

数字信号处理

任课教师：田春娜（博士）

单位：西安电子科技大学电子工程学院

Email: chnatian@xidian.edu.cn

chnatian@gmail.com

参考书籍



- 高新波, 阔永红, 田春娜. 数字信号处理. 高等教育出版社, 2014.
- 史林, 赵树杰. 数字信号处理. 科学出版社. 2007.
- Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schaffer. Discrete-Time Signal Processing. 电子工业出版社, 2011.
- 高西全, 丁玉美. 数字信号处理及其习题解答. 西电出版社, 2008.
- Vinay K. Ingle, John G. Proakis. Digital Signal Processing Using MATLAB®. Northeastern University, 1996.

引言

◆ 数字滤波器

- 指输入输出均为数字信号，通过一定运算关系改变输入信号所含频率成分的相对比例或者滤除某些频率成分的器件。是离散系统的通用名称
- 因为数字滤波器通过数值运算实现滤波，所以数字滤波器具有如下优点：精度高、稳定、体积小、重量轻、灵活、不要求阻抗匹配以及可实现模拟滤波器无法实现的特殊功能等
- 如果处理模拟信号，须经过A/D和D/A转换

引言

◆ 数字滤波器的分类

- 按照不同的分类方法，数字滤波器有许多种类，但总起来可分为两大类

经典滤波器，特点是其输入信号中有用的频率成分和期望滤除的频率成分各占不同的频带，通过一个合适的选频滤波器滤除某个频带或频率成分的干扰，得到纯净信号，达到滤波的目的

现代滤波器，用于信号与干扰的频带互相重叠的情况，现代滤波器是根据随机信号的一些统计特性，在某种最佳准则下，最大限度的抑制干扰，恢复信号，从而达到滤波的目的，如维纳滤波器、卡尔曼滤波器等

- Figure 10.1 illustrates the frequency response of digital filters. It consists of two subplots, (a) and (b), each showing the magnitude response $|H(e^{jw})|$ and the phase response $\theta(w)$ as a function of the normalized angular frequency w .

(a) 低通 (Low-pass filter): The magnitude response $|H(e^{jw})|$ is 1 for w from 0 to π and 0 elsewhere. The phase response $\theta(w)$ is 0 for w from 0 to π and π elsewhere.

(b) 高通 (High-pass filter): The magnitude response $|H(e^{jw})|$ is 0 for w from 0 to π and 1 elsewhere. The phase response $\theta(w)$ is 0 for w from 0 to π and π elsewhere.



图 6.1.1 理想低通、高通、带通、带阻滤波器幅度特性

引言

- ◆ 数字滤波器从单位脉冲响应长度分类，可分为
 - 无限长单位脉冲响应(IIR)滤波器
 - 有限长单位脉冲响应(FIR)滤波器
- ◆ 本章在概述数字滤波器的主要技术指标和基本设计方法的基础上，讨论无限脉冲响应数字滤波器(Infinite Impulse Response, IIR)数字滤波器的设计问题



引言

- ◆ 离散线性时不变系统的差分方程:

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \quad (6.0.1)$$

- ◆ 其系统函数可表示为:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (6.0.2)$$

- ◆ 当 $N \geq 1$, a_k 中至少有一个非零系数时, 该系统系统中存在反馈回路, 其所对应的滤波器称作无限长脉冲响应滤波器(infinite impulse response filter), 简称IIR滤波器
- ◆ 当 a_k 均为零系数时, 其所对应的滤波器称作有限长脉冲响应滤波器(finite impulse response filter), 简称FIR滤波器

引言

- ◆ IIR滤波器的输出取决于以前的输入和以前的滤波器输出值。反馈使得IIR滤波器输入端的扰动将该滤波器变得不稳定并无限地振荡
- ◆ N 是IIR滤波器的阶数，表示系统中反馈环的个数
- ◆ 一般假定IIR数字滤波器满足 $M \leq N$ ，这时将系统称为 N 阶的IIR数字滤波器
- ◆ 若 $M > N$ ，可看成是一个 N 阶的IIR数字滤波器与一个 $(M - N)$ 阶的FIR数字滤波器的级联

引言

- ◆ 设计IIR滤波器，如何确定滤波器系数 a_k 和 b_i ，阶数 N ？
- ◆ 与FIR滤波器相比
 - IIR滤波器是给定了滤波器的技术指标后，确定滤波器阶数 N 和系数 $\{a_k, b_i\}$ ，在满足技术指标的前提下，滤波器的阶数要尽可能低
 - IIR滤波器结构更复杂，没有线性相位响应，存在反馈，稳定性不能保证，使IIR滤波器的数字运算可能存在溢出



引言



◆与FIR滤波器相比

- IIR滤波器计算每个滤波器输出样点值所需的乘法数要少得多。IIR滤波器的速度很快，从硬件设计的角度来看，其构造的滤波器的采样频率可远高于FIR滤波器，从而达到实时工作的需求

数字滤波器的技术指标

- ◆ 常用的数字滤波器一般属于选频滤波器。假设数字滤波器的频率响应函数 $H(e^{j\omega})$ 用下式表示

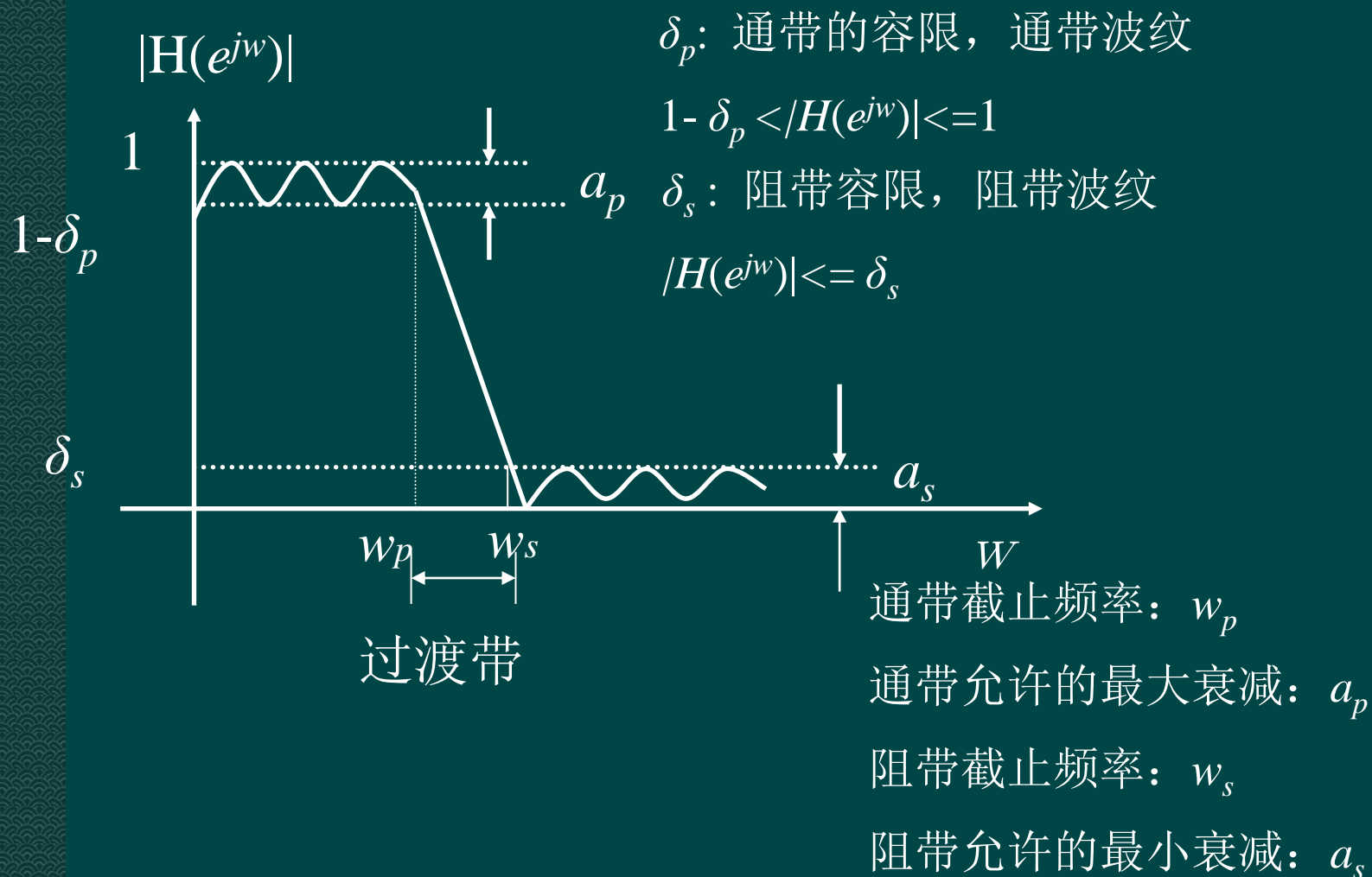
$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)}$$

- $|H(e^{j\omega})|$ 称为幅频特性函数，表示信号通过该滤波器后各频率成分振幅衰减情况
- $\theta(\omega)$ 为相频特性函数，反映各频率成分通过滤波器后在时间上的延时情况
- 一般选频滤波器的技术指标由幅频特性给出

数字滤波器的技术指标

- ◆ 我们必须设计一个因果可实现的滤波器去近似实现理想滤波器
- ◆ 实际的滤波器的通带和阻带中都允许有一定的误差容限，即通带不是完全平的，阻带不是绝对衰减到零
- ◆ 通带和阻带之间还有一定的过渡带

数字低通滤波器的幅频响应曲线



数字低通滤波器的幅频响应



通带内和阻带内允许的衰减一般用dB数表示，归一化后通带衰减 α_p 和阻带衰减 α_s 分别定义为：

$$\alpha_p = -20\lg |H(e^{j\omega_p})| \text{ dB} \quad (6.0.3)$$

$$\alpha_s = -20\lg |H(e^{j\omega_s})| \text{ dB} \quad (6.0.4)$$

当幅度下降到 $\sqrt{2}/2$ 时， $\omega = \omega_c$ ，此时 $\alpha_p = 3\text{dB}$ ，称为3dB通带截止频率

$\omega_p, \omega_s, \omega_c$ 统称为边界频率，它们是数字滤波器的重要参数

引言

◆ IIR滤波器的设计方法

- **直接法**：直接在频域或者时域中设计数字滤波器
- **间接法**：借助于模拟滤波器的设计原型进行设计的，
又称滤波器的函数模型设计法，较常用。包括：
 - ✓ 模拟滤波器原型介绍
 - ✓ 模拟到数字滤波器的转换
 - ✓ 数字滤波器的频带变换

第6章 IIR数字滤波器的设计



◆ 6.1 IIR滤波器的函数模型设计法

- 模拟滤波器原型介绍
- 模拟到数字滤波器的转换
- 数字滤波器的频带变换

◆ 6.2 IIR数字滤波器的直接设计法

◆ 6.3 IIR滤波器误差分析

◆ 6.4 常用的特殊滤波器



◆ 借助模拟滤波器的设计方法的基本步骤

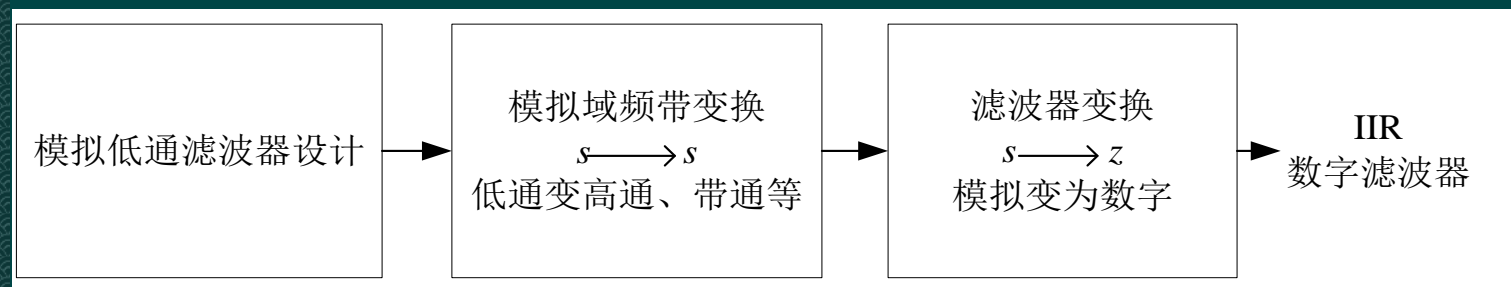
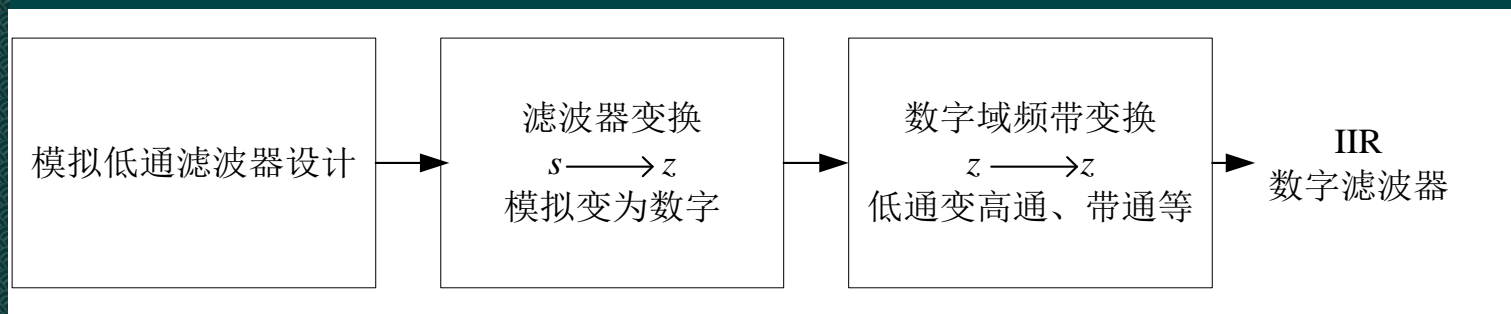
- 将DF的技术指标转换成AF的技术指标
- 按转换后技术指标、设计模拟低通滤波器的 $H_a(s)$
- 然后将 $H_a(s)$ 按某种方法转换成数字滤波器的系统函数 $H(z)$
- 如果不是低通，则必须先将其转换成低通AF的技术指标

◆ 设计过程中用到的两种变换

- **频带变换**: 将低通变换为高通、带通、带阻滤波器
- **变换域变换**: 将模拟滤波器转换成数字滤波器, 从 $s \rightarrow z$ 或者 $H_a(s) \rightarrow H(z)$ 的变换

6.1 IIR滤波器的函数模型设计法

◆以模拟滤波器为基础的两种设计方法





6.1 IIR滤波器的函数模型设计法

- ◆ IIR滤波器的间接设计是以模拟滤波器为基础的, 有若干**典型的模拟滤波器原型**可供选择:
 - **巴特沃思滤波器**: 具有单调下降的幅频特性
 - **切比雪夫滤波器**: 幅频特性在通带或者阻带有等波纹特性, 可以提高选择性
 - **椭圆滤波器**: 选择性相对前两种是最好的, 但通带和阻带内均呈现等波纹幅频特性, 相位特性的非线性也稍严重
 - **贝塞尔滤波器**



模拟低通滤波器的技术指标有 $\alpha_p, \Omega_p, \alpha_s, \Omega_s$, 其中 Ω_p 和 Ω_s 分别称为通带截止频率和阻带截止频率, α_p 是通带内的最大允许衰减, α_s 是阻带内最小允许衰减。归一化后的 α_p, α_s 分别表示如下

$$\alpha_p = -10\lg |H_a(j\Omega_p)|^2 \text{ dB}$$

$$\alpha_s = -10\lg |H_a(j\Omega_s)|^2 \text{ dB}$$

$H_a(j\Omega_c) = \sqrt{2}/2$ 时, $-10\lg |H_a(j\Omega_c)|^2 = 3\text{dB}$, 故称 Ω_c 为模拟低通滤波器的3dB截止频率



6.1.1 模拟滤波器原型介绍

- 模拟低通滤波器的上述技术指标给定后，需要**设计滤波器的系统函数** $H_a(s)$
- 如果我们能由 $\alpha_p, \Omega_p, \alpha_s, \Omega_s$ 求出 $|H_a(j\Omega)|^2$ ，根据 $|H_a(j\Omega)|^2 = H_a(j\Omega)H_a^*(j\Omega) = H_a(s)H_a(-s)|_{s=j\Omega}$
 $H_a(s)H_a(-s)$ 的极点是对称的， $H_a(s)$ 必须是**因果稳定**的，因此极点必须落在 s 平面的左半平面，相应的 $H_a(-s)$ 的极点必须落在 s 平面的右半平面。由此，可求出 $H_a(s)$



6.1.1 模拟滤波器原型介绍

◆ 巴特沃斯模拟低通滤波器

- 特点：通带和阻带的幅度响应都是平的
- N 阶巴特沃斯(Butterworth)模拟低通滤波器的幅频响应的平方函数为：

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}$$

- 其中 Ω_c 是巴特沃斯低通滤波器的3dB截止频率

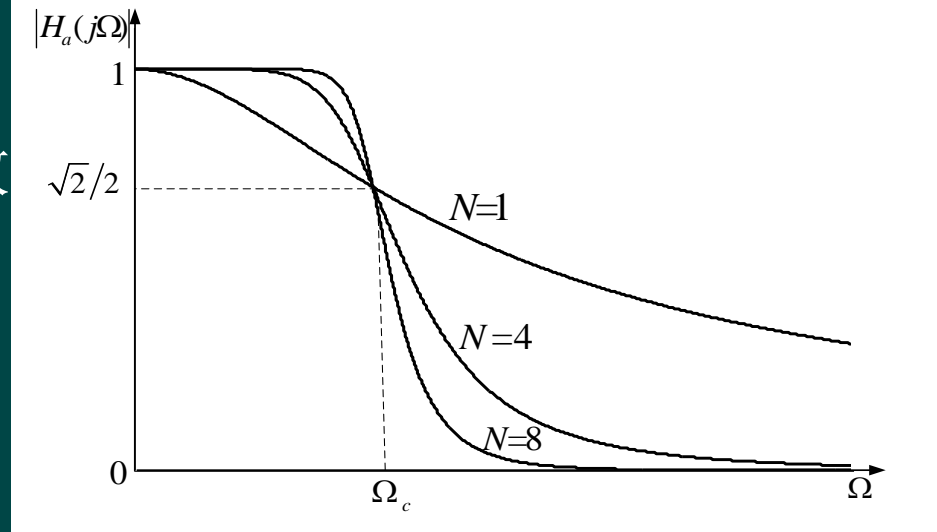
$$|H_a(j0)|^2 = 1, \quad |H_a(j\infty)|^2 = 0$$

◆ 巴特沃斯模拟低通滤波器的性质

- 幅频响应平方函数 $|H_a(j\Omega)|^2$ 是 Ω 的单调减函数

$$\frac{d|H_a(j\Omega)|^2}{d\Omega} = -\frac{2N(\Omega/\Omega_c)^{2N-1}}{\left[1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}\right]^2} < 0$$

- 对于所有的 N ，当 $\Omega=0$ 时， $|H_a(j\Omega)|=1$
- $\Omega=\Omega_c$ 时， $|H_a(j\Omega)|=\sqrt{2}/2$ ，即在 $|H_a(j\Omega)|=\sqrt{2}/2$ 处有 3dB 的衰减
- $\Omega>\Omega_c$ 时，随 Ω 增大， $|H_a(j\Omega)|$ 迅速下降， Ω_c 衰减的速度与阶数 N 有关， N 愈大，衰减速度愈快，过渡带愈窄， $N\rightarrow\infty$ 时，趋向于理想低通滤波器
- 在 $\Omega=0$ 处各阶导数存在且等于 0，因此在该点得到最大值





6.1.1 模拟滤波器原型介绍

◆ 巴特沃斯滤波器的系统函数

$$\begin{aligned} H_a(s)H_a(-s) &= |H_a(j\Omega)|^2 \Big|_{\Omega=s/j} = \frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}} \Big|_{\Omega=s/j} = \frac{1}{1+\left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}} \\ &= \frac{(j\Omega_c)^{2N}}{s^{2N}+(j\Omega_c)^{2N}} \end{aligned}$$

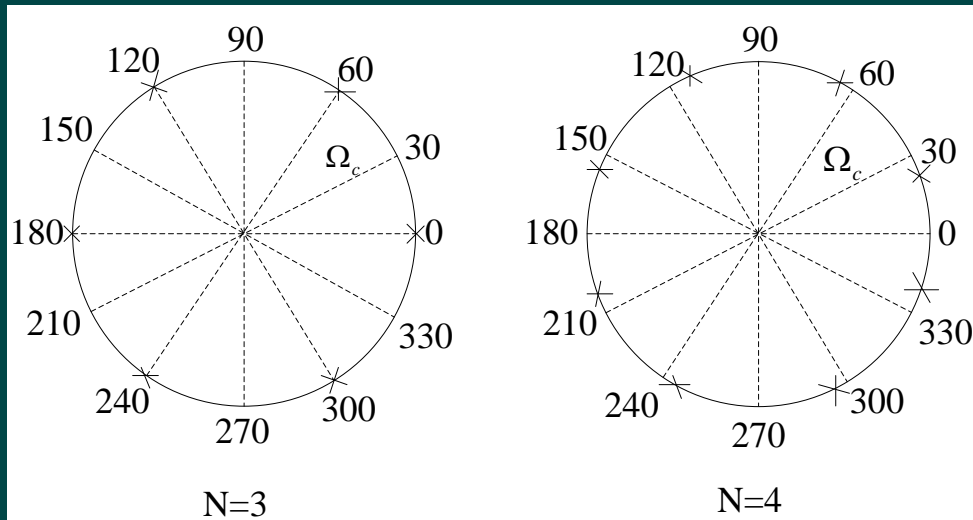
◆ 分母多项式的根是滤波器的极点， $2N$ 个根为：

$$p_k = j\Omega_c (-1)^{1/(2N)} = j\Omega_c [e^{j\frac{\pi}{2N}(2k-1)}] = \Omega_c [e^{j\frac{\pi}{2N}(2k+N-1)}]$$

$$k = 1, 2, \dots, 2N$$

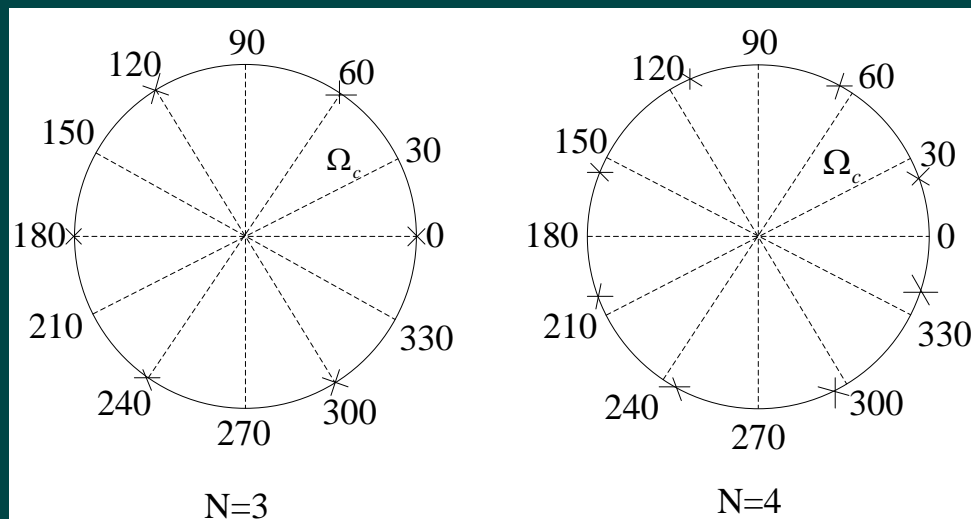
6.1.1 模拟滤波器原型介绍

- ◆ $H_a(s)H_a(-s)$ 有 $2N$ 个极点，它们等间隔分布在半径为 Ω_c 的圆上，其角度间隔为 π/N 弧度
- ◆ 当 N 为奇数时，极点为 $\Omega_c e^{j\pi(k-1)/N}$, $k=1,2,\dots,2N$
- ◆ 当 N 为偶数时，极点为 $\Omega_c e^{j\pi(k-\frac{1}{2})/N}$, $k=1,2,\dots,2N$



三阶和四阶巴特沃斯低通滤波器幅频响应平方函数的极点分布

6.1.1 模拟滤波器原型介绍



三阶和四阶巴特沃斯低通滤波器幅频响应平方函数的极点分布

- ◆ 极点关于虚轴 $j\Omega$ 对称
- ◆ 极点绝不会落在虚轴上，只有当 N 为奇数时会落在实轴上
- ◆ 巴特沃斯滤波器没有零点



6.1.1 模拟滤波器原型介绍

◆ $H_a(s)H_a(-s)$ 的极点为 $p_k = \Omega_c [e^{j\frac{\pi}{2N}(2k+N-1)}]$, $k = 1, 2, \dots, 2N$

◆ 由于 $H_a(s)$ 的因果稳定性, 要求极点必须落在 s 平面的左半平面, 即极点要满足: $\frac{\pi}{2} < \pi \left(\frac{2k+N-1}{2N} \right) < \frac{3\pi}{2}$

◆ 化简得: $\frac{1}{2} < k < N + \frac{1}{2}$, 即 $k = 1, 2, \dots, N$

◆ N 阶巴特沃斯模拟低通滤波器 N 个极点

$$p_k = \Omega_c e^{j\frac{\pi}{2N}(2k+N-1)}, k = 1, 2, \dots, N$$

◆ 其系统函数为 $H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=1}^N s - p_k}$



例 6.1.1 给定 $|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+64\Omega^6}$ ，确定模拟滤波器的系统函数

解：根据给定的模拟滤波器的平方幅频响应得：

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{1+64\Omega^6} = \frac{1}{1+(\frac{\Omega}{0.5})^{2 \times 3}} \quad \begin{matrix} N=3 \\ \Omega_c = 0.5 \end{matrix}$$

系统函数：

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=1}^N s - p_k}, \quad p_k = \Omega_c e^{j\frac{\pi}{2N}(2k+N-1)}, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

$$= \frac{(0.5)^3}{(s - 0.5e^{j2\pi/3})(s - 0.5e^{j\pi})(s - 0.5e^{-j2\pi/3})}$$

$$= \frac{0.125}{(s + 0.25 - j0.433)(s + 0.5)(s + 0.25 + j0.433)} = \frac{0.125}{(s + 0.5)(s^2 + 0.5s + 0.25)}$$

巴特沃斯滤波器的设计步骤

1. 根据模拟滤波器的设计指标 Ω_p Ω_s α_p α_s 确定滤波器的阶数 N

$$N = \frac{\lg \left[(10^{0.1\alpha_p} - 1) / (10^{0.1\alpha_s} - 1) \right]}{2\lg(\Omega_p / \Omega_s)}$$

取 N 为比计算结果大的最小整数，就是巴特沃斯模拟低通滤波器的阶数

2. 确定滤波器的3dB截止频率

$$\Omega_{cp} = \frac{\Omega_p}{\sqrt[2N]{10^{0.1\alpha_p} - 1}} \quad \Omega_{cs} = \frac{\Omega_s}{\sqrt[2N]{10^{0.1\alpha_s} - 1}}$$

实际设计时， Ω_c 可在 $\Omega_{cp} \leq \Omega_c \leq \Omega_{cs}$ 范围内选择

巴特沃斯滤波器的设计步骤

3. 求出 N 个极点， $p_k = \Omega_c e^{j\frac{\pi}{2N}(2k+N-1)}$ ， $k = 1, 2, \dots, N$

得到滤波器的系统函数 $H_a(s)$ 。也可先用3dB截止频率来归一化系统函数

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=1}^N s - p_k} = \frac{1}{\prod_{k=1}^N (\frac{s}{\Omega_c} - \frac{p_k}{\Omega_c})}$$

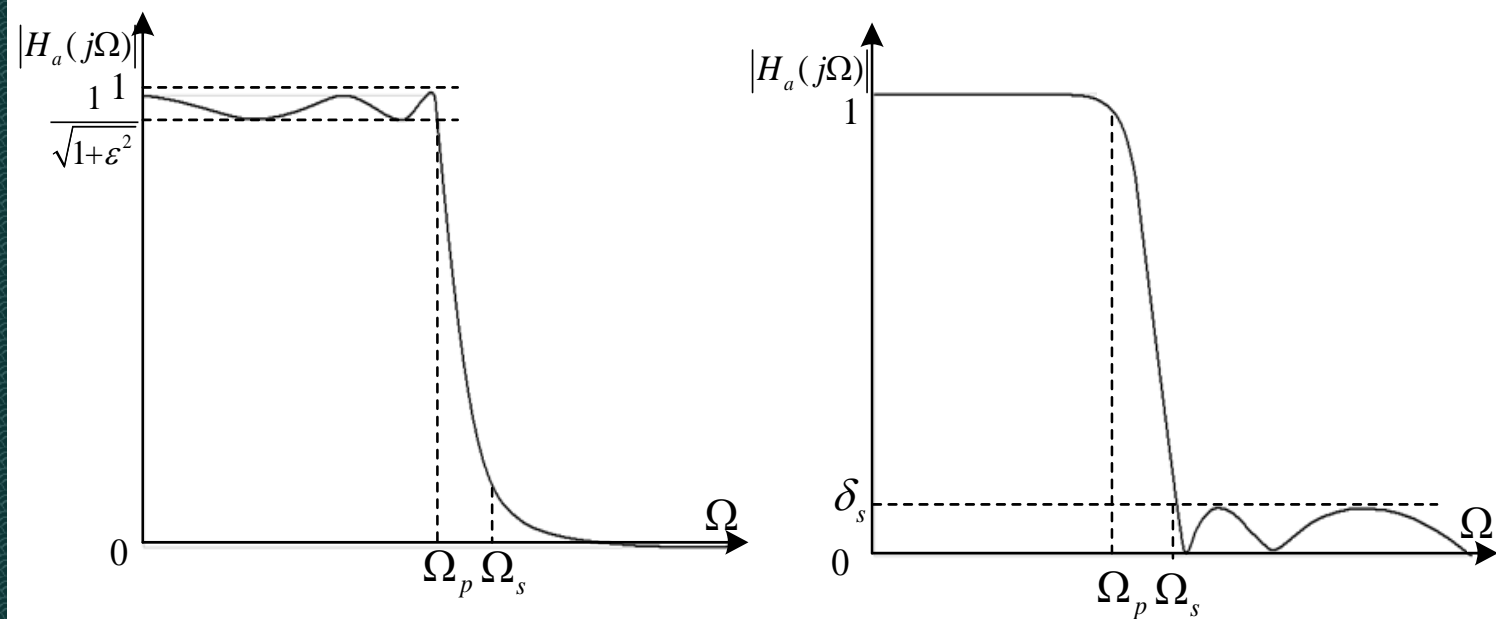
令 $p = s/\Omega_c$ 带入 上式，再根据 N 查表得到 b_i 的值，

从而确定归一化系统函数为

$$H_n(p) = \frac{1}{p^N + b_{N-1}p^{N-1} + b_{N-2}p^{N-2} + \dots + b_1p + b_0}$$

切比雪夫(Chebyshev) 低通滤波器

- ◆ 巴特沃斯滤波器的通带和阻带内都是单调的
 - 当通带边界处满足指标要求时，通带内有较大的富余量
 - 更有效的设计方法应该是将逼近精确度均匀的分布在整个通带内，或者均匀的分布在整個阻带内，或者均匀的分布在两者之内，这样可使滤波器的阶数大大降低
 - 可通过选择具有等波纹特性的逼近函数来达到
- ◆ 切比雪夫模拟低通滤波器的幅频响应在**一个频带中具有等波纹特性**
 - Chebyshev-I filters 通带等波纹响应
 - Chebyshev-II filters 阻带等波纹响应
- ◆ 相同指标下,切比雪夫滤波器比巴特沃思滤波器阶数低



(a)切比雪夫I型低通滤波器 (b)切比雪夫II型低通滤波器
切比雪夫低通滤波器幅频响应曲线



6.1.1 模拟滤波器原型介绍

◆ 切比雪夫I型滤波器的平方幅度响应为

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2(\Omega/\Omega_p)}$$

ε 是小于1的正数，表示滤波器通带内幅度波动的程度， ε 愈大，幅度波动也愈大

Ω_p 是通带截止频率， $\lambda = \Omega/\Omega_p$ 称为对 Ω_p 的归一化频率

$C_N(x)$ 是 N 阶切比雪夫多项式

$$C_N(x) = \begin{cases} \cos[N \arccos(x)] & |x| \leq 1 \\ \cosh[N \operatorname{ar} \cosh(x)] & |x| > 1 \end{cases}$$

$$C_N(x) = \begin{cases} \cos[N \arccos(x)] & |x| \leq 1 \\ \cosh[N \operatorname{ar} \cosh(x)] & |x| > 1 \end{cases}$$

- 当 $|x| \leq 1$ 时, $|C_N(x)| \leq 1$ 。 $C_N(x)$ 在 -1 和 $+1$ 之间振荡, 振荡的次数与 N 成正比, 具有等波纹性

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2(\Omega/\Omega_p)}$$

- 当 $|x| \leq 1$ 时, $\varepsilon^2 C_N^2(x)$ 在 0 到 ε^2 之间波动, 函数 $1 + \varepsilon^2 C_N^2(\Omega/\Omega_p)$ 的倒数即是平方幅度响应 $|H_a(j\Omega)|^2$, 其在 $[0, \Omega_p]$ 上有等波纹波动, 最大值为 1 , 最小值为 $1/(1 + \varepsilon^2)$
- 当 $|x| > 1$ 时, $|C_N(x)| > 1$, 且 $|C_N(x)|$ 随着 $|x|$ 的增加单调上升
- N 相同时, 切比雪夫滤波器比巴特沃斯滤波器具有较窄的过渡带



切比雪夫滤波器的设计步骤

1. 确定模拟滤波器的设计指标 Ω_p Ω_s α_p α_s
2. 确定参数 ε

$$\varepsilon^2 = 10^{0.1\alpha_p} - 1$$

3. 求出滤波器的阶数 N ，取 N 为比计算结果大的最小整数，就是切比雪夫模拟低通滤波器的阶数

$$N = \frac{\operatorname{arccosh} \left(\frac{10^{0.1\alpha_s} - 1}{10^{0.1\alpha_p} - 1} \right)^{1/2}}{\operatorname{arccosh} (\Omega_s / \Omega_p)}$$



4. 由下式求归一化切比雪夫I型低通滤波器的极点

$$p_{nk} = \sigma_k + j\Omega_k, k = 1, 2, \dots, N \quad \text{其中}$$

$$\sigma_k = -\sinh(\beta) \sin \frac{(2k-1)\pi}{2N}$$

$$\Omega_k = -\cosh(\beta) \cos \frac{(2k-1)\pi}{2N}$$

$$\beta = \frac{\operatorname{arsinh}(1/\varepsilon)}{N}$$

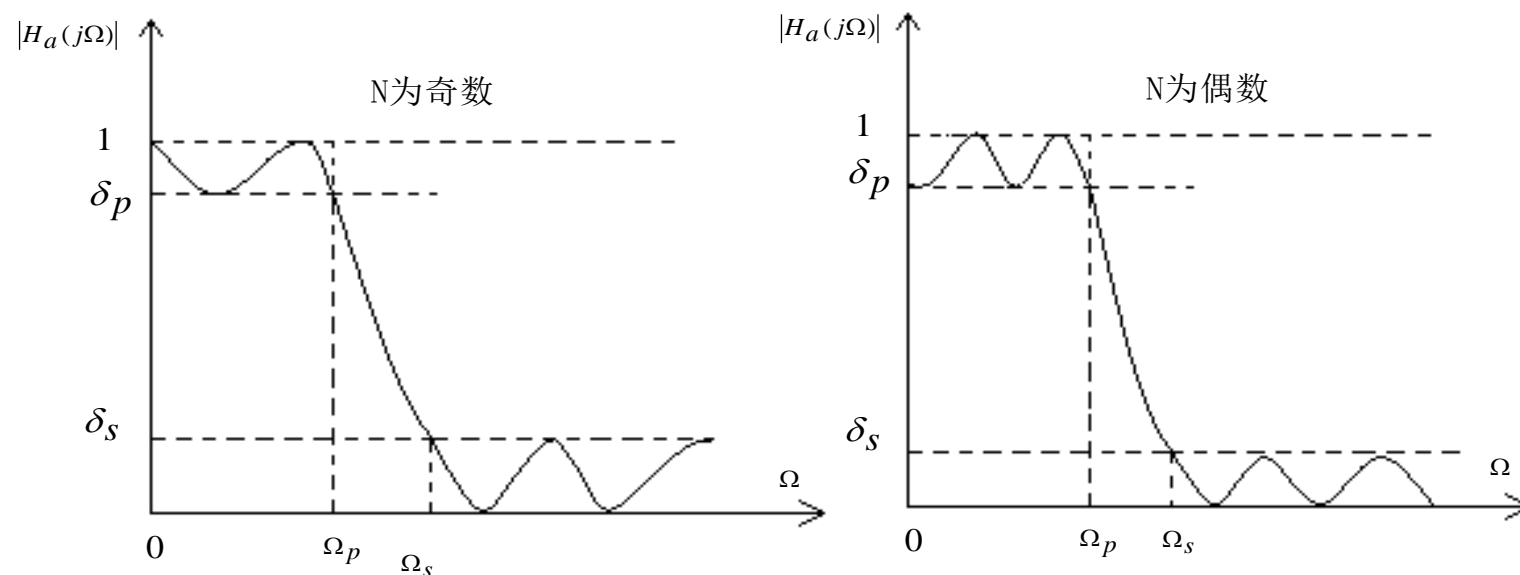
5. 求归一化切比雪夫I型低通滤波器的系统函数 $H_n(s)$

$$N \text{ 为奇数时} \quad H_n(s) = \frac{\sinh \beta}{1 + \sinh \beta} \prod_{k=1}^{N/2} \frac{(\sigma_k^2 + \Omega_k^2)}{s^2 - 2\sigma_k s + (\sigma_k^2 + \Omega_k^2)}$$

$$N \text{ 为偶数时} \quad H_n(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \prod_{k=1}^{N/2} \frac{(\sigma_k^2 + \Omega_k^2)}{s^2 - 2\sigma_k s + (\sigma_k^2 + \Omega_k^2)}$$

椭圆模拟低通滤波器原型介绍

- 通带和阻带均具有等波纹响应，幅频响应特性与FIR等波纹滤波器类似
- 幅频响应平方函数 $|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 U_N^2(\Omega/\Omega_c)}$
- 其中 $U_N(\cdot)$ 是 N 阶雅可比椭圆函数





椭圆低通滤波器的设计步骤

- 确定滤波器的技术指标 α_p 、 Ω_p 、 α_s 、 Ω_s
- 根据通带最大衰减 α_p 确定滤波器参数 $\varepsilon = \sqrt{10^{0.1\alpha_p} - 1}$
- 由通带截止频率 Ω_p 和 Ω_s 确定滤波器参数 $k = \Omega_p / \Omega_s$
- 根据 α_s ，确定滤波器参数 $k_1 = \varepsilon / \sqrt{10^{0.1\alpha_s} - 1}$
- 确定滤波器的阶数 N :

$$N = \frac{K(k)K(\sqrt{1-k_1^2})}{K(k_1)K(\sqrt{1-k^2})} \quad K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \theta}}$$

- 求归一化椭圆低通滤波器的零极点和系统函数 $H_n(s)$ ，然后去归一化，得所设计滤波器的系统函数 $H_a(s)$

对比

- ◆ 当阶数相同时，对相同的通带最大衰减 a_p 和阻带最小衰减 a_s
 - 巴特沃斯滤波器具有单调下降的幅频特性，**过渡带**最宽。两种类型的切比雪夫滤波器的过渡带宽度相等，比巴特沃斯滤波器的过渡带窄，但比椭圆滤波器的过渡带宽
 - 切比雪夫 I 型滤波器在通带具有等波纹幅频特性，过渡带和阻带是单调下降的幅频特性
 - 切比雪夫 II 型滤波器的通带幅频响应几乎与巴特沃斯滤波器相同，阻带是等波纹幅频特性
 - 椭圆滤波器的过渡带最窄，通带和阻带均是等波纹幅频特性



对比

◆ 相位逼近情况

- 巴特沃斯和切比雪夫滤波器在大约 $3/4$ 的通带上非常接近线性相位特性
- 椭圆滤波器仅在大约半个通带上非常接近线性相位特性
- 贝塞尔滤波器在整个通带逼近线性相位特性，而其幅频特性的过渡带比其他四种滤波器宽得多

对比

◆ 复杂性

- 在满足相同的滤波器幅频响应指标条件下，巴特沃斯滤波器阶数最高，椭圆滤波器的阶数最低，而且阶数差别较大
- 所以，就满足滤波器幅频响应指标而言，椭圆滤波器的性价比最高，应用较广泛

- ◆ 由上述比较可见，五种滤波器各具特点。工程实际中选择哪种滤波器取决于对滤波器阶数（阶数影响处理速度和实现的复杂性）和相位特性的具体要求



第6章 IIR数字滤波器的设计



◆ 6.1 IIR滤波器的函数模型设计法

- 6.1.1 模拟滤波器原型介绍
- 6.1.2 模拟到数字滤波器的转换
- 6.1.3 数字滤波器的频带变换

◆ 6.2 IIR数字滤波器的直接设计法

◆ 6.3 IIR滤波器误差分析

◆ 6.4 常用的特殊滤波器

6.1.2 模拟到数字滤波器的转换

- ◆ 模拟滤波器 $H_a(s)$ 到数字滤波器 $H(z)$ 的转换通过 s 到 z 的复值映射来实现，需要满足：
 - 因果稳定的模拟滤波器变换成数字滤波器，仍应是**因果稳定**的，保证 s 平面的左半平面要映射到 z 平面的单位圆内部
 - 数字滤波器的频率响应应模仿模拟滤波器的频响特性，即 s 平面的虚轴映射为 z 平面的单位圆，相应的频率之间呈**线性关系**

6.1.2 模拟到数字滤波器的转换

◆ $H_a(s)$ 从 s 平面转换到 z 平面的典型方法有

- 脉冲响应不变法
- 双线性变换法

6.1.2 模拟到数字滤波器的转换

◆ 脉冲响应不变法

- **基本原理**：使数字滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$ 模仿模拟滤波器的单位冲激响应 $h_a(t)$
- 模拟滤波器的系统函数 $H_a(s)$ 对应的单位冲激响应为：

$$h_a(t) = \text{ILT}[H_a(s)]$$

逆拉氏变换

$h_a(t)$

以 T 为间隔采样

$$h_a(nT) = h(n)$$

Z变换

$$H(z) = \text{ZT}[h(n)]$$

脉冲响应不变法

- ◆ 以理想采样信号 $\hat{h}_a(t)$ 为桥梁，推导从模拟滤波器转换到数字滤波器时， s 平面和 z 平面之间的映射关系

- 设 $\hat{h}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_a(t) \delta(t-nT)$ ，拉氏变换得到：

$$\hat{H}_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}_a(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_a(t) \delta(t-nT) \right] e^{-st} dt = \sum_n h_a(nT) e^{-snT}$$

- 与 $\hat{H}_a(s) = \sum_n h(n) e^{-snT} = \sum_n h(n) z^{-n} \big|_{z=e^{sT}} = H(z) \big|_{z=e^{sT}}$ 比较得：
- 理想采样信号的拉氏变换与相应的采样序列的 Z 变换之间的映射关系为

$$z = e^{sT}$$

即脉冲响应不变法对应的 s 和 z 平面之间的映射关系

脉冲响应不变法

- ◆ 设模拟滤波器的系统函数 $H_a(s)$ 只有一阶极点，且分母多项式的阶次高于分子多项式的阶次，则

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}$$

逆拉氏变换

s_k 是 $H(s)$ 的一阶极点

$$h_a(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t)$$

等间隔采样

$u(t)$ 是单位阶跃函数

采样间隔为 T

$$h(n) = h_a(nT) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k nT} u(nT) \xrightarrow{\text{Z变换}} H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

脉冲响应不变法

◆ $H_a(s)$ 直接变换成 $H(z)$

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \quad H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

设 $H(z) = H_a(s) \left| \frac{1}{s - s_k} = \frac{1}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} \right., \quad k = 1, 2, \dots, N$

$$\begin{array}{ccc} s = \sigma + j\Omega & \xrightarrow{z = e^{sT}} & z = re^{j\omega} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T} = e^{sT} \\ z = re^{j\omega} & & \downarrow \\ & & r = e^{\sigma T}, \quad \omega = \Omega T \end{array}$$

$\sigma = 0$ 时, $r = 1$, s 平面的虚轴映射到 z 平面的单位圆上

$\sigma < 0$ 时, $r < 1$, s 平面的左半平面映射到 z 平面的单位圆内

$\sigma > 0$ 时, $r > 1$, s 平面的右半平面映射到 z 平面的单位圆外

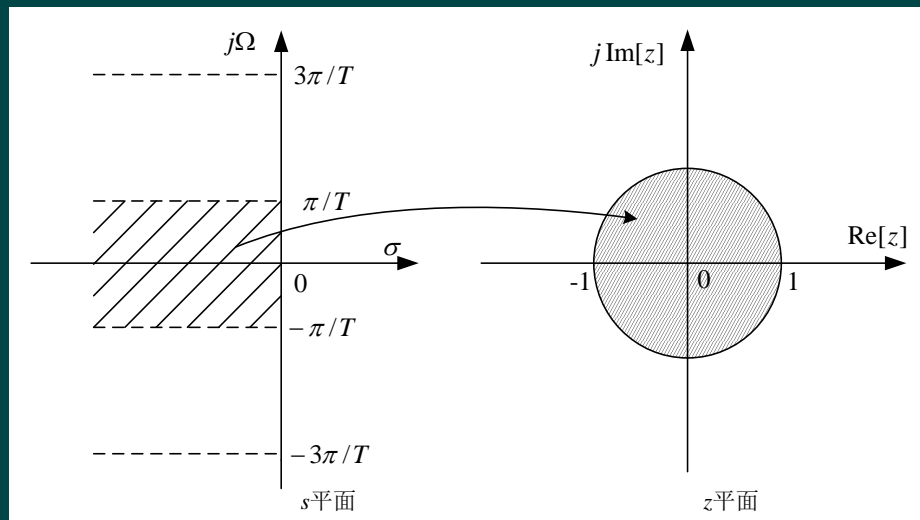
脉冲响应不变法

- ◆ 而 $z = e^{sT}$ 是一个周期函数

$$z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T} = e^{\sigma T} e^{j\left(\Omega + \frac{2\pi}{T}M\right)T}$$

- ◆ 当 σ 不变，模拟频率 Ω 变化 $2\pi / T$ 的任意整数倍时映射值不变

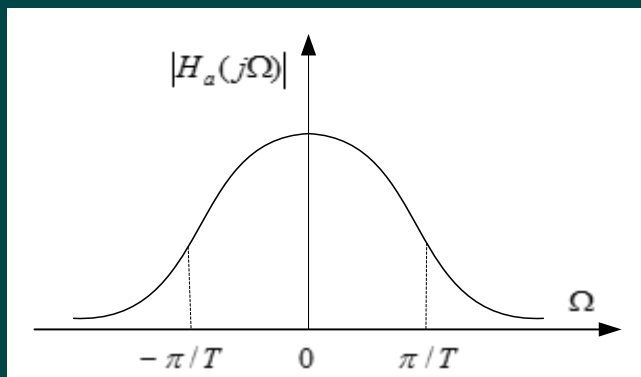
脉冲响应不变法的
 s 平面与 z 平面
之间的映射关系



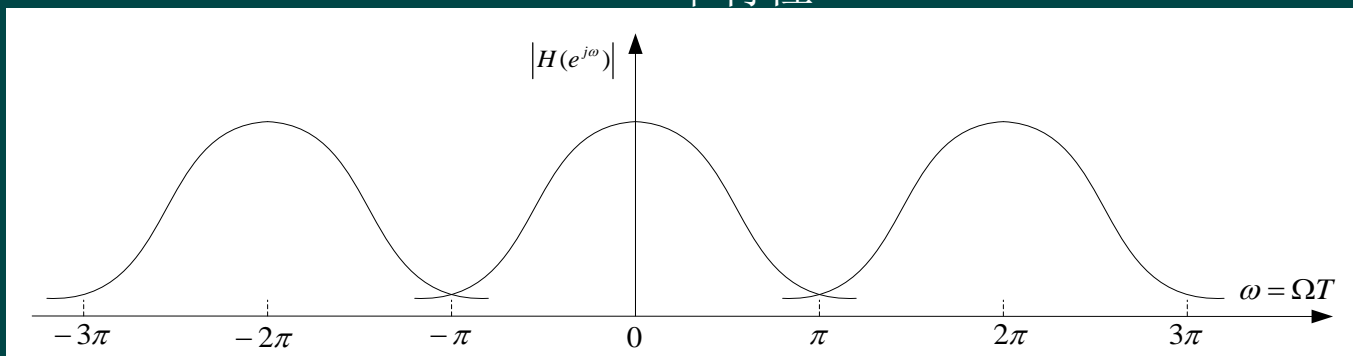
脉冲响应不变法

- ◆ 当 $h(n)$ 是由 $h_a(t)$ 以等间隔 T 采样获得时, $h(n)$ 的频谱函数 $H(e^{j\omega})$ 是 $h_a(t)$ 的频谱函数 $H_a(j\Omega)$ 的周期延拓,

即:
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(j\frac{\omega}{T} - jk\frac{2\pi}{T})$$



如果原 $h_a(t)$ 的频带不是限于 $\pm\pi/T$ 之间, 则会在奇数倍 π/T 附近产生频谱混叠, 对应的数字频率在 $\omega = \pm\pi$ 附近产生混叠现象, 这种混叠会使设计出的数字滤波器在 $\omega = \pm\pi$ 附近的频率响应特性偏离模拟滤波器在 π/T 附近的频率特性



脉冲响应不变法

- ◆ 为避免混叠，要求模拟滤波器基本上是有限带宽的低通或带通滤波器，而且在阻带内部不存在振荡
- ◆ 如果不是带限的，如高通滤波器，则需要在高通滤波器之前加保护滤波器，滤除高于折叠频率 π/T 以上的频带，以免产生频谱混叠现象

脉冲响应不变法

- ◆ 避免当 T 较小时, $H(e^{j\omega})$ 有 too 高的增益,

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(j\frac{\omega}{T} - jk\frac{2\pi}{T})$$

- ◆ 令 $h(n) = Th_a(nT)$ 和 $H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{TA_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$

此时

$$H(e^{j\omega}) = H_a(j\omega/T), \quad |\omega| < \pi$$

s_k 是 $H_a(s)$ 的一阶极点

脉冲响应不变法设计IIR数字滤波器



◆ 设计步骤

- 确定采样间隔 T
- 根据采样间隔 T ，将给定的数字滤波器频率指标转换为模拟滤波器的频率指标： $\Omega_p = \omega_p / T$ ， $\Omega_s = \omega_s / T$
- 根据指标 $\alpha_p, \Omega_p, \alpha_s, \Omega_s$ ，设计模拟滤波器 $H_a(s)$
- 用脉冲响应不变法，将模拟滤波器 $H_a(s)$ 变换成数字滤波器 $H(z)$

优点

- ◆ 脉冲响应不变法使得数字滤波器的脉冲响应完全模仿模拟滤波器的冲激响应，也就是**时域逼近良好**
- ◆ 模拟频率 Ω 和数字频率 ω 之间呈**线性关系**：
 $\omega = \Omega T$ 。如：一个线性相位的模拟滤波器（例贝塞尔滤波器）可以映射成一个线性相位的数字滤波器

缺点

- ◆ 由于有频率混叠效应，脉冲响应不变法只适用于带限的模拟滤波器
 - 由于有频率混叠效应，所以高通和带阻滤波器不宜采用脉冲响应不变法。因为它们高频部分不衰减，将完全混淆在低频中，从而使整个频响面目全非
 - 若要对高通和带阻实行脉冲响应不变法，则必须先对高通和带阻滤波器加一保护滤波器，滤掉高于折叠频率以上的频带。它会增加设计的复杂性和滤波器的阶数
 - 对于带通和低通滤波器，需充分带限，若阻带衰减越大，则混叠效应越小





例 6.1.2 已知模拟滤波器的系统函数 $H_a(s)$ 为

$H_a(s) = \frac{2s-2}{s^2+6s+5}$ 利用脉冲响应不变法，把模拟滤波器变换成等价的数字滤波器 $H(z)$ ，采样间隔 $T=0.1s$

解：

$$H(z) = H_a(s) \left| \frac{1}{s-s_k} = \frac{1}{1-e^{s_k T} z^{-1}} \right., \quad k=1,2,\dots,N$$

分式展开 $H_a(s) = \frac{2s-2}{s^2+6s+5} = \frac{3}{s+5} - \frac{1}{s+1}$

极点为 $s_1 = -1, s_2 = -5$

数字滤波器 $H(z) = \frac{3T}{1-e^{-5T}z^{-1}} - \frac{T}{1-e^{-T}z^{-1}} = \frac{0.2-0.2108z^{-1}}{1-1.5114z^{-1}+0.5488z^{-2}}$



例6.1.3 设低通DF的3dB带宽频率 $\omega_c=0.2\pi$, 阻带截止频率 $\omega_s=0.4\pi$, 在 $\omega=\omega_s$ 处的阻带衰减 $20\lg|H(e^{j\omega s})|=-15\text{dB}$, 试用脉冲响应不变法设计一个Butterworth低通DF。(设采样频率 $f_s=20\text{kHz}$)

解: 设计分为4步

◆ 将数字滤波器的设计指标转变为模拟滤波器的设计指标

因为: $f_s=20\text{kHz}$, 则采样间隔为 $T=1/f_s=1/20\text{kHz}$

对于脉冲响应不变法, 频率变换是线性的

$$\text{通带截止频率: } \Omega_c = \frac{\omega_c}{T} = \frac{0.2\pi}{1/20 \times 10^3} = 4\pi \times 10^3$$

$$\text{阻带截止频率: } \Omega_s = \frac{\omega_s}{T} = \frac{0.4\pi}{1/20 \times 10^3} = 8\pi \times 10^3$$

$$\alpha_s = 20\lg|H_a(j\Omega_s)| = -15dB$$

由下式得，要设计的模拟滤波器， $N=3$

$$N = \frac{\lg\left[(10^{0.1\alpha_p} - 1)/(10^{0.1\alpha_s} - 1)\right]}{2\lg(\Omega_p/\Omega_s)}$$

根据巴特沃斯滤波器的阶数，由下式求得 $H_a(s)$ 的极点

$$p_k = \Omega_c e^{j\frac{\pi}{2N}(2k+N+1)} \quad k=1, \dots, N$$

求得 $H_a(s)$

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=1}^N s - p_k} = \frac{\Omega_c^3}{(s - \Omega_c e^{j\frac{2}{3}\pi})(s + \Omega_c)(s - \Omega_c e^{-j\frac{2}{3}\pi})}$$

◆ 用留数法对 $H_a(s)$ 进行部分分式展开

$$H_a(s) = \frac{C_0}{s - \Omega_c e^{j\frac{2}{3}\pi}} + \frac{C_1}{s + \Omega_c} + \frac{C_2}{s - \Omega_c e^{-j\frac{2}{3}\pi}}$$

$$C_0 = H_a(s) \Big|_{s=s_0} = \Omega_c / \left(-\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$C_1 = \Omega_c$$

$$C_2 = \Omega_c / \left(-\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$





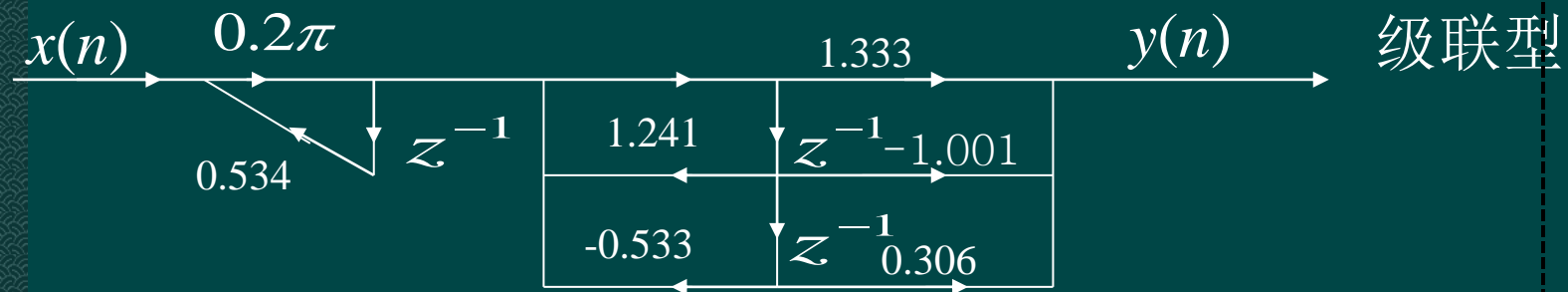
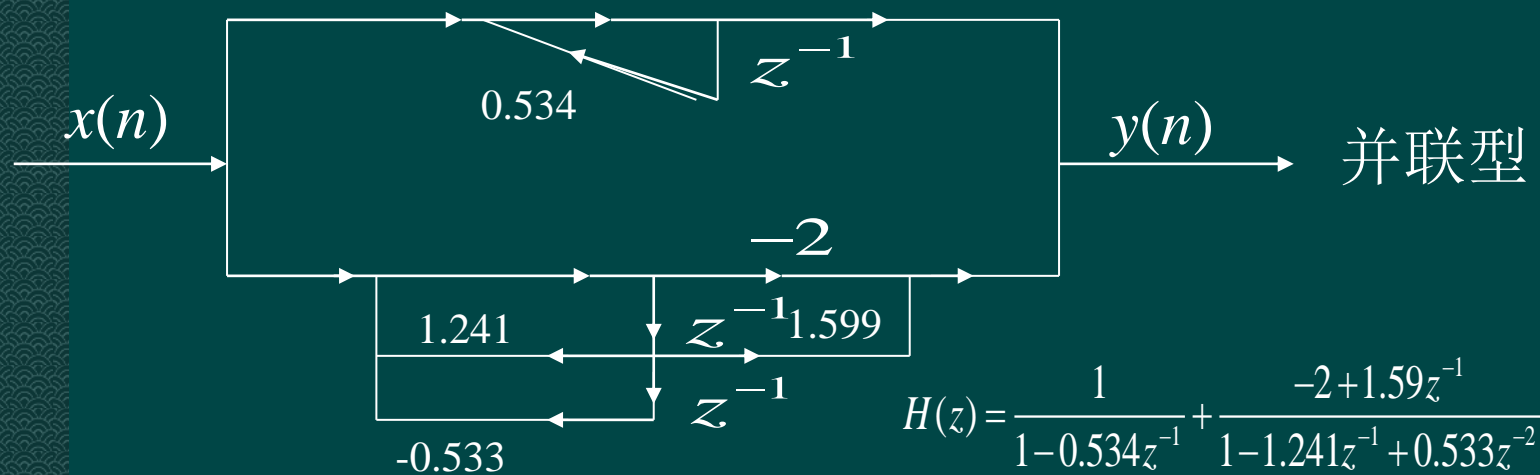
◆根据脉冲响应不变法，由 $H_a(s)$ 求出 $H(z)$

$$H(z) = H_a(s) \left| \frac{1}{s-s_k} = \frac{1}{1-e^{s_k T} z^{-1}} \right. = \frac{\frac{\Omega_c}{-\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}}}{1 - e^{\Omega_c e^{j\frac{2}{3}\pi}} z^{-1}} + \frac{\Omega_c}{1 - e^{-\Omega_c T} z^{-1}} + \frac{\frac{\Omega_c}{-\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}}}{1 - e^{\Omega_c e^{-j\frac{2}{3}\pi}} z^{-1}}$$

将 $\Omega_c = 4\pi \times 10^3$ 和 $T = \frac{1}{20 \times 10^3}$ 代入上式得

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.534z^{-1}} + \frac{-2 + 1.59z^{-1}}{1 - 1.241z^{-1} + 0.533z^{-2}}$$

$$= 0.2\pi \times \frac{1}{1 - 0.534z^{-1}} \times \frac{1.333 - 1.001z^{-1} + 0.306z^{-2}}{1 - 1.241z^{-1} + 0.533z^{-2}}$$



$$H(z) = 0.2\pi \times \frac{1}{1 - 0.534z^{-1}} \times \frac{1.333 - 1.001z^{-1} + 0.306z^{-2}}{1 - 1.241z^{-1} + 0.533z^{-2}}$$

双线性变换法

- ◆ **脉冲响应不变法**是从 s 平面到 z 平面的多值映射，会产生频谱混叠
- ◆ **双线性变换法**采用非线性频率压缩的方法，将整个频率轴压缩到 $\pm\pi/T$ 之间，再用 $z=e^{sT}$ 转换到 z 平面上，由于 s 平面与 z 平面是一一对应的关系，从而有效地避免了脉冲响应不变法中的多值映射所引起的频谱混叠现象；双线性变换法将 s 的左半平面映射到 z 平面的单位圆内，因此也满足了对系统因果稳定性的要求

双线性变换法

- ◆ 设模拟滤波器的系统函数是 $H_a(s)$, $s = j\Omega$, 经过非线性频率压缩后用 $\hat{H}_a(s_1)$, $s_1 = j\Omega_1$ 表示
- ◆ 用正切变换实现频率压缩: $\Omega = \frac{2}{T} \tan(\frac{1}{2}\Omega_1 T)$, T 是采样间隔
- ◆ 当 Ω_1 从 $-\pi/T$ 经过0变化到 π/T 时, Ω 则由 $-\infty$ 经过0变化到 $+\infty$, 实现了 s 平面上整个虚轴完全压缩到 s_1 平面上虚轴的 $\pm\pi/T$ 之间的转换

双线性变换法

- ◆ 用正切变换实现频率压缩: $\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{1}{2}\Omega_1 T\right)$

根据欧拉公式得 $\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$ $\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2j}$

$$j\Omega = \frac{2}{T} \frac{e^{j\Omega_1 T/2} - e^{-j\Omega_1 T/2}}{e^{j\Omega_1 T/2} + e^{-j\Omega_1 T/2}} = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-j\Omega_1 T}}{1 + e^{j\Omega_1 T}}$$

$s_1 = j\Omega_1$

$$s = j\Omega = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-s_1 T}}{1 + e^{-s_1 T}} = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$z = e^{sT}$$

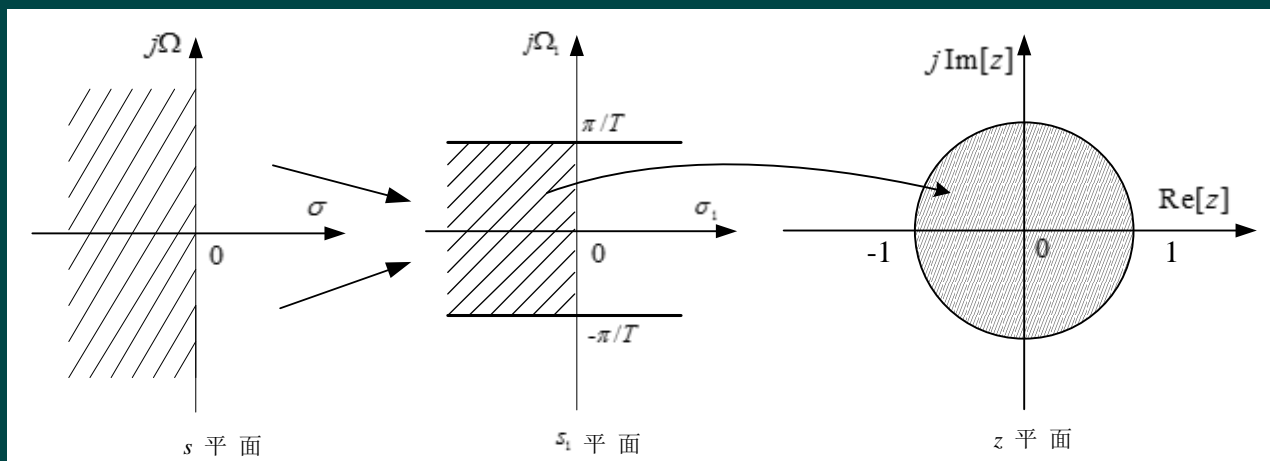
展开得 $\frac{T}{2}sz + \frac{T}{2}s - z + 1 = 0$

s 和 z 的变换是双线性的,
所以被称为双线性变换

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-s_1 T}}{1 + e^{-s_1 T}} = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$s = \sigma + j\Omega, \quad s_1 = \sigma_1 + j\Omega_1$$

- ◆ 从 s 平面映射到 s_1 平面，再从 s_1 平面映射到 z 平面，映射关系如下图



- ◆ 由 s 平面到 s_1 平面的非线性频率压缩，使 $\hat{H}_a(s_1)$ 带限于 π/T ，因此，再用脉冲响应不变法从 s_1 平面转换到 z 平面不可能产生频谱混叠现象
- ◆ s 平面左半平面映射到 z 平面的单位圆内； s 平面的虚轴映射到 z 平面的单位圆上

双线性变换法

◆ 模拟系统 $H_a(s)$ 和对应的数字系统 $H(z)$ 的关系:

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

◆ 模拟频率 Ω 与数字频率 ω 之间的关系

令 $s = j\Omega$, $z = e^{j\omega}$ 带入上式

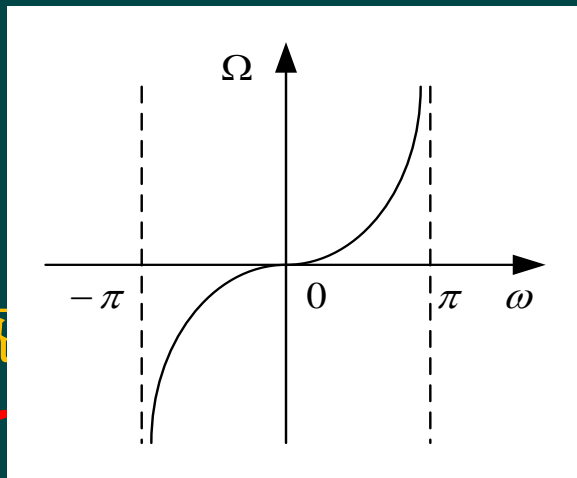
$$j\Omega = \frac{2}{T} \frac{1-e^{-j\omega}}{1+e^{-j\omega}} = \frac{2}{T} \frac{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}{e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2}} = \frac{2}{T} j \tan \frac{\omega}{2}$$

得 $\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega}{2}$, 即 s 平面上的模拟频率 Ω 与 z 平面上的数字频率 ω 成非线性正切关系

Ω 与 ω 是单值映射

所以**双线性变换法没有频谱混频现象**

双线性变换法的频率变换关系





双线性变换的新问题

- ◆ 线性相位模拟滤波器经变换后，不再保持线性相位特性
- ◆ 线性关系适于幅度特性是分段常数滤波器的设计，但是分段边缘的临界频率点会产生例如低通、高通、带通等

解决办法：频域的预畸变校正

利用前面的方法：在特定频率处严格对应，可以准确控制截止频率的位置

$$\Omega_c = \frac{2}{T} \tan(\omega_c / 2)$$

双线性变换法设计IIR数字滤波器



设计步骤

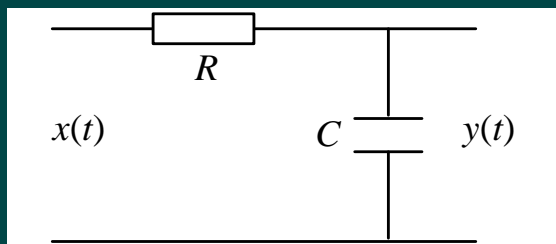
- 确定参数 T 。为简单起见，可取 $T=2$ 。通常取 $\Omega_c T=1$
- 确定数字低通滤波器的技术指标：通带截止频率 ω_p 、通带衰减 α_p 、阻带截止频率 ω_s 、阻带衰减 α_s 。采用双线性变换法模数频率间的转换关系，将数字低通滤波器的指标转换成模拟低通滤波器的技术指标

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{1}{2} \omega\right)$$

- 按照模拟低通滤波器的技术指标设计模拟低通滤波器
- 将模拟滤波器 $H_a(s)$ ，通过下式从 s 平面转换到 z 平面，得到数字低通滤波器系统函数 $H(z)$

$$H(z) = H(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

例 6.1.4 分别用脉冲响应不变法和双线性变换法将下图所示的RC低通滤波器变换成数字低通滤波器

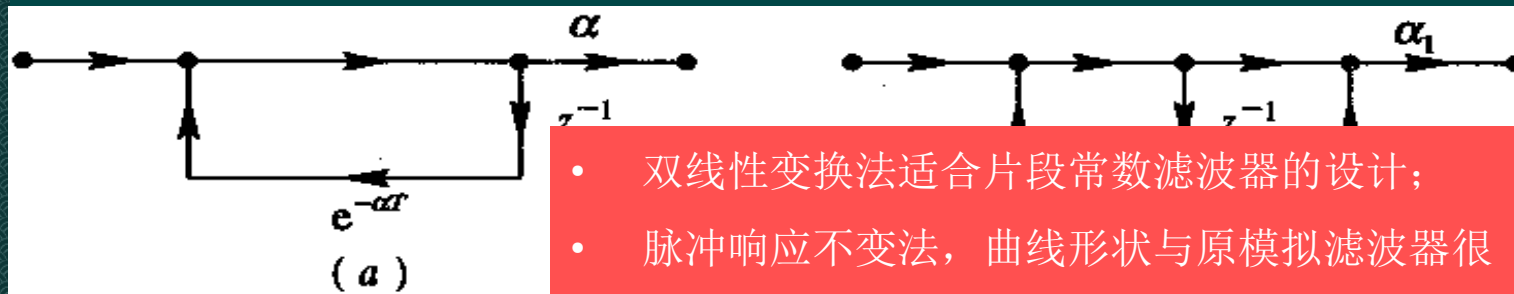


解：RC模拟低通滤波器的系统函数 $H_a(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha}$, $\alpha = 1/(RC)$

脉冲响应不变法 $H(z) = H_a(s) \bigg|_{\substack{1 \\ s-s_k = \frac{1}{1-e^{s_k T} z^{-1}}}} = \frac{\alpha T}{1 - e^{-\alpha T} z^{-1}}$

双线性变换法

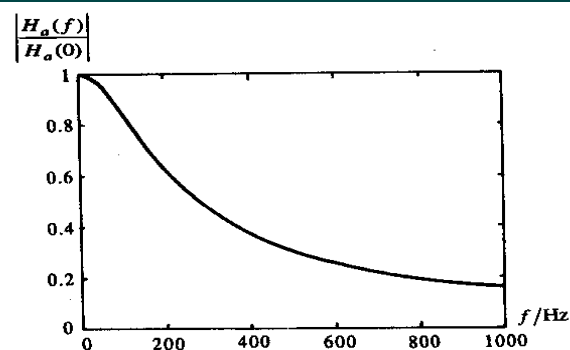
$$H(z) = H_a(s) \bigg|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{\alpha_1 (1+z^{-1})}{1+\alpha_2 z^{-2}}, \quad \alpha_1 = \frac{\alpha T}{\alpha T + 2}, \alpha_2 = \frac{\alpha T - 2}{\alpha T + 2}$$



- 双线性变换法适合片段常数滤波器的设计;
- 脉冲响应不变法, 曲线形状与原模拟滤波器很相近;

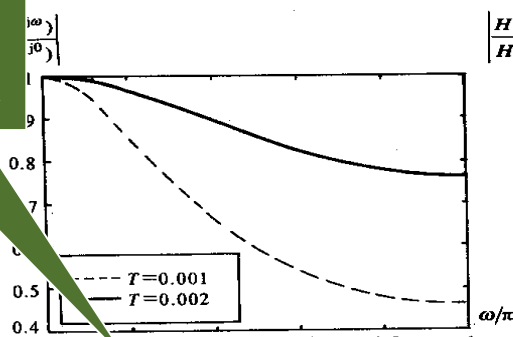
$H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 的网络结构

(a) $H_1(z)$, (b) $H_2(z)$

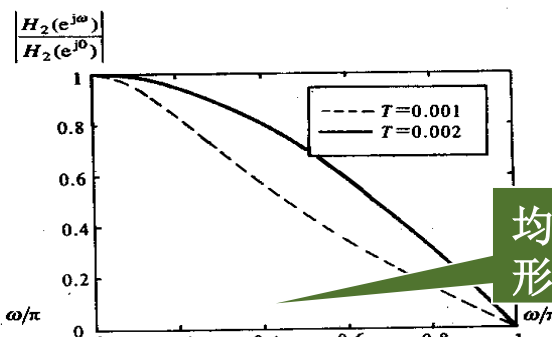


(a)

$T=0.001$ 时混叠较小, 曲线形状保持较好



(b)



(c)

均无混叠, 曲线形状偏离较大

数字滤波器 $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 的幅频特性

第6章 IIR数字滤波器的设计



◆ 6.1 IIR滤波器的函数模型设计法

- 模拟滤波器原型介绍
- 模拟到数字滤波器的转换
- 数字滤波器的频带变换

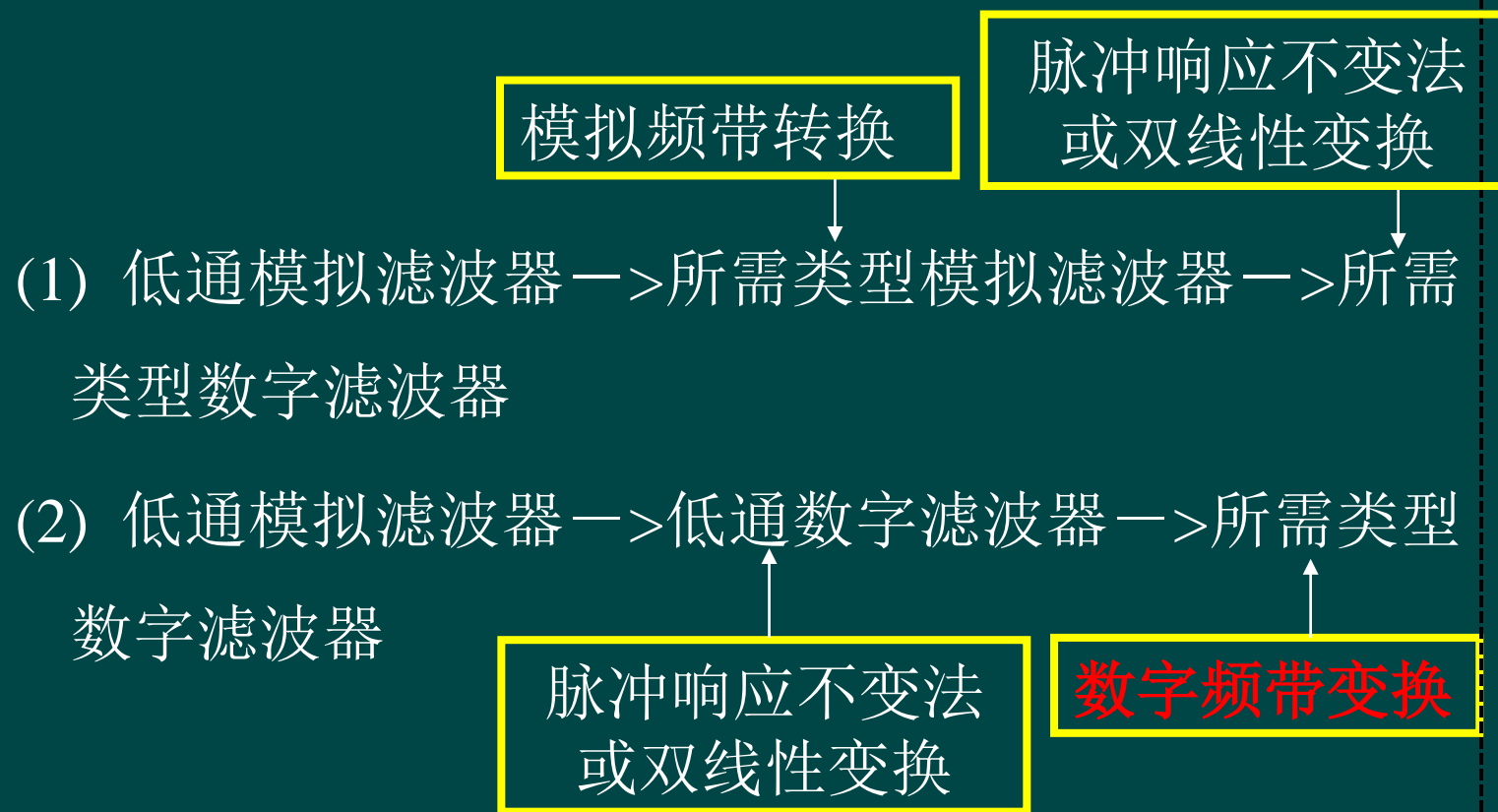
◆ 6.2 IIR数字滤波器的直接设计法

◆ 6.3 IIR滤波器误差分析

◆ 6.4 常用的特殊滤波器

6.1.3 数字滤波器的频带变换

IIR滤波器间接设计法的两种思路

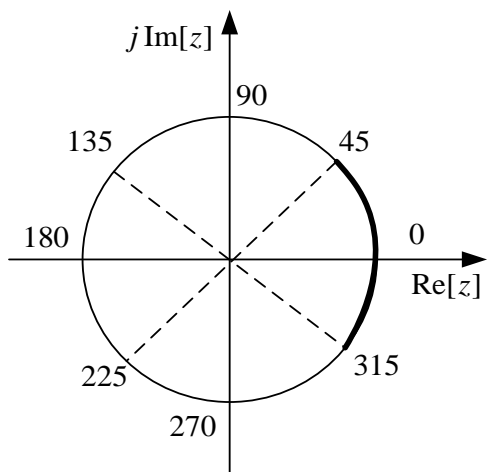




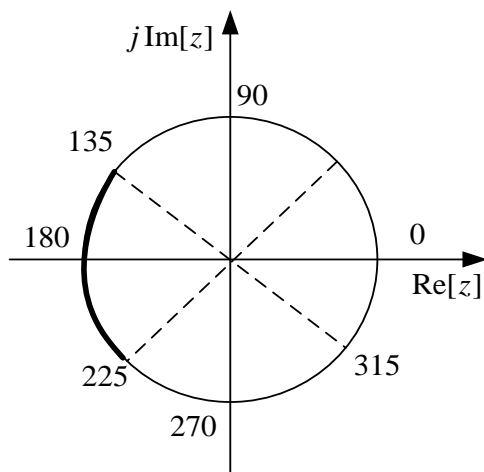
6.1.3 数字滤波器的频带变换

- ◆ 从原型低通数字滤波器到各种类型的数字滤波器的频带变换也称作Z平面变换法
- ◆ 设原型低通数字滤波器的系统函数为 $H_L(z)$ ，所需类型数字滤波器的系统函数为 $H(z)$ ，这种变换是将 $H_L(z)$ 的 z_L 平面映射到 $H(z)$ 的 z 平面

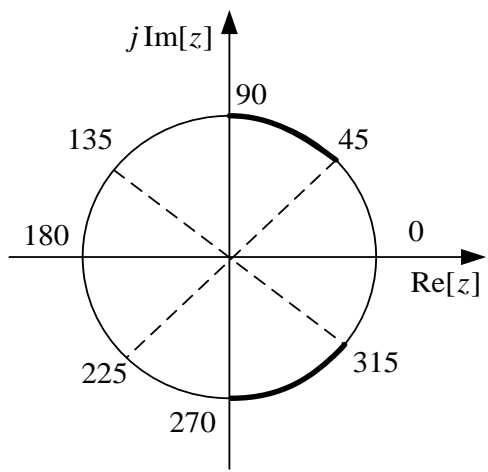
◆ 数字频带是在 z 平面的单位圆上定义的



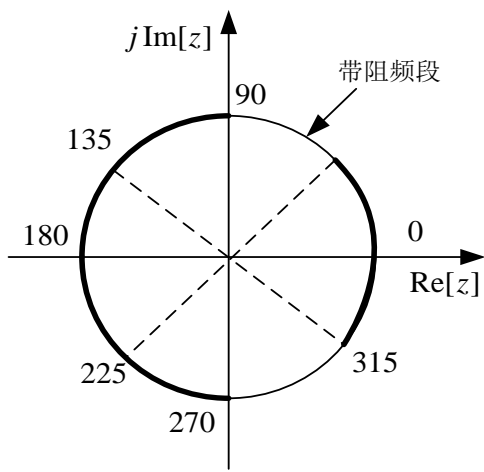
数字低通的通带频段



数字高通的通带频段



数字带通的通带频段



数字带阻的通带频段



6.1.3 数字滤波器的频带变换

- ◆ 用 z_L 和 z 来表示变换前后的 z 平面，假设从 z_L 平面到 z 平面的映射关系为

$$z_L^{-1} = G(z^{-1})$$

必须是 z^{-1} 的有理函数，这样 $H(z)$ 才是可实现的

$$H(z) = H_L(z_L) \Big|_{z_L^{-1} = G(z^{-1})}$$

z_L 平面的单位圆必须映射到 z 平面的单位圆上
 z_L 平面的单位圆内部必须映射到 z 平面的单位圆内

如果能找到适当的从单位圆周到单位圆周的数字变换，把原型低通数字的通带频段变换成其他类型数字滤波器所要求的通带频段，就等于完成了这种滤波器的设计

6.1.3 数字滤波器的频带变换

- ◆ 设 ω_L 和 ω 分别是 z_L 和 z 的频率变量，则在各自单位圆

$z_L = e^{j\omega_L}$ 和 $z = e^{j\omega}$ 上有

$$|z_L^{-1}| = |G(z^{-1})| = |G(e^{-j\omega})| = 1$$

- ◆ 函数 G 的幅频特性对所有的频率都为1，因此是一个全通函数

6.1.3 数字滤波器的频带变换

◆ 全通滤波器一般形式

N 是全通函数的阶数

$$z_L = G(z^{-1}) = \pm \prod_{k=1}^N \frac{z^{-1} - p_k^*}{1 - p_k z^{-1}}$$

零点都是极点的共轭倒数

p_k 是 $G(z^{-1})$ 的极点，必须在单位圆内

◆ 选择合适的 N 和 α_k 就可以得到各种类型的变换



数字低通到数字低通的频带变换

- 当原型数字低通滤波器频带变换到数字低通滤波器时，他们都是低通函数，当 $\omega_L: 0 \rightarrow \pi$ 时，相应的 $\omega: 0 \rightarrow \pi$
- 当 ω 从 0 变到 π 时，全通函数的相角 $\phi(\omega)$ 的变化量为 $N\pi$

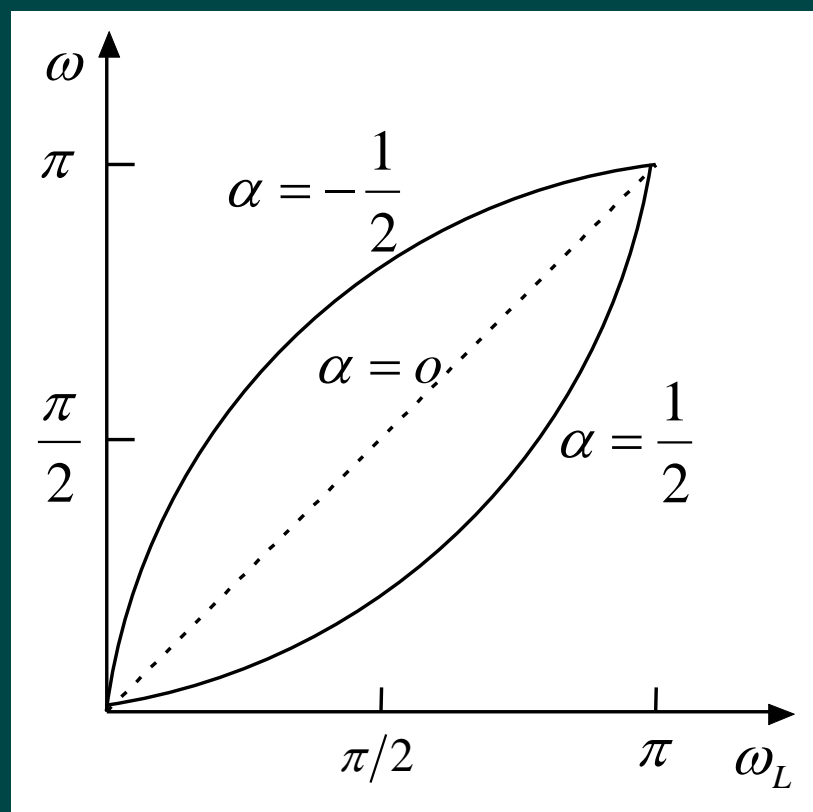
所以 $N=1$ ，于是有
$$z_L^{-1} = G(z^{-1}) = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}$$

频率间的变换关系为
$$e^{-j\omega_L} = \frac{e^{-j\omega} - \alpha}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$$

由上式可得

$$\omega = \arctan \left[\frac{(1-\alpha)^2 \sin \omega_L}{2\alpha + (1+\alpha^2) \cos \omega_L} \right] \quad \alpha = \frac{\sin \left(\frac{\omega_{Lc} - \omega_c}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\omega_{Lc} + \omega_c}{2} \right)}$$

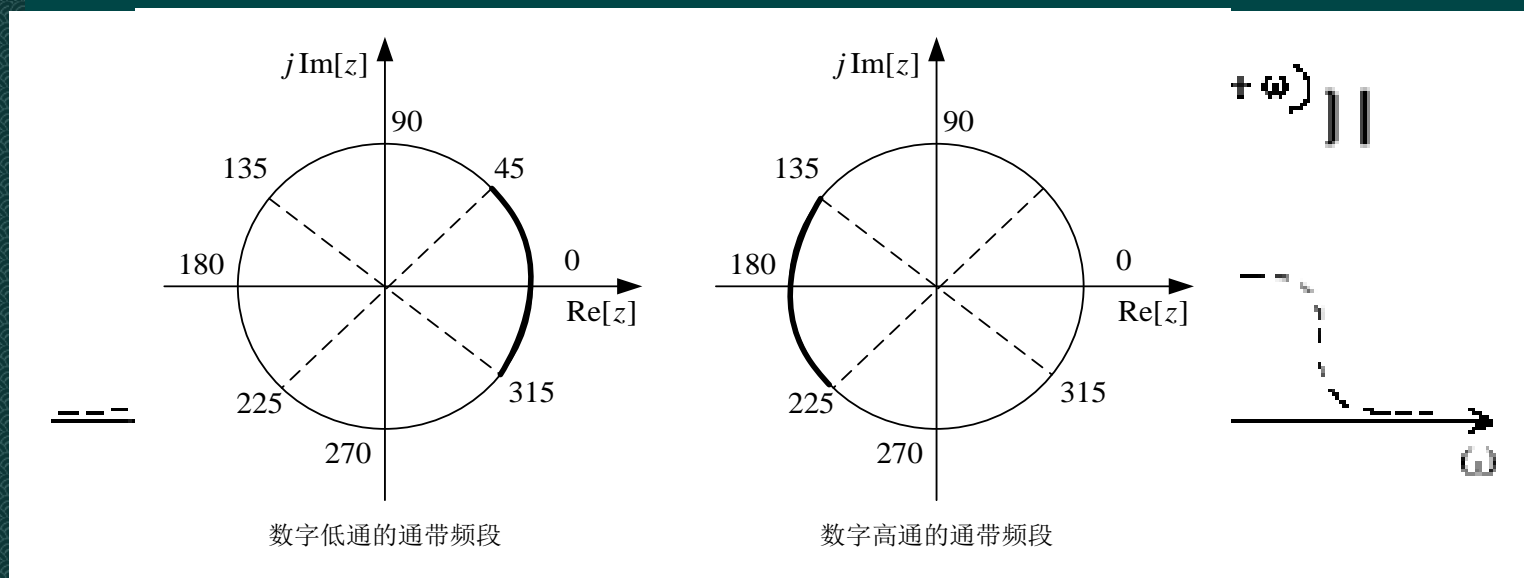
$\alpha > 0$ 频率压缩
 $\alpha < 0$ 频率扩张



LP-LP频率变换特性

数字低通到数字高通的变换

基本思想： 上述 LP 变换中的 Z 代以 $-Z$ ，单位圆上的频率响应将旋转 180° ，则 LP \Rightarrow HP，阶数 N 仍为 1



$$\omega_L = 0 \sim \pi \rightarrow \omega = -\pi \sim 0, \quad \omega_{Lc} \rightarrow -\omega_c$$

对应的

$$z_L^{-1} = G(z^{-1}) = \frac{(-z)^{-1} - \alpha}{1 - \alpha(-z)^{-1}} = -\frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}}$$

原型低通滤波器的边界频率 $-\omega_{Lc}$ 对应于高通滤波器的边界频率 ω_c

$$e^{-j(-\omega_{Lc})} = -\frac{e^{-j\omega_c} + \alpha}{1 + \alpha e^{-j\omega_c}}$$

由上式解得

$$\alpha = -\frac{\cos\left(\frac{\omega_c + \omega_{Lc}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_c - \omega_{Lc}}{2}\right)}$$



由边界频率为 ω_{Lc} 的低通数字滤波器变换成各型数字滤波器



变换类型	变换公式	变换参数计算公式
低通 \rightarrow 低通	$z_L^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}$	$\alpha = \frac{\sin(\frac{\omega_{Lc} - \omega_c}{2})}{\sin(\frac{\omega_{Lc} + \omega_c}{2})}$ <p>ω_c 为变换后低通滤波器的边界频率</p>
低通 \rightarrow 高通	$z_L^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}}$	$\alpha = -\frac{\cos(\frac{\omega_{Lc} - \omega_c}{2})}{\cos(\frac{\omega_{Lc} + \omega_c}{2})}$ <p>ω_c 为高通滤波器的边界频率</p>
低通 \rightarrow 带通	$z_L^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1}z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1} + 1}$	$\alpha = \frac{\cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2})}{\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2})}$ $k = \cot(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}) \tan \frac{\omega_{Lc}}{2}$ <p>ω_1, ω_2 为带通滤波器的通带上、下截止频率</p>
低通 \rightarrow 带阻	$z_L^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1} + \frac{1-k}{1+k}}{\frac{1-k}{1+k}z^{-2} - \frac{2\alpha k}{1+k}z^{-1} + 1}$	$\alpha = \frac{\cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2})}{\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2})}$ $k = \tan(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}) \tan \frac{\omega_{Lc}}{2}$ <p>ω_1, ω_2 为带阻滤波器的阻带上、下截止频率</p>

第6章 IIR数字滤波器的设计



◆ 6.1 IIR滤波器的函数模型设计法

- 模拟滤波器原型介绍
- 模拟到数字滤波器的转换
- 数字滤波器的频带变换

◆ 6.2 IIR数字滤波器的直接设计法

◆ 6.3 IIR滤波器误差分析

◆ 6.4 常用的特殊滤波器

6.2 IIR 数字滤波器的直接设计法

◆ 前面学的都是间接设计方法

- 适合分段常数滤波器的设计，但是并非最优结果，不能解决任意频响滤波器的设计

◆ 直接设计方法

- 零极点累试法
- 频域最小均方误差设计
- 时域最小均方误差设计



6.2.1 零极点累试法

系统函数的零极点分布对系统频率响应特性的影响

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = A \frac{\prod_{r=1}^M (1 - c_r z^{-1})}{\prod_{r=1}^N (1 - d_r z^{-1})} \quad (3.6.13)$$

式中 $A=b_0/a_0$ ，上式中 c_r 是 $H(z)$ 的零点， d_r 是其极点

➤ A参数影响传输函数的幅度大小

➤ 影响系统特性的是零点 c_r 和极点 d_r 的分布

➤ 优点：可采用实用的几何方法研究系统零极点分布对系统频率特性的影响



将(3.6.13)式分子分母同乘以 z^{N+M} ，得到

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = A \frac{\prod_{r=1}^M (1 - c_r z^{-1})}{\prod_{r=1}^N (1 - d_r z^{-1})} = A z^{N-M} \frac{\prod_{r=1}^M (z - c_r)}{\prod_{r=1}^N (z - d_r)}$$

设系统稳定，将 $z = e^{j\omega}$ ，得到传输函数

$$H(e^{j\omega}) = A e^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{r=1}^M (e^{j\omega} - c_r)}{\prod_{r=1}^N (e^{j\omega} - d_r)} \quad (3.6.14)$$

设 $N=M$ ，则上式写成

$$H(e^{j\omega}) = A \frac{\prod_{r=1}^M (e^{j\omega} - c_r)}{\prod_{r=1}^N (e^{j\omega} - d_r)}$$



在 z 平面上, $e^{j\omega}-c_r$ 用一根由零点 c_r 指向单位圆上 $e^{j\omega}$ 点B的向量 $\overrightarrow{c_r B}$ 表示, 同样 $e^{j\omega}-d_r$ 用内极点指向 $e^{j\omega}$ 点B的向量 $\overrightarrow{d_r B}$ 表示, 如图2.6.2所示。

$$\overrightarrow{c_r B} = e^{j\omega} - c_r$$

$$\overrightarrow{d_r B} = e^{j\omega} - d_r$$

$\overrightarrow{c_r B}$ 和 $\overrightarrow{d_r B}$ 分别称为零点矢量和极点矢量, 将它们用极坐标表示

$$\overrightarrow{c_r B} = c_r B e^{j\alpha_r}$$

$$\overrightarrow{d_r B} = d_r B e^{j\beta_r}$$

将 $\overrightarrow{c_r B}$ 和 $\overrightarrow{d_r B}$ 表示式代入(3.6.14)式, 得到

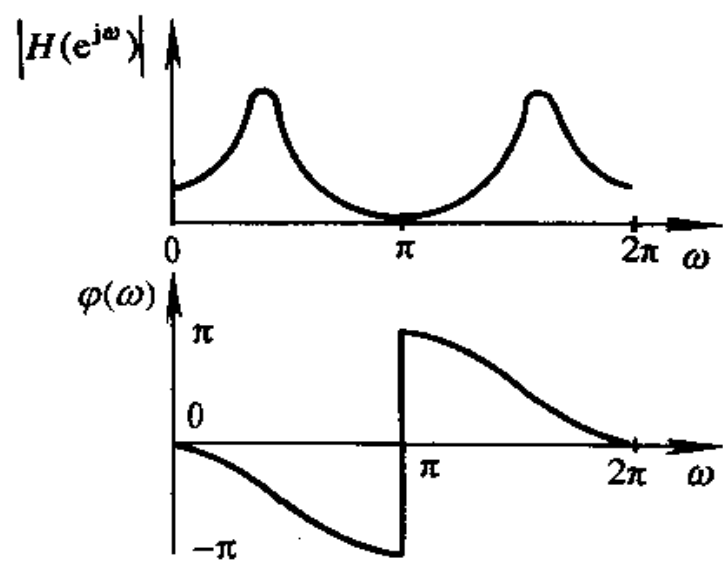
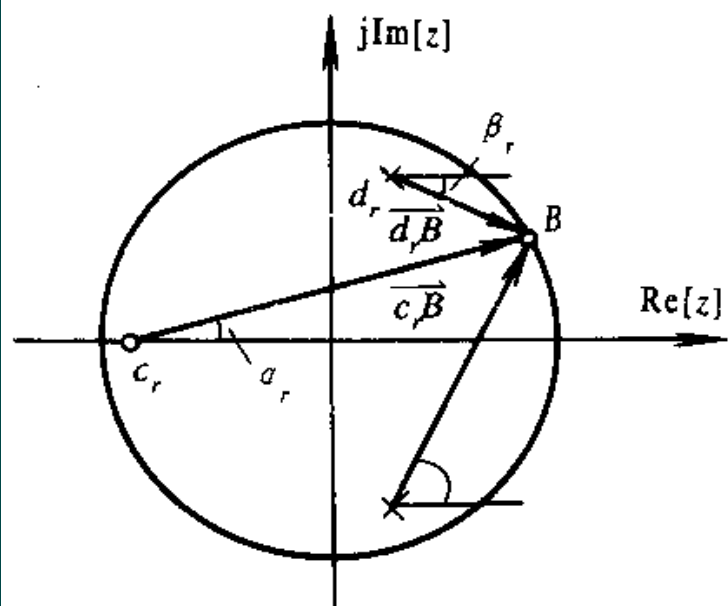


图2.6.2表示了具有一个零点和二个极点的频率特性

- ◆ 观察峰值和谷值（幅频特性）：
极点影响峰值位置及尖锐性；零点影响谷值位置及谷深；
- ◆ 因果性
- ◆ 稳定性

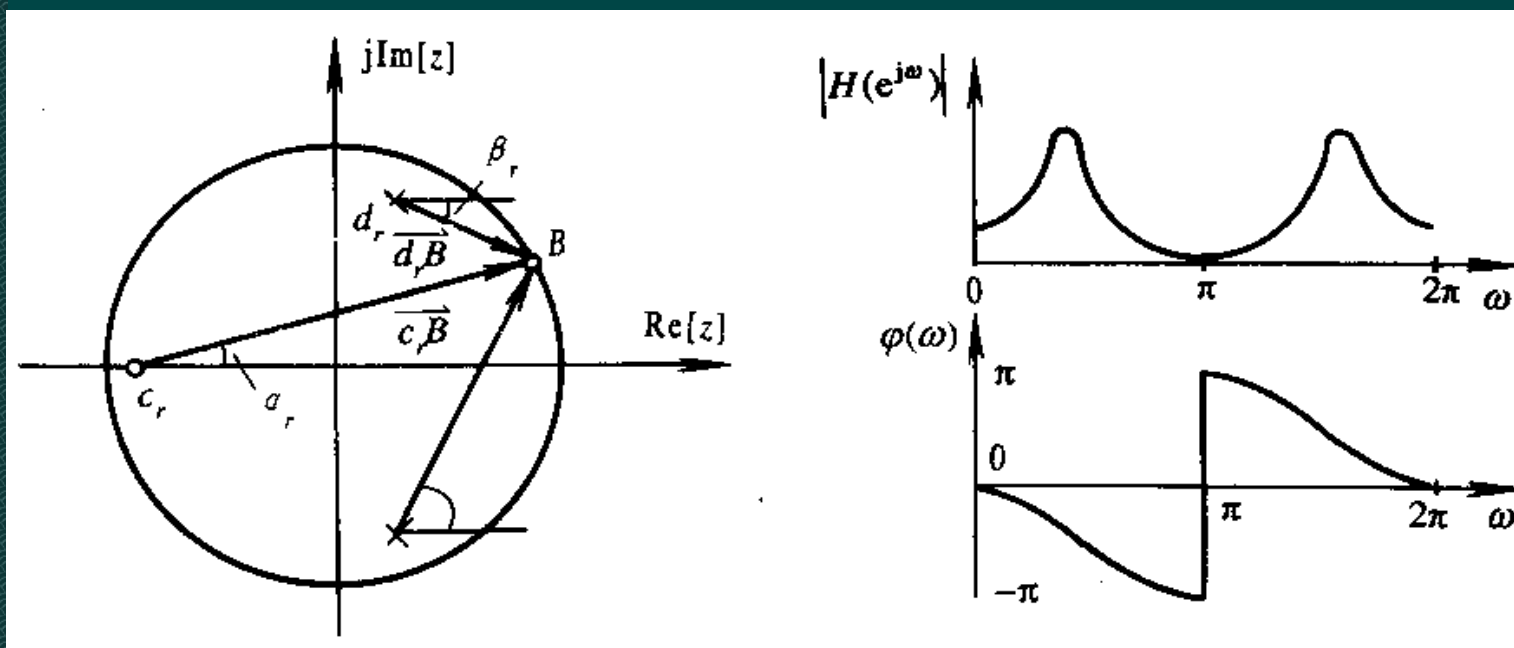


图2.6.2 频响的几何表示法



6.2.1 零极点累试法

◆ 具体步骤

- 根据系统幅度特性确定零极点的位置，再根据零极点写出系统函数
- 如不满足要求，进行修正：移动零极点或更改数目，直到满足

◆ 确定零极点位置时注意事项

- 极点必须位于 z 平面单位圆内，保证数字滤波器因果稳定
- 复数零极点必须共轭成对，保证系统函数有理式的系数是实的

第6章 IIR数字滤波器的设计



◆ 6.1 IIR滤波器的函数模型设计法

- 模拟滤波器原型介绍
- 模拟到数字滤波器的转换
- 数字滤波器的频带变换

◆ 6.2 IIR数字滤波器的直接设计法

◆ 6.3 IIR滤波器误差分析

◆ 6.4 常用的特殊滤波器

6.3 IIR滤波器误差分析

系数量化——→幅频响应畸变

溢出误差——→溢出振荡现象

舍入误差——→永远振荡

如何避免或解决？

只用FIR滤波器

增加硬件寄存器的字长

使用不同的IIR滤波器结构（级联或并联）

第6章 IIR数字滤波器的设计



◆ 6.1 IIR滤波器的函数模型设计法

- 模拟滤波器原型介绍
- 模拟到数字滤波器的转换
- 数字滤波器的频带变换

◆ 6.2 IIR数字滤波器的直接设计法

◆ 6.3 IIR滤波器误差分析

◆ 6.4 常用的特殊滤波器

6.4 常用的特殊滤波器

- ◆ 除了前面介绍的基本滤波器类型外，还有一些常用的特殊滤波器，本节主要介绍
 - 全通滤波器(Whole Pass Filter)
 - 最小相位滤波器(Minimum Phase Filter)
- ◆ 这两类滤波器是各具特色频率响应特性的离散时间LTI系统



全通滤波器

全通滤波器：系统的幅频响应恒为常数(通常为1)的数字滤波器

$$\left| H_{wp} \left(e^{j\omega} \right) \right| = 1, \quad 0 \leq \omega \leq 2\pi$$

$$H_{wp} \left(e^{j\omega} \right) = e^{j\varphi(\omega)}$$

纯相位滤波

幅度谱保持不变，仅相位谱发生改变

全通滤波器

◆ N 阶实系数全通滤波器的系统函数

$$H_{wp}(z) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i z^{-N+i}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} = \frac{a_0 z^{-N} + a_1 z^{-N+1} + a_2 z^{-N+2} + \cdots + a_N}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}}$$

$a_0 = 1, a_1, a_2, \cdots, a_N$ 为实数

令 $A(z) = \sum_{i=0}^N a_i z^{-i}$ 则有

$$H_{wp}(z) = \frac{z^{-N} A(z^{-1})}{A(z)} = \left| \frac{A^*(e^{j\omega})}{A(e^{j\omega})} \right| = 1$$

全通滤波器

◆ 对应一阶因果稳定的全通滤波器的频率响应

$$H_{wp1}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} \frac{1 - c^* e^{j\omega}}{1 - c e^{-j\omega}}, \quad |c| < 1$$

相频响应

$$\phi_{wp1}(\omega) = -\omega - 2 \arctan \left[\frac{r \sin(\omega - \beta)}{1 - r \cos(\omega - \beta)} \right]$$

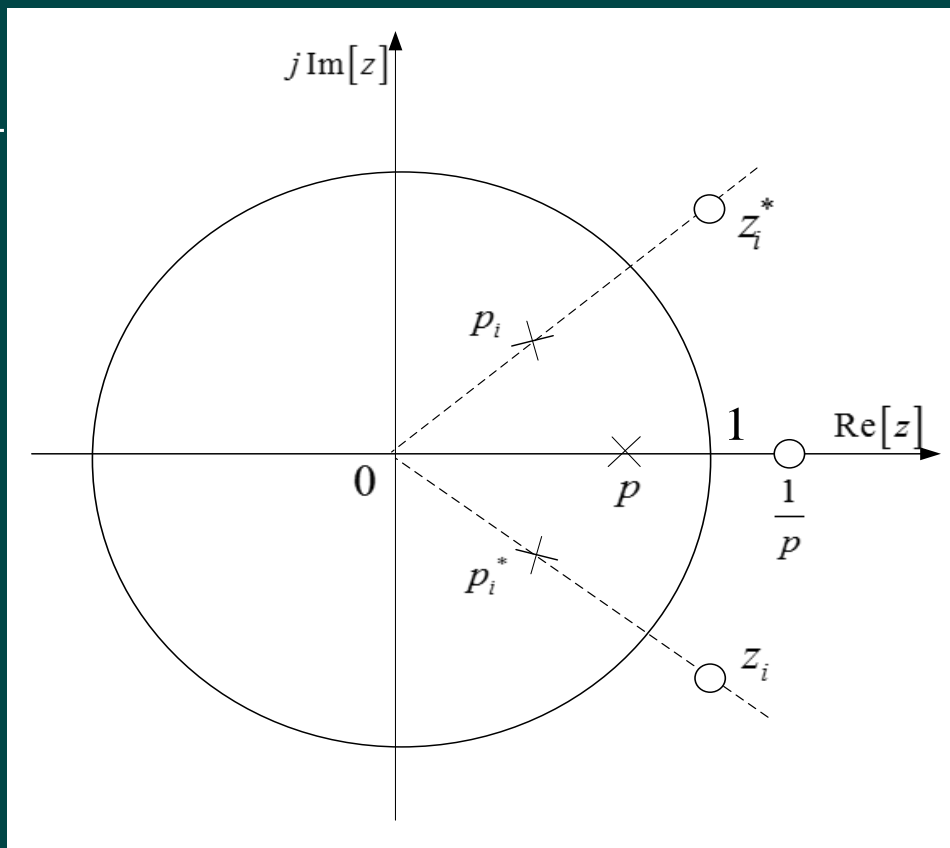
相频响应单调递减

$$\frac{d\phi_{wp1}(\omega)}{d\omega} = - \frac{1 - r^2}{[1 - r \cos(\omega - \beta)]^2 + r^2 \sin^2(\omega - \beta)} < 0$$

全通滤波器

◆ 全通滤波器零极点分布规律

$$H_{wp}(z) = \prod_{i=1}^N \frac{z^{-1} - p_i^*}{1 - p_i z^{-1}}$$



小结

- ◆ 模拟滤波器原型介绍
- ◆ 模拟到数字滤波器的转换
- ◆ 数字滤波器的频带变换
- ◆ 直接设计法
 - 零极点累似法、均方差最小设计法
- ◆ 常用滤波器
 - 全通滤波器、最小相位滤波器

