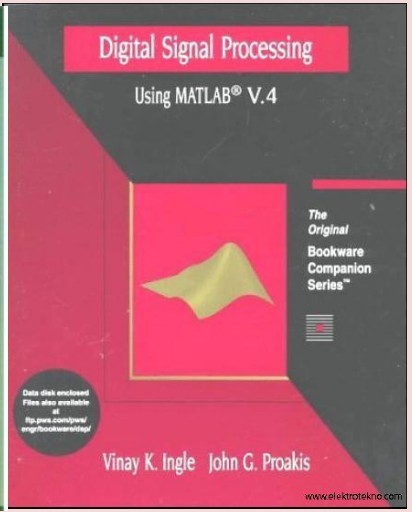
数字信号处理

任课教师: 田春娜 (博士)
单位：西安电子科技大学电子工程学院
Email: chnatian@xidian.edu.cn
chnatian@gmail.com

参考书籍



- 高新波, 阔永红, 田春娜. 数字信号处理. 高等教育出版社, 2014.
- 史林, 赵树杰. 数字信号处理. 科学出版社. 2007.
- Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer. Discrete-Time Signal Processing.电子工业出版社, 2011.
- 高西全, 丁玉美. 数字信号处理及其习题解答. 西电出版社, 2008.
- Vinay K.Ingle, John G. Proakis. Digital Signal Processing Using MATLAB®. Northeastern University, 1996.

引 言

- 离散线性时不变系统的差分方程：

$$y(n)=\sum_{i=o}^{M}b_i x(n-i)-\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k) \quad (7.0.1)$$

- 其系统函数可表示为：

$$H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{M}b_i z^{-i}}{1+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}} \quad (7.0.2)$$

- 当 $N\geq 1$ ，a_k 中至少有一个非零系数时，该系统中存在反馈回路，其所对应的滤波器称作**无限长脉冲响应(IIR)滤波器**
- 当 a_k 均为零系数时，其所对应的滤波器称作**有限长脉冲响应(FIR)滤波器**

引言

◆ **IIR滤波器**

- 可利用模拟滤波器的成熟理论
- 主要对滤波器的幅频响应特性进行逼近，其相频响应特性是非线性的
- 为得到线性相位特性，对IIR滤波器必须另加相位校正网络，使滤波器设计变得复杂，成本也高，又难以得到严格的线性相位特性

引 言

- 滤波器不发生相位失真的方法有两个
  - 滤波器的频率响应是实的，即滤波器具有**零相位特性**，此时输出与输入之间只存在增益的差别

    零相位滤波器

  - 设计一个实的因果的零相位滤波器，往往比较困难；常用的零相位滤波器往往是非因果的，它不能用于实时信号处理

    线性相位滤波器

  - 滤波器具有**线性相位特性**，FIR滤波器的最大特点是可以把它设计成具有线性相位的滤波器

引 言

◆ FIR滤波器

滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$ 是有限长序列, N-1阶FIR数字滤波器的系统函数为

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}$$

- 保证满足幅度特性
- 容易做到严格的线性相位
- $H(z)$是z^{-1}的N-1次多项式，Z平面有$N-1$个零点，$z=0$是$(N$-1)阶重极点，因此永远稳定
- 稳定和线性相位特性是FIR滤波器最突出的优点

第7章 FIR数字滤波器的设计

- **7.1 线性相位FIR滤波器的条件及特点**
  - 7.1.1 线性相位FIR滤波器
  - 7.1.2 线性相位条件
  - 7.1.3线性相位FIR滤波器幅度特性
  - 7.1.4 线性相位FIR滤波器零点分布
- **7.2 FIR滤波器的窗函数设计法**
  - 7.2.1窗函数设计法的原理
  - 7.2.2 典型窗函数极其特性
  - 7.2.3 窗函数法设计FIR滤波器步骤
- **7.3 FIR滤波器的频率采样设计法**
  - 7.3.1 FIR滤波器频率采样法的原理
  - 7.3.2 频率采样法的逼近误差分析

7.1.1 线性相位FIR滤波器

对于长度为N的$h(n)$，频率响应函数为

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n}$$

$$= H_g(\omega) e^{j\theta(\omega)} \qquad (7.1.1)$$

式中，$H_g(\omega)$为幅度特性，为ω的实函数，可能取负值，不同于$|H(e^{j\omega})|$

$\theta(\omega)$为相位特性

第7章 FIR数字滤波器的设计

- **7.1 线性相位FIR滤波器的条件及特点**
  - 7.1.1 线性相位FIR滤波器
  - 7.1.2 线性相位条件
  - 7.1.3线性相位FIR滤波器幅度特性
  - 7.1.4 线性相位FIR滤波器零点分布
- **7.2 FIR滤波器的窗函数设计法**
  - 7.2.1窗函数设计法的原理
  - 7.2.2 典型窗函数极其特性
  - 7.2.3 窗函数法设计FIR滤波器步骤
- **7.3 FIR滤波器的频率采样设计法**
  - 7.3.1 FIR滤波器频率采样法的原理
  - 7.3.2 频率采样法的逼近误差分析

7.1.2 线性相位条件

$H(e^{j\omega})$ 线性相位是指$\theta(\omega)$是ω的线性函数，即

第一类线性相位
或严格线性相位

$\theta(\omega)= -\tau\omega$，$\tau$为常数 (7.1.2)

如果$\theta(\omega)$满足下式：

第二类线性相位
或广义线性相位

$\theta(\omega)=\theta_0 -\tau\omega$, θ_0是初始相位 (7.1.3)

严格地说，此时$\theta(\omega)$不具有线性相位，但以上两种情况都满足群时延是一个常数，即

$$-\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}=\tau$$

7.1.2 线性相位条件

◆为了使滤波器对实信号的处理结果仍是实信号，一般要求$h(n)$为实序列

◆满足第一类线性相位的时域约束条件是：

$h(n)$是实序列，且对$(N-1)/2$偶对称，即

$$\tau=(N-1)/2 \qquad h(n)=h(N-n-1) \qquad (7.1.4)$$

◆满足第二类线性相位的时域约束条件是：

$h(n)$是实序列，且对$(N-1)/2$奇对称，即

$$\tau=(N-1)/2 \qquad h(n)=-h(N-n-1) \qquad (7.1.5)$$

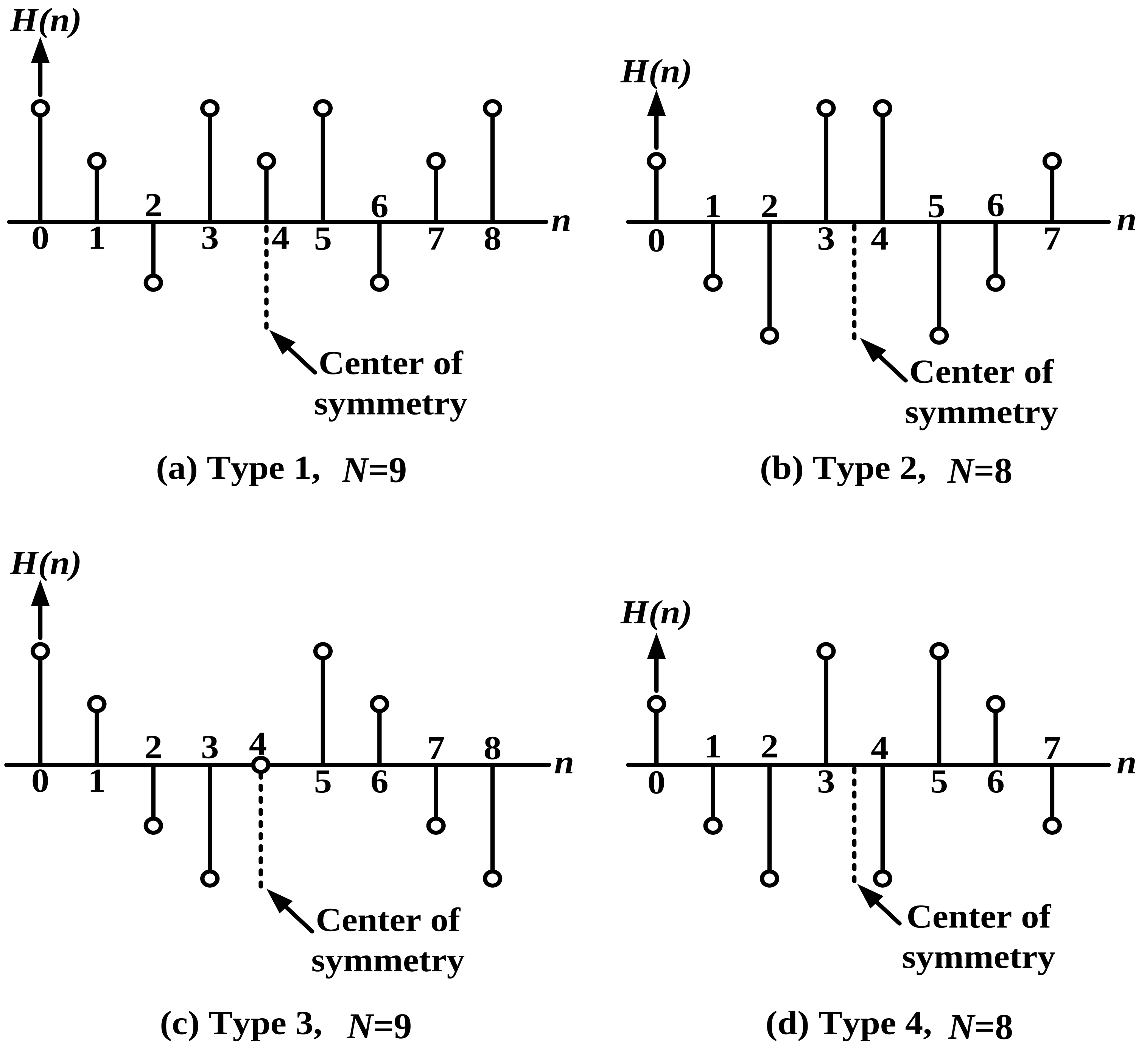
第7章 FIR数字滤波器的设计

- **7.1 线性相位FIR滤波器的条件及特点**
  - 7.1.1 线性相位FIR滤波器
  - 7.1.2 线性相位条件
  - 7.1.3线性相位FIR滤波器幅度特性
  - 7.1.4 线性相位FIR滤波器零点分布
- **7.2 FIR滤波器的窗函数设计法**
  - 7.2.1窗函数设计法的原理
  - 7.2.2 典型窗函数极其特性
  - 7.2.3 窗函数法设计FIR滤波器步骤
- **7.3 FIR滤波器的频率采样设计法**
  - 7.3.1 FIR滤波器频率采样法的原理
  - 7.3.2 频率采样法的逼近误差分析

7.1.3线性相位FIR滤波器幅度特性

- 当 N 取奇数和偶数时，对$H_g(w)$的约束不同，因此，对于两类线性相位特性，分四种情况讨论其幅度特性的特点

- 这些特点对正确设计线性相位FIR滤波器有重要的指导作用



H(n)
0 1 2 3 4 5 6 7 8
n
Center of symmetry
(a) Type 1, N=9
H(n)
0 1 2 3 4 5 6 7
n
Center of symmetry
(b) Type 2, N=8
H(n)
0 1 2 3 4 5 6 7 8
n
Center of symmetry
(c) Type 3, N=9
H(n)
0 1 2 3 4 5 6 7
n
Center of symmetry
(d) Type 4, N=8

7.1.3线性相位FIR滤波器幅度特性

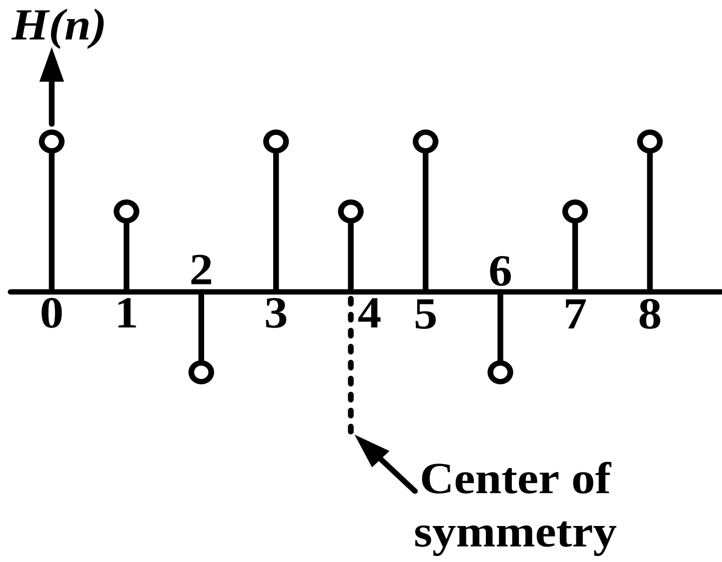
类型1：$h(n)=h(N-n-1)$, N=奇数，推导其频率响应：

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\, e^{-j\omega n}$$

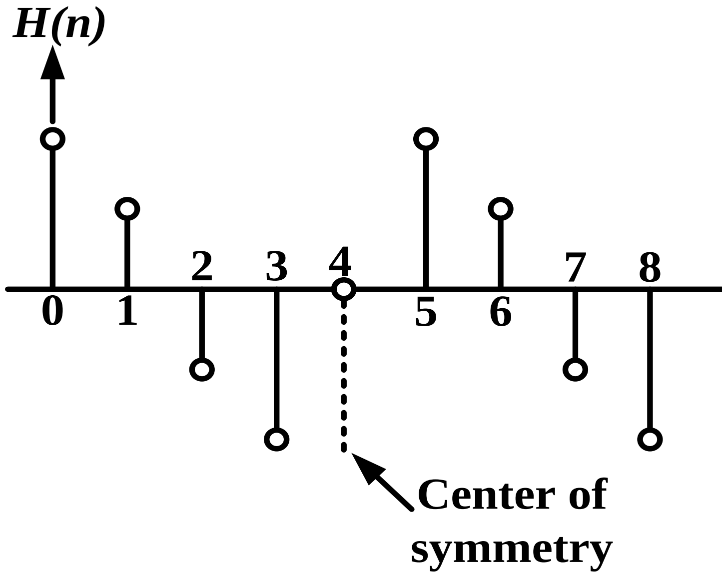
$$=\underbrace{\sum_{n=0}^{(N-3)/2} h(n)\cdot e^{-j\omega n}}_{\text{前}(N-1)/2}+\underbrace{h\left(\frac{N-1}{2}\right)\cdot e^{-j(N-1)\omega/2}}_{\text{中心点}}+\underbrace{\sum_{n=(N+1)/2}^{(N-1)} h(n)\, e^{-j\omega n}}_{\text{后}(N-1)/2}$$

- 令$m=N-1-n$，有

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=0}^{(N-3)/2} h(n)\cdot e^{-j\omega n}+h\left(\frac{N-1}{2}\right)\cdot e^{-j(N-1)\omega/2}+\sum_{m=0}^{(N-3)/2} h(N-1-m)\, e^{-j(N-1-m)\omega}$$



(a) Type 1, N=8



(c) Type 3, N=8

◆ 令并利用$h(n)$的对称性，有 $h(N\text{-}1\text{-}m) = h(m)$，提取 $e^{-j(N-1)\omega/2}$ 项

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{(N-3)/2}h(n)e^{-j\omega n}+h(\frac{N-1}{2})e^{-j(N-1)\omega/2}+\sum_{m=0}^{(N-3)/2}h(N-1-m)e^{-j(N-1-m)\omega}$$

$$=e^{-j(N-1)\omega/2}\left[\sum_{m=0}^{(N-3)/2}h(m)e^{-j\omega m}e^{j(N-1)\omega/2}+\sum_{m=0}^{(N-3)/2}h(m)e^{j\omega m}e^{-j(N-1)\omega/2}+h(\frac{N-1}{2})\right]$$

$$=e^{-j(N-1)\omega/2}\left[2\sum_{m=0}^{(N-3)/2}h(m)\cos[(\frac{N-1}{2}-m)\omega]+h(\frac{N-1}{2})\right] \tag{7.1.6}$$

再令$m=(N-1)/2-n$，得

$$H\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j(N-1)\omega/2}\left\{2\sum_{n=1}^{(N-1)/2}h(\frac{N-1}{2}-n)\cdot\cos\left(\omega n\right)+h(\frac{N-1}{2})\right\}$$

7.1.3线性相位FIR滤波器幅度特性

$$H\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j(N-1)\omega/2}\left\{2\sum_{n=1}^{(N-1)/2}h\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\cdot\cos(\omega n)+h\left(\frac{N-1}{2}\right)\right\}$$

$$h\left(\frac{N-1}{2}\right)\cos(\omega 0)$$

令

$$a(n)=\begin{cases}h\left(\frac{N-1}{2}\right) & n=0\\ 2h\left(\frac{N-1}{2}-n\right) & n=1,2,\cdots(N-1)/2\end{cases}$$

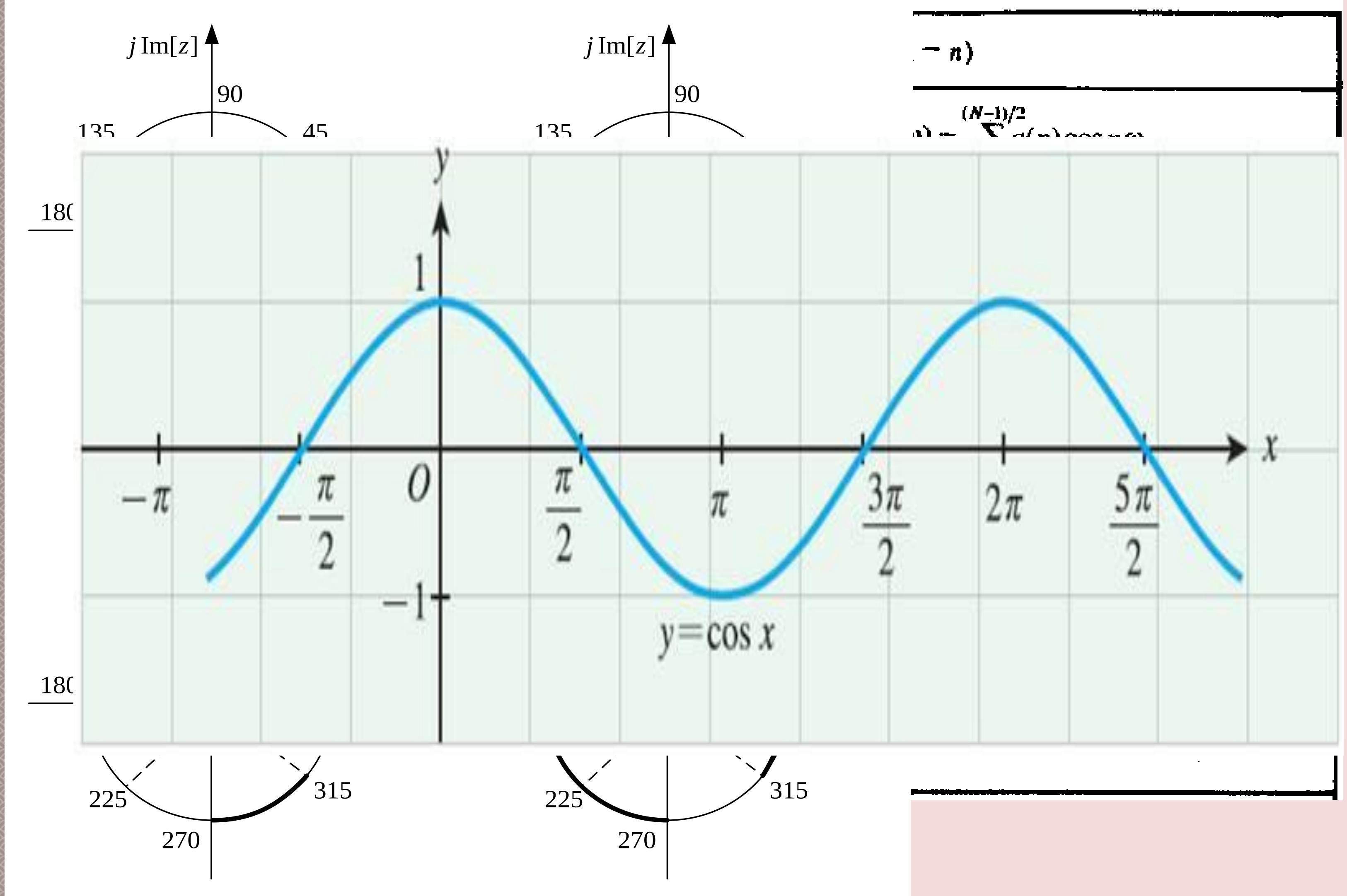
则

$$H\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j(N-1)\omega/2}\sum_{n=0}^{(N-1)/2}a(n)\cos(\omega n) \qquad (7.1.7)$$

对比： $H(e^{j\omega})=e^{j\theta(\omega)}H_g(\omega)$

$$\theta(\omega)=-\frac{N-1}{2}\omega \qquad H_g(\omega)=\sum_{n=0}^{(N-1)/2}a(n)\cos(\omega n)$$

(7.1.8) 线性相位 (7.1.9)



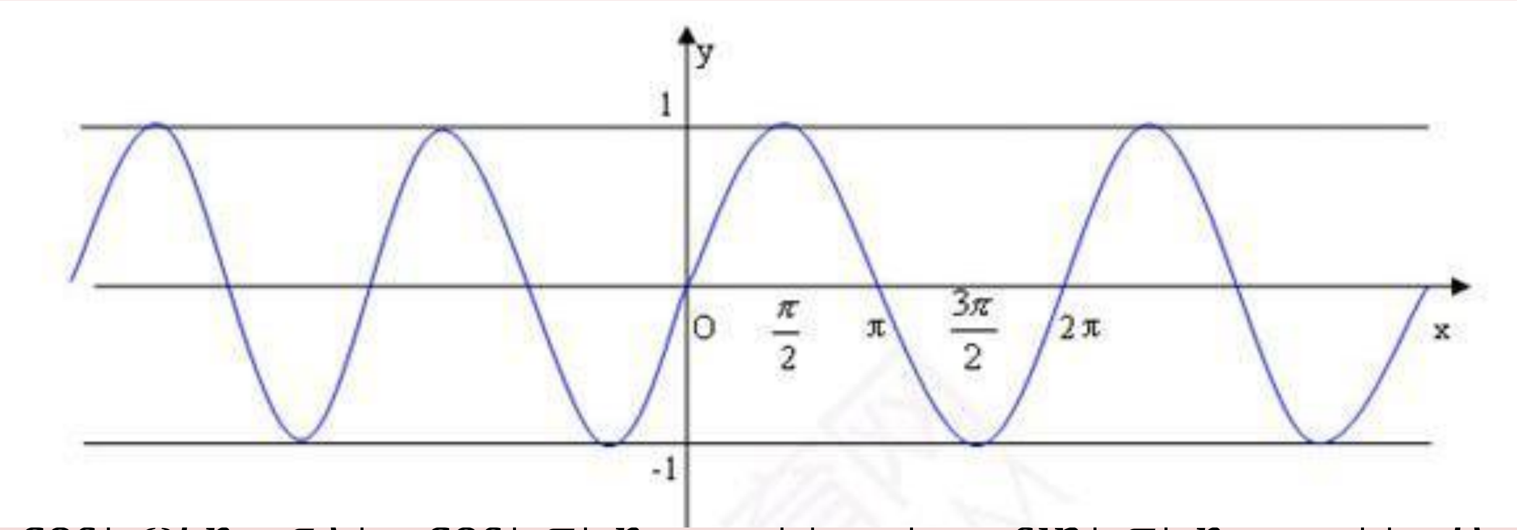
数字带通的通带频段

数字带阻的通带频段

由于式中*cosωn*项对*ω*=0,*π*,2*π*皆为偶对称，因此幅度特性的特点是对*ω*=0,*π*,2*π*是偶对称的，可用于设计各种滤波器

7.1.3线性相位FIR滤波器幅度特性

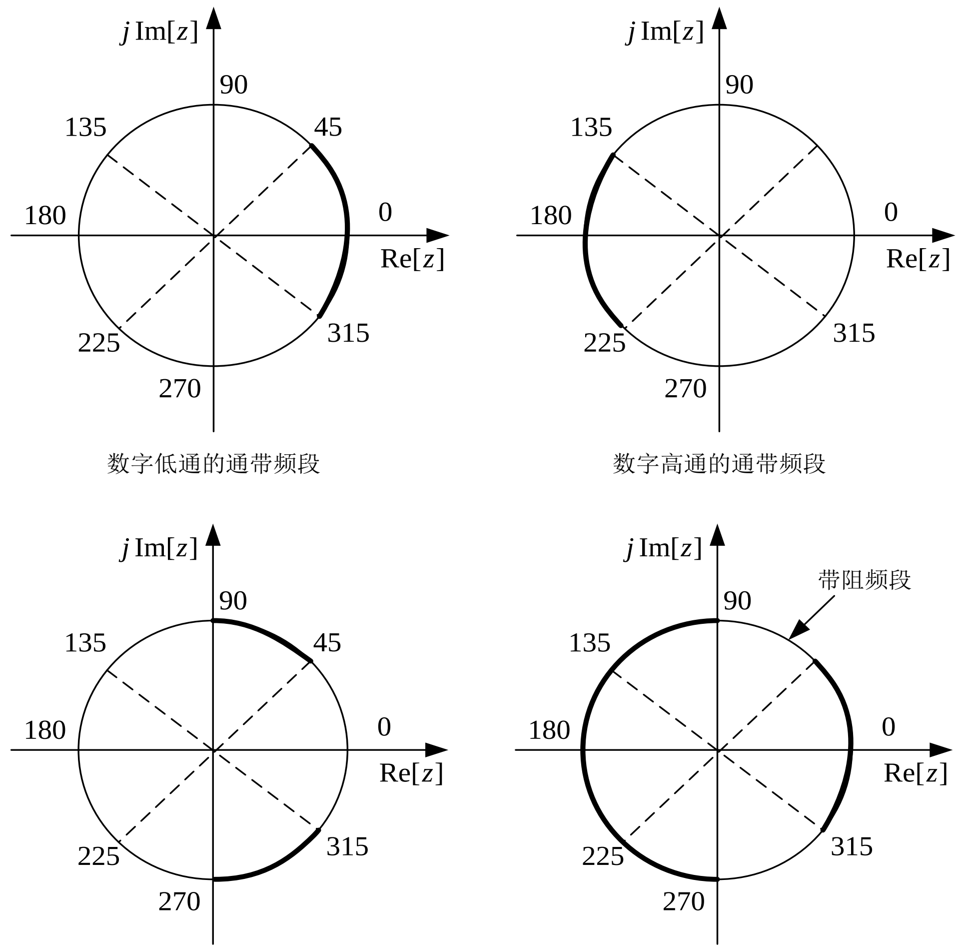
类型2：$h(n)=h(N-1-n)$，N为偶数



$$\cos\left[\omega(n-\tau)\right]=\cos\left[\pi\left(n-\frac{\quad}{2}\right)+\frac{\quad}{2}\right]=-\sin\left[\pi\left(n-\frac{\quad}{2}\right)\right]=0$$

$N/2$为整数

所以 $H_g(\pi)=0$ ，说明 $H_g(\omega)$ 关于 $\omega=\pi$ 奇对称，当 $\omega=2\pi$ 时，$H_g(\omega)$关于 $\omega=0$和 $\omega=2\pi$ 偶对称

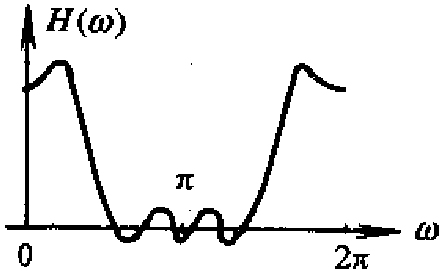


数字低通的通带频段　数字高通的通带频段

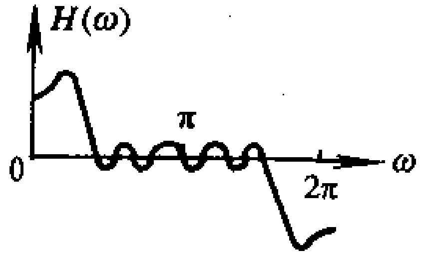
数字带通的通带频段　数字带阻的通带频段

$h(N-1-n)$

$$H_g(\omega)=\sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n)\cos n\omega$$



$$H_g(\omega)=\sum_{n=0}^{(N-1)/2} 2h(n)\cos\left[\omega(n-\tau)\right]$$



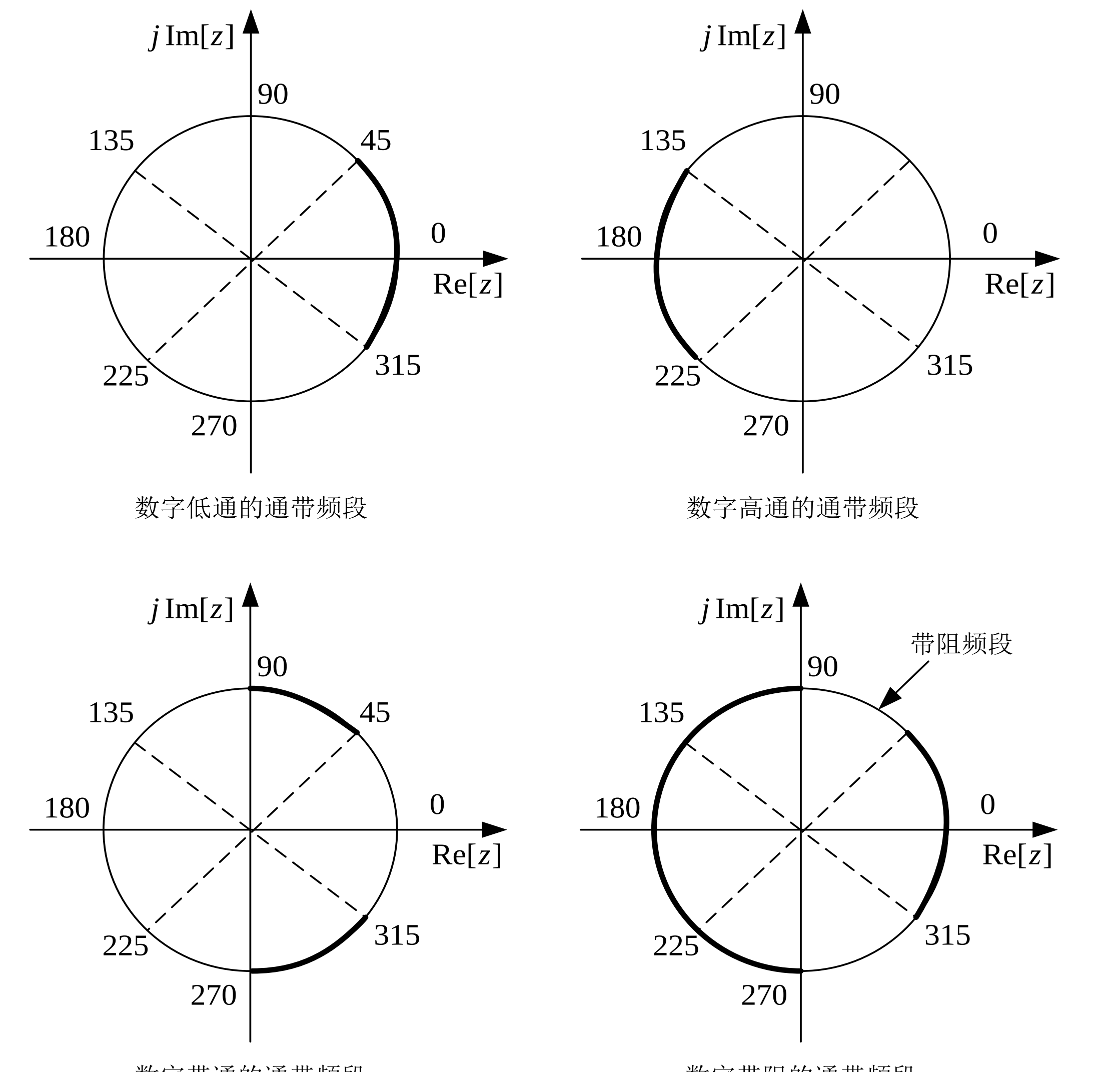
$H_g(\omega)$关于$\omega=\pi$ 奇对称，当$\omega=2\pi$ 时，$H_g(\omega)$关于$\omega=0$和 $\omega=2\pi$偶对称，因此 类型2不能实现高通和带阻滤波器

7.1.3线性相位FIR滤波器幅度特性

类型3：$h(n)=-h(N-1-n)$，N 为奇数

$$H_g(\omega)=\sum_{n=0}^{(N-1)/2} 2h(n)\sin\left[\omega(n-\tau)\right]$$

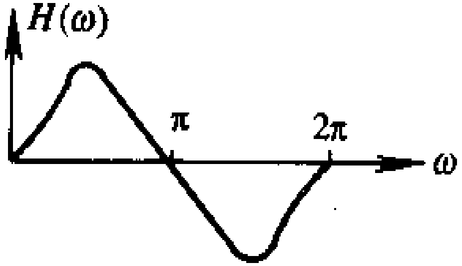
式中，N 为奇数，$\tau=(N-1)/2$ 是整数，说明 $H_g(\omega)$ 关于 $\omega=0$、$\omega=\pi$ 和 $\omega=2\pi$ 奇对称，因此类型3只能用来实现带通滤波器



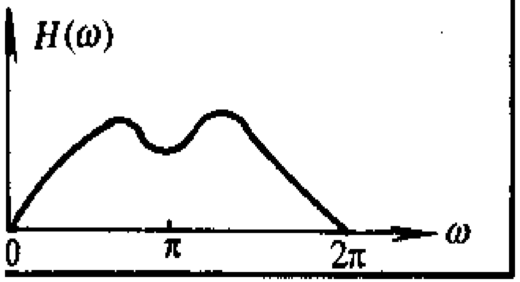
数字低通的通带频段　数字高通的通带频段

数字带通的通带频段　数字带阻的通带频段

$\omega) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} 2h(n)\sin\left[\omega(n-\tau)\right]$



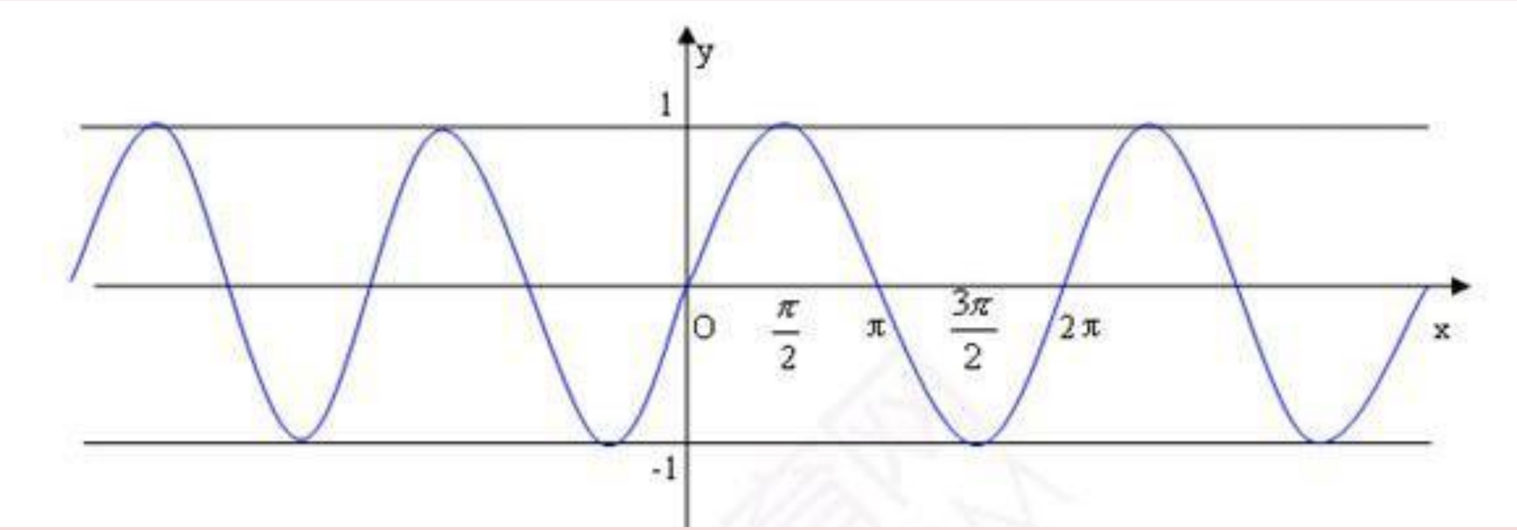
$(\omega) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} 2h(n)\sin\left[\omega(n-\tau)\right]$



$H_g(\omega)$关于$\omega=0$、$\omega=\pi$和$\omega=2\pi$奇对称，因此类型

3只能用来实现带通滤波器

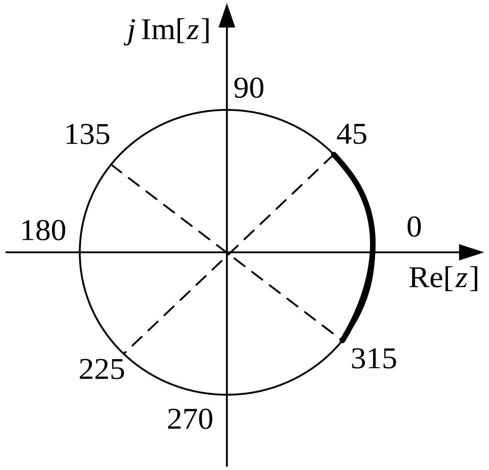
7.1.3线性相位FIR滤波器幅度特性



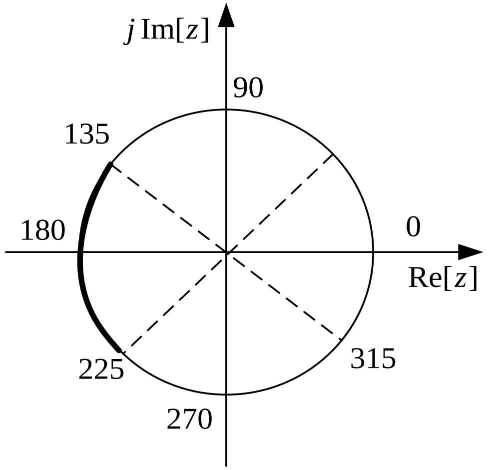
当$\omega = 0$和$\omega = 2\pi$时，$\sin\left[\omega(n-\tau)\right] = 0$

当$\omega = \pi$时，$\sin\left[\omega(n-\tau)\right] = (-1)^{n-N/2}$，取得最大值

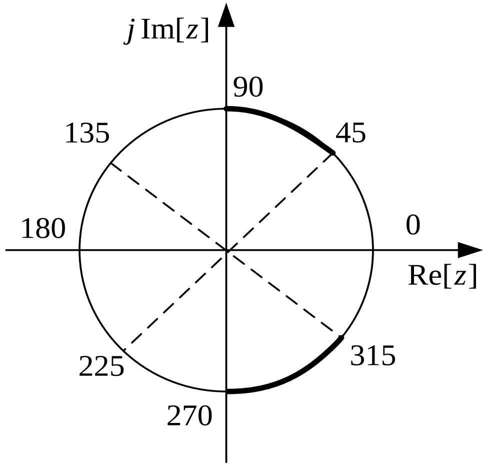
说明$H_g(\omega)$关于$\omega = 0$ 和 $\omega = 2\pi$奇对称，关于 $\omega = \pi$偶对称，因此类型4不能用来实现低通和带阻滤波器



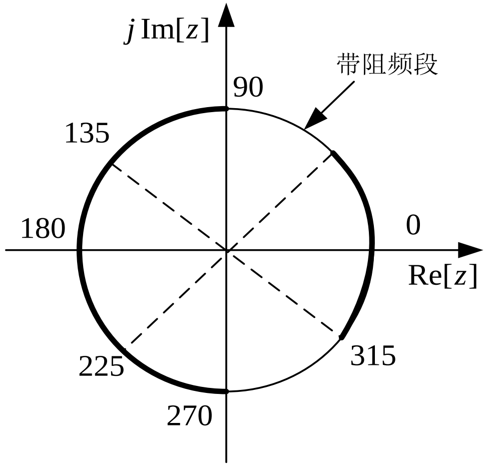
数字低通的通带频段



数字高通的通带频段

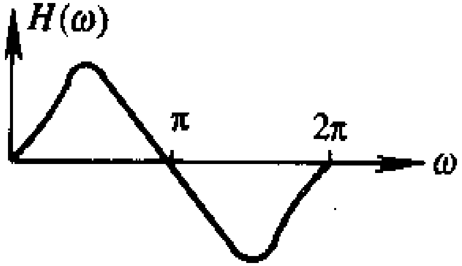


数字带通的通带频段

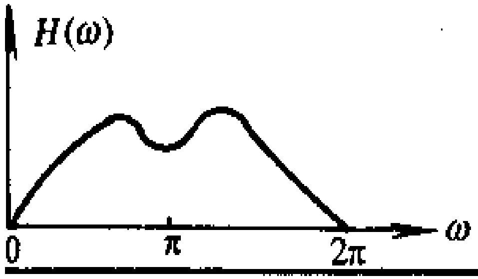


数字带阻的通带频段

$$\omega) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} 2h(n)\sin\left[\omega(n-\tau)\right]$$



$$(\omega) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} 2h(n)\sin\left[\omega(n-\tau)\right]$$



$H_g(\omega)$关于$\omega=0$和$\omega=2\pi$奇对称，关于 $\omega=\pi$ 偶对称，因此类型 4 不能用来实现低通和带阻滤波器

第7章 FIR数字滤波器的设计

- **7.1 线性相位FIR滤波器的条件及特点**
  - 7.1.1 线性相位FIR滤波器
  - 7.1.2 线性相位条件
  - 7.1.3线性相位FIR滤波器幅度特性
  - 7.1.4 线性相位FIR滤波器零点分布
- **7.2 FIR滤波器的窗函数设计法**
  - 7.2.1窗函数设计法的原理
  - 7.2.2 典型窗函数极其特性
  - 7.2.3 窗函数法设计FIR滤波器步骤
- **7.3 FIR滤波器的频率采样设计法**
  - 7.3.1 FIR滤波器频率采样法的原理
  - 7.3.2 频率采样法的逼近误差分析

7.1.4 线性相位FIR滤波器零点分布

- 线性相位条件 $h(n) = \pm h(N-1-n)$
- 传输函数

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \pm h(N-1-n)\cdot z^{-n} \right\}$$

令 $m = N-1-n$

$$= \pm \sum_{m=0}^{N-1} h(m) z^{-(N-1-m)} = \pm z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} h(m)(z^{-1})^{-m}$$

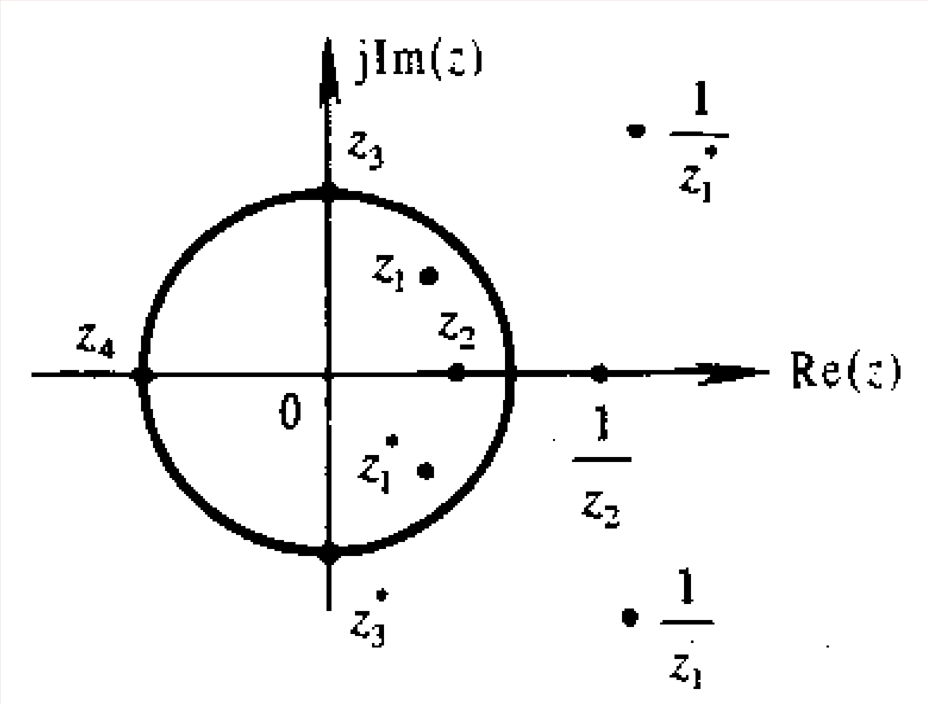
$$= \pm z^{-(N-1)} H\left(z^{-1}\right)$$

'+'偶对称多项式
'-'奇对称多项式

7.1.4 线性相位FIR滤波器零点分布

➢ 传输函数 $H(z)=\pm z^{-(N-1)}H(z^{-1})$

上式为实系数多项式,其零点是复共轭成对出现的, 左右两边相等说明：零点互为倒数，即，如果 $z=z_0$ 是零点，那么 $z=1/z_0$ 也是该滤波器的零点, 因此零点最多4个一组



线性相位FIR滤波器零点分布图

第7章 FIR数字滤波器的设计

- **7.1 线性相位FIR滤波器的条件及特点**
  - 7.1.1 线性相位FIR滤波器
  - 7.1.2 线性相位条件
  - 7.1.3线性相位FIR滤波器幅度特性
  - 7.1.4 线性相位FIR滤波器零点分布
- **7.2 FIR滤波器的窗函数设计法**
  - 7.2.1窗函数设计法的原理
  - 7.2.2 典型窗函数极其特性
  - 7.2.3 窗函数法设计FIR滤波器步骤
- **7.3FIR滤波器的频率采样设计法**
  - 7.3.1 FIR滤波器频率采样法的原理
  - 7.3.2 频率采样法的逼近误差分析

7.2 FIR滤波器的窗函数设计法

- **FIR滤波器设计任务是选择有限长度的$h(n)$，使频率响应函数$H(e^{jw})$满足技术指标要求，可由以下方法实现**
  - **窗函数法**

    应用现成的窗函数公式，使滤波器单位取样响应$h(n)$逼近要求的单位取样响应序列 $h_d(n)$ ，在指标要求不高时灵活方便，属于**时域逼近**
  - **频率采样法**

    属于**频域逼近**，通过频率采样值逼近期望滤波器，它适合于设计窄带滤波器
  - **计算机辅助的优化设计法**

    采用计算机辅助的优化方法，可得到最佳的等波纹的线性相位FIR滤波器

第7章 FIR数字滤波器的设计

- **7.1 线性相位FIR滤波器的条件及特点**
  - 7.1.1 线性相位FIR滤波器
  - 7.1.2 线性相位条件
  - 7.1.3线性相位FIR滤波器幅度特性
  - 7.1.4 线性相位FIR滤波器零点分布
- **7.2 FIR滤波器的窗函数设计法**
  - 7.2.1窗函数设计法的原理
  - 7.2.2 典型窗函数极其特性
  - 7.2.3 窗函数法设计FIR滤波器步骤
- **7.3FIR滤波器的频率采样设计法**
  - 7.3.1 FIR滤波器频率采样法的原理
  - 7.3.2 频率采样法的逼近误差分析

7.2.1窗函数设计法的原理

◆ 滤波器的单位取样响应及其傅里叶变换

- 如果滤波器的单位取样响应 $h_d(n)$ 从 $-\infty$ 开始取值，那么该滤波器是非因果的

- 如果$h_d(n)$ 无限长，要用FIR滤波器来实现，就必须截断无限长的序列，以得到有限长的单位取样响应 $h(n)$ ，形象地理解为 $h(n)$ 是通过“**窗口**”看到的一段 $h_d(n)$

$$H_d\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_d(n)\cdot e^{-j\omega n} \qquad h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d\left(e^{j\omega}\right)\cdot e^{j\omega n}d\omega$$

7.2.1窗函数设计法的原理

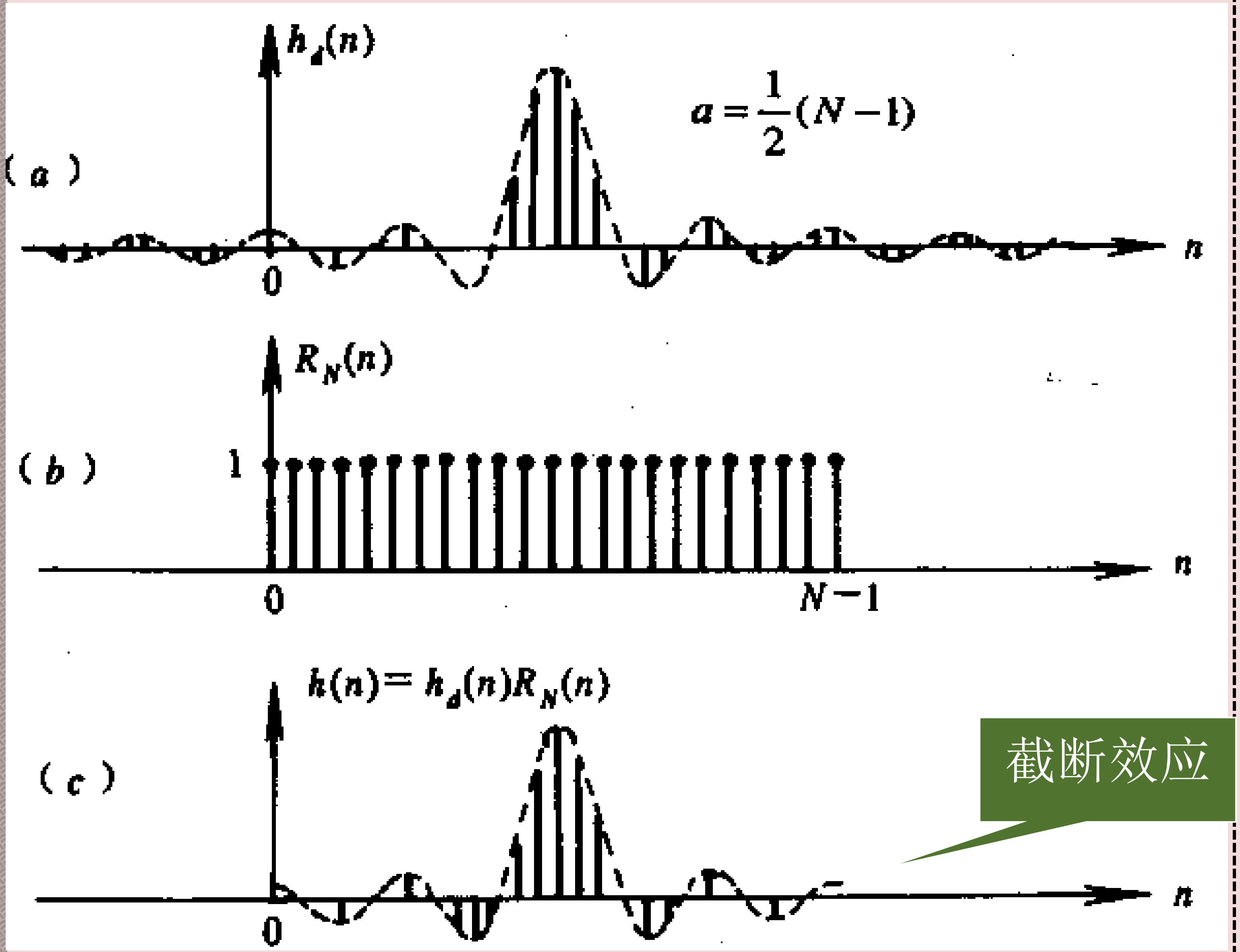
- 为了构造一个长度为N的**线性相位**滤波器，由$h_d(n)$截取$h(n)$时，必须**保证截取的一段对$(N-1)/2$**对称
  - 将 $h(n)$ 表示为 $h_d(n)$ 和窗函数 $w(n)$ 的乘积

$$h(n) = w(n) \cdot h_d(n)$$

  - 当 $w(n)$的取值区间在0至 $N-1$时，截断后滤波器的频率响应为有限项级数和

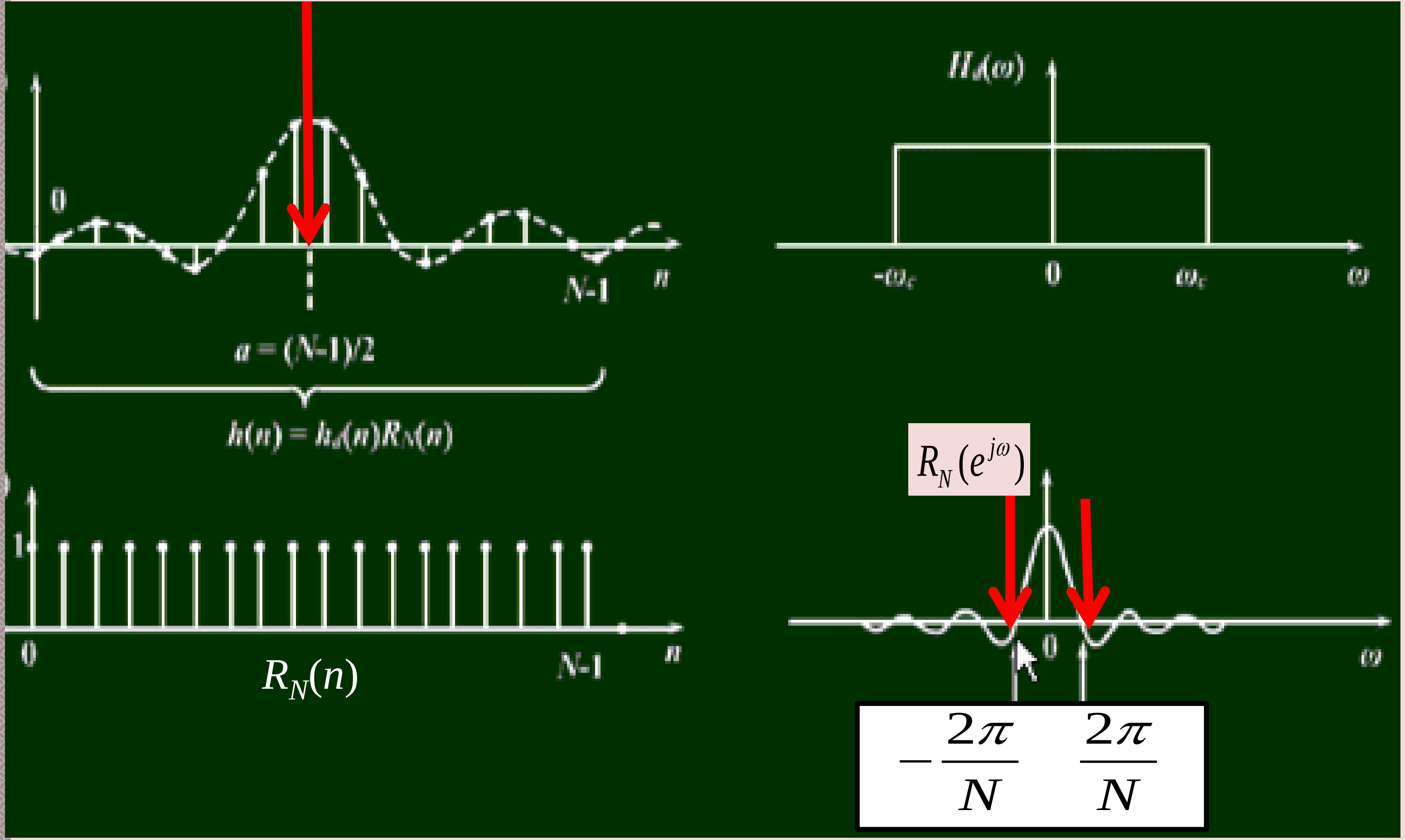
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{(N-1)} h(n) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w(n) \cdot h_d(n) \cdot e^{-j\omega n}$$

$H(e^{j\omega})$是 $H_d(e^{j\omega})$在均方误差最小下的最优逼近



截断效应

理想低通的单位脉冲响应及矩形窗



$h(n)=h_d(n)R_N(n)$，对其进行傅里叶变换，根据复卷积定理，得到：

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}H_d(e^{j\omega})*R_N(e^{j\omega})=\int_{-\pi}^{\pi}H_d(e^{j\theta})R_N(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}H_d(e^{j\omega})*R_N(e^{j\omega})=\int_{-\pi}^{\pi}H_d(e^{j\theta})R_N(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

$$R_N(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}R_N(n)e^{-j\omega n}=e^{-j\frac{1}{2}(N-1)\omega}\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}=R_N(\omega)e^{-j\omega\tau}$$

(7.2.2)

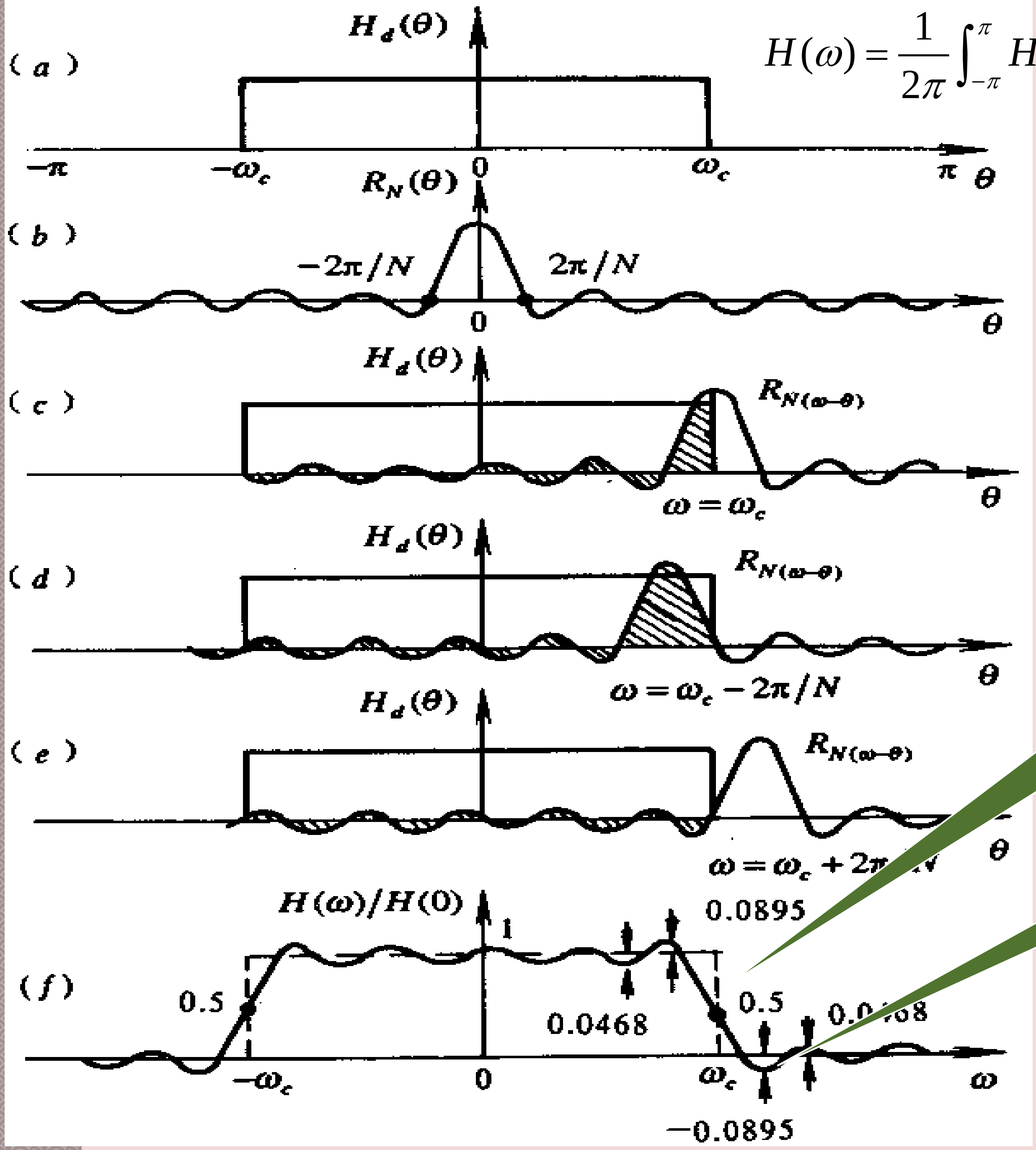
其中幅度函数 $R_N(\omega)=\dfrac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)},\tau=\dfrac{N-1}{2}$

$H_d(e^{j\omega})$ 一般选择为线性相位理想低通滤波器，表示成幅度特性与相位特性函数的形式 $H_d(e^{j\omega})=H_d(\omega)e^{-j\omega\tau}$

其中幅度函数

$$H_d(\omega)=\begin{cases}1,|\omega|\le\omega_c\\0,\omega_c<|\omega|\le\pi\end{cases}$$

$$H(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(\theta)R_N(\omega-\theta)d\theta$$



吉布斯效应：
观察肩峰、过渡带

通带和阻带波纹基本相同

矩形窗对理想低通幅度特性的影响

$H_d(e^{j\omega})$是一个以2π为周期的函数，可以展为傅氏级数，即

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n)e^{-j\omega n} \qquad (7.2.3)$$

截断效应，即以有限项傅立叶级数近似替代无限项傅立叶级数，所引起的误差效果（**吉布斯效应 Gibbs**）

由于对$h_d(n)$ 突然截短，导致实际设计的滤波器通带内出现了波纹，随着N的增大，波纹并不消失，波纹的振荡频率越来越高，并且从通带到阻带存在一个过渡带，这种现象称作吉布斯(Gibbs)现象

分析可知，$H(\omega)$和原理想低通$H_d(\omega)$差别有两点

(1)在理想特性不连续点$\omega=\omega_c$附近形成过渡带。过渡带的宽度，近似等于$R_N(\omega)$主瓣宽度，即$4\pi/N$

(2)通带内增加了波动，最大的峰值在$\omega_c-2\pi/N$处。阻带内产生了余振，最大的负峰在$\omega_c+2\pi/N$处

在主瓣附近，$R_N(\omega)$可近似为:

$$R_N(\omega) = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \approx \frac{\sin(\omega N/2)}{\omega/2} = N\frac{\sin x}{x}$$

其中 $x=\omega N/2$

当N增大，主、旁瓣幅度绝对值都增大，二者的相对比例不变, 由$\sin x/x$来决定，即波形、最大肩峰都不变

对窗函数的要求

- 设$h(n)=h_d(n)w(n)$，式中$w(n)$表示窗函数
  - $w(n)$应是**非负的实偶函数**，且 $w(n)$ 从对称中心开始应是**非递增**的。在实际工作中，需要 $w(n)$ 关于长度的中心对称，如果 $n=0,1,\cdots,M-1$，要求 $w(n)$ 关于 $n=M/2$ 对称；如果 $n=-M/2,\cdots,0,\cdots,M/2$ 需要 $w(n)$ 以 $n=0$ 为对称
  - 希望 $W\left(e^{j\omega}\right)$ 尽可能是正的，从而保证功率谱的非负性

对窗函数的要求

- 为了保证功率谱的估计是渐近无偏的，窗函数应满足

$$w(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}W\left(e^{j\omega}\right)\cdot d\omega=1$$

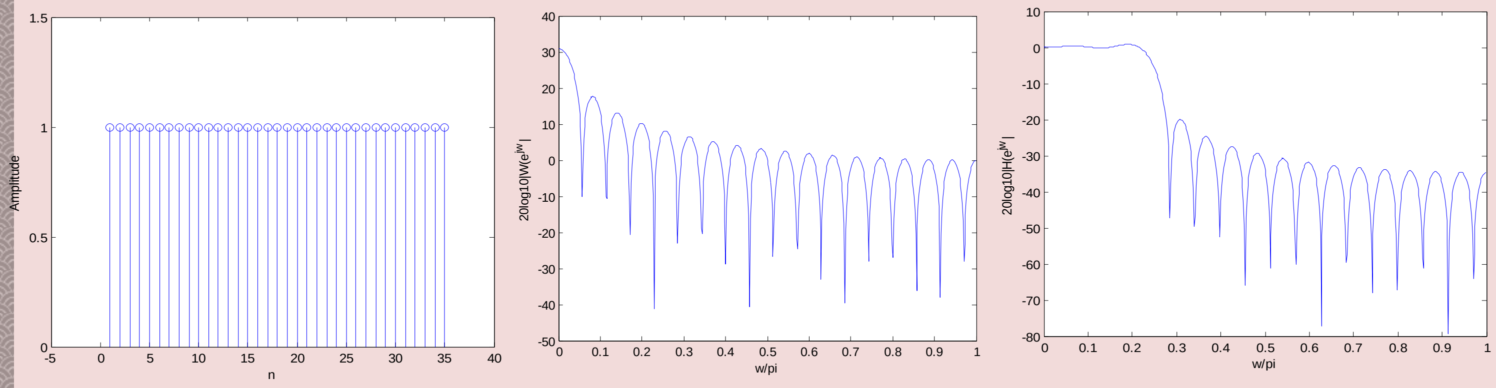
- 主瓣尽可能地窄，以获得陡峭的过渡带（窗的宽度）
- 最大的旁瓣相对于主瓣尽可能地小，即能量集中在主瓣中，以减少尖峰和余振，提高阻带的衰减
- 窗函数的时域波形平滑，与主瓣的幅度相比，旁瓣应尽可能小，以减小滤波器的通带衰减，增大阻带衰减，提高滤波器性能（窗的形状）
- 矛盾：旁瓣电平与主瓣宽度的要求不可能同时满足
- 考虑：窗口取多大？窗口取什么形状？

第7章 FIR数字滤波器的设计

- **7.1 线性相位FIR滤波器的条件及特点**
  - 7.1.1 线性相位FIR滤波器
  - 7.1.2 线性相位条件
  - 7.1.3线性相位FIR滤波器幅度特性
  - 7.1.4 线性相位FIR滤波器零点分布
- **7.2 FIR滤波器的窗函数设计法**
  - 7.2.1窗函数设计法的原理
  - 7.2.2 典型窗函数极其特性
  - 7.2.3 窗函数法设计FIR滤波器步骤
- **7.3FIR滤波器的频率采样设计法**
  - 7.3.1 FIR滤波器频率采样法的原理
  - 7.3.2 频率采样法的逼近误差分析

7.2.2 典型窗函数极其特性

◆ 矩形窗



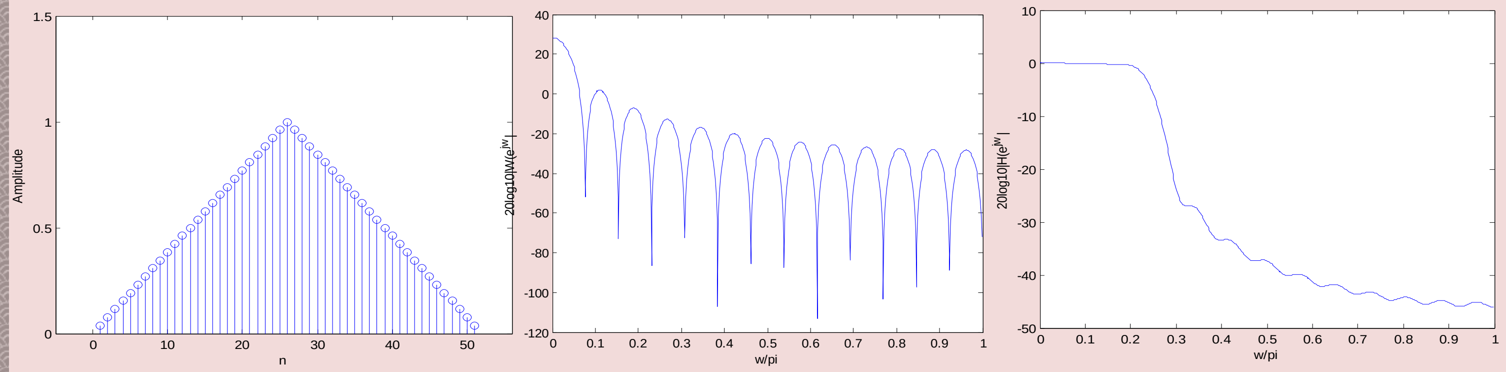
(a)长度为35的矩形窗　(b) 矩形窗的幅度响应　(c) 数字滤波器的幅频特性

◆ 窗函数

$$w(n)=R_N(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$W_R(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j\omega n}=\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)}$$

三角窗(又称Bartlett窗)



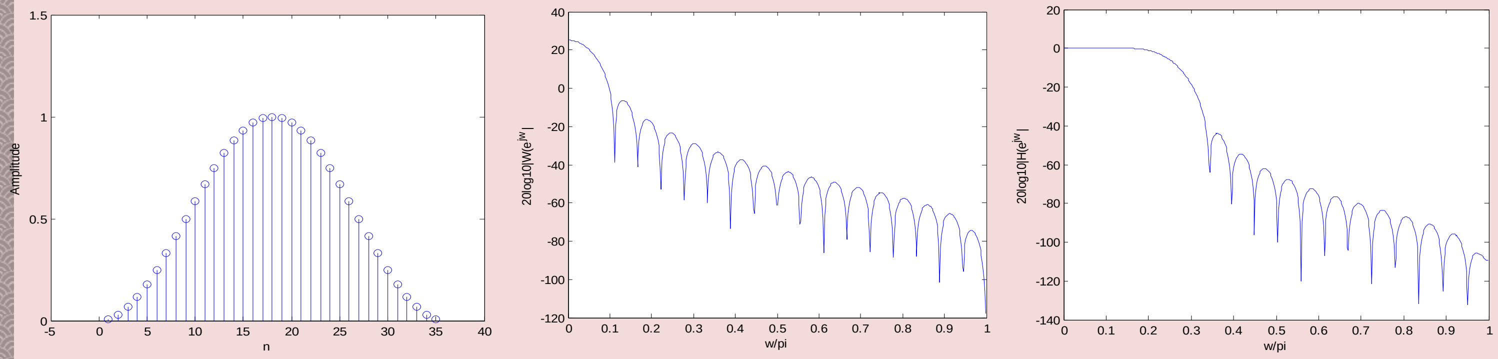
(a)长度为51的三角窗　　(b)三角窗的幅度响应　(c) 数字滤波器的幅频特性

$$w(n)=\begin{cases}\dfrac{2n}{N} & n=0,1,\cdots,\dfrac{N}{2}\\[2ex] w(N-n) & n=\dfrac{N}{2},\cdots,N-1\end{cases}$$

或 $w(n)=1-\dfrac{2|n|}{N},\quad n=-\dfrac{N}{2},\cdots,0,\cdots,\dfrac{N}{2}$

$$W\left(e^{j\omega}\right)=\frac{2}{N}e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}\left[\frac{\sin\left(\frac{\omega N}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right]^2$$

汉宁(Hanning)窗（升余弦窗）



(a)长度为35的汉宁窗　　(b)汉宁窗的幅度响应　　(c)滤波器的形状

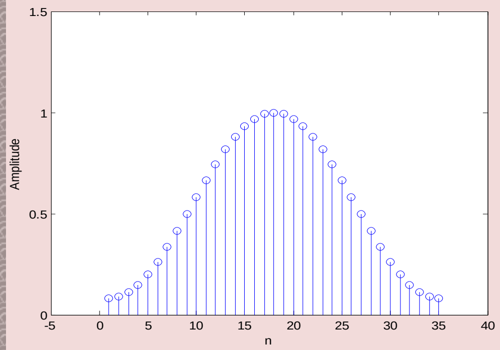
$$w(n)=0.5-0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right),\qquad n=0,1,\cdots,N-1$$

或 $$w(n)=0.5+0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right),\qquad n=-\frac{N}{2},\cdots,0,\cdots,\frac{N}{2}$$

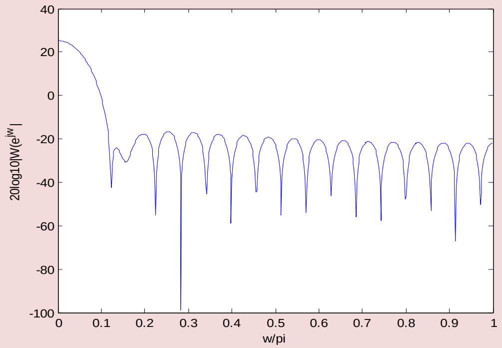
$$W\left(e^{j\omega}\right)=0.5U\left(\omega\right)+0.25\left[U\left(\omega-\frac{2\pi}{N}\right)+U\left(\omega+\frac{2\pi}{N}\right)\right]$$

式中　$$U\left(\omega\right)=e^{j\omega/2}\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)\Big/\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

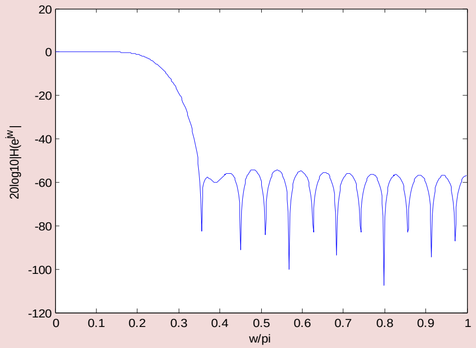
汉明(Hamming)窗（改进升余弦窗）



(a)长度为35的汉明窗



(b)汉明窗的幅度响应



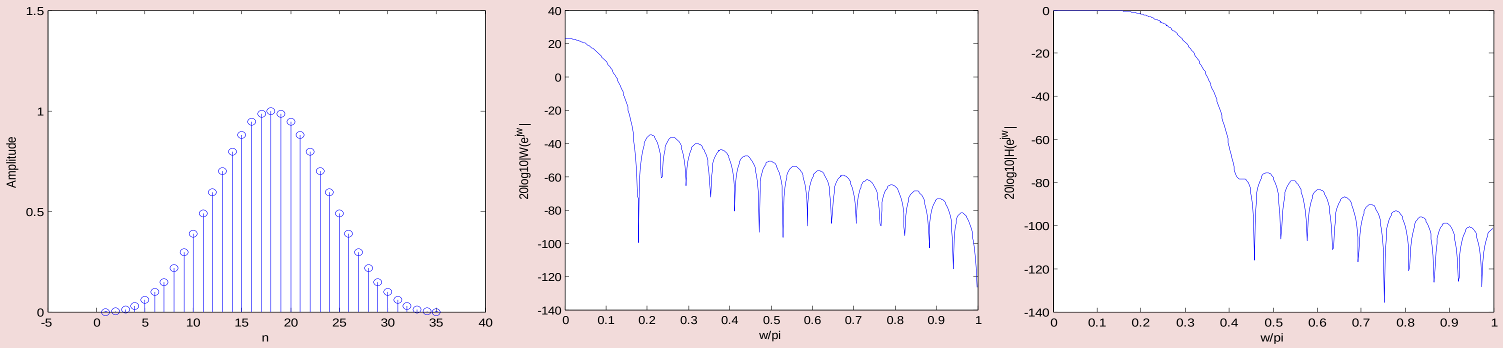
(c)滤波器的形状

$$w(n) = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), \qquad n = 0,1,\cdots,N-1$$

或 $$w(n) = 0.54 + 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), \qquad n = -\frac{N}{2},\cdots,0,\cdots,\frac{N}{2}$$

$$W\left(e^{j\omega}\right) = 0.54U\left(\omega\right) + 0.23U\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) + 0.23U\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\right)$$

布莱克曼(Blackman)窗



(a)长度为35的布莱克曼窗 (b)布莱克曼窗的幅度响应 (c)滤波器的形状

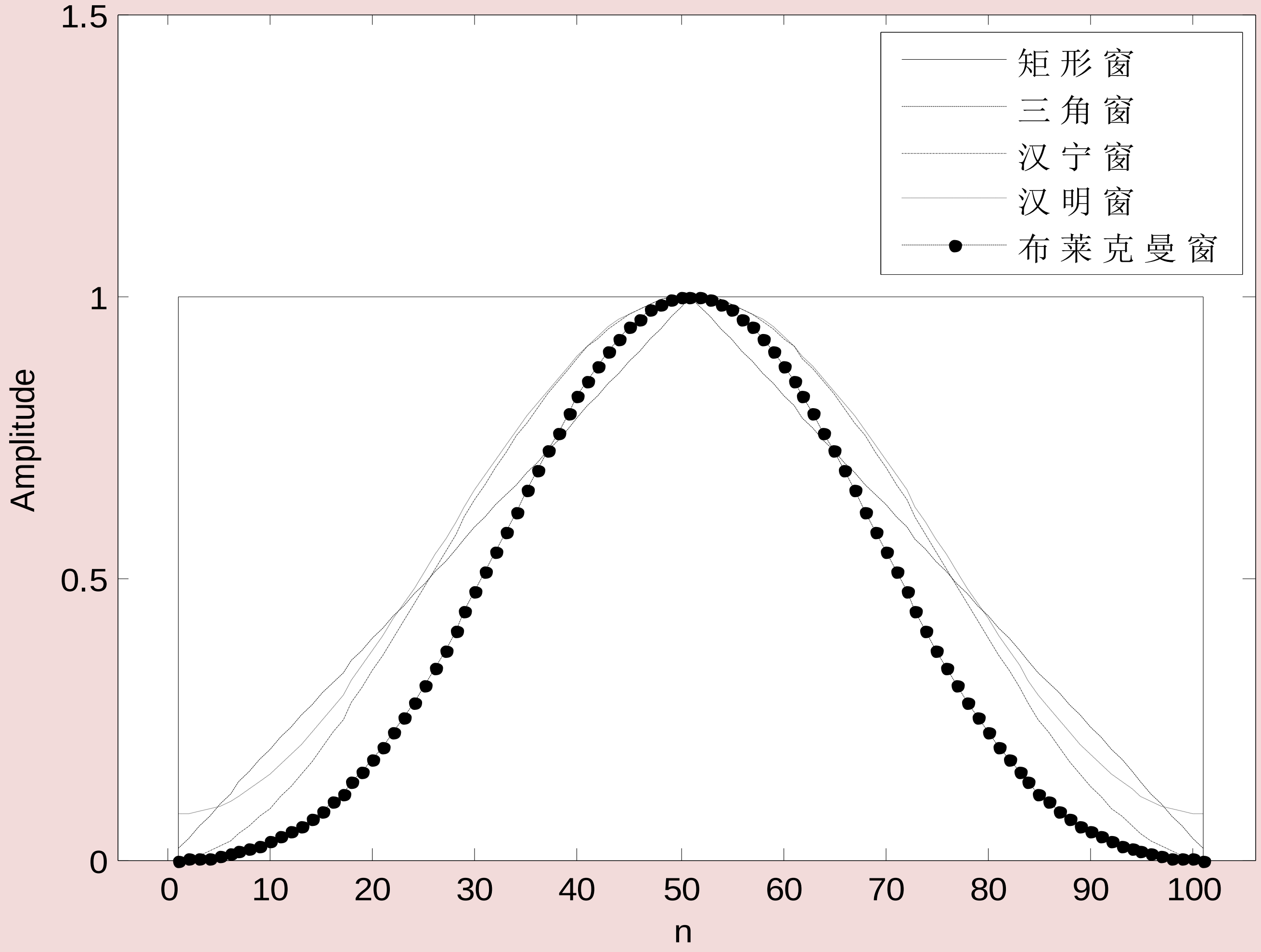
$$w(n)=0.42-0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)+0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right),\qquad n=0,1,\cdots,N-1$$

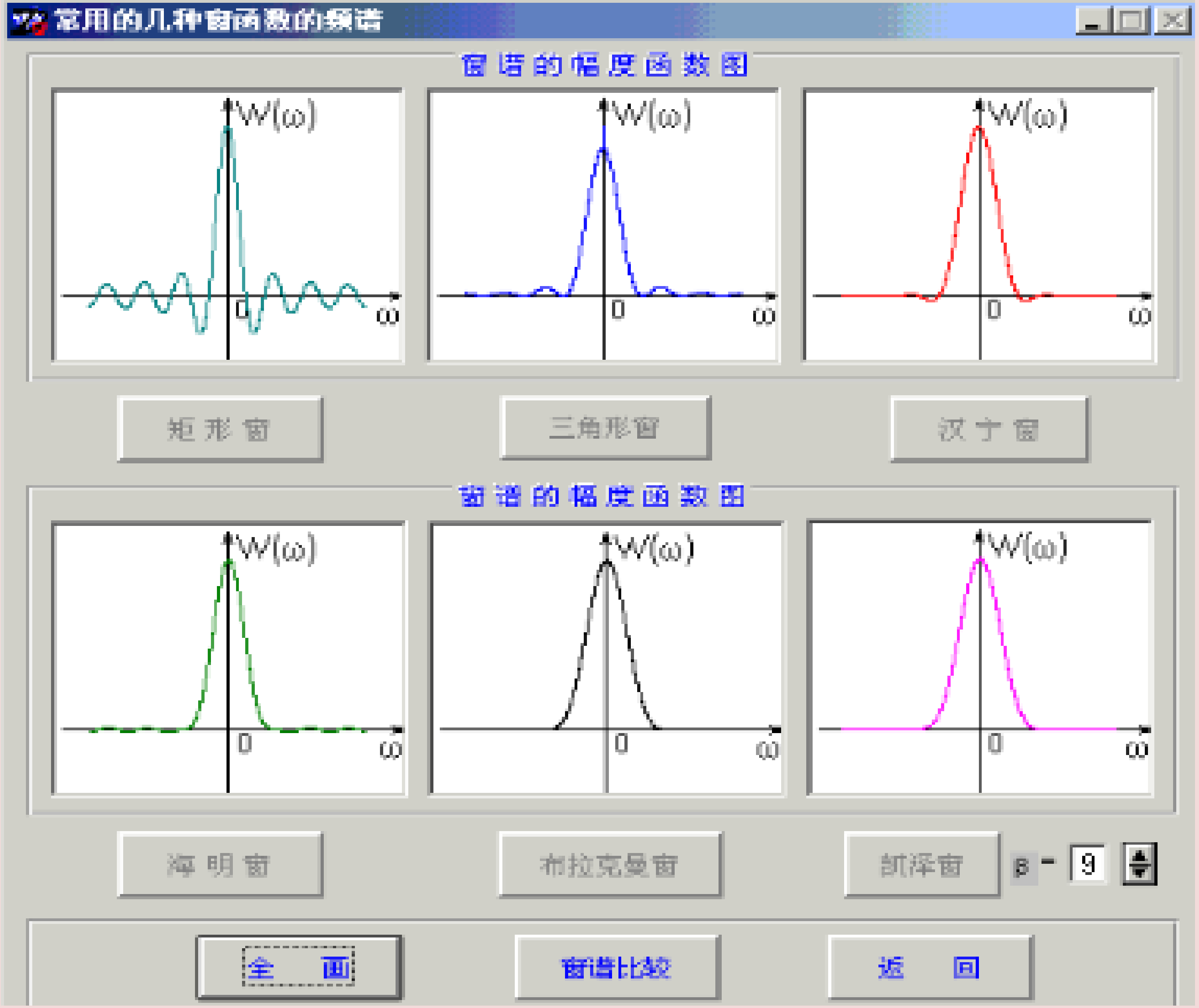
或 $w(n)=0.42-0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)+0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right),\qquad n=-\frac{N}{2},\cdots,0,\cdots,\frac{N}{2}$

$$W\left(e^{j\omega}\right)=0.42U\left(\omega\right)+0.25\left[U\left(\omega-\frac{2\pi}{N}\right)+U\left(\omega+\frac{2\pi}{N}\right)\right]+0.04\left[U\left(\omega-\frac{4\pi}{N}\right)+U\left(\omega+\frac{4\pi}{N}\right)\right]$$

7.2.2 典型窗函数极其特性

◆ 不同窗函数的时域波形(N=101)





常用的窗函数的幅频特性，注意**过渡带宽和最小阻带衰减**

滤波器阶数(长度)N的选择

窗名称	近似过渡带宽	精确过渡带宽	最小阻带衰减
矩形	4π/N	1.8π/N	21dB
巴特利特	8π/N	6.1π/N	25dB
汉宁	8π/N	6.2π/N	44dB
哈明	8π/N	6.6π/N	51dB
布莱克曼	12π/N	11π/N	74dB

取Kaiser窗时设定beta,再用**kaiserord**函数求得N

第7章 FIR数字滤波器的设计

- **7.1 线性相位FIR滤波器的条件及特点**
  - 7.1.1 线性相位FIR滤波器
  - 7.1.2 线性相位条件
  - 7.1.3线性相位FIR滤波器幅度特性
  - 7.1.4 线性相位FIR滤波器零点分布
- **7.2 FIR滤波器的窗函数设计法**
  - 7.2.1窗函数设计法的原理
  - 7.2.2 典型窗函数极其特性
  - 7.2.3 窗函数法设计FIR滤波器步骤
- **7.3FIR滤波器的频率采样设计法**
  - 7.3.1 FIR滤波器频率采样法的原理
  - 7.3.2 频率采样法的逼近误差分析

7.2.3 窗函数法设计FIR滤波器步骤

- 根据所需设计的数字滤波器类型（低通，高通，带通，带阻），**确定线性相位数字滤波器类型**(Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ)
- **选择合适的窗函数$\omega(n)$**：根据滤波器阻带衰减 α_s选择窗函数$\omega(n)$的种类，然后根据滤波器过渡带宽度，确定所选窗函数的长度N，用窗函数设计的FIR数字滤波器的通带波纹幅度近似等于阻带波纹幅度。所以通常只考虑阻带最小衰减就可以
- **确定理想数字滤波器的频率响应函数**

$$H_d(e^{j\omega}) = H_d(\omega)e^{j\theta_d(\omega)}$$

对严格线性相位FIR数字滤波器 $\theta_d(\omega) = -\omega(N-1)/2$

对广义线性相位FIR数字滤波器 $\theta_d(\omega) = -\pi/2 - \omega(N-1)/2$

理想数字滤波器的截止频率ω_c近似为最终设计的FIR数字滤波器的过渡带中心频率，所以一般取ω_c＝$(\omega_p$＋$\omega_s)/2$。

ω_p和ω_s分别为通带边界频率和阻带边界频率

- 计算理想数字滤波器的单位脉冲响应

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

- 加窗得到设计结果

$$h(n) = h_d(n)\omega(n)$$

例7.2.1 用矩形窗、汉宁窗和布莱克曼窗设计FIR低通滤波器，设N=11, ω_c=0.2πrad

解：用理想低通作为逼近滤波器，按照(7.2.2)式，有

$$h_d(n)=\frac{\sin(\omega_c(n-\alpha))}{\pi(n-\alpha)},0\le n\le 10,\alpha=\frac{1}{2}(N-1)=5$$

用矩形窗设计：

$$h_d(n)=\frac{\sin(0.2\pi(n-5))}{\pi(n-5)},0\le n\le 10$$

用汉宁窗设计：

$$h(n)=h_d(n)\omega_{Hn}(n),0\le n\le 10$$

$$\omega_{Hn}(n)=0.5(1-\cos\frac{2\pi n}{10})$$

例7.2.1 用矩形窗、汉宁窗和布莱克曼窗设计FIR低通滤波器，设N=11, ω_c=0.2πrad

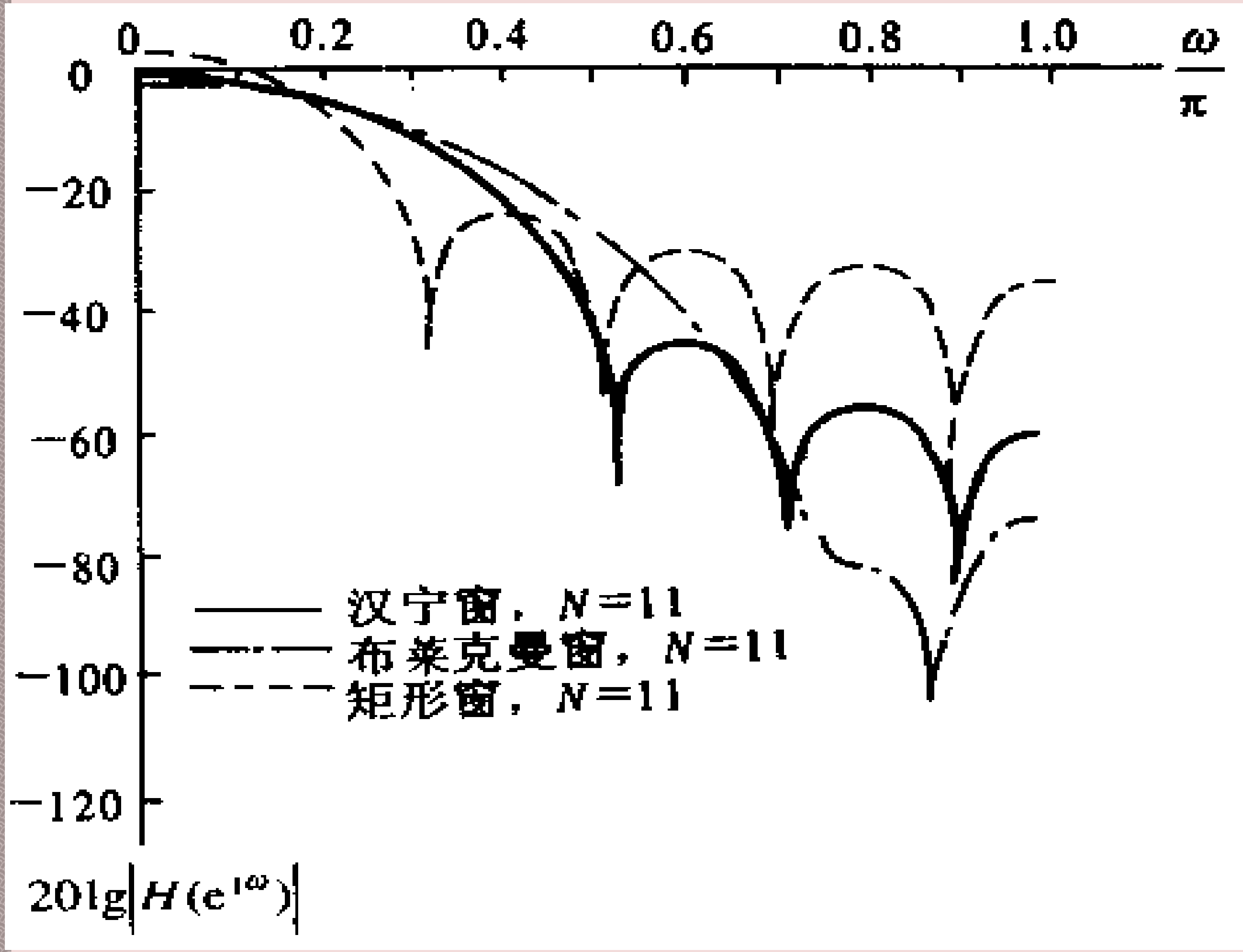
解：用理想低通作为逼近滤波器，按照(7.2.2)式，有

$$h_d(n)=\frac{\sin(\omega_c(n-\alpha))}{\pi(n-\alpha)},0\le n\le 10,\alpha=\frac{1}{2}(N-1)=5$$

用布莱克曼窗设计：

$$h(n)=h_d(n)\omega_{Bl}(n)$$

$$\omega_{Bl}(n)=(0.42-0.5\cos\frac{2\pi n}{10}+0.08\cos\frac{2\pi n}{10})R_{11}(n)$$



例7.2.1的低通幅度特性

第7章 FIR数字滤波器的设计

- **7.1 线性相位FIR滤波器的条件及特点**
  - 7.1.1 线性相位FIR滤波器
  - 7.1.2 线性相位条件
  - 7.1.3线性相位FIR滤波器幅度特性
  - 7.1.4 线性相位FIR滤波器零点分布
- **7.2 FIR滤波器的窗函数设计法**
  - 7.2.1窗函数设计法的原理
  - 7.2.2 典型窗函数极其特性
  - 7.2.3 窗函数法设计FIR滤波器步骤
- **7.3FIR滤波器的频率采样设计法**
  - 7.3.1 FIR滤波器频率采样法的原理
  - 7.3.2 频率采样法的逼近误差分析

7.3.1 FIR滤波器频率采样法的原理

根据频域采样定理，一个长度为M的有限长序列，可通过其频谱函数的$N\geq M$点等间隔采样值准确的恢复原信号。设待设计的滤波器的传输函数用$H_d(e^{j\omega})$表示，对它在ω=0~2π之间等间隔采样N点，得到$H_d(k)$

$$H_d(k)=H_d(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k},k=0,1,2,\cdots,N-1 \qquad (7.3.1)$$

再对N点$H_d(k)$进行$IDFT$，得到$h(n)$，即为所设计的滤波器的单位取样响应

$$h(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H_d(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn},k=0,1,2,\cdots,N-1 \qquad (7.3.2)$$

根据频域采样定理，其系统函数$H(z)$可写成

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}$$

(7.3.3)，直接型结构

$$=\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H_d(k)}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k}z^{-1}}$$

(7.3.4)，频率采样

$$H(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1}H(k)\Phi(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$$

内插函数

$$\Phi(\omega)=\frac{1}{N}\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$$

- 下面讨论两个问题：
  - 如何实现线性相位？
  - 如何减小逼近误差？

用频率采样法设计线性相位滤波器的条件

线性相位FIR滤波器的条件：$h(n)$是实序列，且满足 $h(n)=h(N-n-1)$，在此基础上我们已推导出其传输函数应满足的条件是：

$$H_d(e^{j\omega}) = H_g(\omega)e^{j\theta(\omega)} \tag{7.3.5}$$

其中：

$$\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega \tag{7.3.6}$$

$$H_g(\omega) = H_g(2\pi-\omega), \quad N=\text{奇数} \tag{7.3.7}$$

$$H_g(\omega) = -H_g(2\pi-\omega), N=\text{偶数}$$

在ω=0~2π之间等间隔采样N点，

$$\omega_k=\frac{2\pi}{N}k, k=0,1,2,\cdots,N-1$$

将$\omega=\omega_k$代入并写成k的函数，得：

$$H_d(k)=H_g(k)e^{j\theta(k)} \qquad (7.3.8)$$

$$\theta(k)=-\frac{N-1}{2}\frac{2\pi}{N}k=-\frac{N-1}{N}\pi k \qquad (7.3.9)$$

$$H_g(k)=H_g(N-k), N=\text{奇数} \qquad (7.3.10)$$

$$H_g(k)=-H_g(N-k), N=\text{偶数} \qquad (7.3.11)$$

第7章 FIR数字滤波器的设计

- **7.1 线性相位FIR滤波器的条件及特点**
  - 7.1.1 线性相位FIR滤波器
  - 7.1.2 线性相位条件
  - 7.1.3线性相位FIR滤波器幅度特性
  - 7.1.4 线性相位FIR滤波器零点分布
- **7.2 FIR滤波器的窗函数设计法**
  - 7.2.1窗函数设计法的原理
  - 7.2.2 典型窗函数极其特性
  - 7.2.3 窗函数法设计FIR滤波器步骤
- **7.3FIR滤波器的频率采样设计法**
  - 7.3.1 FIR滤波器频率采样法的原理
  - 7.3.2 频率采样法的逼近误差分析

7.3.2 频率采样法的逼近误差分析

◆由前述推导可知，$H(e^{j\omega})$和$H(k)$满足如下关系:

$$H(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1}H(k)\Phi(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$$

内插函数

$$\Phi(\omega)=\frac{1}{N}\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}\qquad \omega=\frac{2\pi}{N}i,\quad i=0,1,\cdots,N-1$$

$$\Phi_k(e^{j\frac{2\pi}{N}i})=\begin{cases}1 & i=k\\ 0 & i\neq k\end{cases},i=0,1,\cdots,N-1$$

频率响应函数 $H(e^{j\omega})$在各采样点上就等于 $H(k)$，而各采样点之间的$H(e^{j\omega})$值，则是由N个采样值的内插函数叠加而成的，因而有一定的逼近误差，误差大小取决于理想频率响应的曲线形状

7.3.2 频率采样法的逼近误差分析

- 内插公式表明
  - 在每个采样点上,$H(e^{j\omega_k})=H(k)$逼近误差为零，频响 $H(e^{j\omega})$ 严格地与理想频响的采样值 $H(k)$ 相等
  - 在采样点之间，频响由各采样点的内插函数延伸迭加而形成，因而有一定的逼近误差，误差大小与理想频率响应的曲线形状有关，理想特性平滑，则误差小；反之，误差大在理想频率响应的不连续点附近，$H(e^{j\omega})$ 会产生肩峰和波纹
  - N增大，则采样点变密，逼近误差减小

频率采样法的改进措施

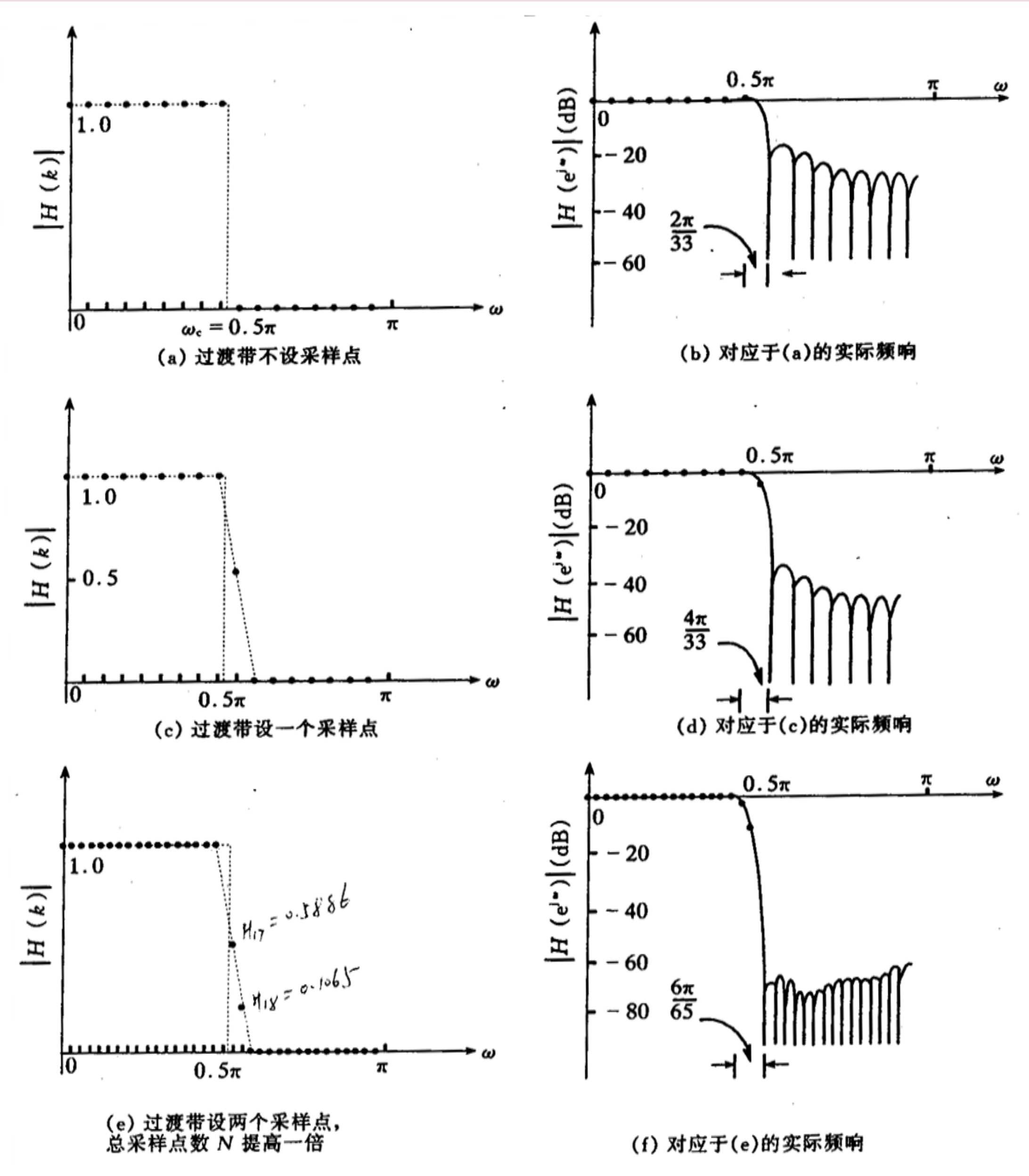
- 在为减小逼近误差，类似于窗函数法的加窗平滑截断，可以使希望逼近的幅度特性 $H_d(\omega)$ 从通带比较平滑的过渡到阻带，消除阶跃突变，从而使逼近误差减小

- 这相当于设置了$H_d(\omega)$的过渡带，其实质是对幅度采样H_k设置了过渡带的采样点，以加宽过渡带为代价换取通带和阻带内波纹幅度的减小

- 过渡带宽　ΔB 与滤波器长度N须满足下式

$$N \geq (m+1)2\pi / \Delta B$$

m过渡带的采样点数



(a) 过渡带不设采样点

(b) 对应于(a)的实际频响

(c) 过渡带设一个采样点

(d) 对应于(c)的实际频响

(e) 过渡带设两个采样点，总采样点数 N 提高一倍

(f) 对应于(e)的实际频响

过渡采样点不同的三个FIR滤波器设计实例

频率采样法的设计步骤

- 根据阻带最小衰减 α ,确定过渡带采样点的个数 m
- 根据过渡带宽度 ΔB 的要求, 估算滤波器的长度 N
- 构造希望逼近滤波器的频率响应函数

$$H_d(e^{j\omega}) = H_d(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

- 对 $H_d(e^{j\omega_k})$ 进行等间隔采样得到 $H(k)$;
- 对 $H(k)$进行**IDFT**, 得到 $h(n)$, 对 $h(n)$ 做**Z**变换得 $H(Z)$
- 对设计结果进行检验。调整过渡带上的采样点数或
- $H_d(e^{j\omega})$ 的截止频率直到达到要求为止

频率采样法小结

◆ 频域采样法

➢ 优点：直接从频域设计，较直观，适合设计具有任意幅度特性的滤波器

➢ 缺点：边界频率不易控制；（增加采样点数 N，对控制截止频率有利，但是系统复杂度增加）