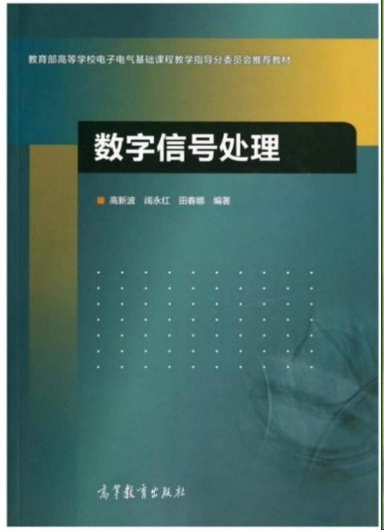
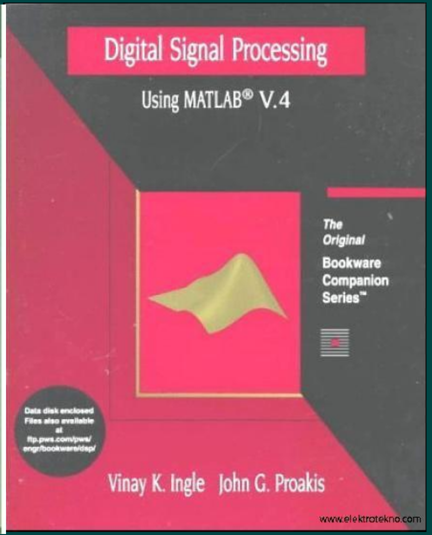
数字信号处理

任课教师: 田春娜 (教授)
单位：西安电子科技大学电子工程学院
Email: chnatian@xidian.edu.cn
chnatian@gmail.com

参考书籍





•高新波, 阔永红, 田春娜. 数字信号处理. 高等教育出版社, 2014.

•史林, 赵树杰. 数字信号处理. 科学出版社. 2007.

•Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer. Discrete-Time Signal Processing. 电子工业出版社, 2011.

•高西全, 丁玉美. 数字信号处理及其习题解答. 西电出版社, 2008.

•Vinay K.Ingle, John G. Proakis. Digital Signal Processing Using MATLAB®. Northeastern University, 1996.

第3章 离散时间信号和系统的频域分析

- 3.1 离散时间信号的傅里叶变换（DTFT）
  - 序列的离散时间傅里叶变换
  - 序列的离散时间傅里叶变换的性质
  - 基本序列的离散时间傅里叶变换
- 3.2 离散时间信号的Z域分析
- 3.3 离散时间LTI系统的频域分析
- 3.4 离散时间LTI系统的Z域分析

引言

- 信号和系统的分析方法有两种
  - 时域分析法
  - 频率分析法

- 模拟信号与系统的时域分析
  - 以时间作为参照来观察动态世界的方法为时域分析，如股票的走势、汽车的轨迹都会随着时间发生改变。信号一般用连续变量时间t的函数表示，系统则用微分方程描述

引言

- 模拟信号与系统的频域分析
  - 在自然界，频率是有明确的物理意义的，比如声音信号：男生声音低沉浑厚，因为男声中低频分

高

- 频域分析使我们可以从另一个角度来观察和分析信号
  - 用傅立叶变换将时间域函数转换到频率域，用拉普拉斯变换作为傅立叶变换的推广，对信号进行复频域分析

引言

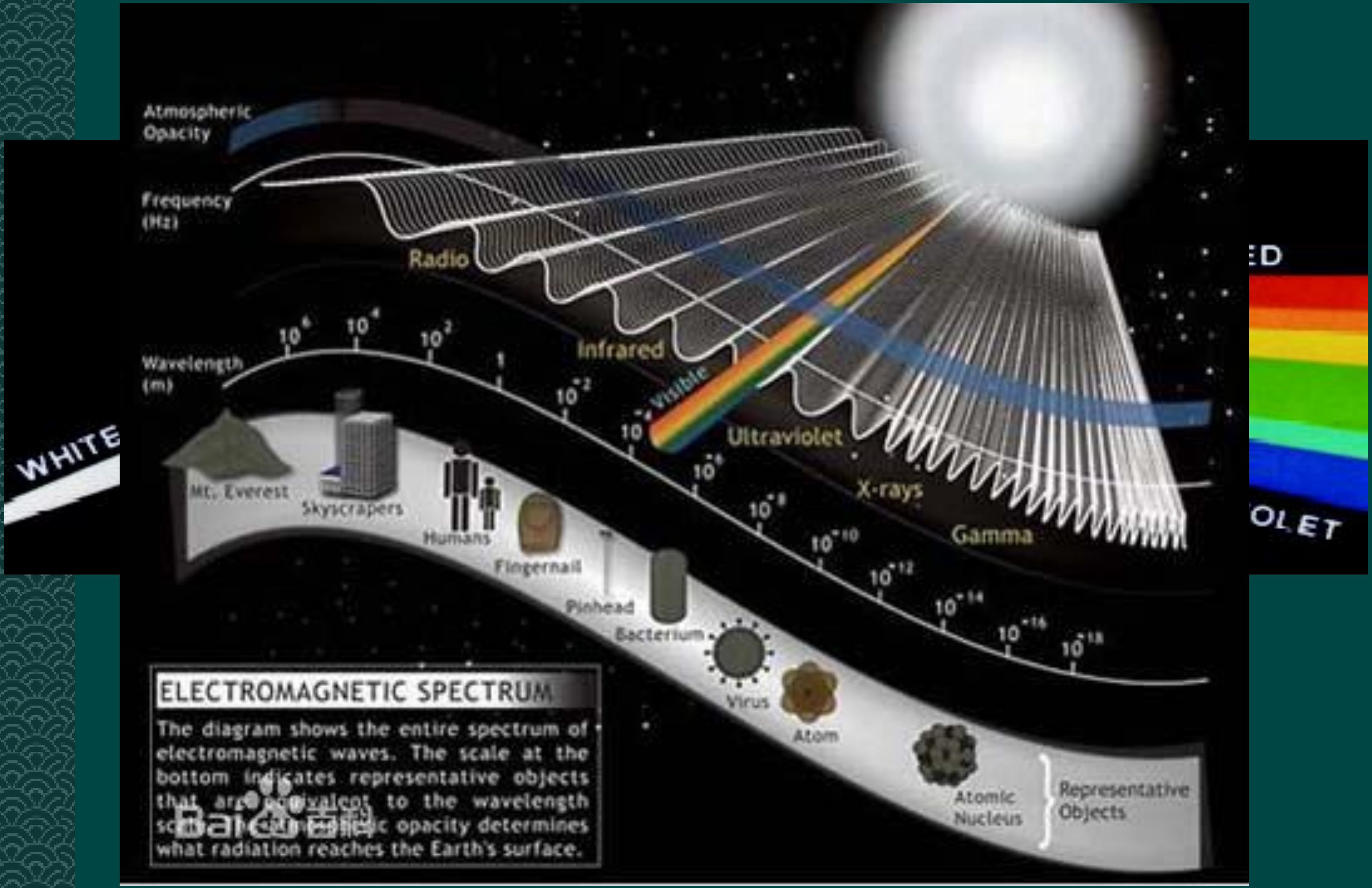
- 离散时间信号和系统
  - 信号用序列表示，而系统则用差分方程描述
  - 频域分析是用Z变换或离散时间傅里叶变换(DTFT)
    - 离散时间傅里叶变换和模拟域中的傅里叶变换是不一样的， 但都是线性变换， 很多性质是类似的
    - 本章学习上述两个变换，以及LTI系统的频域和Z域分析
- 本章内容也是数字信号处理这一领域的基础

让·巴普蒂斯·约瑟夫·傅立叶

(21 March 1768 – 16 May 1830)

- 法国数学家和物理学家，因提出傅立叶级数及其在热传播上的应用而闻名
- 傅立叶变换和傅立叶定律为他而命名
- 傅立叶也被普遍认为温室效应的发现者

傅立叶变换：数学棱镜



Atmospheric Opacity
Frequency (Hz)
Radio
Infrared
Visible
Ultraviolet
X-rays
Gamma
Wavelength (m)
Mt. Everest
Skyscrapers
Humans
Fingernail
Pinhead
Bacterium
Virus
Atom
Atomic Nucleus
Representative Objects
ELECTROMAGNETIC SPECTRUM
The diagram shows the entire spectrum of electromagnetic waves. The scale at the bottom indicates representative objects
what radiation reaches the Earth's surface.
WHITE

引言

- 傅里叶变换好用，物理意义明确，但其存在的条件苛刻，要求时域内绝对可积的信号才可能存在傅里叶变换。拉普拉斯变换推广了这一概念
- 在自然界，指数信号是衰减最快的信号之一，对信号乘上指数信号之后，很容易满足绝对可积的条件。因此将原始信号乘上指数信号之后一般都能满足傅里叶变换的条件，这种变换就是拉普拉斯变换
- Z变换可以说是针对离散信号和系统的拉普拉斯变换

第3章 离散时间信号和系统的频域分析

- 3.1 离散时间信号的傅里叶变换
  - **序列的离散时间傅里叶变换（DTFT）**
  - **序列的离散时间傅里叶变换的性质**
  - **基本序列的离散时间傅里叶变换**
- 3.2 离散时间信号的Z域分析
- 3.3 离散时间LTI系统的频域分析
- 3.4 离散时间LTI系统的Z域分析

历史回顾

CTFT → CFS → DTFT

	时域	频域
CTFT	**连续时间傅立叶变换**	
	连续	连续
	非周期	非周期
	$x(t)$	
CFS	**傅立叶级数**	
	连续	离散
	周期	非周期
	$x(\tilde{t})$	
DTFT	**离散时间傅立叶变换**	
	离散	连续
	非周期	周期
	$x(n)$	

3.1.1 序列的离散时间傅里叶变换

序列的离散时间傅里叶变换(Discrete time Fourier transform, DTFT) 的定义

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \qquad (3.1.1)$$

DTFT成立的充分必要条件是序列$x(n)$满足绝对可和：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

3.1.1 序列的离散时间傅里叶变换

为求**DTFT的反变换**，用$e^{j\omega m}$乘(3.1.1)式两边，并在 -π ~ π (ω的一个周期)内对ω进行积分，得

$$\int_{-\pi}^{\pi} \boxed{X(e^{j\omega})} e^{j\omega m} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}}\right] e^{j\omega m} d\omega$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)} d\omega \qquad (3.1.3)$$

式中

欧拉公式

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \cos[\omega(m-n)] + j\sin[\omega(m-n)] d\omega$$

$$= \begin{cases} 2\pi & m-n=0 \\ 0 & else \end{cases}$$

$$= 2\pi\delta(m-n) \qquad (3.1.4)$$

3.1.1 序列的离散时间傅里叶变换

将(3.1.4)带入(3.1.3)得：

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega m}d\omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(n-m) = 2\pi x(m)$$

(3.1.5)

由(3.1.5) 得如下逆变换的公式，记为IDTFT

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \qquad (3.1.6)$$

3.1.1 序列的离散时间傅里叶变换

对比分析

DTFT: $$X(e^{jw}) = F[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-jwn}$$

IDTFT: $$x(n) = F^{-1}[X(e^{jw})] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{jw})e^{jwn}dw$$

时域		频域
离散	$\longleftrightarrow$	连续
实值/复值	$\longleftrightarrow$	复值
加和	$\longleftrightarrow$	积分
n的取值范围: $-\infty \sim +\infty$	$\longleftrightarrow$	w的取值范围: $-\pi \sim +\pi$

3.1.1 序列的离散时间傅里叶变换

例 3.1.1 求如下$x(n)$的离散时间傅立叶变换，如果存在，请画出其频域信号

$$x(n) = (0.5)^n u(n)$$

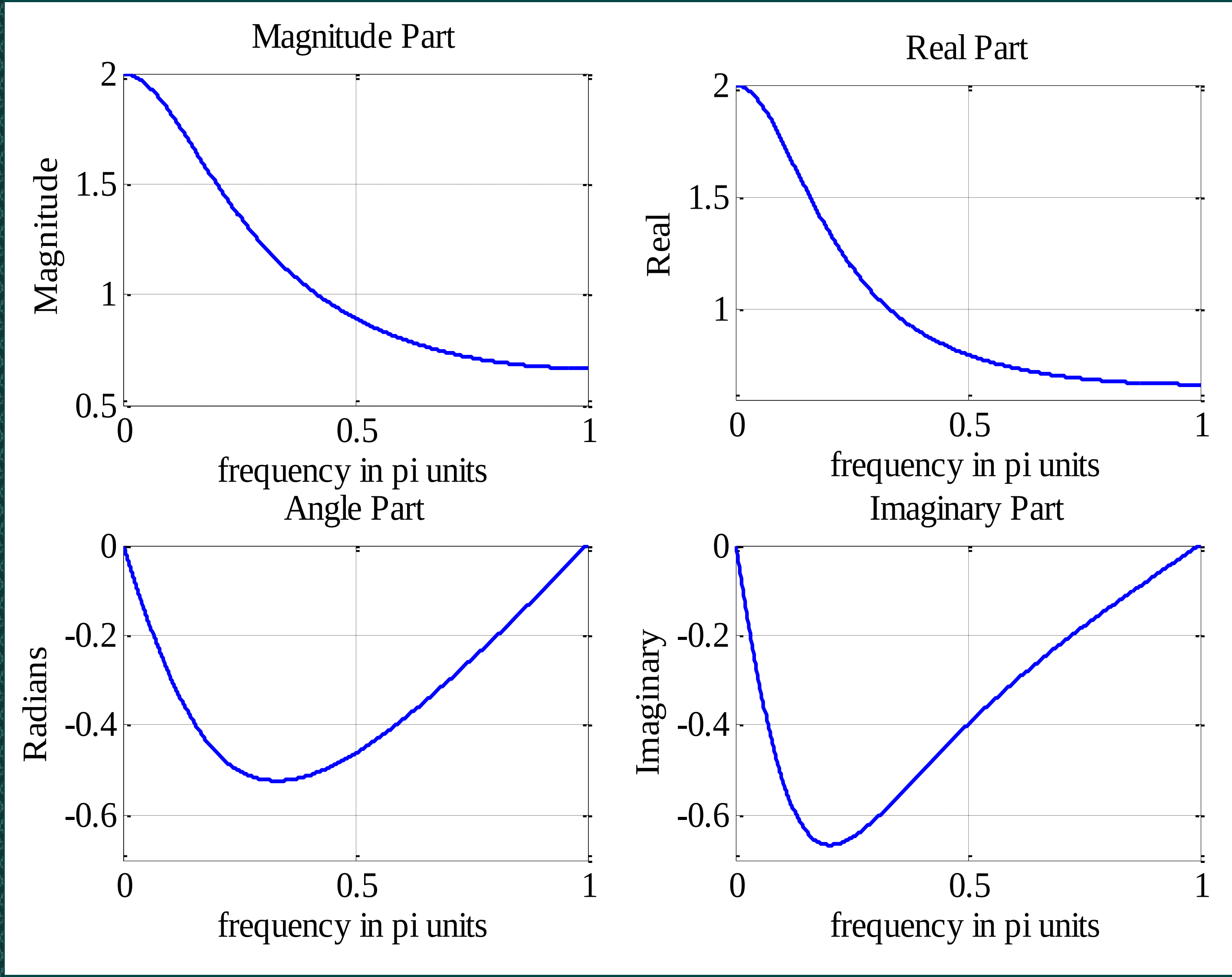
3.1.1 序列的离散时间傅里叶变换

$$x(n) = (0.5)^n u(n) \quad X(e^{jw}) = \frac{e^{jw}}{e^{jw} - 0.5}$$

- 我们在 $[0, \pi]$ 之间取 $X(e^{jw})$ 等间隔的**501 个点，并画出其幅度、相角、实部和虚部**

- $X(e^{jw})$有两种表示方法
  - 实部、虚部
  - 幅度谱、相位谱

3.1.1 序列的离散时间傅里叶变换



3.1.1 序列的离散时间傅里叶变换

例 3.1.2　设$x(n)=R_N(n)$，　求$x(n)$的DTFT

解：

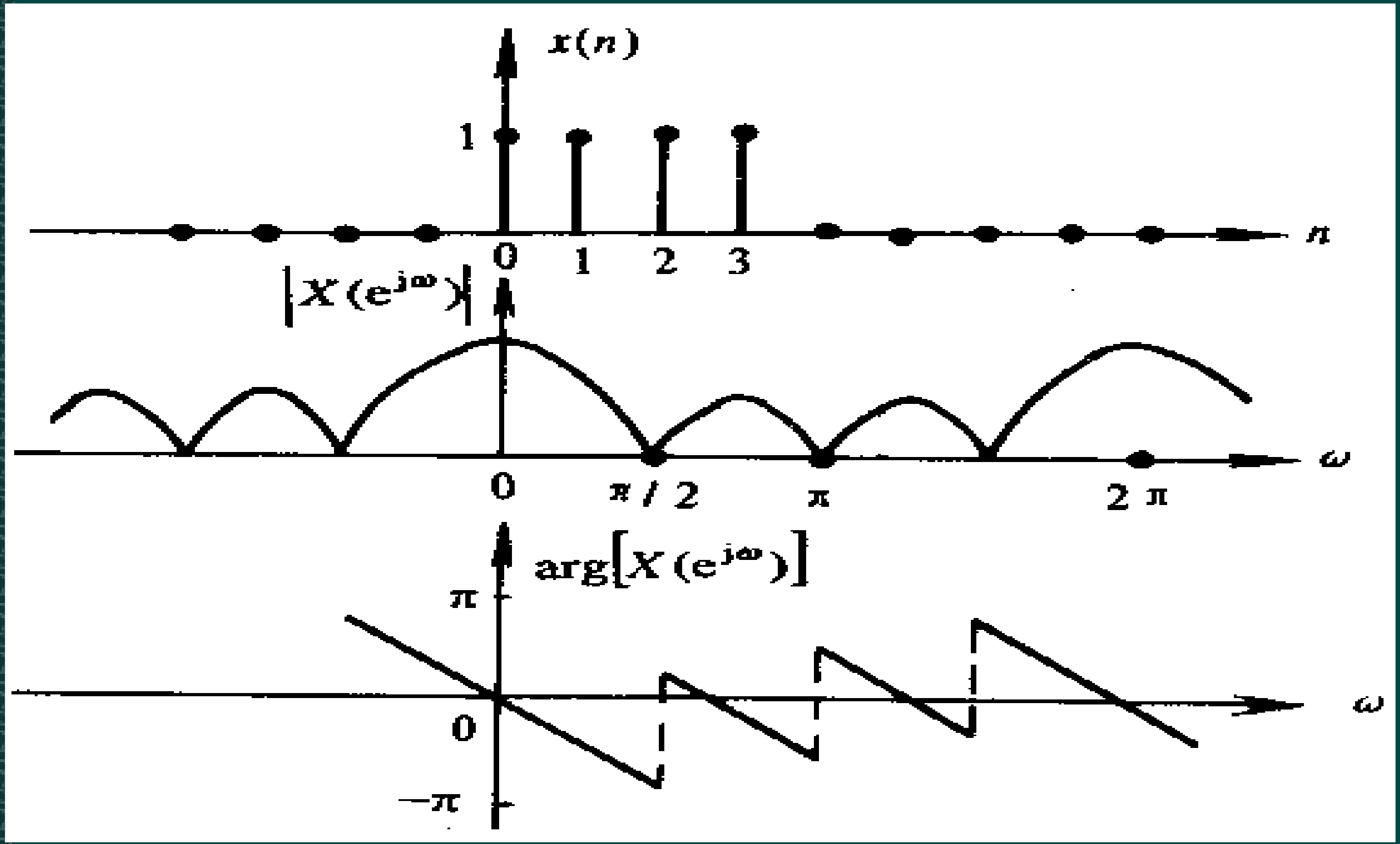
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_N(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega N/2}(e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2})}{e^{-j\omega/2}\ (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})}$$

$$= e^{-j(N-1)\omega/2} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin\omega/2} \qquad (3.1.7)$$

设N=4，　幅度与相位随ω变化曲线如下图所示

3.1.1 序列的离散时间傅里叶变换



$R_4(n)$ DTFT的幅度与相位曲线

第3章 离散时间信号和系统的频域分析

- 3.1 离散时间信号的傅里叶变换（DTFT）
  - **序列的离散时间傅里叶变换**
  - **序列的离散时间傅里叶变换的性质**
  - **基本序列的离散时间傅里叶变换**
- 3.2 离散时间信号的Z域分析
- 3.3 离散时间LTI系统的频域分析
- 3.4 离散时间LTI系统的Z域分析

3.1.2 序列的离散时间傅里叶变换的性质

1. DTFT的周期性

在如下定义式中，n取整数，

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

因此下式成立，其中M为整数

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega+2\pi M)n}$$

序列的离散时间傅里叶变换的周期是2π。因此一般只分析$-\pi \sim \pi$之间的DTFT

3.1.2 序列的离散时间傅里叶变换的性质

对于离散时间信号，信号的直流和低频分量集中在$\omega=0$和2π整数倍附近，信号最高频率应该集中在 π附近

由于序列的傅里叶变换具有周期性，因此经常将$x(n)$的傅里叶变换写成$X\left(e^{j\omega}\right)$，而不是成$X(j\omega)$，以显示其周期性

3.1.2 序列的离散时间傅里叶变换的性质

2. 线性

设 $X_1(e^{j\omega}) = DTFT[x_1(n)]$

$X_2(e^{j\omega}) = DTFT[x_2(n)]$

那么

$$DTFT[ax_1(n)+bx_2(n)] = aX_1(e^{j\omega})+bX_2(e^{j\omega})$$

式中a, b为常数

3.1.2 序列的离散时间傅里叶变换的性质

3. 时移(位移)与频移

设$X(e^{j\omega})$=DTFT[$x(n)$]， 那么

$$DTFT[x(n-n_0)] = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

$$DTFT[e^{j\omega_0 n} x(n)] = X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

3.1.2 序列的离散时间傅里叶变换的性质

4.序列乘以n（频域微分）

$$DTFT[nx(n)] = j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

5.共轭序列

$$DTFT[x^*(n)] = X^*(e^{-j\omega})$$

$$DTFT[x^*(-n)] = X^*(e^{j\omega})$$

3.1.2 序列的离散时间傅里叶变换的性质

6. DTFT的对称性

1)共轭对称序列　序列$x_e(n)$满足下式：

$$x_e(n) = x^*_e(-n) \qquad (3.1.8)$$

将$x_e(n)$用其实部与虚部表示

$$x_e(n) = x_{er}(n)+jx_{ei}(n)$$

将上式两边n用$-n$代替，并取共轭，得到

$$x^*_e(-n) = x_{er}(-n)-jx_{ei}(-n)$$

根据(3.1.8)式，上面两式左边相等，得到

$$x_{er}(n) = x_{er}(-n) \qquad x_{ei}(n) = -x_{ei}(-n)$$

共轭对称序列的实部是偶函数，虚部是奇函数

3.1.2 序列的离散时间傅里叶变换的性质

2) 共轭反对称序列

$$x_o(n) = -x^*_o(-n) \qquad (3.1.9)$$

将$x_o(n)$表示成实部与虚部，如下式：

$$x_o(n) = x_{or}(n)+jx_{oi}(n)$$

同样的道理可以得到

$$x_{or}(n) = -x_{or}(-n) \qquad x_{oi}(n) = x_{oi}(-n)$$

共轭反对称序列的实部是奇函数，虚部是偶函数

3.1.2 序列的离散时间傅里叶变换的性质

例 3.1.3 试分析$x(n)=e^{j\omega n}$的对称性

解：

将$x(n)$的n用$-n$代替， $x(-n)=e^{-j\omega n}$， 再取共轭得到：

$$x^*(-n)= e^{j\omega n}$$

因此$x(n) = x^*(-n)$，满足(3.1.8)式，$x(n)$是共轭对称序列

如展成实部与虚部， 得到

$$x(n)=\cos\omega n+j \sin\omega n$$

上式表明，共轭对称序列的实部是偶函数，虚部是奇函数

3.1.2 序列的离散时间傅里叶变换的性质

对于一般序列可用共轭对称序列与共轭反对称序列之和表示，即

$$x(n) = x_e(n)+x_o(n) \qquad (3.1.10)$$

式中$x_e(n)$，$x_o(n)$可以分别用原序列$x(n)$求出，将(3.1.10)式中的n用$-n$代替，再取共轭得到

$$x^*(-n) = x_e(n)-x_o(n)$$

利用以上两式，得到

$$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(-n)] \qquad x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(-n)]$$

3.1.2 序列的离散时间傅里叶变换的性质

对于频域函数$X(e^{j\omega})$也有和上面类似的概念和结论：

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega})+X_o(e^{j\omega})$$

$X_e(e^{j\omega})$与$X_o(e^{j\omega})$分别称为共轭对称部分和共轭反对称部分，它们满足

$$X_e(e^{j\omega}) = X^*_e(e^{-j\omega})$$

$$X_o(e^{j\omega}) = -X^*_o(e^{-j\omega})$$

同样有下面公式满足：

$$X_e(e^{j\omega})=\frac{1}{2}[X(e^{j\omega})+X^*(e^{-j\omega})] \qquad X_o(e^{j\omega})=\frac{1}{2}[X(e^{j\omega})-X^*(e^{-j\omega})]$$

总结

共轭对称 $X_e\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2}[X\left(e^{j\omega}\right)+X^*\left(e^{-j\omega}\right)]$

$$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(-n)]$$

性质：实部偶，虚部奇

共轭反对称

$$X_o(e^{j\omega})=\frac{1}{2}[X(e^{j\omega})-X^*(e^{-j\omega})]$$

$$x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(-n)]$$

性质：实部奇，虚部偶

3.1.2 序列的离散时间傅里叶变换的性质

◆ 分析DTFT的对称性

(*a*) 将序列$x(n)$分成实部$x_r(n)$与虚部$x_i(n)$

$$x(n) = x_r(n)+jx_i(n)$$

对上式进行DTFT，得到

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega})+X_o(e^{j\omega})$$

式中

$$X_e(e^{j\omega}) = DTFT[x_r(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_r(n)e^{-j\omega n}$$

$$X_o(e^{j\omega}) = DTFT[jx_i(n)] = j\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_i(n)e^{-j\omega n}$$

3.1.2 序列的离散时间傅里叶变换的性质

上面两式中，$x_r(n)$和$x_i(n)$都是实数序列，容易证明：

- $X_e(e^{j\omega})$具有共轭对称性
- $X_o(e^{j\omega})$具有共轭反对称性

最后得到结论

- 序列分成实部与虚部两部分，实部的DTFT具有共轭对称性，虚部乘j一起对应的DTFT具有共轭反对称性

3.1.2 序列的离散时间傅里叶变换的性质

(b)将序列分成共轭对称部分$x_e(n)$和共轭反对称部分$x_o(n)$，

$$x(n) = x_e(n)+x_o(n)$$

由下式进行DTFT $\quad x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(-n)]$

$$x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(-n)]$$

得：

$$\mathrm{DTFT}[x_e(n)] = 1/2[X(e^{j\omega})+X^*(e^{j\omega})]=Re[X(e^{j\omega})] = X_R(e^{j\omega})$$

$$\mathrm{DTFT}[x_o(n)] = 1/2[X(e^{j\omega}) -X^*(e^{j\omega})]=jIm[X(e^{j\omega})] = jX_I(e^{j\omega})$$

$$X_R(e^{j\omega})=DTFT[x_e(n)] \qquad X_e(e^{j\omega})=DTFT[x_r(n)]$$

$$jX_I(e^{j\omega})=DTFT[x_o(n)] \xrightarrow{\text{对比}} X_o(e^{j\omega})=DTFT[jx_i(n)]$$

总结

实部　　虚部

时域信号：$x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$

DTFT

频域信号：$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$

共轭对称　共轭反对称

时域信号：$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$

DTFT

频域信号：$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_i(e^{j\omega})$

实部　　虚部

3.1.2 序列的离散时间傅里叶变换的性质

设$h(n)$是实因果序列，其DTFT只有共轭对称部分$H_e(e^{j\omega})$，共轭反对称部分为零。实部对应的是共轭对称分量

$$H(e^{j\omega}) = H_e(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = H^*(e^{-j\omega})$$

共轭对称分量的实部是偶函数，虚部是奇函数

因此实序列的DTFT的实部是偶函数，虚部是奇函数

$$H_R(e^{j\omega}) = H_R(e^{-j\omega})$$

$$H_I(e^{j\omega}) = -H_I(e^{-j\omega})$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})$$

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \arctan[H_I(e^{j\omega})/H_R(e^{j\omega})]$$

模平方是w的偶函数相位是w的奇函数

3.1.2 序列的离散时间傅里叶变换的性质

7. 时域卷积定理

设 $y(n)=x(n)*h(n)$,

则 $Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})\cdot H(e^{j\omega})$ (3.1.11)

证明：

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

$$Y(e^{j\omega})=DTFT[y(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)]e^{-j\omega n}$$

令 $k=n-m$

$$e^{-j\omega n}=e^{-j\omega(k+m)}=e^{-j\omega k}e^{-j\omega m}$$

$$Y(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(k)e^{-j\omega k}x(m)e^{-j\omega m}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)e^{-j\omega k}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)e^{-j\omega m}$$

$$=H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

3.1.2 序列的离散时间傅里叶变换的性质

时域:

$$x(n) \longrightarrow \boxed{\boldsymbol{h}[.]} \longrightarrow y(n)=x(n)*h(n)$$

频域:

$$X(.) \longrightarrow \boxed{\boldsymbol{H}[.]} \longrightarrow Y(.)=X(.)H(.)$$

因此求系统的输出信号，可以在时域用卷积公式计算也可以在频域按照(3.1.11)式，求出输出的DTFT，再作逆DTFT求出输出信号

3.1.2 序列的离散时间傅里叶变换的性质

8. 频域卷积定理

假设

$$X\left(e^{j\omega}\right)=DTFT\left[x(n)\right]$$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=DTFT\left[h(n)\right]$$

$$y(n)=x(n)h(n)$$

则

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}X\left(e^{j\omega}\right)*H\left(e^{j\omega}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H\left(e^{j\theta}\right)X\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta$$

该定理表明在时域两序列相乘，转换到频域服从卷积关系。此定理也称为调制定理

3.1.2 序列的离散时间傅里叶变换的性质

9. 帕斯瓦尔(Parseval)定理

说明：信号时域的总能量等于频域的总能量：能量守恒

证明：
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)x^*(n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^*(n)[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega]$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^*(n)e^{j\omega n}d\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega})d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$$

时域
总能量

频域总能量

能量守恒定理

3.1.2 序列的离散时间傅里叶变换的性质

表3.1.1 序列的离散时间傅里叶变换的主要性质

性质	序列	离散时间傅里叶变换
	$x(n)$	$X(e^{j\omega})$
	$y(n)$	$Y(e^{j\omega})$
线性	$ax(n)+by(n)$	$aX(e^{j\omega})+bY(e^{j\omega})$　　a、b为实常数
位移特性	$x(n-n_0)$	$e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$
频移特性	$e^{j\omega_0 n}x(n)$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
序列/翻转	$x(-n)$	$X(e^{-j\omega})$
共轭序列	$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\omega})$
共轭翻转序列	$x^*(-n)$	$X^*(e^{j\omega})$
线性卷积定理	$x(n)*y(n)$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
频域卷积定理	$x(n)y(n)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})\,\mathrm{d}\theta$

3.1.2 序列的离散时间傅里叶变换的性质

表3.1.1 序列的离散时间傅里叶变换的主要性质

序列乘以 n	$nx(n)$	$j[\mathrm{d}X(e^{j\omega})/\mathrm{d}\omega]$
实部	$\mathrm{Re}[x(n)]$	$X_e(e^{j\omega})$
虚部乘以 j	$j\,\mathrm{I_m}[x(n)]$	$X_o(e^{j\omega})$
共轭对称序列	$x_e(n)$	$\mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]$
共轭反对称序列	$x_o(n)$	$j\,\mathrm{I_m}[X(e^{j\omega})]$
帕斯瓦尔定理	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\|x(n)\right\|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\|X(e^{j\omega})\right\|^2\mathrm{d}\omega$	

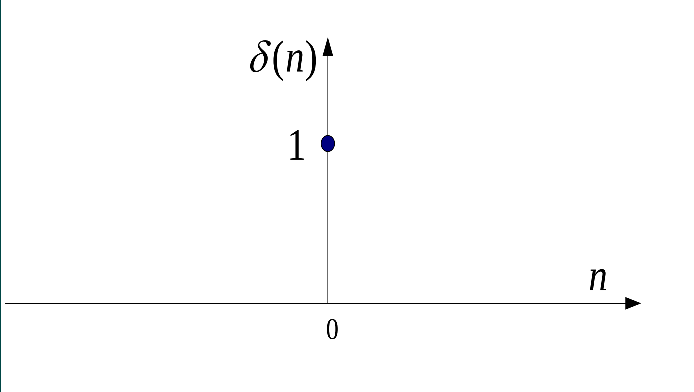
第3章 离散时间信号和系统的频域分析

- 3.1 离散时间信号的傅里叶变换（DTFT）
  - **序列的离散时间傅里叶变换**
  - **序列的离散时间傅里叶变换的性质**
  - **基本序列的离散时间傅里叶变换**
- 3.2 离散时间信号的Z域分析
- 3.3 离散时间LTI系统的频域分析
- 3.4 离散时间LTI系统的Z域分析

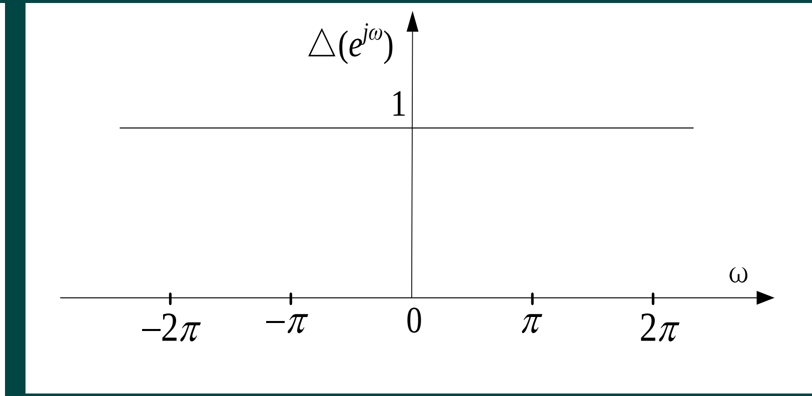
3.1.3 基本序列的离散时间傅里叶变换

- 单位脉冲序列的DTFT

$$DTFT[\delta(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n)e^{-j\omega n} = 1$$



单位脉冲序列



单位脉冲序列的频谱函数

3.1.3 基本序列的离散时间傅里叶变换

- **常数1的DTFT**

序列$x(n)$=1的序列 $X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-j(\omega-2\pi l)n}$ (3.1.12)

在模拟信号中有 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\Omega t}dt=2\pi\delta(\Omega)$ (3.1.13)

因为在离散时间信号中，$e^{-j\omega n}=e^{-j(\omega-2\pi l)n}$ ，

l 取整数，所以对比(3.1.12)和(3.1.13)得

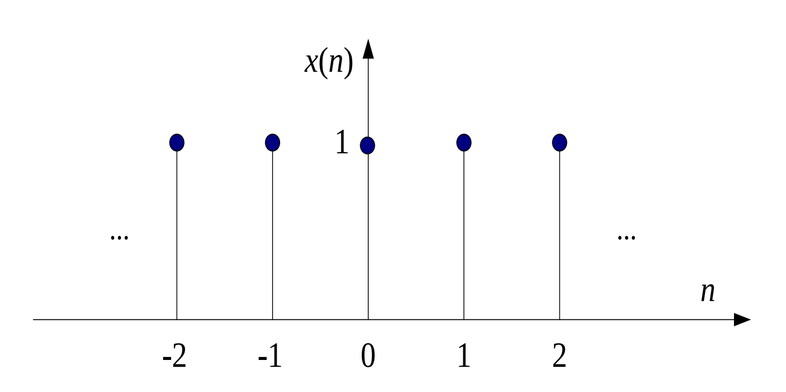
$$X(e^{j\omega})=2\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi l)$$

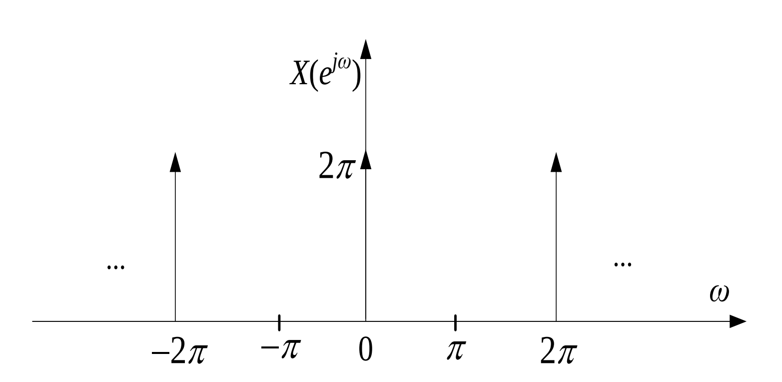
3.1.3 基本序列的离散时间傅里叶变换

- **常数1的DTFT**

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi l)$$

其频谱函数是在 $\omega = 2\pi l$处的单位冲激函数，强度为 2π





3.1.3 基本序列的离散时间傅里叶变换

表3.1.2 基本序列的离散时间傅里叶变换

序列	离散时间傅里叶变换
$\delta(n)$	1
周期单位脉冲序列 $x(n)=1$	$2\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi l)$
$u(n)$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi l)$
$R_N(n)$	$e^{-j(N-1)\omega/2}\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$
$a^n u(n)$ $\quad \lvert a\rvert<1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$e^{j\omega_0 n}$ $\quad 2\pi/\omega_0$ 为有理数	$2\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)$
$\cos(\omega_0 n)$ $\quad 2\pi/\omega_0$ 为有理数	$\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}[\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)+\delta(\omega+\omega_0+2\pi l)]$
$\sin(\omega_0 n)$ $\quad 2\pi/\omega_0$为有理数	$-j\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}[\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)-\delta(\omega+\omega_0+2\pi l)]$

第3章 离散时间信号和系统的频域分析

- 3.1 离散时间信号的傅里叶变换（DTFT）
  - 序列的离散时间傅里叶变换
  - 序列的离散时间傅里叶变换的性质
  - 基本序列的离散时间傅里叶变换
- 3.2 离散时间信号的Z域分析
- 3.3 离散时间LTI系统的频域分析
- 3.4 离散时间LTI系统的Z域分析

3.2 离散时间信号的Z域分析

- 3.2.1 Z变换的定义
- 3.2.2 收敛域的特性
- 3.2.3 Z 变换的性质和定理
- 3.2.4 逆Z变换

3.2离散时间信号的Z域分析

- DTFT方法用复指数序列来表示时域的离散信号
- 对于 LTI系统存在如下优点
  - 在频域用频率响应函数 H 来表示系统
  - 任意绝对可和序列$x(n)$的响应可以很容易的通过在频域将 X 乘以 H 得到

傅里叶变换的缺点

1. 很多具有实用价值的信号如$u(n)$, $nu(n)$无法通过DTFT来计算其频域信号

2. 由初始条件或输入变化引起的系统瞬态响应不能通过DTFT来计算

为解决上述问题，Z变换被提出来

3.2.1 离散时间信号的Z变换的定义

序列$x(n)$的**Z变换**定义为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n} \qquad (3.2.1)$$

z是一个复变量，它所在的复平面称为z平面。注意在定义中，对n求和是在$\pm\infty$之间求和，称为**双边Z变换**。

单边Z变换的定义如下

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

对于因果序列，用两种Z变换定义计算出的结果是一样的。本课程如不特别声明，均用双边Z变换对信号进行分析和变换

3.2.1 离散时间信号的Z变换的定义

Z变换存在的条件是(3.2.1)式等号右边级数收敛，要求级数绝对可和，即

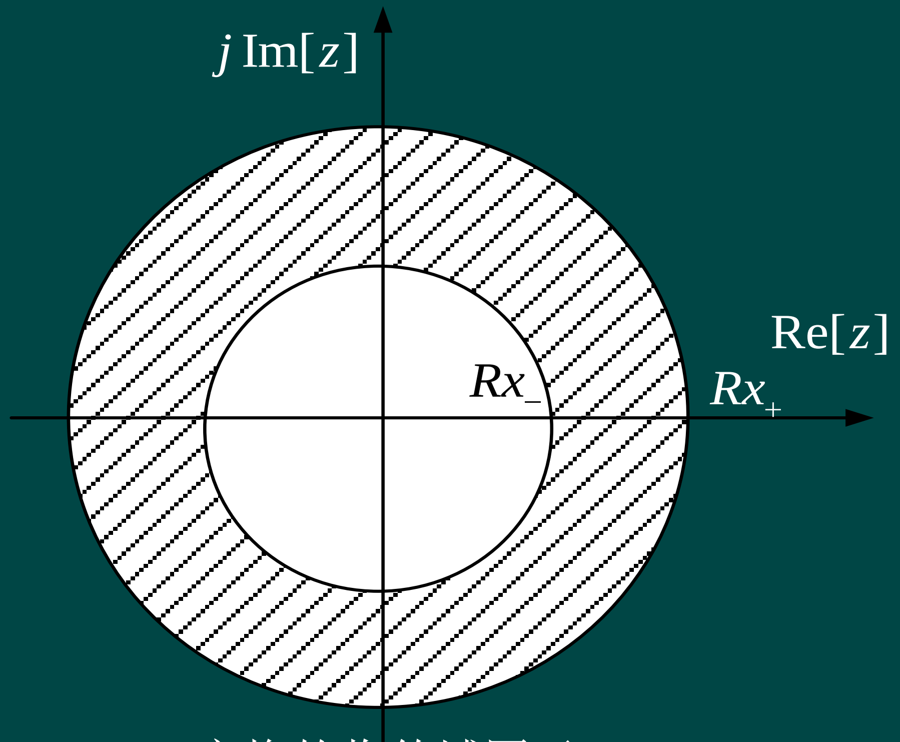
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n) z^{-n}| < \infty \qquad (3.2.2)$$

使(3.2.2)式成立，z变量取值的域称为收敛域(Region of convergence, ROC) 。一般收敛域用环状区域来表示

$$R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

3.2.1 离散时间信号的Z变换的定义

令 $z = re^{j\omega}$ ，代入 $R_{x-} < |z| < R_{x+}$ ，得到$R_{x-} < r < R_{x+}$。收敛域分别以R_{x-} 和 R_{x+}为半径的两个圆形形成的环状域



Z变换的收敛域图示

3.2.1 离散时间信号的Z变换的定义

常用的Z变换是一个有理函数，用两个多项式之比表示

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

分子多项式$P(z)$的根是$X(z)$的零点，记为$z_i(i = 1,2, \ldots, M)$

分母多项式$Q(z)$的根是$X(z)$的极点，记为$p_k(k=1,2, \ldots, N)$

在极点处Z变换不存在，因此收敛域中没有极点，收敛域总是用极点限定其边界

3.2.1 离散时间信号的Z变换的定义

DTFT $X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$　　**Z变换** $X(\mathrm{z})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\,\mathrm{z}^{-n}$

- 对比序列的DTFT和Z变换的定义，很容易得到二者之间的关系：

$$\boxed{X(\mathrm{e}^{j\omega})=X(\mathrm{z})\big|_{z=e^{j\omega}}} \tag{3.2.3}$$

- 式中$z=e^{j\omega}$表示在z平面上r=1的圆(单位圆)。
- (3.2.3)式表明：**单位圆上的Z变换就是序列的DTFT**
- 如果已知序列的Z变换，可用(3.2.3)式，很方便的求出序列的DTFT，条件是收敛域中包含单位圆

3.2.1 离散时间信号的Z变换的定义

例 3.2.1 $x(n)=u(n)$，求其Z变换

解：
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}$$

$X(z)$存在的条件是$|z^{-1}|<1$，因此收敛域为$|z|>1$

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}} \qquad |z|>1$$

- 极点是$z=1$，单位圆上的Z变换不存在，因此其DTFT不存在，但如果引入单位冲激函数，其DTFT则可以表示出来
- 该例同时说明一个序列的DTFT不存在，但在一定收敛域内Z变换是存在的

3.2 离散时间信号的Z域分析

- 3.2.1 Z变换的定义
- 3.2.2 收敛域的特性
- 3.2.3 Z 变换的性质和定理
- 3.2.4 逆Z变换

3.2.2 Z 变换收敛域的特性

- 由于收敛域是根据幅度$|z|$来确定的，所以收敛域由圆周来界定
- 右边序列($n<n_0$, $x(n)=0$)的收敛域总在半径为R_{x-}圆周的外部
- 左边序列($n>n_0$, $x(n)=0$)的收敛域总在半径为R_{x+}的圆周的内部
- 如果双边序列的收敛域存在，收敛域在 $R_{x-}<|z|<R_{x+}$ 的圆环上

3.2.2 Z 变换收敛域的特性

- 有限长序列($n<n_1$ and $n>n_2$, $x(n)=0$) 的收敛域是整个Z平面，如果$n_1<0$, 那么z等于无穷不在收敛域内，如果$n_2>0$, 那么$z=0$不在收敛域内
- 由于$X(z)$在收敛域内一致收敛，收敛域不能包含极点
- 对于一个有理的$X(z)$，至少有一个极点在收敛域的边界上
- 收敛域是一个连续的区域，收敛域不能由间断的几个区域组成

3.2.2 Z 变换收敛域的特性

1. 有限长序列

如序列$x(n)$满足下式：

$$x(n)=\begin{cases} x(n), & n_1\le n\le n_2 \\ 0, & 其它 \end{cases} \qquad (3.2.4)$$

其Z变换为 $$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n}$$

设$x(n)$为有界序列，由于是有限项求和，除0与∞两点是否收敛与n_1、n_2取值情况有关外，整个z平面均收敛

3.2.2 Z 变换收敛域的特性

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2}x(n)z^{-n}$$

如果$n_1<0$，$X(z)$中包含 z 的项， $|z|\to\infty$; $|z^{-n_1}|\to\infty$

所以$X(z)$的收敛域不包括∞点；

同理，如果$n_2>0$， 则收敛域不包括$z=0$点；

如果是因果序列，收敛域包括$z=\infty$点。具体有限长序列的收敛域表示如下：

$n_1<0$， $n_2\le 0$时， $0\le|z|<\infty$

$n_1<0$， $n_2>0$时， $0<|z|<\infty$

$n_1\ge 0$， $n_2>0$时， $0<|z|\le\infty$

3.2.2 Z 变换收敛域的特性

例：3.2.2 求$x(n)=R_N(n)$的Z变换及其收敛域

解：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}R_N(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}z^{-n}=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

这是一个因果的有限长序列，因此收敛域为$0<|z|\le\infty$。但由结果的分母可以看出似乎$z=1$是$X(z)$的极点，但同时分子多项式在$z=1$时也有一个零点，极零点对消，$X(z)$在单位圆上仍存在

3.2.2 Z 变换收敛域的特性

2. 右序列

右序列是在$n \geq n_1$时， 序列值不全为零， 而其它$n<n_1$，序列值全为零

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=n_1}^{-1}x(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n} \tag{3.2.5}$$

第一项为有限长序列，设$n_1 \leq -1$，其收敛域为$0 \leq |z| < \infty$。第二项为因果序列，其收敛域为$R_{x-}<|z| \leq \infty$，R_{x-}是第二项最小的收敛半径。

将两收敛域相与，其收敛域为$R_{x-}<|z|<\infty$。如果是因果序列，收敛域定为$R_{x-}<|z| \leq \infty$

3.2.2 Z 变换收敛域的特性

例 3.2.3 求$x(n)=a^n u(n)$的Z变换及其收敛域

解：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}=\frac{1}{1-az^{-n}}$$

在收敛域中必须满足$|az^{-1}|<1$， 因此收敛域为$|z|>|a|$

3.2.2 Z 变换收敛域的特性

3. 左序列

左序列是在$n\le n_2$时，序列值不全为零，而在$n>n_2$，序列值全为零的序列。左序列的Z变换表示为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n} \qquad (3.2.6)$$

如果$n_2<0$, $z=0$点收敛， $z=\infty$点不收敛，其收敛域是在某一圆(半径为R_{x+})的圆内，收敛域为$0\le|z|<R_{x+}$ 如果$n_2>0$，则收敛域为$0<|z|<R_{x+}$

3.2.2 Z 变换收敛域的特性

例 3.2.4 求$x(n)=-a^n u(-n-1)$的Z变换及其收敛域

解：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}-a^n u(-n-1)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}-a^n z^{-n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}-a^{-n}z^n=\sum_{n=1}^{\infty}-(a^{-1}z)^n$$

$X(z)$存在要求$|a^{-1}z|<1$， 即收敛域为$|z|<|a|$

$$X(z)=\frac{-a^{-1}z}{1-a^{-1}z}=\frac{1}{1-az^{-1}},\qquad |z|<a$$

3.2.2 Z 变换收敛域的特性

4. 双边序列

一个双边序列可以看作一个左序列和一个右序列之和，其Z变换表示为(n_1>0)

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=X_1(z)+X_2(z) \qquad (3.2.7)$$

$$X_1(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_1}x(n)z^{-n}, \qquad 0<|z|<R_{x+}$$

$$X_2(z)=\sum_{n=n_1+1}^{\infty}x(n)z^{-n}, \qquad R_{x-}<|z|\le\infty$$

3.2.2 Z 变换收敛域的特性

- $X(z)$的收敛域是$X_1(z)$和$X_2(z)$收敛域的公共收敛区域
- 如果 $R_{x+} > R_{x-}$，其收敛域为$R_{x-} < |z| < R_{x+}$，这是一个环状域
- 如果$R_{x+} < R_{x-}$，两个收敛域没有公共区域，$X(z)$没有收敛域，因此$X(z)$不存在

3.2.2 Z 变换收敛域的特性

例 3.2.5 $x(n)=a^{|n|}$，a为实数，求$x(n)$的Z变换及其收敛域

解：$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|} z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty} a^{n} z^{-n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} a^{n} z^{n}+\sum_{n=0}^{\infty} a^{n} z^{-n}$$

第一部分收敛域为$|az|<1$，得$|z|<|a|^{-1}$

第二部分收敛域为$|az^{-1}|<1$，得到$|z|>|a|$

3.2.2 Z 变换收敛域的特性

如果$|a|<1$，即$|a|<|a|^{-1}$ ，两部分的公共收敛域为$|a|<|z|<|a|^{-1}$，其Z变换如下式：

$$X(z)=\frac{az}{1-az}+\frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$=\frac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})} \qquad |a|<|z|<|a|^{-1}$$

如果$|a|\geq 1$，则无公共收敛域，因此$X(z)$不存在

3.2.2 Z 变换收敛域的特性

当$0<a<1$时，$x(n)$的波形及$X(z)$的收敛域如下图所示

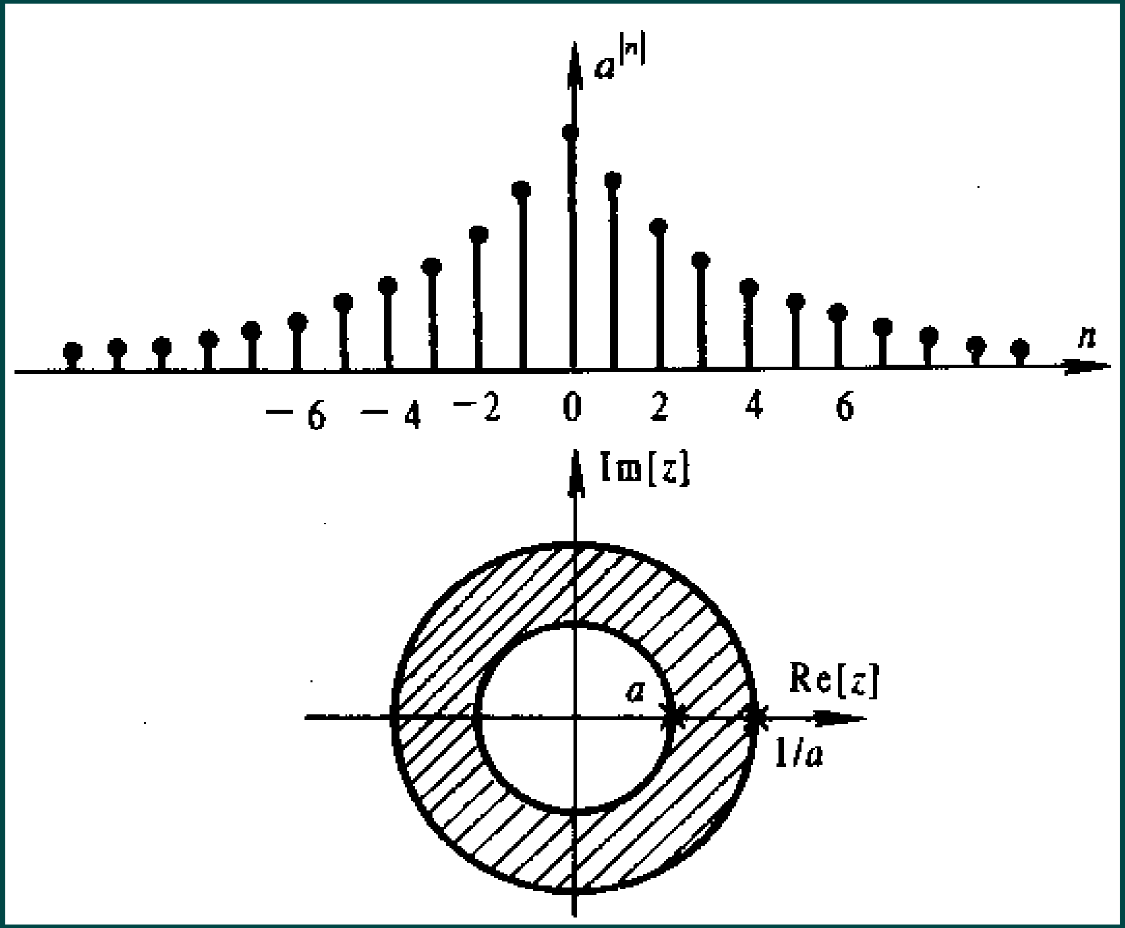


表3.2.1常见序列的Z 变换及收敛域

序列	Z 变换	收敛域
$\delta(n)$	1	$0 \le \lvert z\rvert \le \infty$
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$R_N(n)$	$\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 0$
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$nu(n)$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > 1$
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$e^{j\omega_0 n}u(n)$	$\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{z^{-1}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$

表3.2.1常见序列的Z 变换及收敛域

$e^{-an}\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1-z^{-1}e^{-a}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}e^{-a}\cos\omega_0+z^{-2}e^{-2a}}$	$\lvert z\rvert > e^{-a}$
$\sin(\omega_0 n+\theta)u(n)$	$\dfrac{\sin\theta+z^{-1}\sin(\omega_0-\theta)}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\cos(\omega_0 n+\theta)u(n)$	$\dfrac{\cos\theta-z^{-1}\cos(\omega_0-\theta)}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$(n+1)a^n u(n)$	$\dfrac{1}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$\dfrac{(n+1)(n+2)}{2!}a^n u(n)$	$\dfrac{1}{(1-az^{-1})^3}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$\dfrac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{m!}a^n u(n)$	$\dfrac{1}{(1-az^{-1})^{m+1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$\dfrac{n(n-1)}{2!}u(n)$	$\dfrac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^3}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}u(n)$	$\dfrac{z^{-m}}{(1-z^{-1})^{m+1}}$	$\lvert z\rvert > 1$

3.2 离散时间信号的Z域分析

- 3.2.1 Z变换的定义
- 3.2.2 收敛域的特性
- 3.2.3 Z 变换的性质和定理
- 3.2.4 逆Z变换

3.2.3 Z 变换的性质和定理

1.线性

设 $m(n)=ax(n)+by(n)$，a, b为常数

$X(z)=ZT[x(n)], R_{x-}<|z|<R_{x+}$，$Y(z)=ZT[y(n)], R_{y-}<|z|<R_{y+}$

则$M(z)=ZT[m(n)]=aX(z)+bY(z)$，　$R_{m-}<|z|<R_{m+}$

$R_{m+}=min[R_{x+},R_{y+}]$，$R_{m-}=max[R_{-x},R_{y-}]$

这里$M(z)$的收敛域是$X(z)$和$Y(z)$的公共收敛域

如果没有公共收敛域，例如当$R_{x+}>R_{x-}>R_{y+}>R_{y-}$时，则$M(z)$不存在

3.2.3 Z 变换的性质和定理

2. 移位特性

设 $X(z)=ZT[x(n)]$, $R_{x-}<|z|<R_{x+}$

则

$$ZT[x(n-n_0)]=z^{-n_0}X(z), R_{x-}<|z|<R_{x+}$$

3.2.3 Z 变换的性质和定理

3. 乘以指数序列

设 $X(z)=ZT[x(n)]$, $R_{x-}<|z|<R_{x+}$

$y(n)=a^n x(n)$, a为常数

则 $Y(z)=ZT[a^n x(n)]$

$=X(a^{-1}z)$ $|a|R_{x-}<|z|<|a|R_{x+}$

3.2.3 Z 变换的性质和定理

4.序列乘以n

设 $X(z)=ZT[x(n)] \qquad R_{x-}<|z|<R_{x+}$

则 $ZT[nx(n)]=-z\dfrac{dX(z)}{dz} \qquad R_{x-}<|z|<R_{x+}$

证明 $$\frac{dX(z)}{dz}=\frac{d}{dz}[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\frac{d}{dz}[z^{-n}]$$

$$=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}nx(n)z^{-n-1}=-z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}nx(n)z^{-n}$$

$$=-z^{-1}ZT[nx(n)]$$

$$ZT[nx(n)]=-z\frac{dX(z)}{dz}$$

3.2.3 Z 变换的性质和定理

5.复共轭序列

设 $X(z)=ZT[x(n)], \qquad R_{x-}\le|z|\le R_{x+}$

则 $X^*(Z^*)=ZT[x^*(n)], \qquad R_{x-}\le|z|\le R_{x+}$

证明 $$ZT[X^*(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} X^*(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)(Z^*)^{-n}]^*$$

$$=[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(Z^*)^{-n}]^*=X^*(Z^*)$$

$$ZT[x^*(-n)]=X^*(\frac{1}{z^*})\ ,\ 1/R_{x+}<|z|<1/R_{x-}$$

3.2.3 Z 变换的性质和定理

6. 序列卷积定理

设 $\omega(n) = x(n) * y(n)$

$$X(z) = ZT[x(n)], \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$Y(z) = ZT[y(n)], \qquad R_{y-} < |z| < R_{y+}$$

则 $W(z) = ZT[\omega(n)] = X(z) \cdot Y(z), R_{\omega-} < |z| < R_{\omega+}$

$$R_{\omega+} = \min[R_{x+}, R_{y+}]$$

$$R_{\omega-} = \max[R_{x-}, R_{y-}]$$

3.2.3 Z 变换的性质和定理

证明:

$$W(z)=ZT[x(n)*y(n)]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)y(n-m)]z^{-n}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)[\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n-m)z^{-n}]$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)z^{-m}Y(z)$$

$$=X(z)\cdot Y(z)$$

$W(z)$的收敛域就是$X(z)$和$Y(z)$的公共收敛域

3.2.3 Z 变换的性质和定理

7.初值定理

设 $x(n)$ 是因果序列，$X(z)=ZT\left[x(n)\right]$

$$x(0)=\lim_{z\to\infty} X(z)$$

证明：

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}=x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots$$

因此

$$\lim_{z\to\infty} X(z)=x(0)$$

3.2.3 Z 变换的性质和定理

8.复卷积定理

如果 $ZT[x(n)]=X(z)$， $R_{x-}<|z|<R_{x+}$

$ZT[y(n)]=Y(z)$, $R_{y-}<|z|<R_{y+}$

$w(n)=x(n)y(n)$

则 $$\boxed{W(z)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)Y\left(\frac{z}{v}\right)\frac{dv}{v}}$$

$W(z)$的收敛域 $R_{x-}R_{y-}<|z|<R_{x+}R_{y+}$

上式中v平面上，被积函数的收敛域为

$$max\left(R_{x-},\frac{|z|}{R_{y+}}\right)<|v|<min\left(R_{x+},\frac{|z|}{R_{y-}}\right)$$

3.2.3 Z 变换的性质和定理

证明 $$W(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(n)z^{-n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)v^{n-1}dv]y(n)z^{-n}$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n)(\frac{z}{v})^{-n}\frac{dv}{v}$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)Y(\frac{z}{v})\frac{dv}{v}$$

由$X(z)$的收敛域和$Y(z)$的收敛域，得到

3.2.3 Z 变换的性质和定理

$$R_{x-} < |v| < R_{x+}$$

$$R_{y-} < \left|\frac{z}{v}\right| < R_{y+}$$

因此 $$R_{x-}R_{y-} < |z| < R_{x+}R_{y+}$$

$$\max(R_{x-}, \frac{|z|}{R_{y+}}) < |v| < \min(R_{x+}, \frac{|z|}{R_{y-}})$$

3.2.3 Z 变换的性质和定理

9.终值定理

若$x(n)$是因果序列，其Z变换的极点，除可以有一个一阶极点在z=1上，其它极点均在单位圆内，则下式称为终值定理

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$$

证明

$$(z-1)X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n+1)-x(n)]z^{-n}$$

因为$x(n)$是因果序列， $x(n)=0, n<0$

$$(z-1)X(z) = \lim_{n\to\infty}[\sum_{m=-1}^{n} x(m+1)z^{-m} - \sum_{m=0}^{n} x(m)z^{-m}]$$

3.2.3 Z 变换的性质和定理

因为(z-1)X(z)在单位圆上无极点，上式两端对z=1取极限

$$\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)=\lim_{n\to\infty}[\sum_{m=-1}^{n}x(m+1)-\sum_{m=0}^{n}x(m)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[x(0)+x(1)+\cdots x(n+1)$$

$$-x(0)-x(1)-x(2)-\cdots x(n)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}x(n+1)=\lim_{n\to\infty}x(n)$$

终值定理也可用$X(z)$在z=1点的留数，因为

$$\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)=\mathrm{Re}\,s[X(z),1]$$

因此 $x(\infty)=\mathrm{Re}\,s[X(z),1]$

如果单位圆上，$X(z)$无极点，则 $x(\infty)=0$

3.2.3 Z 变换的性质和定理

10.帕斯瓦尔(Parseval)定理

利用复卷积定理可以证明帕斯维尔定理

$$X(z) = ZT[x(n)], \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$Y(z) = ZT[y(n)], \quad R_{y-} < |z| < R_{x+}$$

且满足 $R_{x-}R_{y-} < 1, \quad R_{x+}R_{y+} > 1$

那么 $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)Y^*(\frac{1}{v^*})v^{-1}dv$$

v 平面上，c 所在的收敛域为

$$\max(R_{x-}, \frac{1}{R_{y+}}) < |v| < \min(R_{x+}, \frac{1}{R_{y-}})$$

3.2 离散时间信号的Z域分析

- 3.2.1 Z变换的定义
- 3.2.2 收敛域的特性
- 3.2.3 Z 变换的性质和定理
- 3.2.4 逆Z变换

3.2.4 逆Z变换

已知序列的Z变换及其收敛域，求序列称为逆Z变换。 序列的**Z变换**及其**逆Z变换**表示如下：

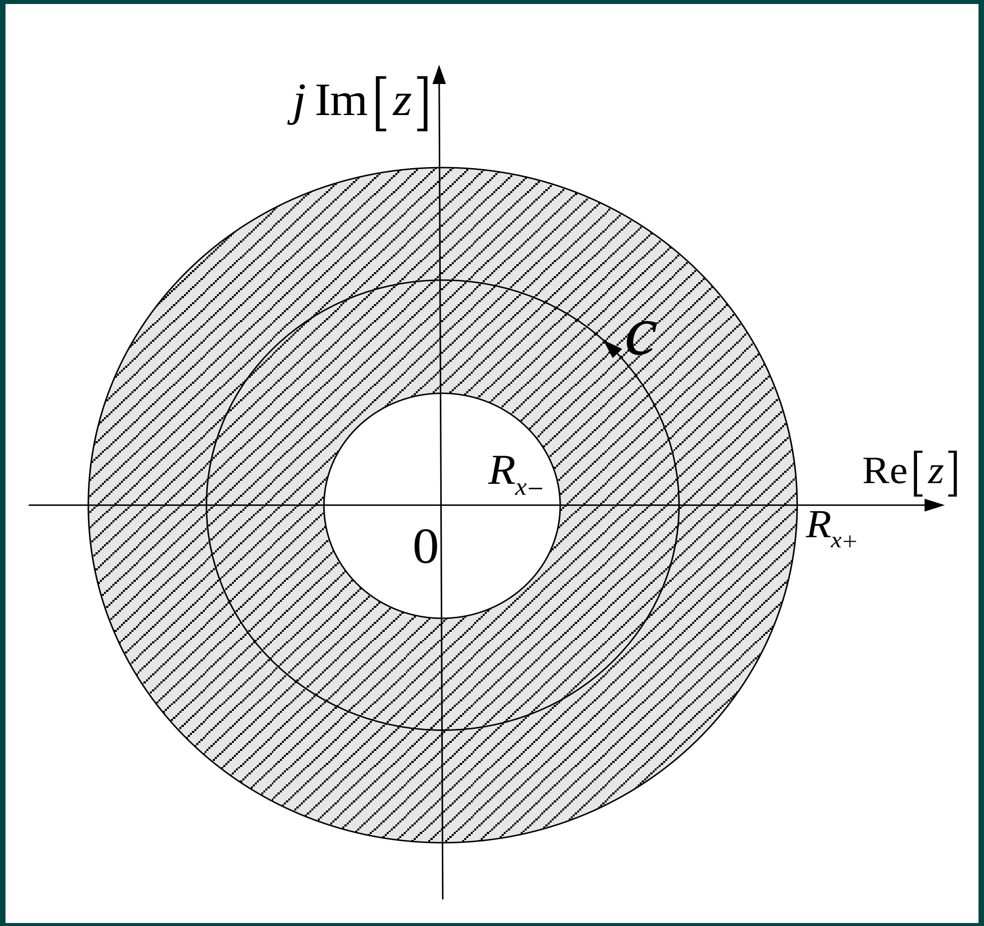
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n},\quad R_{x-}<|z|<R_{x+}$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{c}X(z)z^{n-1}dz,\quad c\in(R_{x-},R_{x+})$$

(3.2.8)

式中，围线c是收敛域内一条逆时针的封闭曲线

3.2.4 逆Z变换



围线积分路径图

3.2.4 逆Z变换

1. 幂级数法(长除法)

2. 部分分式展开法

3. 用留数定理求逆Z变换

3.2.4 逆Z变换

1. 幂级数法(长除法)

- 按照Z变换定义，可用长除法将$X(z)$写成幂级数形式，级数的系数就是序列$x(n)$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad R_{x-}<|z|<R_{x+}$$

- 如果$x(n)$是右序列，级数应是负幂级数，分子分母应按z的降幂排列

- 如果$x(n)$是左序列，级数则是正幂级数，分子分母应按z的升幂排列

- 缺点：复杂情况下，难以得到封闭解形式

3.2.4 逆Z变换

例 3.2.6已知 $X(z)=\dfrac{1}{1-az^{-1}},|z|>|a|$, 用长除法求其逆Z变换$x(n)$

解:由收敛域判定这是一个右序列，用长除法将其展成负幂级数

$$\begin{array}{r|l} & 1+az^{-1}+a^2z^{-2}+\cdots \\ \hline 1\text{-}az^{-1} & 1 \\ & 1-az^{-1} \\ \hline & az^{-1} \\ & az^{-1}-a^2z^{-2} \\ \hline & a^2z^{-2} \\ & \cdots \end{array}$$

$$X(z)=1+az^{-1}+a^2z^{-2}+a^3z^{-3}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a^nz^{-n}$$

$$x(n)=a^nu(n)$$

3.2.4 逆Z变换

2. 部分分式展开法

- 对于大多数具有单阶极点的序列，常常用这种部分分式展开法求逆Z变换

- 设$x(n)$的Z变换$X(z)$是有理函数，分母多项式是N阶，分子多项式是M阶，将$X(z)$展成一些简单的常用的部分分式之和，通过查表(表3.2.1)求得各部分的逆变换，再相加即得到原序列$x(n)$

表3.2.1常见序列的Z 变换及收敛域

序列	Z 变换	收敛域
$\delta(n)$	1	$0 \le \lvert z\rvert \le \infty$
$u(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n u(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$R_N(n)$	$\dfrac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 0$
$-a^n u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$nu(n)$	$\dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > 1$
$na^n u(n)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$e^{j\omega_0 n}u(n)$	$\dfrac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{z^{-1}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$

表3.2.1常见序列的Z 变换及收敛域

$e^{-an}\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1-z^{-1}e^{-a}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}e^{-a}\cos\omega_0+z^{-2}e^{-2a}}$	$\|z\|>e^{-a}$
$\sin(\omega_0 n+\theta)u(n)$	$\dfrac{\sin\theta+z^{-1}\sin(\omega_0-\theta)}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
$\cos(\omega_0 n+\theta)u(n)$	$\dfrac{\cos\theta-z^{-1}\cos(\omega_0-\theta)}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
$(n+1)a^n u(n)$	$\dfrac{1}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\|>\|a\|$
$\dfrac{(n+1)(n+2)}{2!}a^n u(n)$	$\dfrac{1}{(1-az^{-1})^3}$	$\|z\|>\|a\|$
$\dfrac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{m!}a^n u(n)$	$\dfrac{1}{(1-az^{-1})^{m+1}}$	$\|z\|>\|a\|$
$\dfrac{n(n-1)}{2!}u(n)$	$\dfrac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^3}$	$\|z\|>1$
$\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}u(n)$	$\dfrac{z^{-m}}{(1-z^{-1})^{m+1}}$	$\|z\|>1$

3.2.4 逆Z变换

例 3.2.7 已知 $X(z)=\dfrac{5z^{-1}}{1+z^{-1}-6z^{-2}}, 2<|z|<3$，求逆Z变换

解 $$\frac{X(z)}{z}=\frac{5z^{-2}}{1+z^{-1}-6z^{-2}}=\frac{5}{z^2+z-6}=\frac{5}{(z-2)(z+3)}=\frac{A_1}{z-2}+\frac{A_2}{z+3}$$

$$A_1=\mathrm{Res}[\frac{X(z)}{z},2]=\frac{X(z)}{z}(z-2)\Big|_{z=2}=1$$

$$A_2=\mathrm{Res}[\frac{X(z)}{z},-3]=\frac{X(z)}{z}(z+3)\Big|_{z=-3}=-1$$

$$\therefore \frac{X(z)}{z}=\frac{1}{(z-2)}-\frac{1}{(z+3)}$$

$$\therefore X(z)=\frac{1}{1-2z^{-1}}-\frac{1}{1+3z^{-1}}$$

3.2.4 逆Z变换

- 因为收敛域为$2<|z|<3$，第一部分极点是$z=2$，因此收敛域为$|z|>2$
- 第二部分极点$z=-3$，收敛域应取$|z|<3$
- 查表3.2.1得到

$$x(n)=2^n u(n)+(-3)^n u(-n-1)$$

3.2.4 逆Z变换

3. 用留数定理求逆Z变换

如果$X(z)z^{n-1}$在围线c内的极点用z_k表示，根据**留数定理**

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz=\sum_k \mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},z_k] \tag{3.2.9}$$

式中$\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},z_k]$表示被积函数$X(z)z^{n-1}$在极点$z=z_k$的留数，**逆Z变换则是围线c内所有的极点留数之和**

3.2.4 逆Z变换

如果z_k是单阶极点， 则根据留数定理

$$\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}, z_k] = X(z)z^{n-1}(z-z_k)\Big|_{z=z_k} \qquad (3.2.10)$$

如果z_k是N阶极点， 则根据留数定理

$$\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}, z_k] = \frac{1}{(N-1)!}\frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}[(z-z_k)^N X(z)z^{n-1}]\Big|_{z=z_k} \qquad (3.2.11)$$

上式表明，对于N阶极点，需要求N-1次导数，比较麻烦。如果c内有多阶极点，而c外没有多阶极点，可以根据留数辅助定理改求c外的所有极点留数之和，使问题简化

3.2.4 逆Z变换

设被积函数用$F(z)$表示，即 $F(z)=X(z)z^{n-1}$

$F(z)$在 z 平面上有N个极点，在收敛域内的封闭曲线c将 z 平面上极点分成两部分：一部分是c内极点，设有N_1个，用z_{1k}表示；另一部分是c外极点，有N_2个，用z_{2k}表示，$N=N_1+N_2$，。

根据留数辅助定理下式成立：

$$\sum_{k=1}^{N_1}\mathrm{Res}[F(z),z_{1k}]=-\sum_{k=1}^{N_2}\mathrm{Res}[F(z),z_{2k}] \quad (3.2.12)$$

3.2.4 逆Z变换

(3.2.12)式成立的条件是$F(z)$的分母阶次比分子阶次必须高二阶以上。 设$X(z)=P(z)/Q(z)$， $P(z)$与$Q(z)$分别是M与N阶多项式，则

$$F(z) = X(z)z^{n-1} = \frac{P(z)z^{n-1}}{Q(z)}$$

成立的条件是: $N-(M+n-1)\geq 2$， 即: $N-M-n\geq 1$ (3.2.13)

如果满足(3.2.13)式，c圆内极点中有多阶极点，而c圆外极点没有多阶的，可以按照(3.2.12)式，改求c圆外极点留数之和， 最后加一个负号

3.2.4 逆Z变换

例 3.2.8 已知$X(z)=(1-az^{-1})^{-1}$， $|z|>a$， 求其逆Z变换$x(n)$

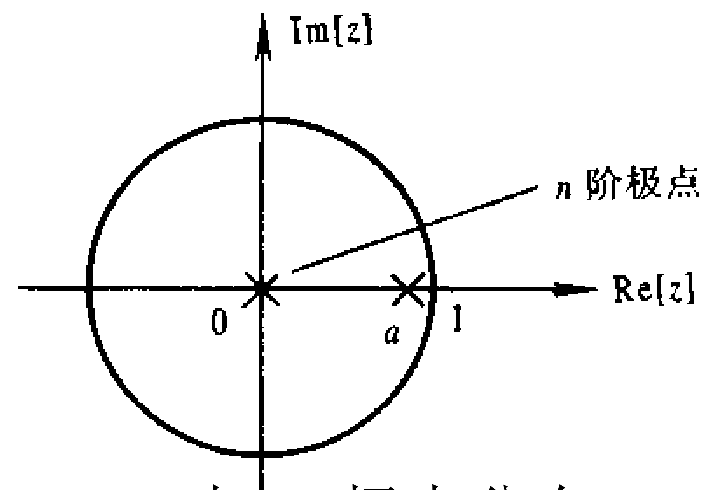
解 $$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz=\frac{1}{2\pi j}\oint_c (1-az^{-1})^{-1}z^{n-1}dz$$

$$F(z)=X(z)z^{n-1}=\frac{1}{1-az^{-1}}z^{n-1}=\frac{z^n}{z-a}$$

为了用留数定理求解，先找出$F(z)$的极点，极点有：

$n<0$时，有一阶极点$z=a$和n阶极点$z=0$

$n\geq 0$时，仅一阶极点$z=a$



$n<0$时$F(z)$极点分布

3.2.4 逆Z变换

因此分成$n\geq 0$和$n<0$两种情况求$x(n)$

$n\geq 0$ 时，

$$x(n)=\mathrm{Re}\,s[F(z),a]$$

$$=(z-a)\frac{z^n}{z-a}\Big|_{z=a}=a^n$$

- $n<0$时，增加$z=0$的n阶极点，不易求留数，采用留数辅助定理求解。检查N-M-$n\geq 1$是否满足。显然满足
- 由于封闭曲线c外部没有极点，可得$n<0$时，$x(n)=0$，所以$x(n)=a^n u(n)$

第3章 离散时间信号和系统的频域分析

- 3.1 离散时间信号的傅里叶变换（DTFT）
  - 序列的离散时间傅里叶变换
  - 序列的离散时间傅里叶变换的性质
  - 基本序列的离散时间傅里叶变换
- 3.2 离散时间信号的Z域分析
- 3.3 离散时间LTI系统的频域分析
- 3.4 离散时间LTI系统的Z域分析

3.3 离散时间LTI系统的频域分析

- 3.3.1差分方程的Z变换解
- 3.3.2离散时间LTI系统的频率响应
- 3.3.3余弦型信号通过离散时间LTI系统的响应
- 3.3.4离散时间LTI系统的稳态响应和暂态响应

3.3.1 差分方程的Z变换解

设N阶线性常系数差分方程为

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{i=0}^{M} b_i x(n-i), \qquad a_0 = 1 \qquad (3.3.1)$$

Z变换求解的优点：

- 步骤简明而有规律
- 将差分方程变成了代数方程，使求解过程简单
- 可将系统的初始条件引起的响应包含在求解方程中，可一举求得系统的全响应

3.3.1 差分方程的Z变换解

设N阶线性常系数差分方程为

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{i=0}^{M} b_i x(n-i), \qquad a_0 = 1 \quad (3.3.1)$$

系统的**全响应**：由零输入响应和零状态响应叠加而成。

- **零输入响应**：假定系统输入为零，由系统初始条件引起的响应；可采用单边Z变换来分析
- **零状态响应**：假定系统初始条件为零，由系统输入引起的响应；即$x(n)*h(n)$

3.3.1 差分方程的Z变换解

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{i=0}^{M} b_i x(n-i), \qquad a_0 = 1 \tag{3.3.1}$$

计算全响应

➤对于N阶差分方程，必须已知N个初始条件

➤设$x(n)$是因果序列，即$x(n)=0, n<0$，已知初始条件$y(-1)$，$y(-2),\ldots,y(-N)$。对(3.3.1)式进行Z变换时，<u>注意这里要用单边Z变换</u>。方程式的右边由于$x(n)$是因果序列，单边Z变换与双边Z变换是相同的。

➤下面先求移位序列的单边Z变换

设

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n) z^{-n}$$

$$ZT[y(n-k)u(n)]=\sum_{n=0}^{\infty} y(n-k)z^{-n}=z^{-k}\sum_{n=0}^{\infty} y(n-k)z^{-(n-k)}$$

$$ZT[y(n-k)u(n)]=z^{-k}[Y(z)+\sum_{l=-k}^{-1} y(l)z^{-l}] \qquad (3.3.2)$$

$$=z^{-k}\sum_{l=-k}^{\infty} y(l)z^{-l}=z^{-k}[\sum_{l=0}^{\infty} y(l)z^{-l}+\sum_{l=-k}^{-1} y(l)z^{-l}]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)=\sum_{i=0}^{M} b_i x(n-i), \qquad a_0=1 \qquad (3.3.1)$$

$$=z^{-k}[Y(z)+\sum_{l=-k}^{-1} y(l)z^{-l}]$$

按照(3.3.2)式对(3.3.1)式进行单边Z变换

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}[Y(z)+\sum_{l=-k}^{-1} y(l)z^{-l}]=\sum_{i=0}^{M} b_i X(z)z^{-i}, \qquad a_0=1 \qquad (3.3.3)$$

$$Y(z)=\frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}X(z)-\frac{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\sum_{l=-k}^{-1} y(l)z^{-l}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}, \qquad a_0=1$$

式中第一项为零状态解，第二项为零输入解

对$Y(Z)$做逆Z变换，得到**全响应** $y(n)$

3.3.1 差分方程的Z变换解

例3.3.1 已知系统差分方程 $y(n)=by(n-1)+x(n)$，式中 $x(n)=a_n u(n)$, 初始条件$y(-1)=2$，求系统全响应$y(n)$

解：将已知差分方程进行单边Z变换

$$Y(z)=bz^{-1}Y(z)+by(-1)+X(z)\Rightarrow Y(z)=\frac{2b+X(z)}{1-bz^{-1}}$$

式中，$X(z)=\dfrac{1}{1-az^{-1}},|z|>|a|$ 于是

$$Y(z)=\frac{2b}{1-bz^{-1}}+\frac{1}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})}$$

收敛域为 $|z|>max(|a|,|b|)$

3.3.1 差分方程的Z变换解

$$Y(z)=\frac{2b}{1-bz^{-1}}+\frac{1}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})}$$

收敛域为 $|z|>max\,(\,|a|,\,|b|\,)$

$$\Rightarrow y(n)=2b^{n+1}+\frac{1}{a-b}(a^{n+1}-b^{n+1}),n\geq 0$$

式中第一项为零输入解，第二项为零状态解

最终得

$$y(n)=[2b^{n+1}+\frac{1}{a-b}(a^{n+1}-b^{n+1})]u(n)+2\delta(n+1)$$

3.3 离散时间LTI系统的频域分析

- 3.3.1 差分方程的Z变换解
- 3.3.2 离散时间LTI系统的频率响应
- 3.3.3余弦型信号通过离散时间LTI系统的响应
- 3.3.4离散时间LTI系统的稳态响应和暂态响应

3.3.2 离散时间LTI系统的频率响应

离散时间LTI系统的频率特性，可用系统的频率响应和系统函数进行分析

当系统的输入是频率为 w的复指数序列 e^{jwn} 时，系统的零状态响应为

$$y(n)=e^{jwn}*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)e^{jw(n-m)}=e^{jwn}H(e^{jw})\quad(3.3.4)$$

频率响应

说明：复指数序列$x(n)=e^{jwn}$,通过离散时间LTI系统后，输出序列的频率不变，幅度取决于系统的频率响应在w处的幅值。所以$|H(e^{j\omega})|$表示系统对不同频率信号的增益

3.3.2 离散时间LTI系统的频率响应

对任意序列$x(n)$，可用复指数序列e^{jwn} 表示为

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

其零状态响应为 $y(n)=T[x(n)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})T[e^{j\omega n}]d\omega$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

时域卷积定理 $\Rightarrow Y(e^{j\omega})=H(e^{jw})X(e^{j\omega})$

3.3.2 离散时间LTI系统的频率响应

一般情况下，离散时间LTI系统的频率响应$H(e^{jw})$

是复值函数，可用幅度和相位表示为

$$H(e^{jw}) = \underbrace{\left|H(e^{jw})\right|}_{\text{幅频响应}} e^{\overbrace{j\phi(w)}^{\text{相频响应}}}$$

当$h(n)$为实序列时，幅频响应是偶函数，相频响应是奇函数

3.3.2 离散时间LTI系统的频率响应

例3.3.2 试求序列 $x(n)=\sum_{k} C_k e^{jw_k n}$ ，C为实常数，求通过离散时间LTI系统的响应并讨论

解：根据复指数序列的性质

$$y(n)=\sum_{k} C_k H(e^{jw_k})e^{jw_k n}=\sum_{k} C_k \left|H(e^{jw_k})\right| e^{j\phi(w_k)}e^{jw_k n}$$

$$=\sum_{k} C_k \left|H(e^{jw_k})\right| e^{jw_k[n+\phi(w_k)/w_k]}$$

$\left|H(e^{jw_k})\right|$ 是对信号中频率为 w_k 的信号分量的增益

幅频响应：有选择性保留有用的频率分量，而将其余频率分量衰减到近似为零，所以离散时间系统统称为数字滤波器

相频响应：不是常数，意味着不同频率分量会有不同的时间延迟，引起相位失真

3.3.2 离散时间LTI系统的频率响应

$$y(n)=\sum_k C_k H(e^{jw_k})e^{jw_k n}=\sum_k C_k\left|H(e^{jw_k})\right|e^{j\phi(w_k)}e^{jw_k n}$$

$$=\sum_k C_k\left|H(e^{jw_k})\right|e^{jw_k[n+\phi(w_k)/w_k]}$$

当 $\phi(w_k)=-w\tau$， τ 为常数时，系统为线性相位系统，对于线性相位系统，输出可表示为

$$y(n)=\sum_k C_k\left|H(e^{jw_k})\right|e^{jw_k(n-\tau)}$$

此时，不同频率分量的信号通过线性相位系统的延迟与信号的频率无关，是一个常数，近似为无失真传输系统

3.3 离散时间LTI系统的频域分析

- 3.3.1 差分方程的Z变换解
- 3.3.2 离散时间LTI系统的频率响应
- 3.3.3余弦型信号通过离散时间LTI系统的响应
- 3.3.4离散时间LTI系统的稳态响应和暂态响应

3.3.3 余弦型信号通过离散时间LTI系统的响应

设系统输入是频率为 w 的余弦序列

$$x(n)=A\cos(wn+\theta)=\frac{A}{2}[e^{j(wn+\theta)}+e^{-j(wn+\theta)}] \qquad (3.3.6)$$

根据复指数序列 通过离散时间LTI系统的响应，得输出

$$y(n)=\frac{A}{2}[H(e^{jw})e^{j(wn+\theta)}+H(e^{jw})e^{-j(wn+\theta)}] \qquad (3.3.7)$$

当$h(n)$为实序列时，由DTFT的对称性 $\boxed{H(e^{jw})=H^*(e^{-jw})}$

得 $\boxed{H(e^{jw})=|H(e^{jw})|e^{j\phi(\omega)} \qquad H(e^{-jw})=|H(e^{jw})|e^{-j\phi(-\omega)}}$ 代入(3.3.7)得

$$\begin{aligned} y(n)&=\frac{A}{2}\left|H(e^{jw})\right|[e^{j\phi(w)}e^{j(wn+\theta)}+(e^{j\phi(-w)}e^{-j(wn+\theta)})] \\ &=\frac{A}{2}\left|H(e^{jw})\right|[e^{j[wn+\phi(w)+\theta]}+(e^{j[wn+\phi(w)+\theta]})^*] \\ &=A\left|H(e^{jw})\right|\cos[wn+\phi(w)+\theta] \end{aligned}$$

3.3.3 余弦型信号通过离散时间LTI系统的响应

即 $y(n) = A\left|H(e^{jw})\right|\cos[w(n+\phi(w)/w)+\theta]$

$$(3.3.8)$$

类似的，当系统输入为 $x(n) = A\sin(wn+\theta)$

当$h(n)$为实序列时，可得输出为

$$\begin{aligned} y(n) &= A\left|H(e^{jw})\right|\sin[wn+\phi(w)+\theta] \\ &= A\left|H(e^{jw})\right|\sin[w(n+\phi(w)/w)+\theta] \end{aligned} \qquad (3.3.9)$$

相位延迟(phase delay)定义为 $\tau_p(w) = -\dfrac{\phi(w)}{w}$ (3.3.10)

如果相位延迟是w的函数，则不同的频率分量延迟不同，因此会产生失真

3.3 离散时间LTI系统的频域分析

- 3.3.1 差分方程的Z变换解
- 3.3.2 离散时间LTI系统的频率响应
- 3.3.3余弦型信号通过离散时间LTI系统的响应
- 3.3.4离散时间LTI系统的稳态响应和暂态响应

3.3.4 离散时间LTI系统的稳态响应和暂态响应

如果输入序列$x(n)$是在n=-∞时加上的，n时刻的$y(n)$是稳态解，其中暂态项都将消失

如果输入序列$x(n)$是在n=0时加上的，则系统的全响应中包含稳态解和暂态解，其中暂态项随时间的增长也将消失

考虑输入序列$x(n)=e^{jwn}u(n)$，则系统的输出序列为

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)e^{jw(n-m)}u(n-m)=[\sum_{m=-\infty}^{n}h(m)e^{-jwm}]e^{jwn}$$

$$=[\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)e^{-jwm})]e^{jwn}-[\sum_{m=n+1}^{\infty}h(m)e^{-jwm}]e^{jwn}$$

$$=H(e^{jw})e^{jwn}-[\sum_{m=n+1}^{\infty}h(m)e^{-jwm}]e^{jwn} \qquad (3.3.11)$$

3.3.4 离散时间LTI系统的稳态响应和暂态响应

稳态响应 $y_{sr}(n)=H(e^{jw})e^{jwn}$

暂态响应 $y_{tr}(n)=-[\sum_{m=n+1}^{\infty}h(m)e^{-jwm}]e^{jwn}$

对于稳定系统，$h(n)$绝对可和，当n—>∞时，则

$$\left|y_{tr}(n)\right|=\left|\sum_{m=n+1}^{\infty}h(m)e^{-jwm}\right|\le\left|\sum_{m=n+1}^{\infty}h(m)\right|\to 0$$

对于$h(n)$是长度为N的FIR系统的单位脉冲响应，即$h(n)$只在$[0,N\text{-}1]$区间有非零值，则当$n>N\text{-}1$时，暂态响应将为零，系统达到稳定

第3章 离散时间信号和系统的频域分析

- 3.1 离散时间信号的傅里叶变换（DTFT）
  - 序列的离散时间傅里叶变换
  - 序列的离散时间傅里叶变换的性质
  - 基本序列的离散时间傅里叶变换
- 3.2 离散时间信号的Z域分析
- 3.3 离散时间LTI系统的频域分析
- 3.4 离散时间LTI系统的Z域分析

3.4 离散时间LTI系统的z域分析

3.4.1 离散时间LTI系统的系统函数

3.4.2 离散时间LTI系统的差分方程与系统函数

3.4.3 系统函数的极点分布与系统因果性和稳定性的关系

3.4.4 系统函数的零极点分布对系统频率响应特性的影响

3.4.1 离散时间LTI系统的系统函数

设系统初始状态为零，输入为单位脉冲序列$\delta(n)$，输出端的响应称为系统的单位脉冲响应$h(n)$，对$h(n)$进行离散时间傅里叶变换得到$H(e^{j\omega})$

$H(e^{j\omega})$为系统的传输函数，它表征系统的实频域特性。

设$h(n)$进行Z变换，得到$H(z)$，一般称$H(z)$为系统的系统函数，它表征了系统的复频域特性

$$y(n)=x(n)*h(n)\Rightarrow Y(z)=X(z)H(z)$$

$$H(z)=ZT[h(n)]=\frac{Y(z)}{X(z)} \tag{3.4.1}$$

如果H(z)的收敛域包含单位圆 |z|=1，

$$H(e^{j\omega})=H(z)\big|_{z=e^{j\omega}} \tag{3.4.2}$$

3.4 离散时间LTI系统的z域分析

3.4.1 离散时间LTI系统的系统函数

3.4.2 离散时间LTI系统的差分方程与系统函数

3.4.3 系统函数的极点分布与系统因果性和稳定性的关系

3.4.4 系统函数的零极点分布对系统频率响应特性的影响

3.4.2 离散时间LTI系统的差分方程与系统函数

设N阶线性常系数差方程为

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{i=0}^{M} b_i x(n-i), \qquad a_0 = 1$$

双边Z变换

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

H(z)还可写成

$$H(z) = z^{N-M}\frac{b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \cdots b_M}{z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots a_N} = b_0 z^{N-M}\frac{\prod_{i=1}^{M}(z-z_i)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)}$$

零点和极点

3.4 离散时间LTI系统的z域分析

3.4.1 离散时间LTI系统的系统函数

3.4.2 离散时间LTI系统的差分方程与系统函数

3.4.3 系统函数的极点分布与系统因果性和稳定性的关系

3.4.4 系统函数的零极点分布对系统频率响应特性的影响

3.4.3 系统函数的极点分布与系统因果性和稳定性的关系

- **因果(可实现)系统**：其单位脉响应$h(n)$一定满足当$n<0$时，$h(n)=0$，$h(n)$是右边序列，其**收敛域在某个圆外，收敛域包含∞点**，又因为收敛域不包含极点，所以∞点不是极点

- **系统稳定**：要求 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$，即$h(n)$绝对可和，$h(n)$的DTFT存在，DTFT存在时，$Z$变换的**收敛域包含单位圆**。如果系统因果且稳定，收敛域包含∞点和单位圆，那么收敛域可表示为

$$r<|z|\le\infty,\quad 0<r<1$$

因果稳定系统的系统函数的所有极点一定分布在单位圆内

3.4.3 系统函数的极点分布与系统因果性和稳定性的关系

例 3.4.1已知 $H(z)=\dfrac{1-a^2}{(1-az^{-1})(1-az)}, 0<a<1$ 分析其因果性和稳定性

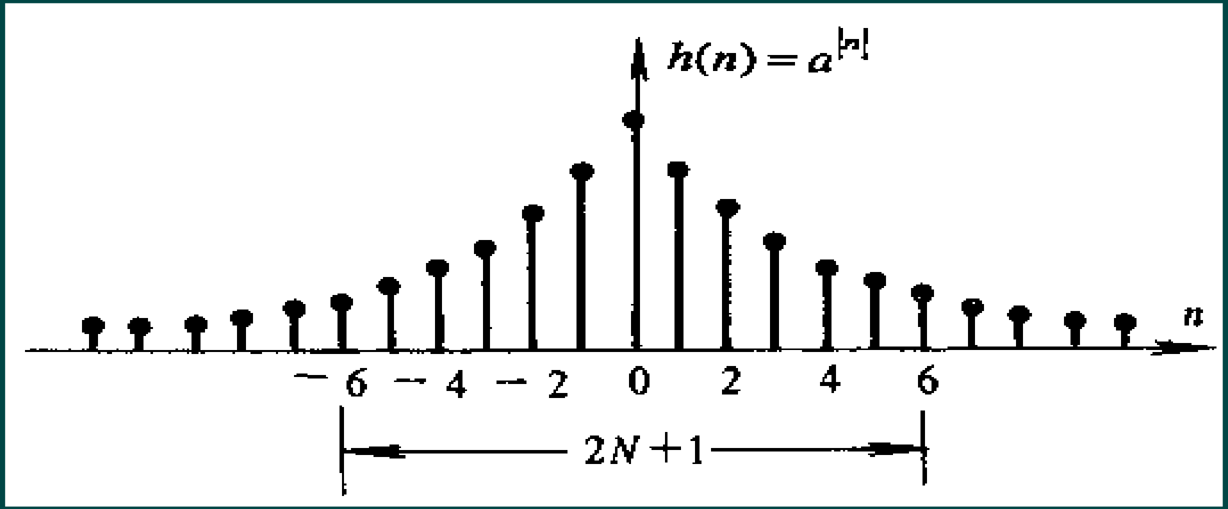
解：$H(z)$的极点为$z=a$，$z=a^{-1}$，$a^{-1}>1$， $a<1$，$a<a^{-1}$

(1)**收敛域$a^{-1}<|z|\le\infty$**，因为收敛域包含∞点，对应的系统是因果系统；因为收敛域不包含单位圆，因此是不稳定系统。单位脉冲响应 $h(n)=(a^n-a^{-n})u(n)$ 是一个因果序列，但不收敛

(2)**收敛域$0\le|z|<a$**，因为收敛域不包含∞点和单位圆，对应的系统非因果且不稳定，其单位脉冲响应$h(n)=(a^{-n}-a^n)u(-n-1)$，是一个非因果且不收敛的序列

3.4.3 系统函数的极点分布与系统因果性和稳定性的关系

(3)**收敛域$a<|z|<a^{-1}$**，因为收敛域不包含∞点，对应的系统是一个非因果系统，但由于收敛域包含单位圆，因此是稳定系统。其单位脉冲响应$h(n)=a^{|n|}$，这是一个收敛的双边序列，如下图所示



3.4 离散时间LTI系统的z域分析

3.4.1 离散时间LTI系统的系统函数

3.4.2 离散时间LTI系统的差分方程与系统函数

3.4.3 系统函数的极点分布与系统因果性和稳定性的关系

3.4.4 系统函数的零极点分布对系统频率响应特性的影响

3.4.4 系统函数的零极点分布对系统频率响应特性的影响

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}=A\frac{\prod_{r=1}^{M}(1-c_r z^{-1})}{\prod_{r=1}^{N}(1-d_r z^{-1})} \qquad (3.4.3)$$

式中$A=b_0/a_0$，上式中c_r是$H(z)$的零点，d_r是其极点

➢A参数影响传输函数的幅度大小

➢影响系统特性的是零点c_r和极点d_r的分布

➢优点：可采用实用的几何方法研究系统零极点分布对系统频率特性的影响

将(3.4.3)式分子分母同乘以z^{N+M}，得到

3.4.4 系统函数的零极点分布对系统频率响应特性的影响

$$H(z)=Az^{N-M}\frac{\prod_{r=1}^{M}(z-c_r)}{\prod_{r=1}^{N}(z-d_r)}$$

设系统稳定，即收敛域包含单位圆，其DTFT存在，将$z=e^{j\omega}$代入得传输函数

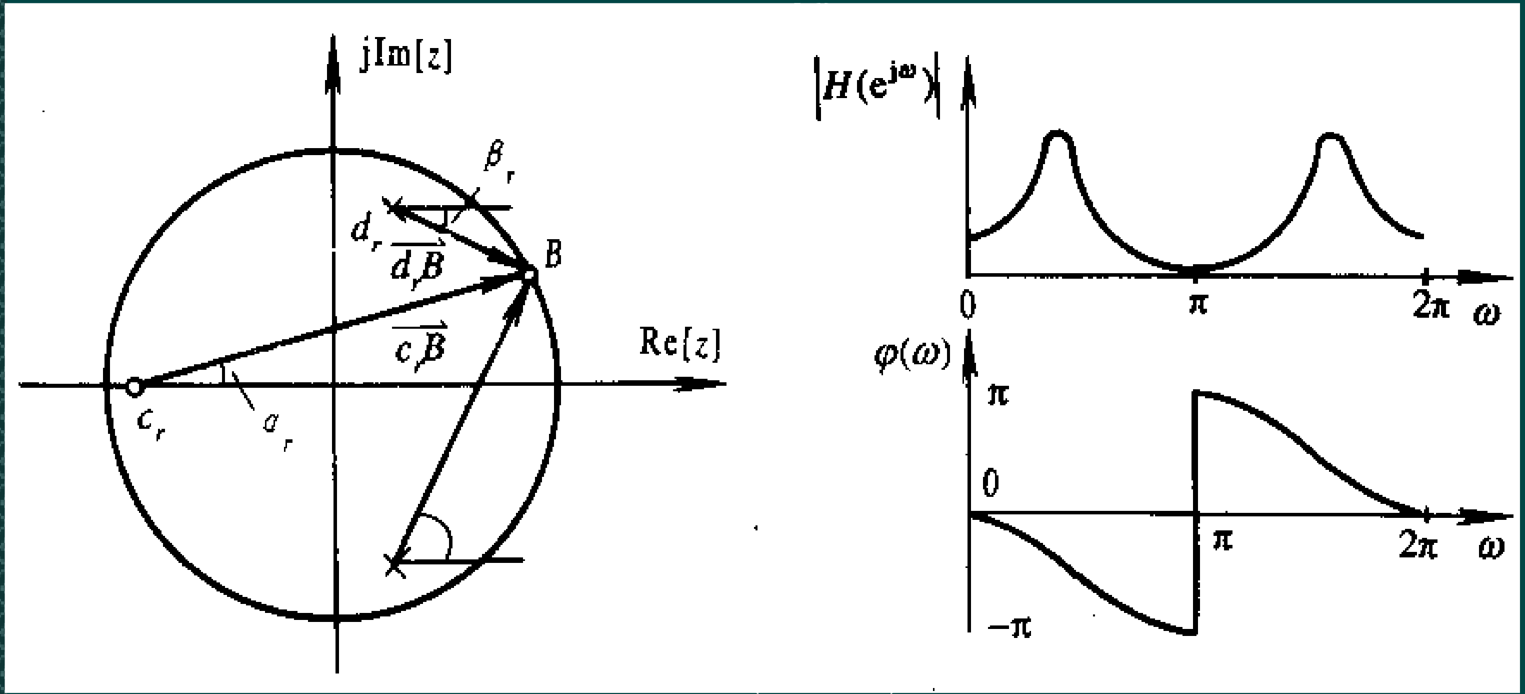
$$H(e^{j\omega})=Ae^{j\omega(N-M)}\frac{\prod_{r=1}^{M}(e^{j\omega}-c_r)}{\prod_{r=1}^{N}(e^{j\omega}-d_r)} \tag{3.4.4}$$

设$N=M$，则上式写成

$$H(e^{j\omega})=A\frac{\prod_{r=1}^{M}(e^{j\omega}-c_r)}{\prod_{r=1}^{N}(e^{j\omega}-d_r)} \tag{3.4.5}$$

3.4.4 系统函数的零极点分布对系统频率响应特性的影响

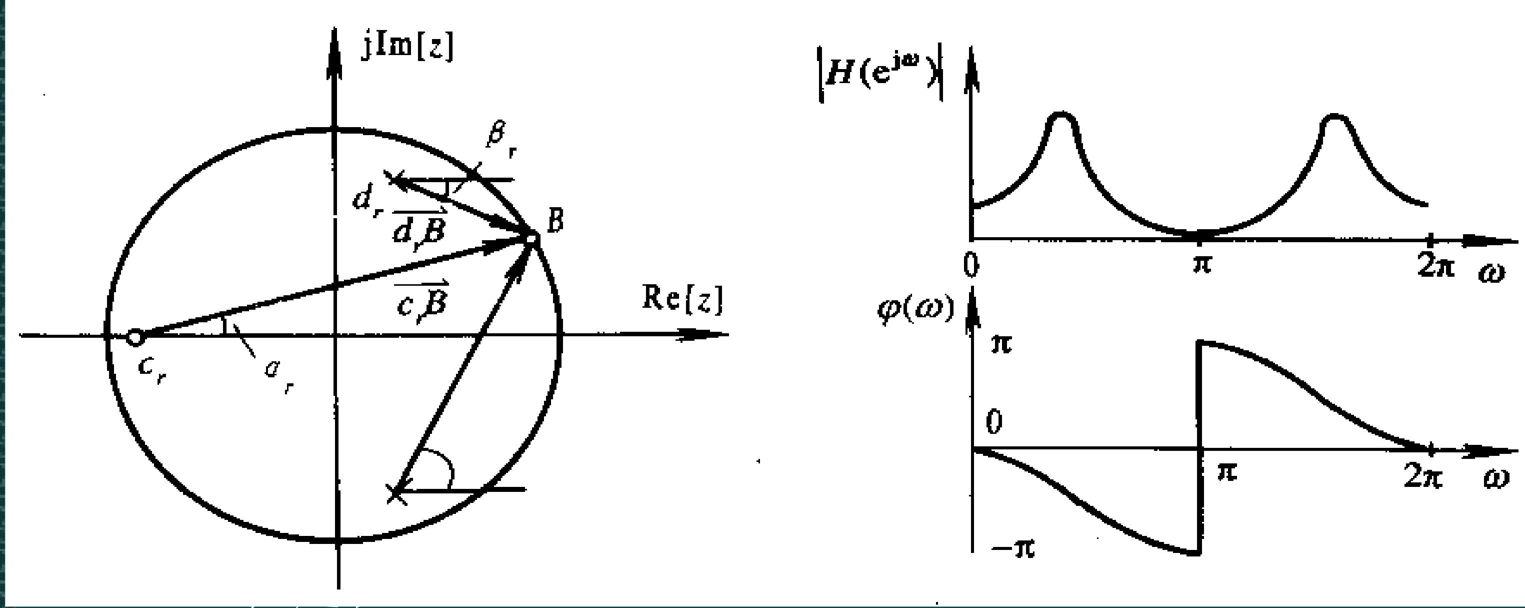
在z平面上，$e^{j\omega}-c_r$用一根由零点c_r指向单位圆上$e^{j\omega}$点B的向量 $\overrightarrow{c_r B}$表示，同样$e^{j\omega}-d_r$用内极点指向$e^{j\omega}$点B的向量$\overrightarrow{d_r B}$ 表示，如下图所示



3.4.4 系统函数的零极点分布对系统频率响应特性的影响

$$H(e^{j\omega}) = A\frac{\prod_{r=1}^{N}\overrightarrow{c_rB}}{\prod_{r=1}^{N}\overrightarrow{d_rB}} = \left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\varphi(\omega)}$$

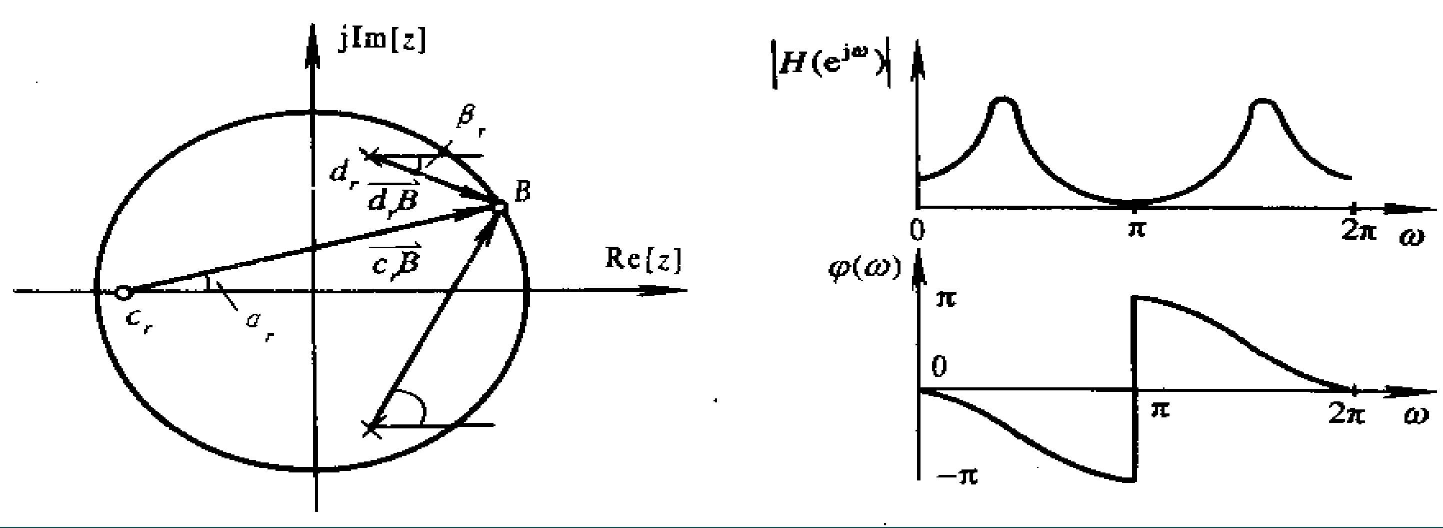
$$\left|H(e^{j\omega})\right| = A\frac{\prod_{r=1}^{N}c_rB}{\prod_{r=1}^{N}d_rB} \quad (3.4.6) \qquad \varphi(\omega) = \sum_{r=1}^{N}\alpha_r - \sum_{r=1}^{N}\beta_r \quad (3.4.7)$$



3.4.4 系统函数的零极点分布对系统频率响应特性的影响

下图示出了具有一个零点和二个极点的频率特性

- 观察峰值和谷值（幅频特性）：
  极点影响峰值位置及尖锐性；零点影响谷值位置及谷深
- 因果性
- 稳定性



频响的几何表示法

谢 谢 关 注！