信息论作业 3

史泽宇

2020 年 3 月 12 日

题目 1

1.

$$P(Y|x=1) = \begin{cases} \frac{1}{4} & -1 < y \le 3 \\ 0 \end{cases} \tag{1}$$

$$P(Y|x=-1) = \begin{cases} \frac{1}{4} & -3 < y \le 1 \\ 0 \end{cases} \tag{2}$$

$$\omega(Y) = \sum_x P(x)P(Y|x) \tag{3}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{8} & -3 < y \le -1 \\ \frac{1}{4} & -1 < y \le 1 \\ \frac{1}{8} & 1 < y \le 3 \\ 0 \end{cases} \tag{4}$$

2.

$$I(X;Y) = H_c(Y) - H_c(Y|X) \tag{5}$$

$$= -\int_y P(y)\log_2 P(y)dy + \int_{-2}^{2} P(x)P(y|x)\log_2 P(y|x)dy \tag{6}$$

$$= -2\int_1^3 \frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8}dy - \int_{-1}^{1}\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} + \int_{-2}^{2}\sum_x P(x)P(y|x)\log_2 P(y|x)dy \tag{7}$$

$$= \frac{12}{8} + 1 + \int_{-2}^{2}\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4}dy \tag{8}$$

$$= 0.5bit \tag{9}$$

3.

$$P(V) = \begin{cases} \frac{1}{4} & y \le -1 \\ \frac{1}{2} & -1 < y \le 1 \\ \frac{1}{4} & y > 1 \end{cases} \tag{10}$$

$$P(V|x=1) = \begin{cases} 0 & y \le -1 \\ \frac{1}{2} & -1 < y \le 1 \\ \frac{1}{2} & y > 1 \end{cases} \tag{11}$$

$$P(V|x=-1) = \begin{cases} \frac{1}{2} & y \le -1 \\ \frac{1}{2} & -1 < y \le 1 \\ 0 & y > 1 \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} I(X;V) &= H(V) - H(V|X) && (13) \\ &= -\sum_v P(v)\log_2 P(v) + \sum_x \sum_v P(x,v)\log_2 P(v|x) && (14) \\ &= 1.5 + \log_2 \frac{1}{2} && (15) \\ &= 0.5 bit && (16) \end{aligned}$$

由于 $P(V)$ 是 $\omega(Y)$ 的积分，所以两者信息量相同。或者由数据处理不等式，$I(X|Y) \ge I(X|V)$，而 $P(V)$ 与 $\omega(Y)$ 互为可逆函数，所以等号成立，两者信息量相同。

题目 2

1.

$$\begin{aligned} &\lceil \log_2(C_{100}^0 + C_{100}^1 + C_{100}^2) \rceil && (17) \\ =&\lceil \log_2(1 + 100 + 4950) \rceil && (18) \\ =&13 && (19) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P_e &= 1 - C_{100}^0 P(a_2)^{100} - C_{100}^1 P(a_1)P(a_2)^{99} - C_{100}^2 P(a_1)^2 P(a_2)^{98} && (20) \\ &\approx 0.00775 && (21) \end{aligned}$$

题目 3

$$\begin{aligned} H(U) &= -\sum_u P(u)\log_2 P(u) && (22)\\ &= \frac{1}{4}\log_2 4 + \frac{3}{4}\log_2\frac{4}{3} && (23)\\ &\approx 0.81128bit && (24)\\ \sigma^2 &= \sum_u P(u)(I(u)-H(U))^2 && (25)\\ &= \frac{1}{4}(\log_2 4 - H(U))^2 + \frac{3}{4}(\log_2\frac{4}{3} - H(U))^2 && (26)\\ &\approx 0.47102bit && (27) \end{aligned}$$

1. 由切比雪夫不等式可得

$$\begin{aligned} L &\geq \frac{\sigma^2}{\varepsilon\delta^2} && (28)\\ &\approx 1884.08 && (29)\\ L_0 &= \lceil L \rceil && (30)\\ &= 1885 && (31) \end{aligned}$$

2. 由切比雪夫不等式可得

$$\begin{aligned} L &\geq \frac{\sigma^2}{\varepsilon\delta^2} && (32)\\ &\approx 47101989912979.88 && (33)\\ L_0 &= \lceil L \rceil && (34)\\ &= 47101989912980 && (35) \end{aligned}$$

3. (a) $\delta = 0.05, \varepsilon = 0.1, L_0 = 1885$

$$\begin{aligned} upper\_bound &= \lfloor 2^{L_0(H(U)+\delta)} \rfloor && (36)\\ &= \lfloor 2^{1623.51} \rfloor && (37)\\ lower\_bound &= \lceil (1-\varepsilon)2^{L_0(H(U)-\delta)} \rceil && (38)\\ &= \lceil 0.9 \times 2^{1435.01} \rceil && (39) \end{aligned}$$

   (b) $\delta = 10^{-3}, \varepsilon = 10^{-8}, L_0 = 47101989912980$

$$\begin{aligned} upper\_bound &= \lfloor 2^{L_0(H(U)+\delta)} \rfloor && (40)\\ &= \lfloor 2^{38259916024808.39} \rfloor && (41)\\ lower\_bound &= \lceil (1-\varepsilon)2^{L_0(H(U)-\delta)} \rceil && (42)\\ &= \lceil 0.99999999 \times 2^{38165712044982.43} \rceil && (43) \end{aligned}$$

话说在看书的时候遇到一个问题，关于切比雪夫不等式的使用。首先列出切比雪夫不等式，对于随机变量 X，数学期望 $E(X)$，方差 DX：

$$P[|X - E(X)| \geq \varepsilon] \leq \frac{D(X)^2}{\varepsilon^2} \tag{44}$$

在书上公式 (3.2.10) 中，$\frac{I(\mathbf{u}_L)}{L}$ 表示平均单个字母的自信息，为什么 $\frac{\sigma_I^2}{L\varepsilon^2}$ 比标准的切比雪夫不等式增加了变量 L：

$$P_r[|\frac{I(\mathbf{u}_L)}{L} - H(U)| > \varepsilon] < \frac{\sigma_I^2}{L\varepsilon^2} = \delta \tag{45}$$