LAB 04 : TIỂU LUẬN VỀ FRACTAL

Giảng viên:	Cáp Phạm Đình Thăng	
Môn:	Đồ họa máy tính - CS105.P22	
Thành viên:	Nguyễn Ấn	- 22520019
	Trịnh Thị Lan Anh	- 22520083
	Vương Dương Thái Hà	- 22520375

I. Bông tuyết VanKoch (Kock Snowflake)

1. Giới thiệu

Bông tuyết Von Koch được nhà toán học người Thụy Điển Helge von Koch giới thiệu lần đầu tiên vào năm 1904, như một ví dụ cho việc không phải lúc nào một đường liên tục cũng có thể đạo hàm được. Hình dạng này sau đó trở thành một trong những hình fractal đầu tiên được công nhận và được sử dụng rộng rãi để giảng dạy khái niệm về giới hạn, chuỗi vô hạn và độ dài đường cong trong giải tích.

2. Cách tạo bông tuyết VanKoch

Bông tuyết Von Koch được tạo ra bằng một quá trình lặp đi lặp lại:

- Bắt đầu với một tam giác đều.
- Chia mỗi cạnh của tam giác thành ba đoạn bằng nhau.
- Thay thế đoạn ở giữa bằng hai đoạn tạo thành một tam giác đều nhô ra ngoài
- Lặp lại quy trình này với mỗi cạnh mới

Quá trình này có thể tiếp tục vô hạn, và ở mỗi bước, số cạnh tăng gấp 4 lần so với số cạnh ban đầu chia 3, đồng thời chiều dài tổng thể của chu vi cũng tăng lên không ngừng.

3. Tính chất toán học đặc biệt

Tự đồng dạng (self-similar): Mỗi phần nhỏ của bông tuyết đều giống với toàn bộ hình ở quy mô nhỏ hơn.

Chu vi vô hạn: Do mỗi lần lặp chiều dài đường cong tăng thêm, nên nếu lặp vô hạn lần, chu vi trở nên vô hạn.

Diện tích hữu hạn: Dù chu vi vô hạn, diện tích của bông tuyết Von Koch vẫn giới hạn. Điều này thể hiện một nghịch lý trực quan và là một bài học thú vị trong giải tích.

Không khả vi: Đường cong Von Koch là một ví dụ về một đường liên tục nhưng không có đạo hàm tại bất kỳ điểm nào.

4. Ý nghĩa và ứng dụng

Không chỉ là một hình thú vị trong toán học, bông tuyết Von Koch còn được ứng dụng trong:

- Thiết kế anten fractal, nhờ đặc tính tự đồng dạng giúp tăng hiệu quả thu sóng.
- Mô phỏng hình dạng tự nhiên như bờ biển, đường gân lá cây, vỏ sò.
- Đồ họa máy tính, để tạo các hiệu ứng hình học chi tiết với độ phức tạp cao từ những quy tắc đơn giản.

5. Kết luận

Bông tuyết Von Koch là một biểu tượng tiêu biểu của cái đẹp trong toán học hiện đại – nơi cái vô hạn có thể nằm trọn trong một giới hạn, nơi những hình thù phức tạp nảy sinh từ những quy tắc đơn giản. Nó không chỉ giúp chúng ta mở rộng tư duy hình học mà còn gợi mở một thế giới mới – thế giới của fractal, nơi mọi giới hạn đều có thể bị phá vỡ và tái định nghĩa.

II. Đảo Minkowski

1. Giới thiệu

Đảo Minkowski (Minkowski Sausage hoặc Minkowski Curve) được đặt theo tên của nhà toán học Đức gốc Latvia Hermann Minkowski, người nổi tiếng với những đóng góp trong lý thuyết số và hình học không gian. Tuy ông không trực tiếp phát minh ra đường cong này, nhưng hình được đặt theo tên ông để vinh danh các nghiên cứu trong lĩnh vực hình học fractal và không gian nhiều chiều.

Đảo Minkowski là một loại đường cong fractal, được tạo ra bằng cách biến đổi từng đoạn thẳng thành một chuỗi các đoạn ngắn hơn theo một mẫu cố định, lặp lại vô hạn. Khi quá trình lặp càng nhiều, hình dạng ban đầu trở nên giống một "đảo" với bờ biển gồ ghề và phức tạp – điều khiến nó gắn liền với cụm từ "Minkowski Island".

2. Cách xây dựng đảo Minkowski

Quá trình tạo ra Đảo Minkowski khá giống với bông tuyết Von Koch, gồm các bước:

- Bắt đầu với một đoạn thẳng.
- Chia đoạn thẳng thành 4 phần bằng nhau.
- Thay phần ở giữa bằng một hình "răng cưa" gồm ba đoạn tạo thành góc vuông (giống hình chữ Z quay 90 độ).
- Lặp lại quá trình đó cho mỗi đoạn mới sinh ra.

Mỗi lần lặp, chiều dài của đường cong tăng lên, hình dạng trở nên gồ ghề và chi tiết hơn.

3. Tính chất hình học

Fractal thực sự: Đảo Minkowski là một fractal vì có tính tự đồng dạng, nghĩa là hình dạng nhỏ giống với toàn thể ở tỉ lệ thu nhỏ.

Chu vi vô hạn: Tương tự bông tuyết Von Koch, đường viền của đảo Minkowski dài ra mãi không bao giờ kết thúc nếu tiếp tục lặp vô hạn.

Diện tích hữu hạn: Mặc dù chu vi vô hạn, vùng diện tích được "bao phủ" vẫn nằm trong giới hạn, một đặc điểm gây nhiều bất ngờ cho người học toán.

Không khả vi: Đường viền của đảo có quá nhiều góc, khiến nó không có đạo hàm tại bất kỳ điểm nào – điều này rất thú vị trong giải tích.

4. Ứng dụng và ý nghĩa

Đảo Minkowski không chỉ là một khái niệm hình học trừu tượng. Nó còn:

- Mô phỏng địa hình tự nhiên như đường bờ biển, rìa đảo, hay các vật thể tự nhiên có viền gồ ghề.
- Sử dụng trong vật lý và kỹ thuật, đặc biệt trong lý thuyết nhiễu và thiết kế anten fractal.
- Gợi mở triết lý về cái vô hạn trong cái hữu hạn, giúp con người suy ngẫm sâu hơn về tự nhiên, về giới hạn của cảm giác trực giác khi tiếp cận những hình phức tạp.

5. Kết luận

Đảo Minkowski là một ví dụ tuyệt vời cho vẻ đẹp và sự kỳ lạ của fractal. Từ một đoạn thẳng đơn giản, quá trình lặp đã tạo ra một hình dạng phức tạp đến mức vượt qua giới hạn hiểu biết thông thường. Nó là biểu tượng cho cách mà cái đơn giản sinh ra cái phức tạp, là minh chứng cho việc toán học không chỉ là những con số khô khan mà còn là nghệ thuật của hình dạng và logic. Việc nghiên cứu đảo Minkowski không chỉ giúp chúng ta hiểu rõ hơn về hình học fractal mà còn khơi gợi sự tò mò, khám phá trong tâm trí mỗi người học toán.

III. Tam giác Sierpinski (Triangles)

1. Giới thiệu

Tam giác Sierpinski (Sierpinski Triangle) là một hình dạng fractal nổi tiếng, được đặt theo tên của nhà toán học người Ba Lan Wacław Sierpiński – người đã mô tả nó lần đầu tiên vào năm 1915. Đây là một hình tam giác đều được lặp đi lặp lại theo một quy tắc đơn giản để tạo thành một cấu trúc tự đồng dạng (self-similar structure).

Fractal như Tam giác Sierpinski rất phổ biến trong cả lý thuyết toán học lẫn các mô hình tự nhiên như bông tuyết, san hô, và cả các mô hình máy tính (CGI, compression…).

2. Cách tạo Tam giác Sierpinski

- Bắt đầu với một tam giác đều lớn.
- Chia tam giác thành 4 tam giác nhỏ bằng cách nối trung điểm các cạnh.
- Loại bỏ tam giác chính giữa (ngược hướng).
- Lặp lại bước 2–3 với ba tam giác còn lại.
- Lặp lại vô hạn, ta được Tam giác Sierpinski.

3. Tính chất toán học

- Tự đồng dạng (Self-similarity): Bất kỳ phần nhỏ nào cũng có cấu trúc giống toàn thể.

- Diện tích tiến về 0: Sau mỗi lần lặp, 1/4 diện tích bị bỏ đi → sau vô hạn lần, diện tích của tam giác Sierpinski bằng 0.

- Số lượng tam giác tăng vô hạn: Mỗi bước tạo ra số tam giác gấp 3 lần bước trước.

4. Ứng dụng và ý nghĩa

- Trong toán học và khoa học máy tính
  - Dùng trong lý thuyết hỗn loạn, thuật toán đồ họa, nén ảnh.
  - Là ví dụ điển hình để dạy đệ quy và fractal trong lập trình.
  - Mô phỏng cấu trúc phân cấp trong tự nhiên và mạng lưới phân tán.
- Kỹ thuật và viễn thông
  - Mô hình ăng-ten fractal: nhỏ gọn, thu/phát sóng tốt hơn.
  - Cấu trúc mạch điện phân tầng.
- Nghệ thuật và thiết kế
  - Được dùng làm mô típ nghệ thuật, trang trí, và mô hình mô phỏng thiên nhiên.

5. Kết luận

Tam giác Sierpinski là một biểu tượng đơn giản nhưng mạnh mẽ của thế giới fractal – nơi hình học cổ điển giao thoa với cái đẹp của sự vô hạn và hỗn loạn có trật tự. Qua các đặc tính như tự đồng dạng, chiều fractal, và khả năng ứng dụng rộng rãi, nó cho thấy một mối liên kết sâu sắc giữa toán học thuần túy và các lĩnh vực khoa học, kỹ thuật, và nghệ thuật hiện đại.

IV. Hình vuông Sierpinski (Carpet)

1. Giới thiệu

Hình vuông Sierpinski, hay còn gọi là Thảm Sierpinski (Sierpinski Carpet), được đề xuất bởi chính Wacław Sierpiński vào năm 1916 – chỉ một năm sau khi ông mô tả tam giác Sierpinski.

Đây là một hình fractal hai chiều được xây dựng bằng cách chia nhỏ và loại bỏ dần các phần ở giữa, tạo thành một cấu trúc lặp lại vô tận, mang tính chất tự đồng dạng – vô cùng đẹp mắt và nhiều ứng dụng thực tiễn.

2. Cách tạo Hình vuông Sierpinski

- Bắt đầu với một hình vuông lớn.

- Chia hình vuông thành 9 phần bằng nhau (3 hàng × 3 cột).

- Loại bỏ phần hình vuông chính giữa.

- Lặp lại quá trình với 8 hình vuông con còn lại.

- Lặp lại vô hạn, ta sẽ thu được thảm Sierpinski.

3. Tính chất toán học đặc biệt

- Tự đồng dạng (Self-similarity): Mỗi phần nhỏ của thảm có hình dạng giống với toàn thể.

- Diện tích tiến về 0:
- Số lượng hình vuông tăng cực nhanh
- Vô hạn lỗ: Có vô số lỗ nhỏ đến mức không thể lấp đầy lại bằng diện tích hữu hạn.

4. Ý nghĩa và ứng dụng

- Toán học & Khoa học máy tính
  - ➢ Mô hình lý tưởng để dạy đệ quy, chia để trị, và thuật toán fractal.
  - ➢ Dùng trong lý thuyết tập hợp và mô hình hỗn loạn.
  - ➢ Biểu diễn cấu trúc không gian lỗ rỗng trong vật liệu hoặc mạng.
- Điện tử & Viễn thông
  - ➢ Thiết kế ăng-ten fractal cho tín hiệu mạnh và nhỏ gọn hơn.

  - ➢ Mô phỏng cấu trúc mạch điện phân cấp và mạng phân tán.
- Đồ họa & Nghệ thuật
  - ➢ Ứng dụng trong tạo hình CGI, hoạt họa, hiệu ứng fractal.

  - ➢ Tạo nền trang trí hoặc mẫu thiết kế hiện đại, phong cách kỹ thuật số.

5. Kết luận

Hình vuông Sierpinski là một fractal ấn tượng với vẻ đẹp hình học đơn giản nhưng đầy chiều sâu toán học. Việc nó có diện tích bằng 0 nhưng chu vi vô hạn, cùng với đặc tính tự đồng dạng và phân dạng, khiến nó trở thành một công cụ lý tưởng để minh họa các khái niệm như vô hạn, lặp đệ quy, và sự phức tạp trong hình học hiện đại

V. Tập Mandelbrot và Julia.

1. Giới thiệu:

Fractal là một dạng hình học đặc biệt, nổi bật với tính chất tự đồng dạng (self-similarity). Trong toán học, hai ví dụ tiêu biểu và nổi tiếng về fractal là tập Mandelbrot và tập Julia. Các fractal này không chỉ có vẻ đẹp thẩm mỹ mà còn chứa đựng những đặc điểm toán học sâu sắc, mở rộng khả năng nghiên cứu về lý thuyết hỗn loạn và các hệ động lực học phức

2. Tập Mandelbrot

Tập Mandelbrot được Benoît B. Mandelbrot khám phá vào năm 1980. Nó là tập hợp các điểm phức trên mặt phẳng, được định nghĩa thông qua việc lặp lại hàm số:

$$z_{n+1} = z_n + c$$

Trong đó, c là một điểm cố định trên mặt phẳng phức, và z_n là số phức bắt đầu từ $z_0 = 0$. Điểm c thuộc tập Mandelbrot nếu dãy số z_n không tiến ra vô cùng mà bị giới hạn trong một phạm vi nhất định.

Các điểm tạo ra một chu kỳ (lặp lại một chuỗi các giá trị) nằm trong tập hợp, trong khi các điểm phân kỳ (tiến tới vô cực) nằm ngoài nó. Ranh giới của tập hợp Mandelbrot là một đường cong fractal có độ phức tạp vô hạn.

Thuật toán đơn giản nhất để tạo ra một biểu diễn của tập hợp Mandelbrot được gọi là thuật toán thời gian thoát. Đối với mỗi điểm trong mặt phẳng phức, chúng ta lặp lại hàm số một số lần cố định. Nếu giá trị tuyệt đối của z_n vượt quá một ngưỡng nhất định (thường là 2) thì chúng ta cho rằng điểm đó không thuộc về tập hợp Mandelbrot. Điểm đặc biệt của tập Mandelbrot là tính tự đồng dạng, tức là khi phóng to vào biên giới của tập, ta sẽ tiếp tục nhìn thấy các cấu trúc tương tự như hình dạng ban đầu, điều này tạo ra một độ phức tạp vô hạn và vẻ đẹp độc đáo.

3. Tập Julia

Tập Julia, được đặt theo tên nhà toán học người Pháp Gaston Julia, được nghiên cứu lần đầu vào đầu thế kỷ 20. Giống như Mandelbrot, Julia cũng xuất phát từ hàm số:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

Tuy nhiên, sự khác biệt lớn nhất là trong tập Julia, giá trị c là cố định, và ta thay đổi điểm ban đầu z_0. Tập hợp các điểm mà chuỗi số này bị giới hạn sẽ tạo nên tập Julia.

Cấu trúc của tập Julia rất đa dạng và phụ thuộc mạnh mẽ vào giá trị của c. Nếu c nằm bên trong Mandelbrot, tập Julia thường là một cấu trúc liên kết, nhưng nếu c nằm ngoài Mandelbrot, tập Julia sẽ là một cấu trúc rời rạc, không kết nối.

4. Mối quan hệ giữa tập Mandelbrot và Julia

Năm 1979, B. B. Mandelbrot đã nghiên cứu các tập hợp Julia và cố gắng phân loại tất cả các hình dạng có thể. Ông nhận thấy rằng hình dạng của các tập hợp Julia có liên quan đến giá trị của tham số c được sử dụng để tạo ra chúng. Bằng cách vẽ biểu đồ các giá trị của c mà cho ra các tập hợp Julia "liên tục" (không bị vỡ thành các phần riêng biệt), Mandelbrot đã khám phá ra một hình dạng mới: Tập hợp Mandelbrot.

Do định nghĩa của tập hợp Mandelbrot, có một sự tương ứng chặt chẽ giữa hình học của tập hợp Mandelbrot tại một điểm nhất định c và cấu trúc của tập hợp Julia tương ứng được tạo ra bằng cách sử dụng cùng giá trị c. Tập hợp Mandelbrot tạo thành một loại chỉ mục cho tập hợp Julia. Mỗi điểm c trong mặt phẳng phức tương ứng với một tập hợp Julia duy nhất. Liệu tập hợp Julia đó có liên tục hay không được xác định bởi việc điểm c có nằm trong tập hợp Mandelbrot hay không. Nếu c nằm trong tập hợp Mandelbrot thì tập hợp Julia tương ứng là liên tục. Nếu c nằm ngoài tập hợp Mandelbrot thì tập hợp Julia tương ứng bị vỡ thành các phần riêng biệt.

5. Ứng dụng và ý nghĩa

Ngoài vẻ đẹp toán học và thẩm mỹ, các tập Mandelbrot và Julia còn có nhiều ứng dụng trong khoa học, đặc biệt là trong lý thuyết hỗn loạn, vật lý và kỹ thuật số. Chúng giúp mô phỏng các hệ động lực phức tạp, phân tích dữ liệu hình ảnh, thiết kế đồ họa, và thậm chí trong mã hóa dữ liệu.

Về mặt ý nghĩa toán học, các tập hợp này minh chứng cho sự phong phú và đa dạng của toán học hiện đại, đồng thời thúc đẩy nghiên cứu về các hệ thống phi tuyến tính và sự hỗn loạn.

6. Kết luận

Tập Mandelbrot và Julia là những ví dụ điển hình về sự kết hợp giữa nghệ thuật và toán học. Sự phức tạp vô hạn, tính tự đồng dạng và mối quan hệ chặt chẽ giữa hai tập này không chỉ thể hiện vẻ đẹp độc đáo mà còn mở ra những cánh cửa nghiên cứu mới, góp phần vào việc hiểu rõ hơn về bản chất của các hệ thống động lực và hỗn loạn trong khoa học hiện đại.