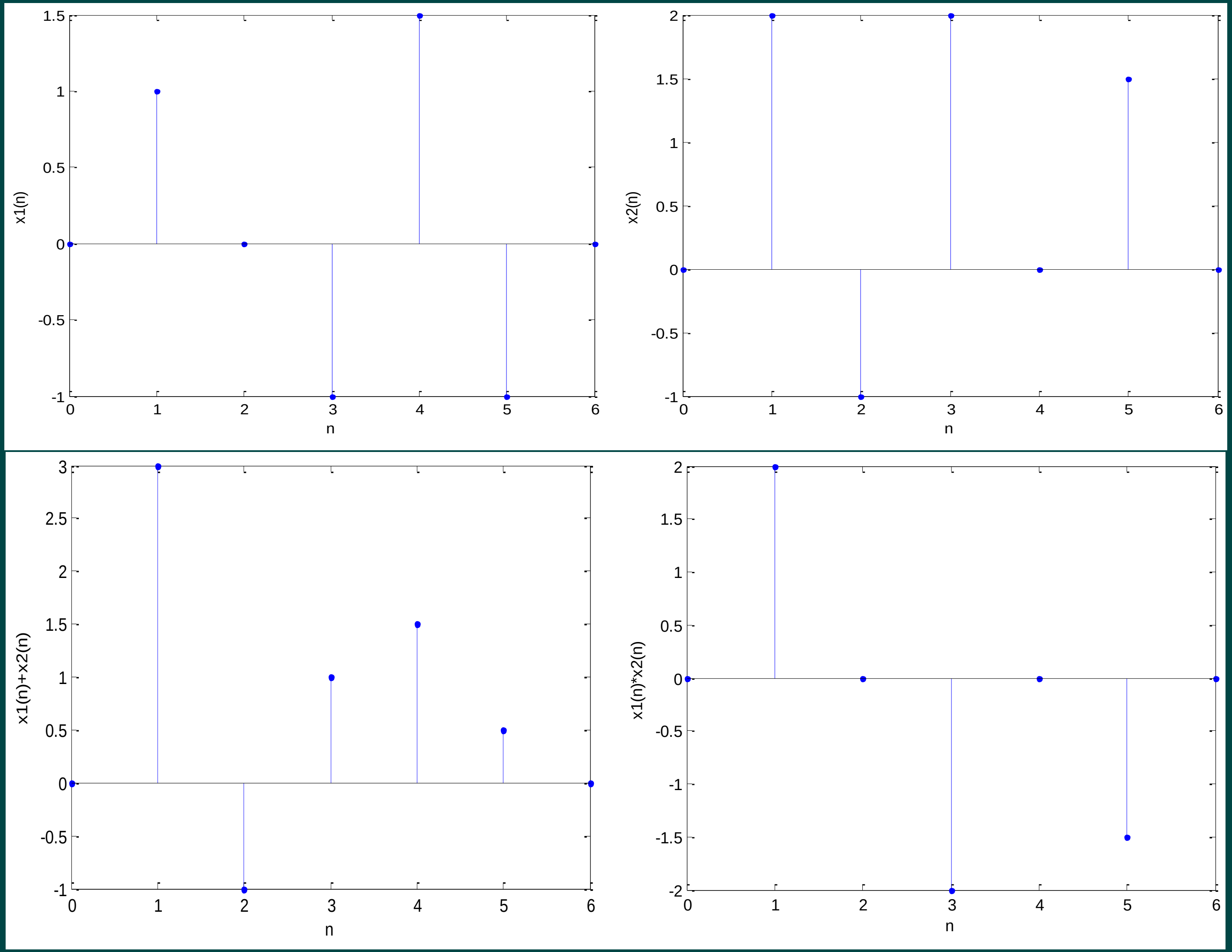
- 序列乘法

$$x(n)=x_1(n)x_2(n)$$

序列乘法是指把两个序列 $x_1(n)$ 、$x_2(n)$ 中同序号的序列值逐项对应相乘，形成新的序列

序列的乘法是一种非线性运算，它用于信号的调制

2.1.2 序列的基本运算



2.1.2 序列的基本运算

◆ 序列的倍乘

序列倍乘是指把序列$x(n)$中所有序号下的序列值同乘一个常数 a

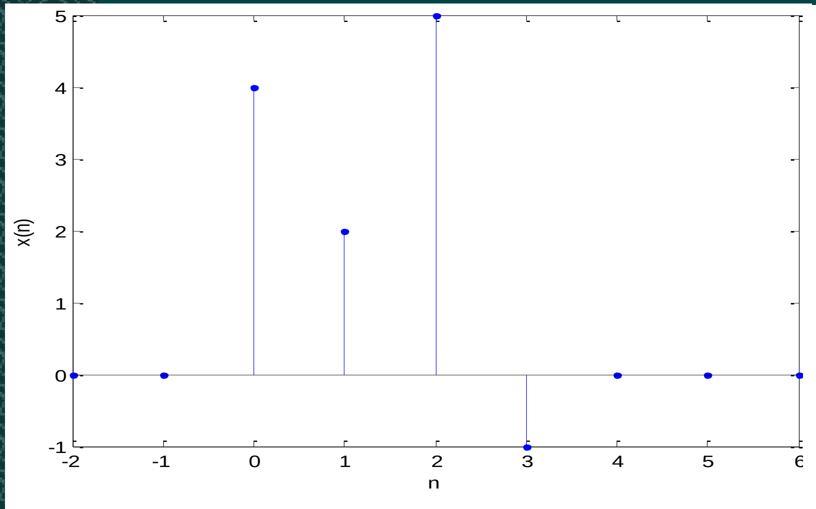
$$y(n) = ax(n)$$

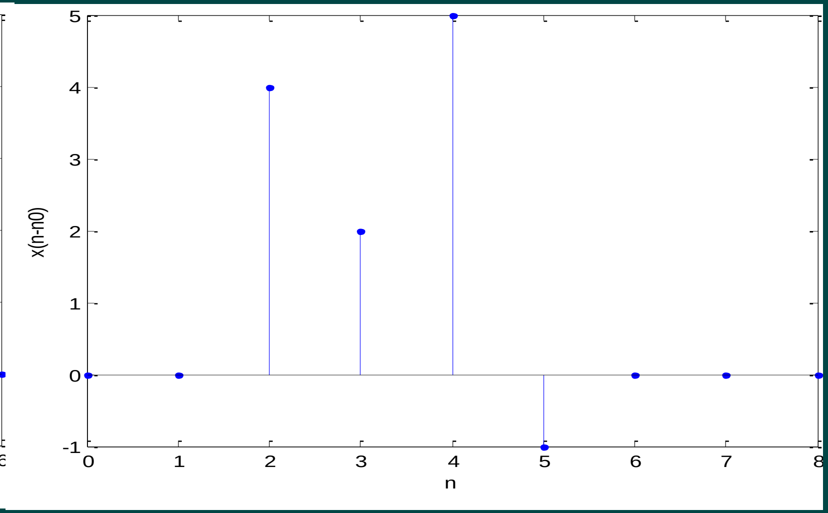
◆ 序列移位 、翻转及尺度变换

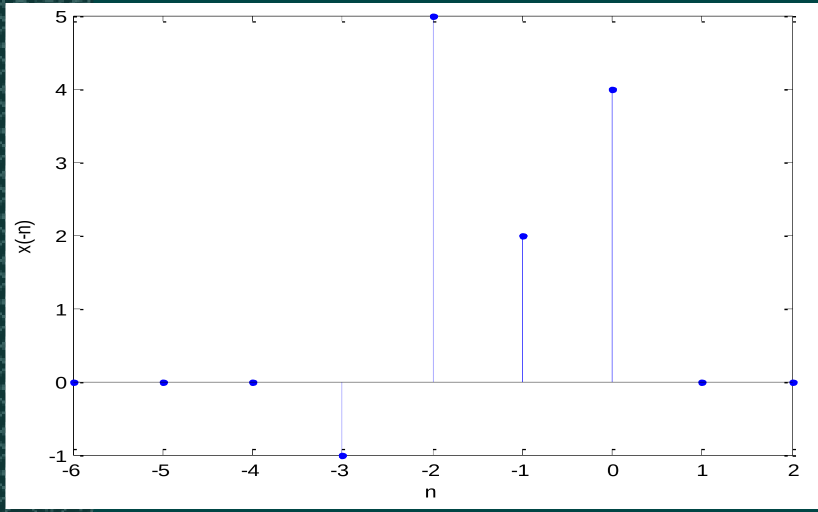
$x(n-n_0)$	$x(-n)$	$x(mn)$
移位	翻转	尺度变换

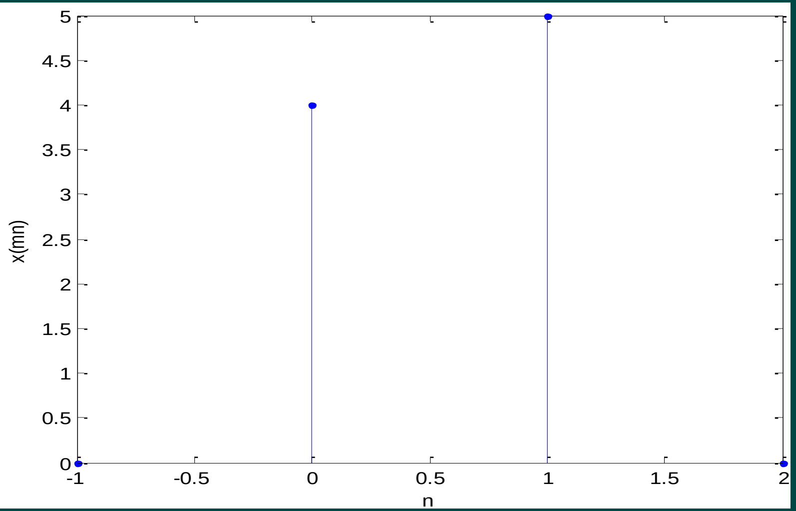
当$n_0>0$时，序列右移n_0个序数，称为$x(n)$的延时序列
当$n_0<0$时，序列左移n_0个序数，称为$x(n)$的超前序列

2.1.2 序列的基本运算


x(n)
n
-2 -1 0 1 2 3 4 5 6
-1 0 1 2 3 4 5


x(n-n0)
n
0 1 2 3 4 5 6 7 8
-1 0 1 2 3 4 5


x(-n)
n
-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2
-1 0 1 2 3 4 5


x(mn)
n
-1 -0.5 0 0.5 1 1.5 2
0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5

2.1.2 序列的基本运算

◆ 序列绝对值之和

设序列为 $x(n)$ ，则

$$s_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|$$

称为序列绝对值之和。如果满足 $s_x < \infty$, 则$x(n)$为绝对可和序列

如果一个序列$x(n)$的每个序列值的绝对值均小于等于某一个有限的正整数M_x，即满足

$$|x(n)| \le M_x < \infty$$

则称$x(n)$为有界序列。

2.1.2 序列的基本运算

- 序列能量

复数序列 $x(n)$ 的能量为

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n)$$

上标*表示共轭运算

周期序列平均功率

设 $x(n)$ 是周期为N的周期序列，则其平均功率为

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

第二章 离散时间信号和系统的时域描述分析

- 离散时间信号的序列描述
  - 常见的离散时间序列及其描述
  - 序列的基本运算
- 离散时间系统的时域分析
  - 线性系统
  - 线性时不变系统
  - 线性卷积
- 离散时间系统的差分方程描述
  - 离散时间系统的差分方程描述及求解

2.2 离散时间系统的时域分析

离散时间系统: 离散时间系统的输入为 $x(n)$，经过某种变换 T[.]，系统输出为$y(n)$

定义运算子 **T[.]**

$$x(n) \longrightarrow \boxed{T[.]} \longrightarrow y(n)$$

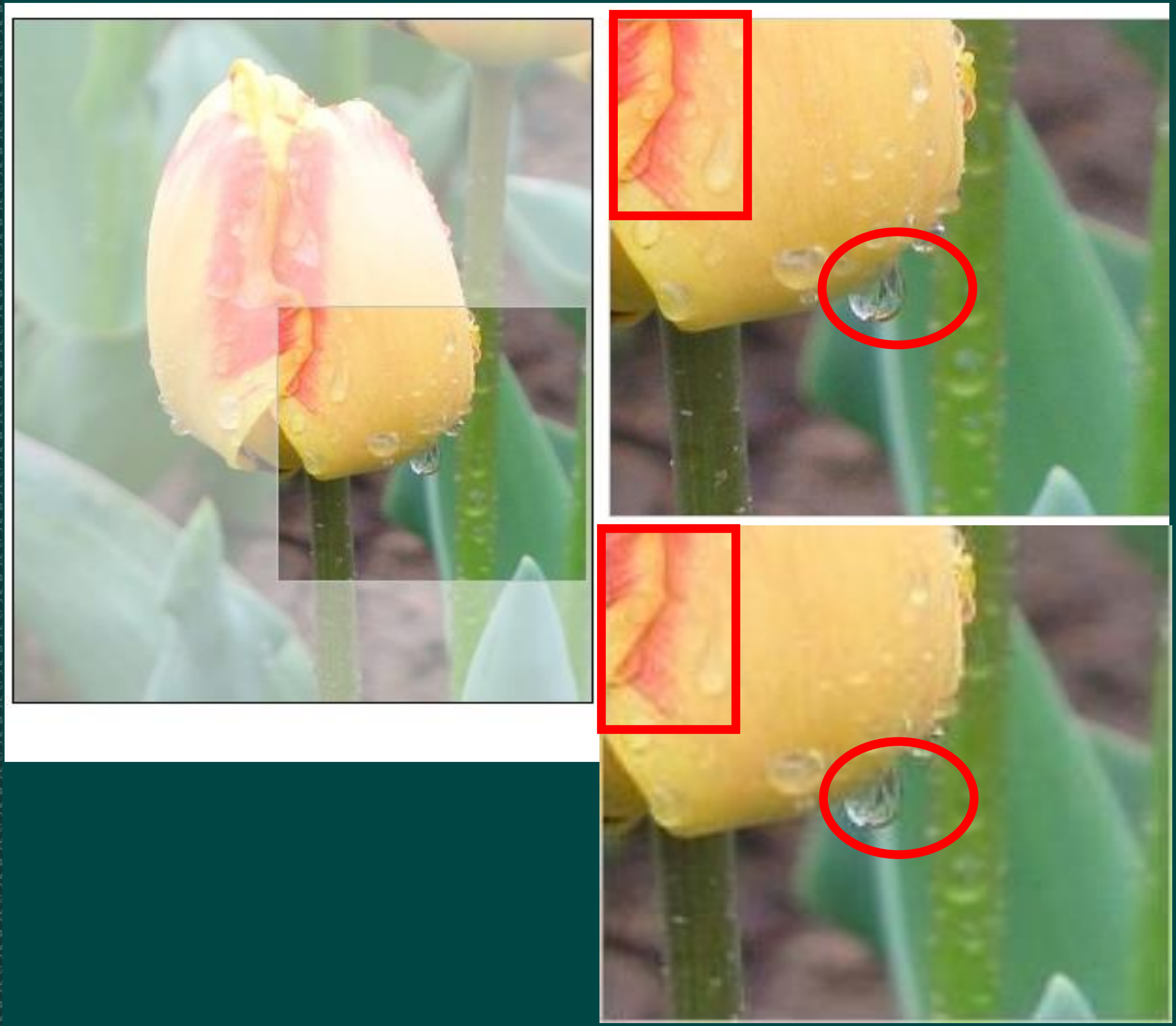
$x(n)$: 激励, 输入信号；　$y(n)$: 响应, 输出信号

- **数学表示**

  $y(n) = T[x(n)]$，n 是整数

- **离散时间系统根据线性特性进行分类**

  线性系统
  非线性系统



2.2.1 线性系统

- 当且仅当系统L[.]满足叠加原理时是线性系统

$$y_1(n)=L[x_1(n)],\ y_2(n)=L[x_2(n)]$$
$$\forall x_1(n), x_2(n)$$

- **两个属性：**

(1) 可加性 $L[x_1(n)+x_2(n)]=L[x_1(n)]+L[x_2(n)]$

$$\forall x_1(n), x_2(n)$$

(2) 齐次性 $L[a_1x_1(n)]=a_1L[x_1(n)]$

$$\forall a_1, x_1(n)$$

2.2.1 线性系统

- 叠加原理

(1)+(2)即是叠加原理

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$
$$=ay_1(n)+by_2(n)$$
$$\forall a_1,a_2,x_1(n),x_2(n)$$

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=T[ax_1(n)]+T[bx_2(n)]$$ 可加性

$$=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$ 齐次性

2.2.1 线性系统

习 题

- 下面两个系统是线性系统吗？

$$(1)\, y(n) = ax(n) + \mathrm{b}$$

$$(2)\, y(n) = x(n)\sin(\omega n + \pi / 4)$$

2.2.2 线性时不变系统

如果系统对于输入信号的响应与信号加于系统的时间无关，则称该系统为时不变系统

如果

$$y(n) = T[x(n)]$$

若对于任意整数 n_0，时不变系统一定满足：

$$y(n-n_0) = T[x(n-n_0)]$$

如果线性系统对输入序列的运算关系 $L[.]$ 在整个运算过程中不随时间变化, 则称为**线性时不变(Linear time invariant, LTI)系统**

2.2.2 线性时不变系统

- 设系统的输入 $x(n)=\delta(n)$，系统输出$y(n)$的**初始状态为零**，定义这种条件下系统输出为**系统的单位脉冲响应**，用$h(n)$表示。即系统的单位脉冲响应就是系统对于单位脉冲序列 $\delta(n)$ 的零状态响应

$$h(n) = T[\delta(n)]$$

- 任意输入$x(n)$经过**线性系统**时的输出 $y(n)$表示如下:

$$y(n) = T[x(n)] = T[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\delta(n-m)]$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} T[x(m)\delta(n-m)] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\underline{T[\delta(n-m)]}$$

为单位脉冲响应如果T是时不变的

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m)$$

$$\overset{\Delta}{=} x(n) * h(n)$$ 线性卷积

2.2.2 线性系统时不变系统

- LTI系统输出与输入之间的关系

设系统的输入序列为 $x(n)$，将它表示成单位脉冲序列的移位加权和：

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)\delta(n-m)$$

那么系统的输出序列为

$$y(n)=L[\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)\delta(n-m)]\overset{\text{线性特性}}{=}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)L[\delta(n-m)]$$

$$\text{时不变特性}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)h(n-m)=x(n)*h(n)$$

“*”代表线性卷积运算

2.2.2 线性系统时不变系统

例 2.2.1 检查$y(n)=nx(n)$所代表的系统是否是时不变系统

解： ？ $y(n-n_0)=T[x(n-n_0)]$

$$y(n)=nx(n)$$

$$T[x(n-n_0)]=nx(n-n_0)$$

$$y(n-n_0)=(n-n_0)x(n-n_0)$$

$$y(n-n_0)\neq T[x(n-n_0)]$$

因此该系统不是时不变系统

2.2.2 线性系统时不变系统

n

- **系统的性质**

  系统的因果性和稳定性是保证系统物理可实现和正常运行的重要条件

- **因果系统：** 系统 n 时刻的输出，只取决于 n 时刻以及 n 时刻以前的输入，而与 n 时刻以后的输入序列无关

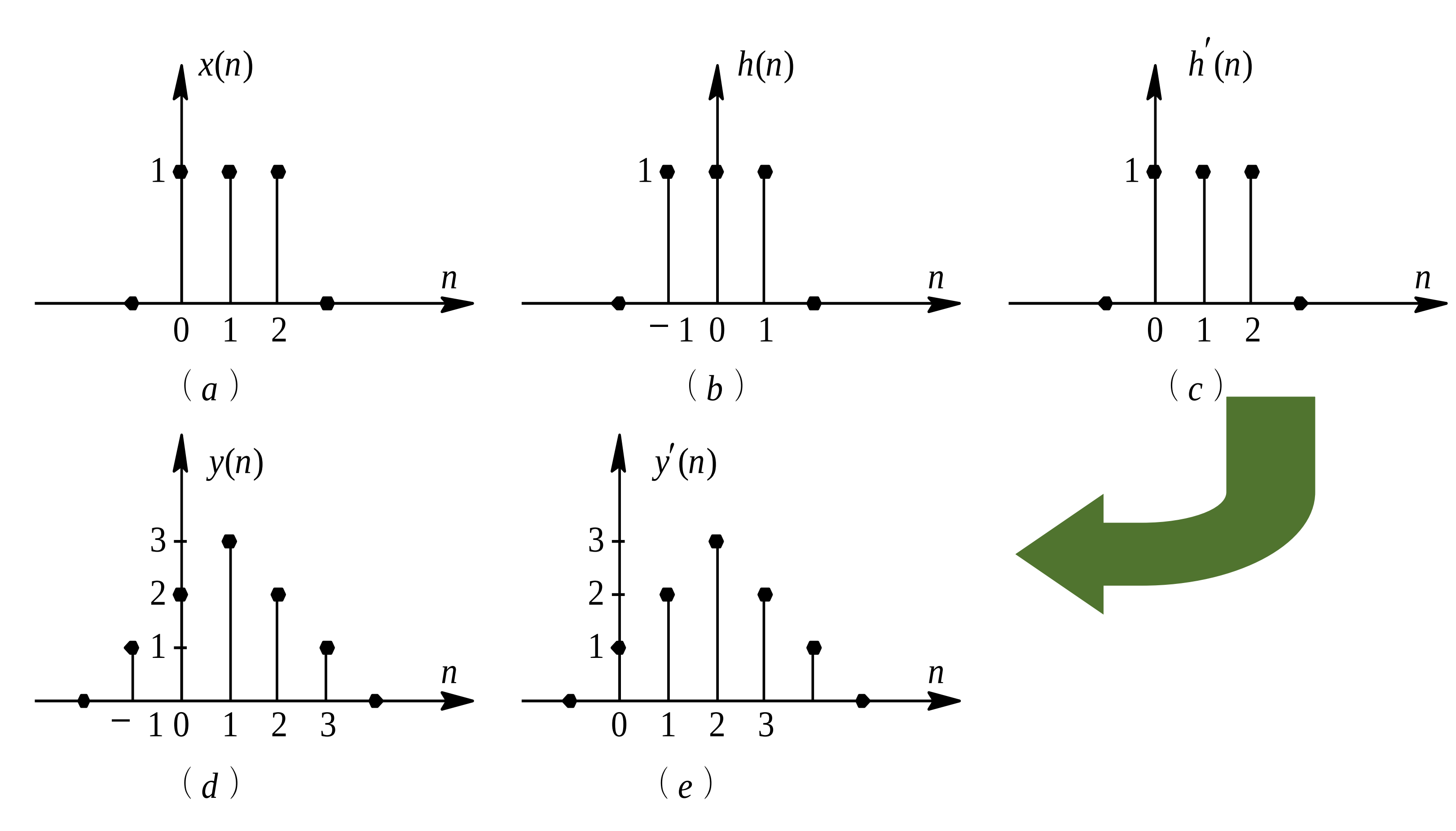
2.2.2 线性系统时不变系统

如果n时刻的输出还取决于n时刻以后的输入序列，在时间上违背了因果性，（系统无法实现），则系统被称为非因果系统

因此系统的因果性是指系统的物理可实现性

因为单位脉冲响应是输入为$\delta(n)$的零状态响应，在$n=0$时刻以前即$n<0$时，没有加入信号，输出只能等于零，因此离散时间LTI系统具有因果性的充分必要条件是系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 满足下式：

$$h(n)=0, n<0$$



非因果系统的延时实现

2.2.2 线性系统时不变系统

- **稳定性**

所谓稳定系统，是指系统有界输入时，即 $|x(n)| \le M_x < \infty$ 系统输出也是有界的，即 $|y(n)| \le M_y < \infty$ （ BIBO, bounded input bounded output）

- 系统稳定的充分必要条件是系统的单位脉冲响应绝对可和，用公式表示为

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$$

2.2.2 线性系统时不变系统

系统稳定时，$h(n)$的模值随n加大而减小，此时序列$h(n)$称为收敛序列

系统不稳定，$h(n)$的模值随n加大而增大，则称为发散序列

2.2.2 线性系统时不变系统

例 2.2.2设线性时不变系统的单位取样响应$h(n) = a^n u(n)$，式中a是实常数，试分析该系统的因果稳定性

解 由于$n<0$时，$h(n)=0$，所以系统是因果系统

稳定性 $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h(n)|=\sum_{n=0}^{+\infty}|a|^n=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N-1}|a|^n=\lim_{N\to\infty}\frac{1-|a|^N}{1-|a|}$$

只有当$|a|<1$时

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h(n)|=\frac{1}{1-|a|}$$

因此系统稳定的条件是$|a|<1$；否则，$|a|\geq 1$时，系统不稳定

2.2.3 线性卷积

- 线性卷积运算主要有以下三种求解方法

  （1）图解法

  （2）解析法

  （3）利用MATLAB的工具箱 w=conv(u,v)

- 下面以图解法作为例子，简单介绍一下线性卷积运算的求解过程

2.2.3 线性卷积

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

- 将$x(n)$和$h(n)$用$x(m)$和$h(m)$表示，并将$h(m)$进行**翻转**，形成$h(-m)$
- 将$h(-m)$**移位**n，得到$h(n-m)$

  $n>0$时，序列右移

  $n<0$时，序列左移
- 将$x(m)$和$h(n-m)$对应项**相乘相加**得到$y(n)$

2.2.3 线性卷积

例 2.2.3 设 $x(n)=R_4(n)$， $h(n)=R_4(n)$， 求 $y(n)=x(n)*h(n)$。

解：根据卷积公式：

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_4(m)R_4(n-m)$$

根据 $R_4(m)$ 和 $R_4(n-m)$ 的非零值区间，求解求和的上、下限：

$$0 \le m \le 3$$

$$0 \le n-m \le 3 \text{ 即 } n-3 \le m \le n$$

因此乘积值的非零区间，要求 m 同时满足上面两个不等式

2.2.3 线性卷积

Demo

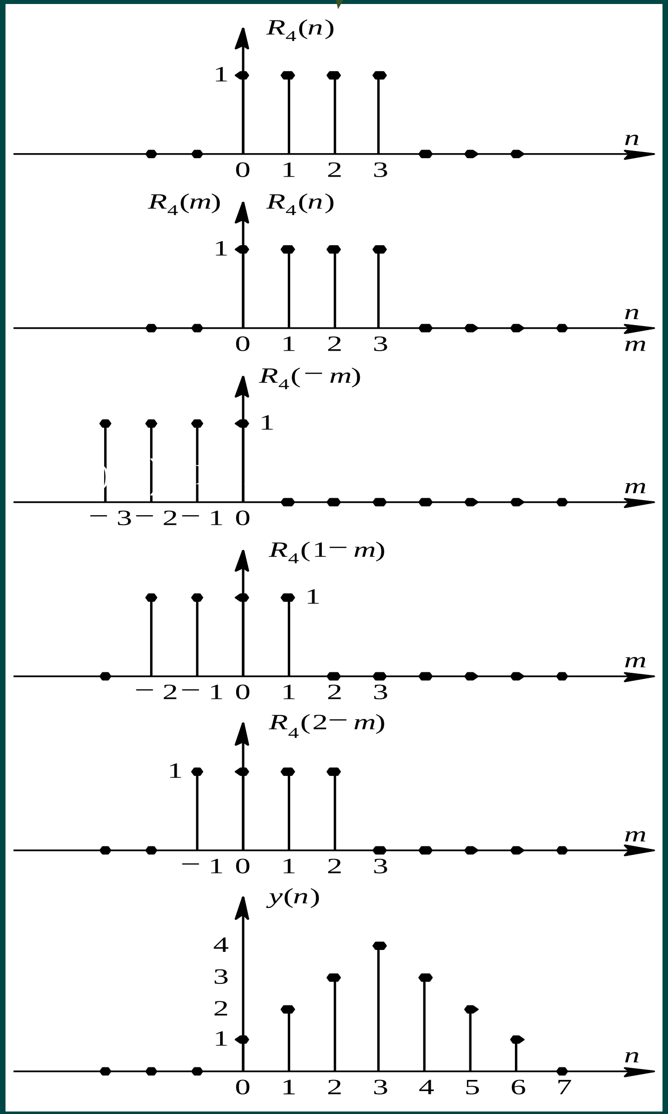
$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_4(m)R_4(n-m)$$

- **卷积过程以及$y(n)$波形如右图所示**

$$0\le n\le 3,\ y(n)=\sum_{m=0}^{n}1=n+1$$

$$4\le n\le 6,\ y(n)=\sum_{m=n-3}^{3}1=7-n$$

$$y(n)=\begin{cases}n+1, & 0\le n\le 3\\ 7-n, & 4\le n\le 6\\ 0, & 0\end{cases}$$



2.2.3 线性卷积

◆ 线性卷积的性质

- 设两序列分别的长度是N和M，线性卷积后的序列长度为：$\boldsymbol{N+M-1}$
- 线性卷积服从

交换律：$x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$

结合律：$x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]=[x(n)*h_1(n)]*h_2(n)$

分配律：$x(n)*[h_1(n)+h_2(n)]=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)$

Note: 对于非线性系统或时变系统，以上性质不成立

2.2.3 线性卷积

- 序列本身与单位脉冲序列的线性卷积等于序列本身

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)=x(n)*\delta(n)$$

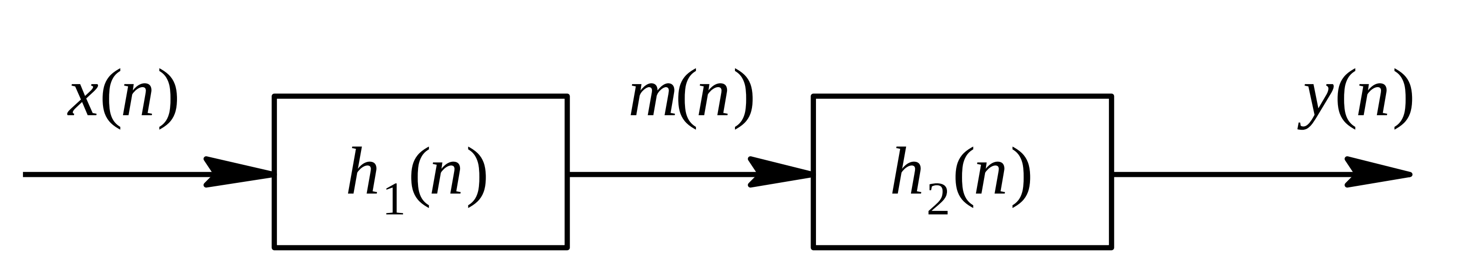
- 序列与移位的单位脉冲序列$\delta(n\text{-}n_0)$进行线性卷积，相当于将序列本身移位n_0（n_0是整常数）

$$y(n)=x(n)*\delta(n-n_0)$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-n_0-m)=x(n-n_0)$$

2.2.3 线性卷积

例2.2.4 单位脉冲响应为$h_1(n)$的系统与单位脉冲响应为$h_2(n)$的系统的级联如下图



设 $x(n)=u(n)$ ， $h_1(n)=\delta(n)-\delta(n-4)$ ， $h_2(n)=a^n u(n)$ ， $|a|<1$，求系统的输出$y(n)$

2.2.3 线性卷积

解:先求第一级的输出$m(n)$，再求$y(n)$。

$$m(n)=x(n)*h_1(\mathrm{n})=u(n)*[\delta(n)-\delta(n-4)]$$ 分配率

$$=u(n)*\delta(n)-u(n)*\delta(n-4)$$

$$=u(n)-u(n-4)$$

$$=R_4(n)$$

$$y(n)=m(n)*h_2(n)=R_4(n)*a^n u(n)$$ 交换率 分配律

$$=a^n u(n)*[\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)]$$

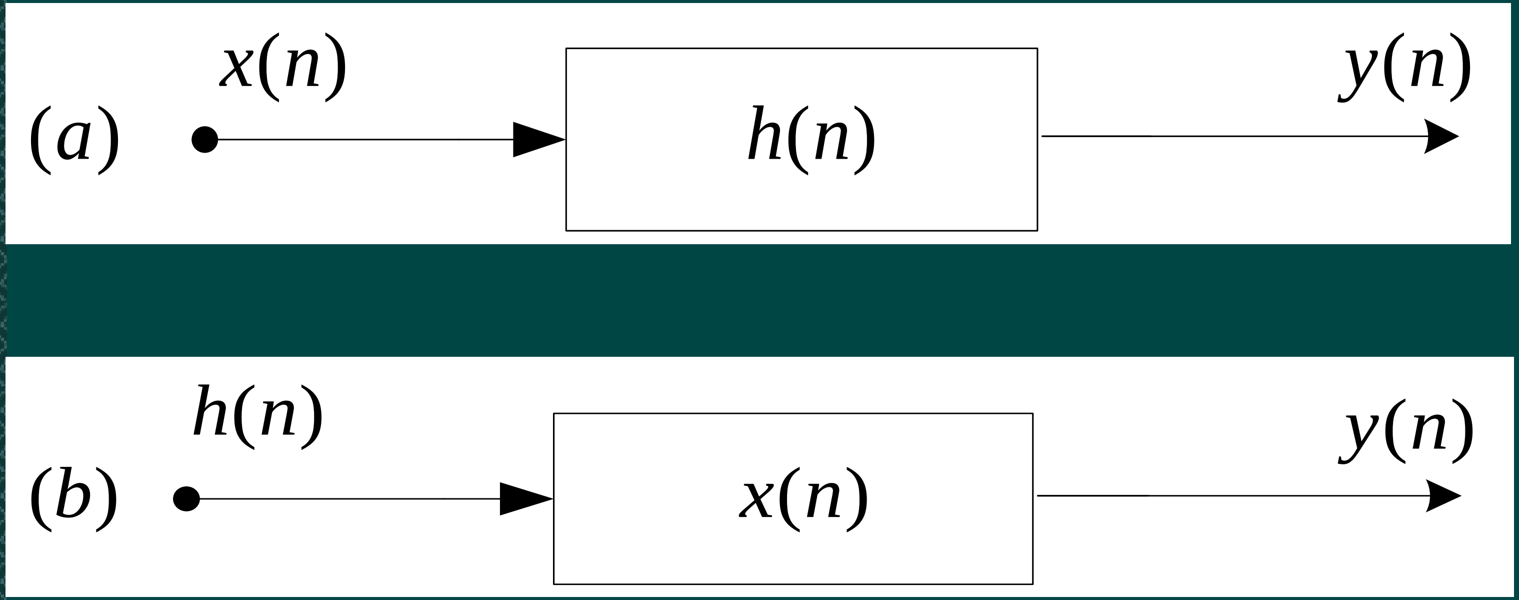
$$=a^n u(n)+a^{n-1}u(n-1)+a^{n-2}u(n-2)+a^{n-3}u(n-3)$$

2.2.3 线性卷积

- 线性卷积运算：符号*
- 由上述线性卷积得到的系统输出序列$y(n)$是系统的零状态响应

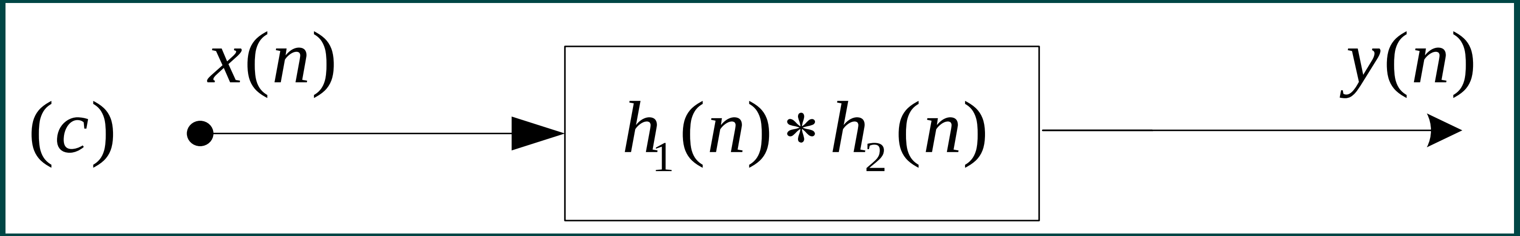
2.2.3 线性卷积

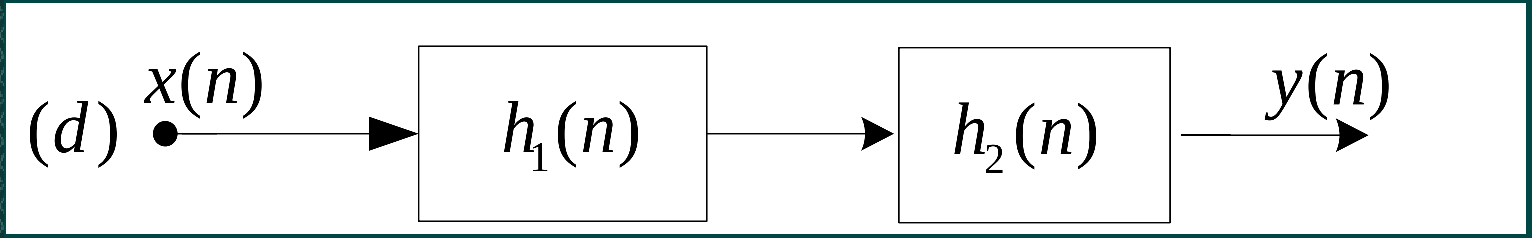
- 系统输出与输入之间的关系



2.2.3 线性卷积

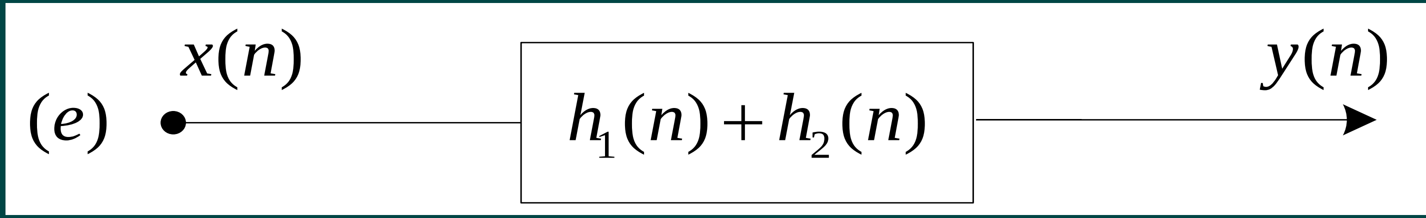
- 系统输出与输入之间的关系

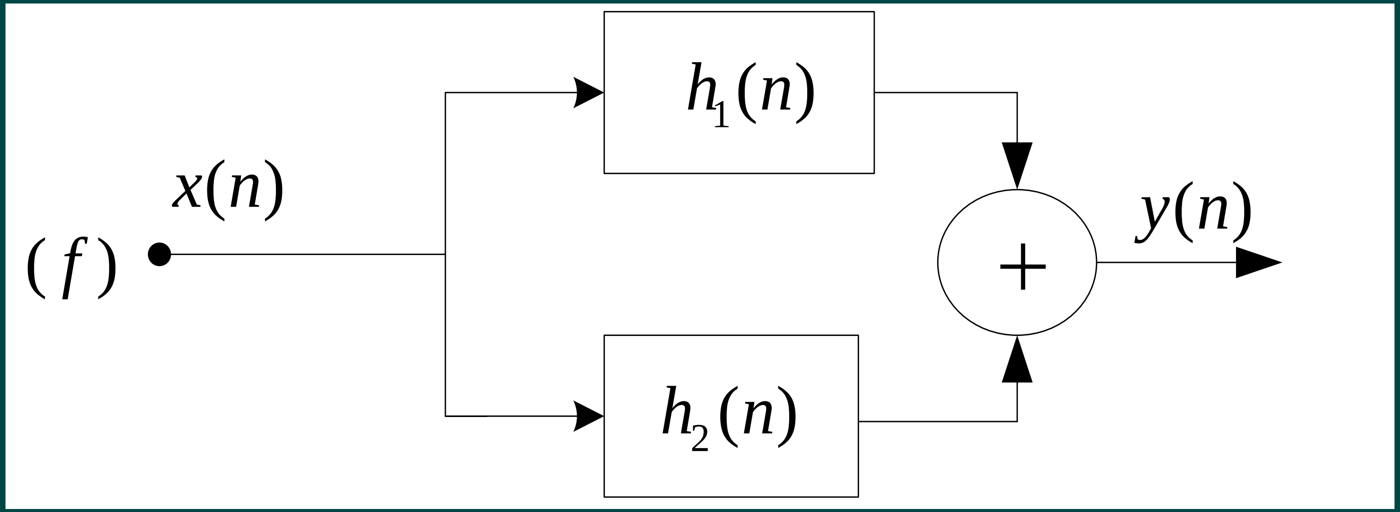




2.2.3 线性卷积

- 系统输出与输入之间的关系





第二章 离散时间信号和系统的时域描述分析

- 离散时间信号的序列描述
  - 常见的离散时间序列及其描述
  - 序列的基本运算
- 离散时间系统的时域分析
  - 离散时间系统
  - 线性系统
  - 线性时不变系统
  - 线性卷积
- 离散时间系统的差分方程描述及求解

2.3.1 离散时间系统的差分方程描述

◆ 输入输出描述法

描述一个系统，可以不管系统内部的结构如何，将系统看成一个黑盒子，只描述或者研究系统输出和输入之间的关系

模拟系统：微分方程描述

离散时间系统：差分方程描述

线性时不变系统：常用线性常系数差分方程

2.3.1 线性常系数差分方程

- 一个N阶线性常系数差分方程用下式表示：

$$y(n)=\sum_{i=0}^{M}b_i x(n-i)-\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k) \qquad (2.3.1)$$

或者 $$\sum_{i=0}^{M}b_i x(n-i)=\sum_{k=0}^{N}a_k y(n-k), a_0=1 \qquad (2.3.2)$$

式中 a_k 和b_i 均为常数

- **线性**：式中$y(n-k)$和$x(n-i)$项只有一次幂，也没有相互交叉项，故称为<u>线性常系数差分方程</u>

- **阶数**：由方程$y(n-k)$项中k的取值最大与最小之差确定。在(2.3.2)式中，$y(n-k)$项k最大的取值为N，k的最小取值为零，因此称为N 阶差分方程。

2.3.1 线性常系数差分方程的求解

- 已知系统的输入序列，通过求解差分方程可求输出序列

- 求解差分方程的基本方法有：
  - 变换域方法：Z变换
  - 时域解法

    经典解法：闭合形式的解（齐次解和特解），应用少。

    递推解法：数值解（本节详细讨论）

    已知：输入序列和N个初始条件

    求解：n时刻的输出，并递推求出$n+1$时刻的输出

2.3.1 线性常系数差分方程的求解

- 差分方程本身就是一个适合递推法求解的方程

$$y(n)=\sum_{i=0}^{M} b_i x(n-i)-\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) \qquad (2.3.1)$$

$$\sum_{i=0}^{M} b_i x(n-i)=\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k), a_0=1 \qquad (2.3.2)$$

- 重点：讨论初始条件对线性、时不变性、因果性、稳定性的影响

2.3.1 线性常系数差分方程的求解

例 2.3.1 设系统用差分方程$y(n)=ay(n-1)+x(n)$描述，输入序列$x(n)=\delta(n)$，求输出序列$y(n)$

解：该系统差分方程是一阶差分方程，需要一个初始条件

(1) **设初始条件** $y(-1)=0$

$$y(n)=ay(n-1)+x(n)$$

$n=0$时，$y(0)=ay(0-1)+x(0)=ay(-1)+\delta(0)=1$

$n=1$时，$y(1)= ay(1-1)+x(1)=ay(0)+\delta(1)=a$

$n=2$时，$y(2)=ay(1)+\delta(2)=a^2$

…

$n=n$时，$y(n)=a^n$

$y(n)=a^nu(n)$

2.3.1 线性常系数差分方程的求解

(2) 设初始条件$y(-1)=1$

$n=0$时，$y(0)=ay(-1)+\delta(0)=1+a$

$n=1$时，$y(1)=ay(0)+\delta(1)=(1+a)a$

$n=2$时，$y(2)=ay(1)+\delta(2)=(1+a)a^2$

…

$n=n$时，$y(n)=(1+a)a^n$

$y(n)=(1+a)a^n u(n)$

2.3.1 线性常系数差分方程的求解

- **分　析**

对于同一个差分方程和同一个输入信号，因为初始条件不同，得到的输出信号是不相同的

对于**实际系统**，用递推解法求解，总是由初始条件向$n>0$的方向递推，是一个因果解

但对于**差分方程**，其本身也可以向$n<0$的方向递推，得到的是非因果解

结论1：差分方程本身并不能确定该系统是因果还是非因果系统，还需要用初始条件进行限制(因果性：在$n<0$时，没有加入信号，输出只能等于零)

结论2：线性常系数差分方程描述的系统并不一定是线性时不变系统，这和系统的初始状态有关

2.3.1 线性常系数差分方程的求解

例2.3.2 设系统用一阶差分方程$y(n)=ay(n-1)+x(n)$描述，初始条件$y(-1)=1$，试分析该系统是否是线性时不变系统

解

时不变性: $y(n) = T[x(n)] \rightarrow y(n-k) = T[x(n-k)]$

线性: $L[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]=a_1L[x_1(n)]+a_2L[x_2(n)]$

$\forall a_1, a_2, x_1(n), x_2(n)$

下面通过设输入信号$x_1(n)=\delta(n)$，$x_2(n)=\delta(n-1)$和$x_3(n)=\delta(n)+\delta(n-1)$来检验系统是否是线性时不变

2.3.1 线性常系数差分方程的求解

(1) $\boldsymbol{x_1(n)=\delta(n)}$，$y_1(-1)=1$

$y_1(\mathrm{n})=ay_1(n-1)+\delta(n)$和例2.3.1(2)相同，输出通式为：

$$y_1(n)=(1+a)a^n u(n)$$

(2) $\boldsymbol{x_2(n)=\delta(n-1)}$，$y_2(-1)=1$

$$y_2(n)=ay_2(n-1)+x_2(n)= ay_2(n-1)+\delta(n-1)$$

$n=0$时，$n=1$时，$n=2$时，…$n=n$时，

$$y_2(0)=ay_2(-1)+\delta(-1)=a$$

$$y_2(1)=a\, y_2(0)+\delta(0)=1+a^2$$

$$y_2(2)=a\, y_2(1)+\delta(1)=(1+ a^2)a \quad \ldots$$

$$y(n-k) \stackrel{?}{=} \mathrm{T}[x(n-k)]$$

$$y_2(n)=(1+ a^2)a^{n-1}$$

通式为：$y_2(n)=(1+ a^2)a^{n-1}\, u(n-1)+a\delta(n)$

$$\neq y_1(n-1)$$

时变系统

2.3.1 线性常系数差分方程的求解

(3) $x_3(n)=\delta(n)+\delta(n-1)$; $y_3(-1)=1$

$$y_3(n)=ay_3(n-1)+\delta(n)+\delta(n-1)$$

$n=0$时，$n=1$时，$n=2$时，…$n=n$时，

$$y_3(0)=a\,y_3(-1)+\delta(0)+\delta(-1)=1+a$$

$$y_3(1)=a\,y_3(0)+\delta(1)+\delta(0)=1+a+a^2$$

$$y_3(2)=a\,y_3(1)+\delta(2)+\delta(1)=(1+a+a^2)a$$

…

$$y_3(n)=(1+a+a^2)a^{n-1}$$

通式为：

$$y_3(n)=T[\delta(n)+\delta(n-1)]=(1+a+a^2)a^{n-1}u(n-1)+(1+a)\delta(n)$$

$$T[\delta(n)]+T[\delta(n-1)]=(2+a+a^2)a^{n-1}u(n-1)+(1+2a)\delta(n)$$

$$L[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]\neq a_1L[x_1(n)]+a_2L[x_2(n)]$$

$$\forall a_1, a_2, x_1(n), x_2(n)$$

非线性系统

非线性时不变系统

2.3.1 线性常系数差分方程的求解

- 采用线性常系数差分方程描述系统时，如果没有附加的约束条件，则它不能唯一地确定一个系统的输入和输出关系，也不能保证系统一定是线性时不变系统

- 约定：凡用线性常系数差分方程所描述的系统都是指线性时不变系统

Back