Finančni praktikum

# $k$-total rainbow domination numer vs. domination number

Tim Resnik
Lana Herman
Univerza v Ljubljani

Fakulteta za matematiko in fiziko

November, 2019

# 1 Problem naloge

V projektni nalogi se bova ukvarjala z domeno, ki se ukvarja s povezavo med 'k-rainbow total domination number' (označimo z $\gamma_{krt}(G)$) in 'domination number' (označimo z $\gamma(G)$). Definiciji za $\gamma_{krt}(G)$ in $\gamma(G)$ sta v razdelku **Razlaga pojmov**.
Domneva pravi, da za graf G in $k \geq 4$ obstaja tesna povezava $\gamma_{krt}(G) \geq 2\gamma(G)$. Cilj najine projetkne naloge je najti tak graf, za katerega ta neenkost ne drži. To sva na majhnih grafih preverila na konkretnih primerih, kjer sva število vozlišč in število $k$ vnesla ročno. Za večje grafe sva uporabila metodo *Simulated Annealing*.
Poiskala sva tudi primere, za katere velja enakost $\gamma_{krt}(G) = 2\gamma(G)$.

# 2 Razlaga pojmov

Graf $G$ ima množico vozlišč $V(G)$ in množico povezav $E(G)$. Za množico $N_G(v)$ velja, da vsebuje vsa sosednja vozlišča $v$, v grafu G. Za grafa G in H, je kartezični produkt $G\Box H$ graf z množico vozlišč $V(G) \times V(H)$.
*Dominirana množica* grafa $G$ je $D \subseteq V(G)$, taka da za vsako vozlišče $v \in V(G)$ in $v \notin D$ velja, da je sosed nekemu vozlišču iz $D$. *Dominirano število*, $\gamma(G)$, je velikost najmanjše dominirane množice. Če za $\forall v \in V(G)$ velja, da je sosed vozlišču iz $D$, za $D$ rečemo, da je *totalno dominirana množica* grafa $G$. *Totalno dominirano število*, $\gamma_t(G)$, je velikost najmanjše totalno dominirane množice.
Za pozitivno celo število $k$, je *'k-rainbow domination function'* ($k$RDF) grafa $G$ funkcija $f$, ki slika iz $V(G)$ v množico $\{1, \cdots, k\}$. Zanjo velja, da za katerikoli $v \in V(G)$ in $f(v) = \emptyset$ velja $\cup_{u \in N_G(v)} f(u) = [k]$. Definiramo $\|f\| = \sum_{v \in V(G)} |f(v)|$. $\|f\|$ rečemo *teža* $f$-a. *'k-rainbow domination number'*, $\gamma_{kr}(G)$, grafa $G$ je minimalna vrednost $\|f\|$ za vse 'k-rainbow domination functions'. Po definiciji vemo, da za vse $k \geq 1$ velja

$$\gamma_{kr}(G) = \gamma(G\Box K_k).$$

Graf $K_k$ predstavlja polni graf na $k$ vozliščih. Nazadnje definirajmo še *'k-rainbow total domination function'* ($k$RTDF), katera se od 'k-rainbow domination function' razlikuje v dodatnem pogoju, ki zagotavlja, da če za $\forall v \in V(G)$ velja $f(v) = \{i\}$, potem obstaja tak $u \in N_G(v)$, da je $i \in f(u)$. *'k-rainbow total domination number'*, $\gamma_{krt}(G)$, grafa $G$ je minimalna vrednost $\|f\|$ za vse 'k-rainbow total domination functions'. Tudi tu za vse $k \geq 1$ velja

$$\gamma_{krt}(G) = \gamma_t(G\Box K_k).$$

# 3 Reševanje problema

## 3.1 Majhni grafi

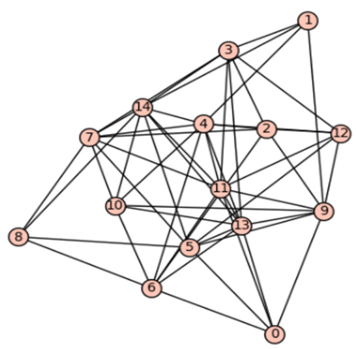
Za majhne grafe sva definirala naslednjo pseudokodo.

```
result=[]; #seznam vseh gamak/gama
gresult=[]; #seznam proti primerov
dvaresult=[]; #seznam grafov, ki imajo x=2
n=15; #število vozlišč
p=0.5; #verjetnost da posamezno povezavo dodaš v graf
for i in range(10): #preveri na 10ih random grafih
    for k in range(2,6):
        g=graphs.RandomGNP(n,p)
        gk=g.cartesian_product(graphs.CompleteGraph(k))
        gama=g.dominating_set(value_only=True)
        gamak=gk.dominating_set(value_only=True,total=True)
        x=float(gamak/gama);
        if x<2: gresult.append(g)
        if x==2: dvaresult.append(g)
        result.append(x)
print(min(result))
```

V kodi seznam *result* predstavlja seznam vseh koeficientov $\frac{\gamma_{krt}(G)}{\gamma(G)}$, seznam *gresult* predstvalja vse tiste grafe, za katere velja neenakost $\frac{\gamma_{krt}(G)}{\gamma(G)} < 2$, seznam *dvaresult* pa predstavlja grafe za katere velja enakost $\frac{\gamma_{krt}(G)}{\gamma(G)} = 2$.
Prva zanka preteče $i$ naključnih grafov, generiranih z že vgrajeno funkcijo iz programa *sage*, imenovano *graphs.RandomGNP(n,p)*, kjer $n$ predstvalja število vozlišč, $p$ pa verjetnost, da posamezno povezavo doda v graf.
Druga zanka se zapelje čez določeni število $k$-jev, kjer $k$ predstvalja število vozlišč na polnem grafu. Po definiciji namreč vemo, da 'k-rainbow total domination number' izračunamo preko kartezičnega produkta med grafom $G$ in polnim grafom s $k$ vozlišči.

To kodo sva uporabila za $n \in \{5, \cdots, 20\}$ na različnem številu korakov in različnih $k$-jih. Za $k \geq 3$ sva minimum zmeraj dobila enak 2, za $k = 2$ pa sva dobila veliko protiprimerov, npr.:

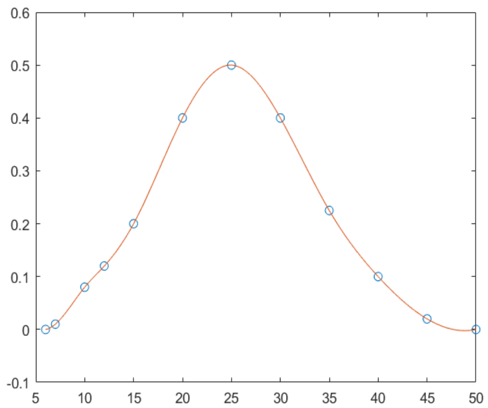
```
gresult[0].plot()
```




```
len(gresult)
```

205

Opazimo, da je takih grafov kar 205 (koda je preverila na 1000 grafih s 15 vozlišči). To število se seveda spreminja, ko kodo poženemo večkrat. Zato sva jo pognala večrat in na različnem številu vozlišč. Vse skupaj je koda pregledala približno $10^{100}$ grafov, izključno za $k = 2$. Podatke sva izpisala v program *Matlab*, jih za posamezno število vozlišč povprečila in jih aproksimirala z že vgrajeno funkcijo *interp1*. Dobila sva spodnji graf.




Opazimo, da protiprimerov ne dobimo za grafe z manj kot 7 vozlišč, za večje grafe pa velja, da gre število protiprimerov proti nič, ko se veča število vozlišč. Največ pa jih je pri grafih s približno 25 vozlišči.

## 3.2 Veliki grafi

Za velike grafe sva definirala naslednjo pseudokodo.

```
k = 4
def spremeni_graf(G):
    for i in range(5):
        H = Graph(G)
        if random() < 0.5:
            H.delete_edge(H.random_edge())
            if not H.is_connected():
                H = Graph(G)
        else:
            if H.complement().size() == 0:
                H.delete_edge(H.random_edge())
            else:
                H.add_edge(H.complement().random_edge())
    return H
```

```
def krit(G):
    gama=G.dominating_set(value_only=True)
    gamak=(G.cartesian_product(graphs.CompleteGraph(k))).dominating_set(value_only=True, total=True)
    return gamak/gama
```

```
p = 0
stevilo_korakov = 2000
najboljsi = G
kk = k_min = krit(G)
for p in range(0, stevilo_korakov):
    Temp = stevilo_korakov / (p+1)
    novi = spremeni_graf(G)
    kn = krit(novi)
    razlika = kk - kn
    if razlika > 0:
        G = novi
        kk = kn
        if kn < k_min:
            najboljsi = novi
            k_min = kn
    elif exp((razlika * 100)/Temp) > random():
        G = novi
        kk = kn
    p += 1
print(najboljsi.show(), k_min)
```