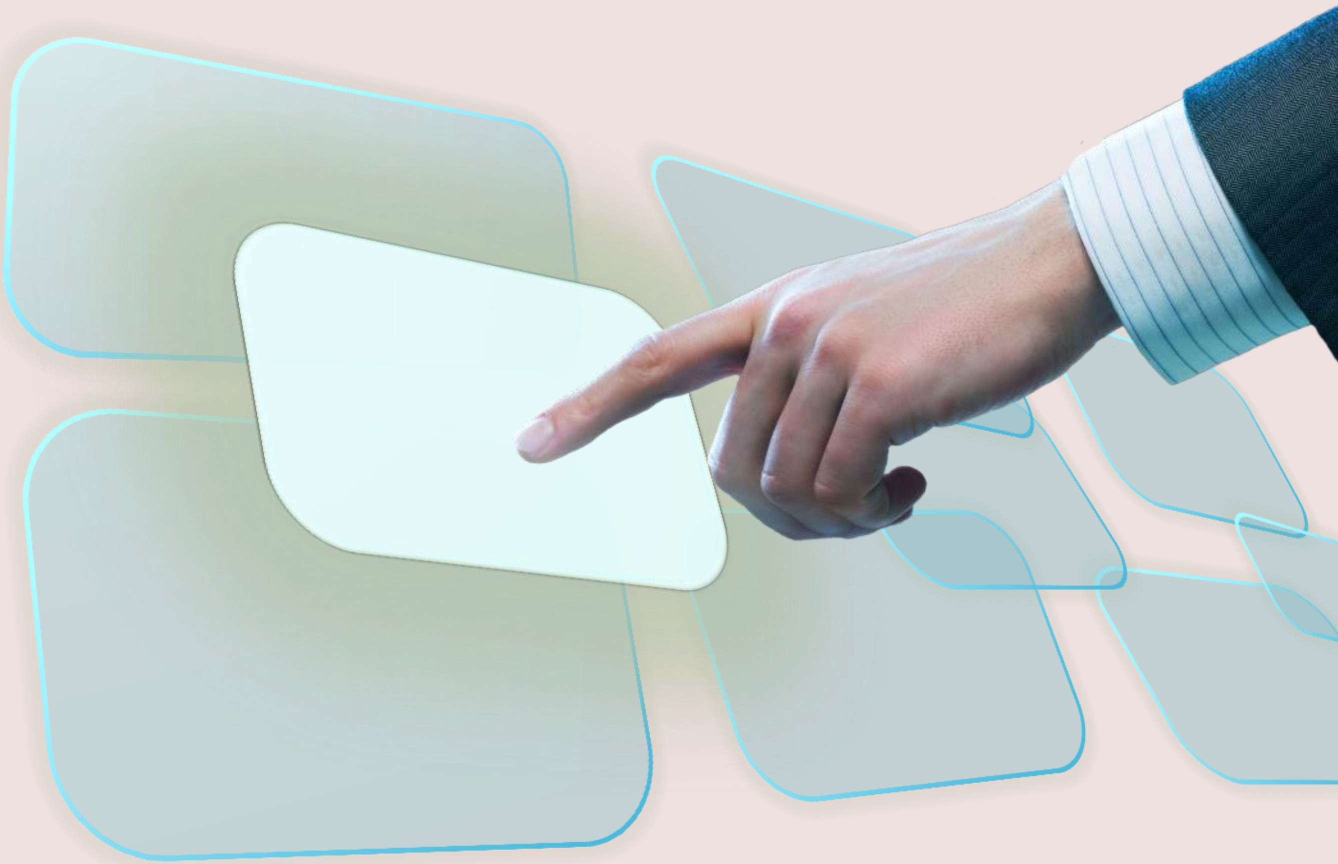
时域采样定理及其应用



任课教师: 田春娜 (博士)

单位：西安电子科技大学　电子工程学院

Email: chnatian@xidian.edu.cn

课程简介

课程名称 数字信号处理

教学对象 电子工程相关专业大三及以上本科生、研究生

教学内容 采样过程在现代化生活中的应用

时域采样定理的推导及原理

信号采样和恢复的研究趋势


一百多年前
一拍集合
拒做"低头族
一百多年后

……

数字化…

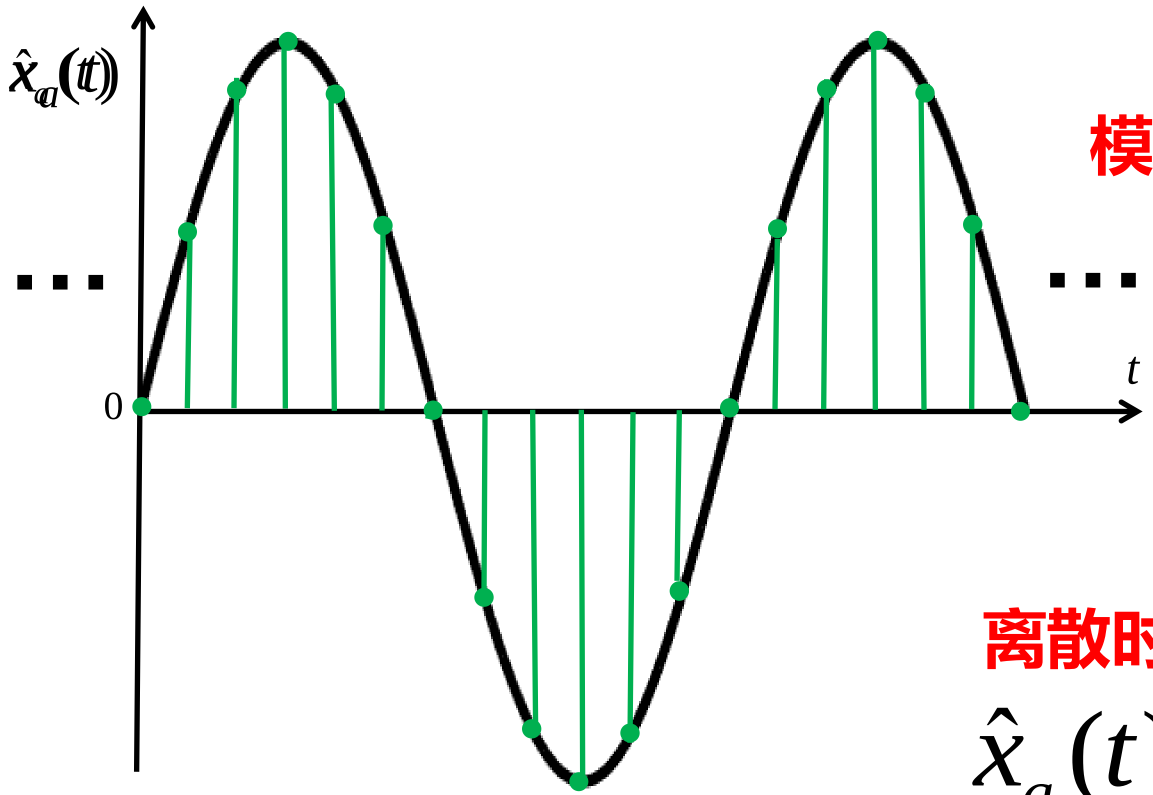
“互联网+各个传统行业”

2011年荷兰艺术家把某社交网站24小时内

所有用户上传的图片打印出来

堆满了整个房间

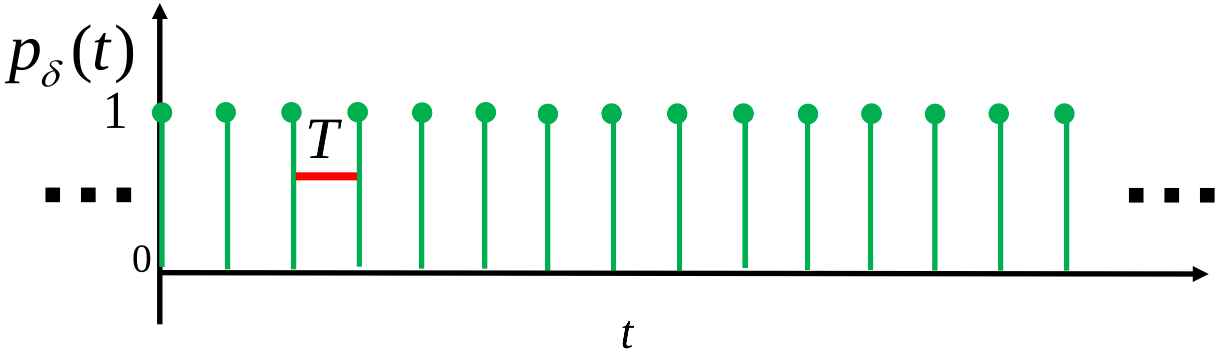
因特网上的1分钟内到底发生了什么...



模拟信号/连续时间信号

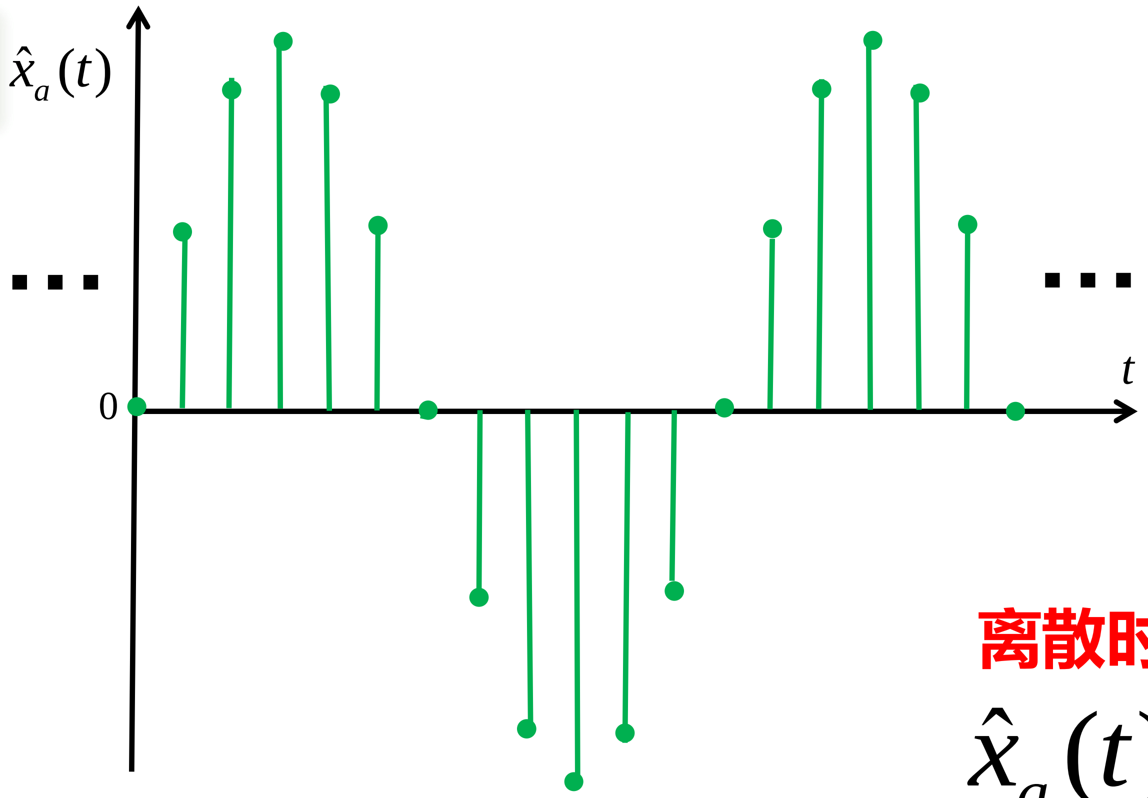
离散时间信号

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t)\,p_\delta(t)$$



$$p_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

T 为采样周期，T 的倒数为采样频率 Ω_s

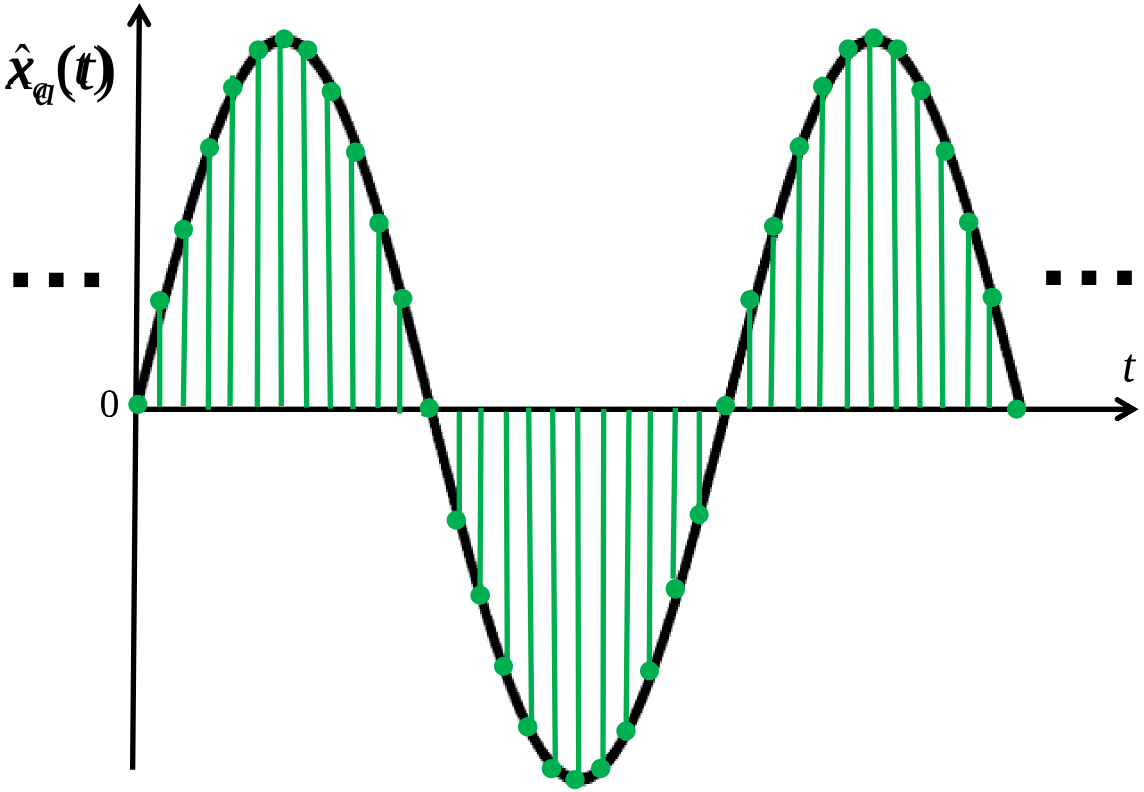


离散时间信号

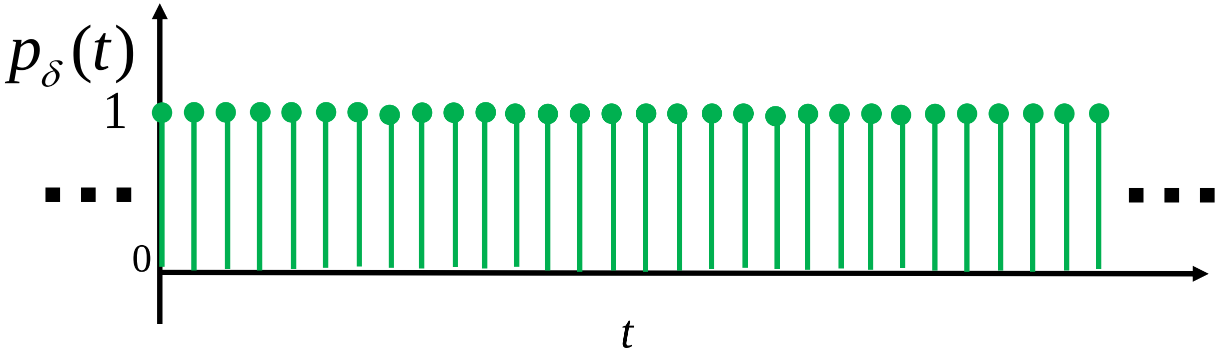
$$\hat{x}_a(t) = x_a(t)\,p_\delta(t)$$

模/数转换

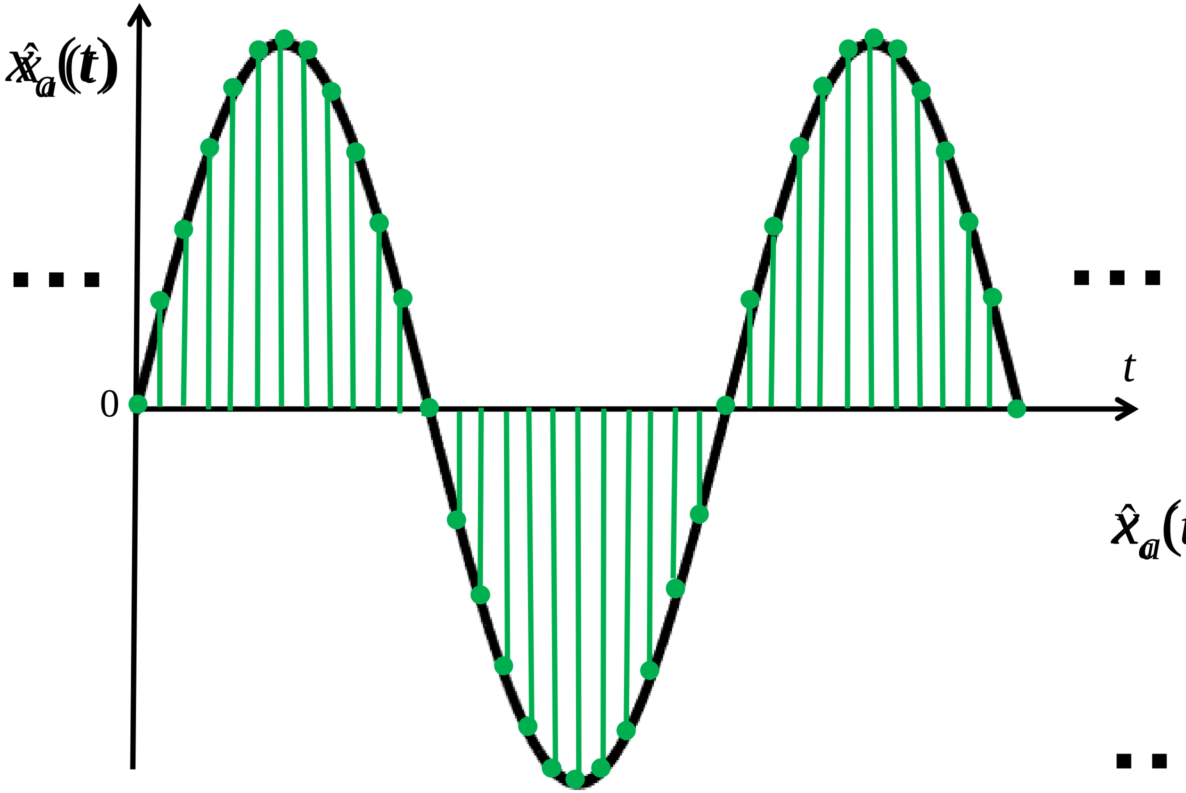
- 时域采样
- 幅度量化



$\hat{x}_a(t)$
0
t

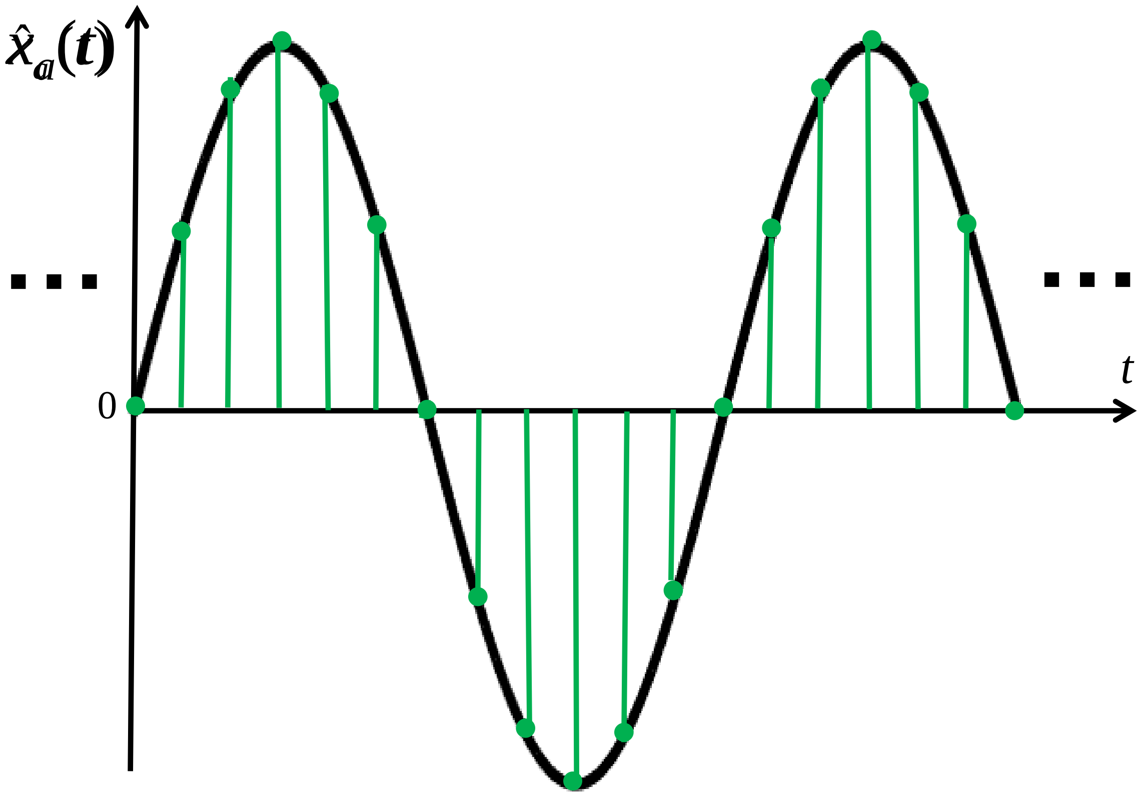


$p_\delta(t)$
1
0
t



采样频率低

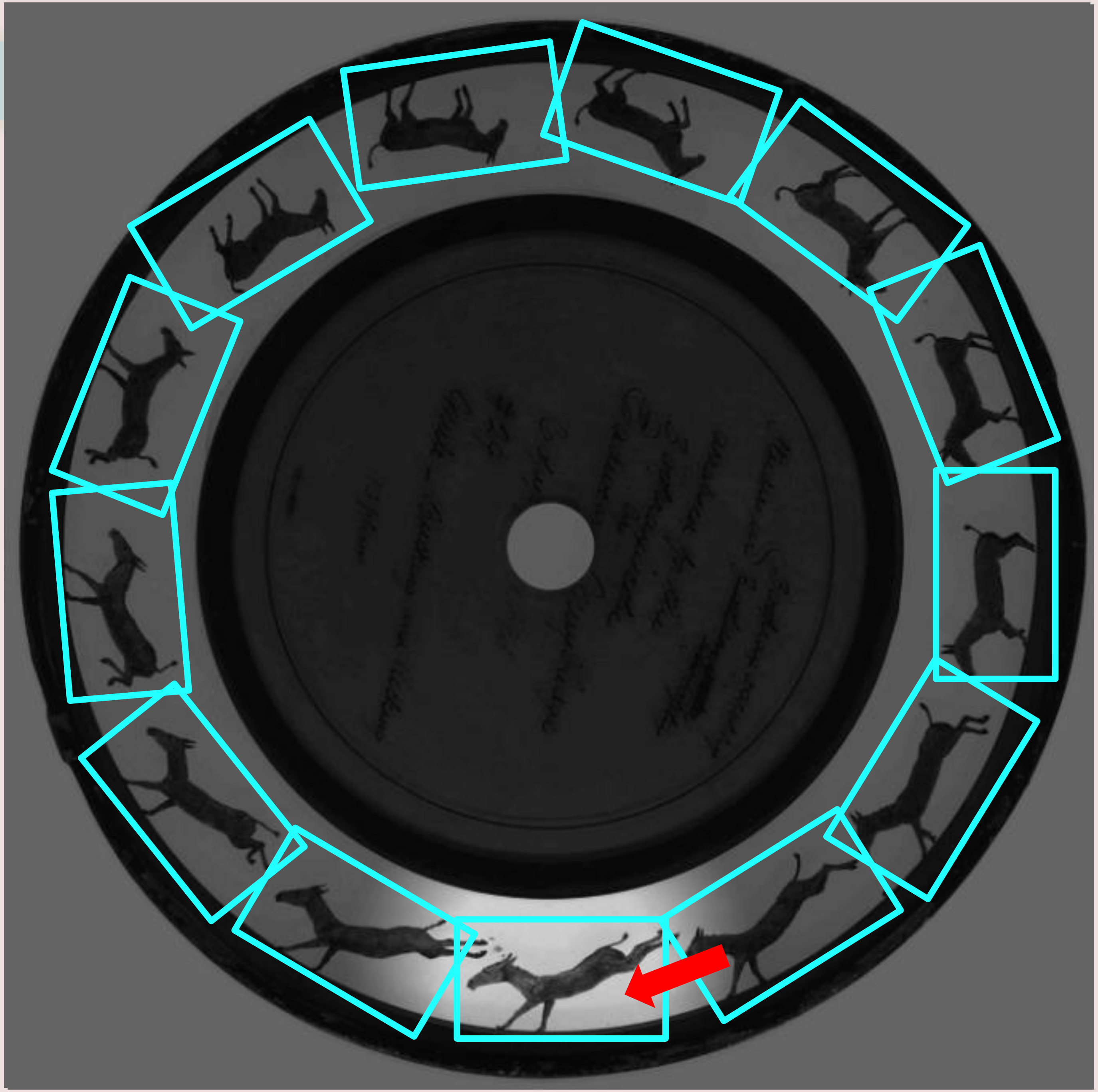
保留的信息少，能无失真恢复原信号吗



采样频率高，易于通过插值的方法来恢复原始信号，数据量大

思考 1

我们应该如何对模拟信号进行有效采样呢？



瞧 这车轮!

思考 2

这种现象是由什么引起的呢？

模拟信号的离散时间采样的频域分析

◆采样信号表示如下

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t)p_\delta(t) \qquad (1) \qquad\qquad p_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}e^{jk\Omega_s t}$$

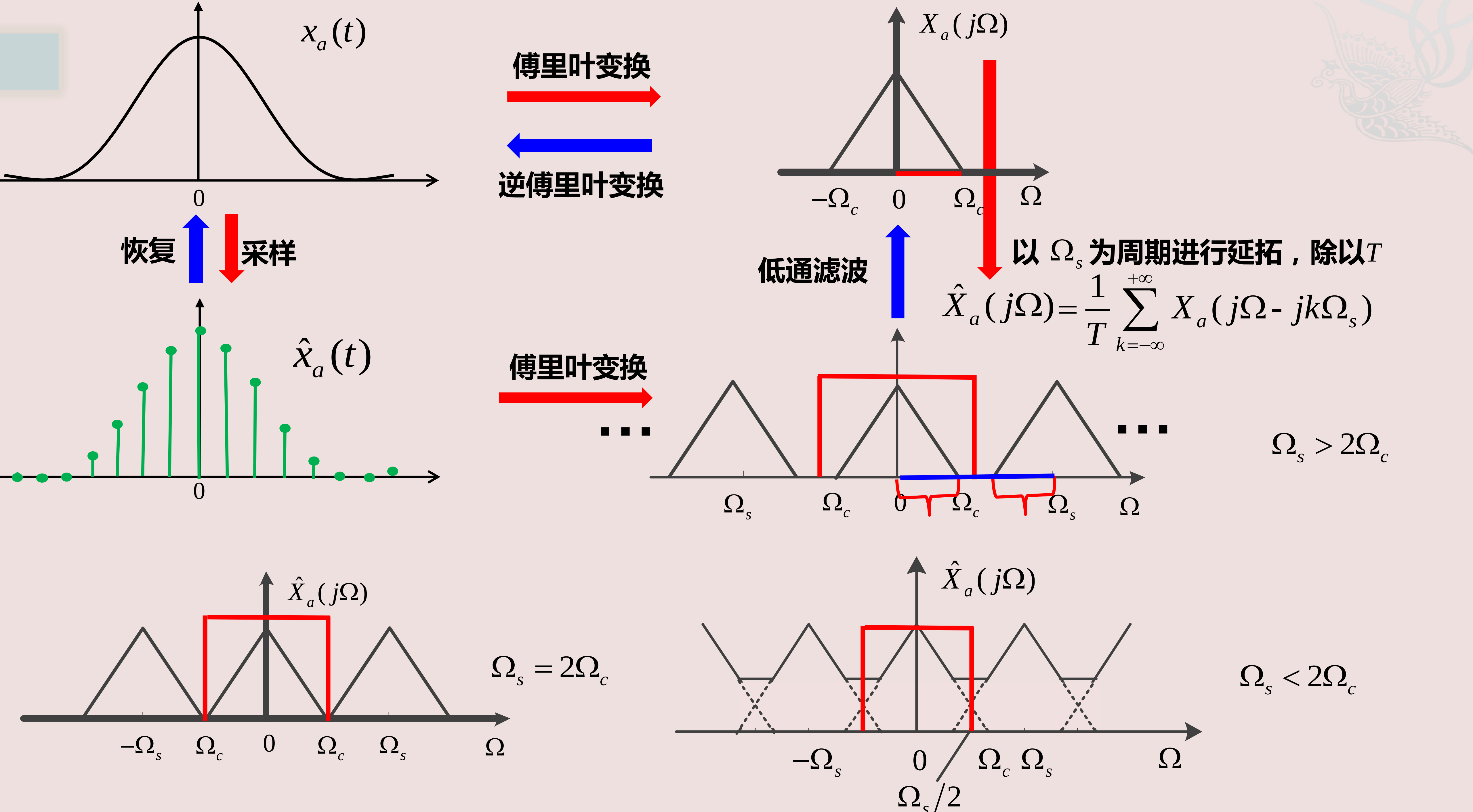
◆对(1)式两边分别取傅里叶变换

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)p_\delta(t)e^{-j\Omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}e^{jk\Omega_s t}e^{-j\Omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{jk\Omega_s t}e^{-j\Omega t}dt = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j(\Omega-k\Omega_s)t}dt$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_a(j\Omega - jk\Omega_s)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j\Omega t}dt = X_a(j\Omega)$$



$x_a(t)$
傅里叶变换
逆傅里叶变换
$X_a(j\Omega)$
$-\Omega_c$ 0 Ω_c Ω
恢复
采样
低通滤波
以 Ω_s 为周期进行延拓，除以T
$\hat{X}_a(j\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_a(j\Omega-jk\Omega_s)$
$\hat{x}_a(t)$
0
傅里叶变换
Ω_s Ω_c 0 Ω_c Ω_s Ω
$\Omega_s>2\Omega_c$
$\hat{X}_a(j\Omega)$
$-\Omega_s$ Ω_c 0 Ω_c Ω_s Ω
$\Omega_s=2\Omega_c$
$\hat{X}_a(j\Omega)$
$-\Omega_s$ 0 Ω_c Ω_s Ω
$\Omega_s/2$
$\Omega_s<2\Omega_c$

时域采样定理

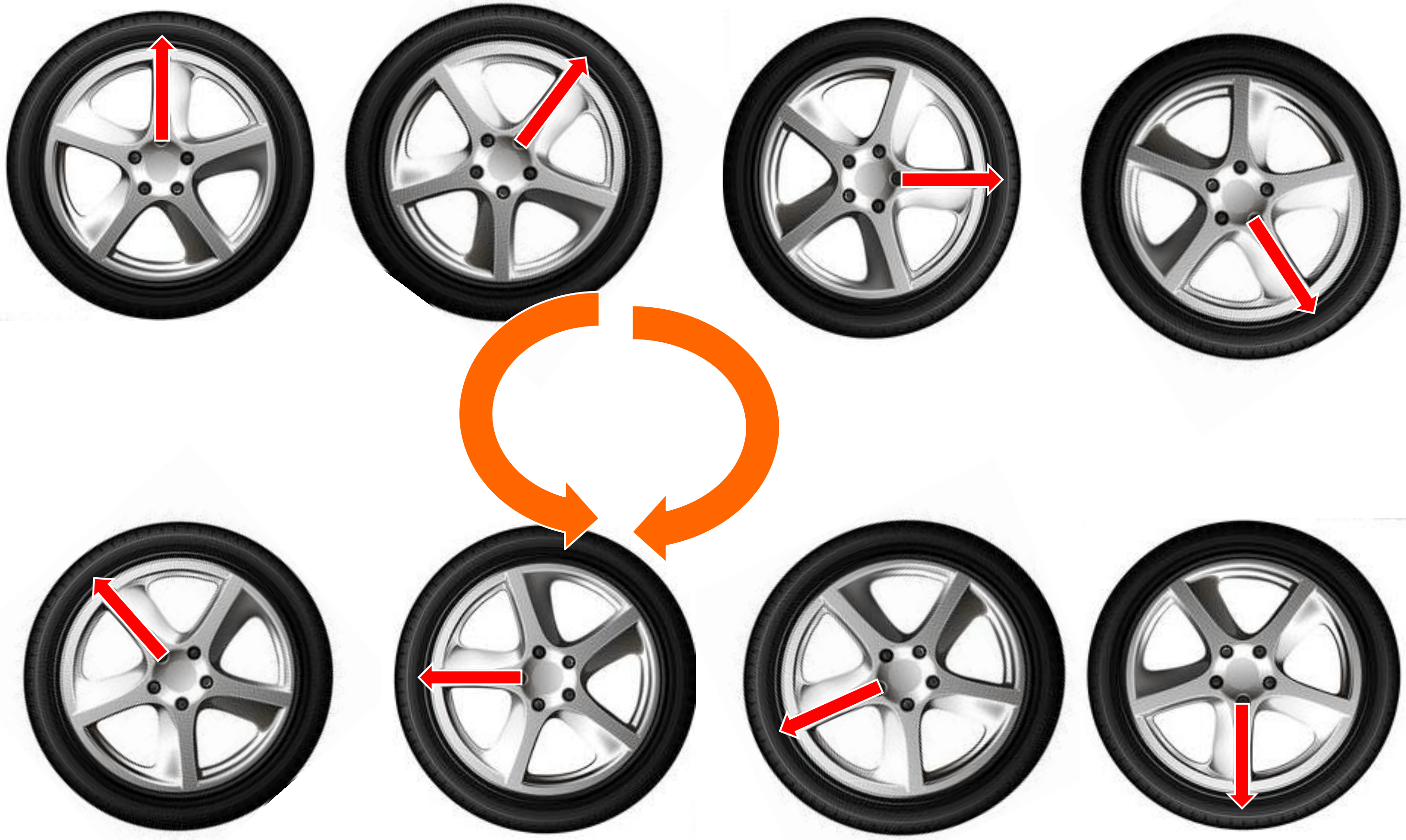
- 对于带宽为 Ω_c 的带限模拟信号 $x_a(t)$，如果采样频率 $\Omega_s \ge 2\Omega_c$，可以从采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 中无失真的恢复出 $x_a(t)$，否则采样信号会发生频谱混叠

- $2\Omega_c$ 称为奈奎斯特采样率 (*Nyquist rate*)

哈里 奈奎斯特
(Harry Nyquist, 1889-1976)

- 美国物理学家。1917获耶鲁大学博士学位。曾在美国AT&T公司与贝尔实验室任职
- 他于1928年**首次提出时域采样定理**，为**近代信息论**做出突出贡献

原理分析



小结

- **从应用举例引出时域采样过程**

- **从频域推导并总结出时域采样定理**

  对于带宽为Ω_c的带限模拟信号 $x_a(t)$, 如果采样频率 $\Omega_s \geq 2\Omega_c$，可以从采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 中无失真的恢复出 $x_a(t)$，否则采样信号会发生频谱混叠

- **信号采样和恢复的研究趋势**

思考题

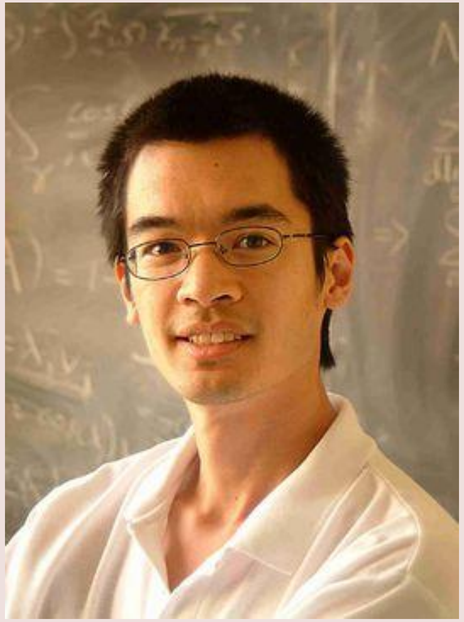
- 奈奎斯特采样定理，要求采样频率大于等于2倍的信号最高频率
- 实际应用中，信号的带宽越来越大，采样频率太高，导致数据量剧增
- 自然界中大部分信号具有**稀疏性**，对于稀疏信号可否用**较低的采样频率恢复原始信号**呢？

压缩感知…

Emmanuel Jean Candès
斯坦福大学

David Donoho
斯坦福大学

Justin Keith Romberg
乔治亚理工学院



陶哲轩
加州大学洛杉矶分校

……

谢 谢 大 家！