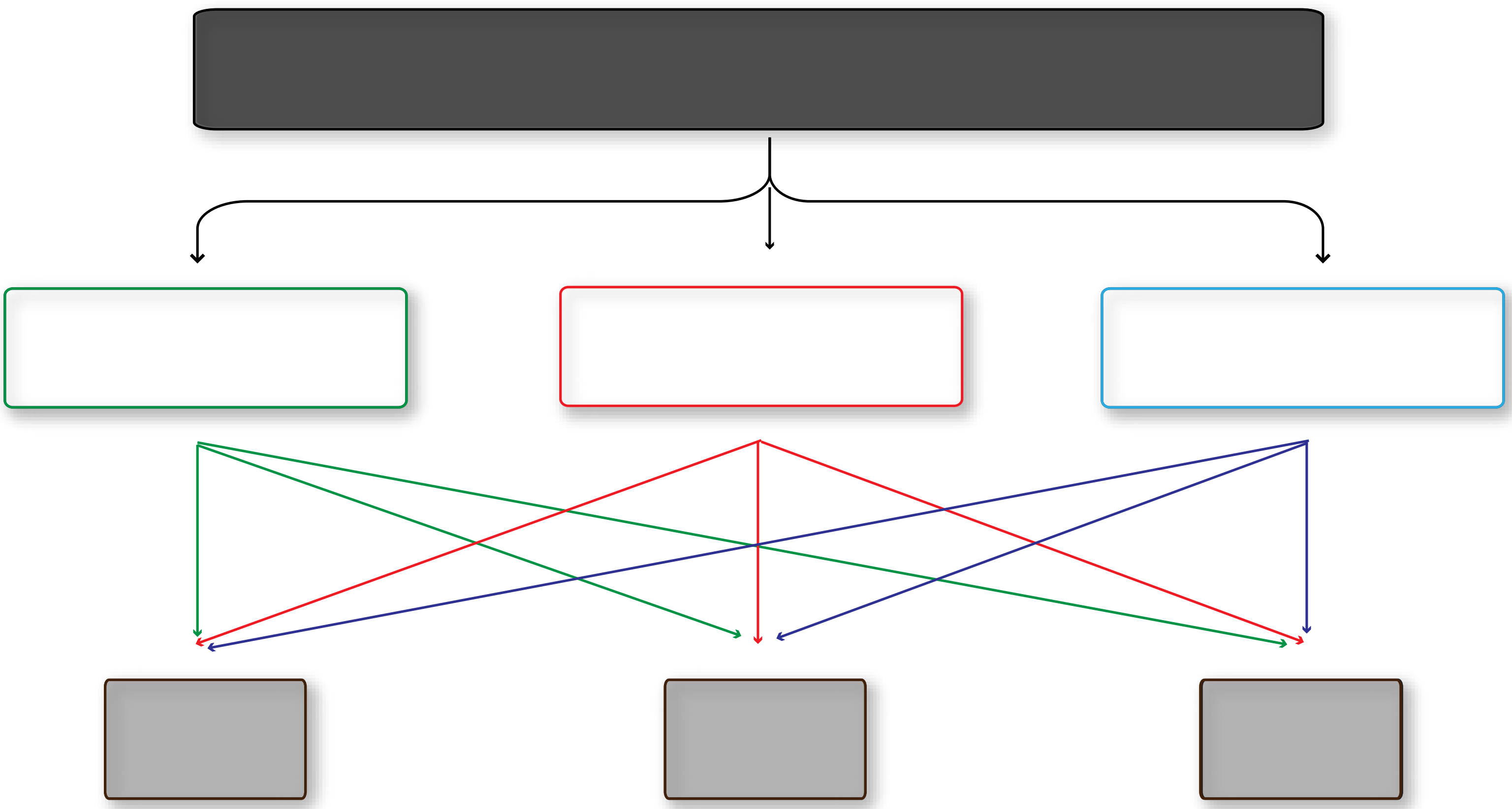


MANUAL

Proceso Analítico Jerárquico (Ahp)

UNAM

LANCIS | Laboratorio Nacional de Ciencias de la Sostenibilidad

INSTITUTO DE ECOLOGIA UNAM

MANUAL
Proceso Analítico Jerárquico (Ahp)

AUTORES:

ELVIRA TATIANA MERINO BENÍTEZ

LUIS ANTONIO BOJÓRQUEZ TAPIA

UNAM LANCIS INSTITUTO DE ECOLOGIA UNAM

MANUAL: PROCESO ANALÍTICO JERÁRQUICO (AHP)

Responsable del proyecto:
Luis Antonio Bojórquez Tapia

Autores:
Elvira Tatiana Merino Benítez
Luis Antonio Bojórquez Tapia

Edición:
Esmeralda Osejo Brito

Diseño y maquetación:
Elizabeth Ortiz Caballero

Citar el documento como:
Merino-Benítez, T. y L. A. Bojórquez-Tapia. 2021. *Manual: Proceso Analítico Jerárquico (AHP)*. México: UNAM.

Este documento se realizó con apoyo del Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) **1V100118** *Análisis integrado de sistemas socio-ambientales acoplados: desarrollo de capacidades para la evaluación de la vulnerabilidad costera.*

índice

1. Guía de uso

En este manual:

- Conocerás los puntos teóricos y prácticos clave de la modelación multicriterio como herramienta para la toma de decisiones.
- Aprenderás a desarrollar un modelo mediante el Proceso Analítico Jerárquico (AHP, por sus siglas en inglés) con hojas de cálculo.

DEFINICIÓN

ATENCIÓN

HERRAMIENTA

RECUERDA

TIP

2. Introducción

La modelación multicriterio es una técnica que permite desentrañar el proceso de razonamiento que se sigue para tomar una decisión. El procedimiento consiste en seleccionar y clasificar los elementos que integran un problema de decisión. La finalidad de su aplicación es lograr priorizar un conjunto finito de alternativas de decisión para encontrar aquella que resulta en "la mejor alternativa" o "el mejor curso de acción".

> Un problema de decisión surge cuando determinar el mejor curso de acción presenta altos riesgos, gran incertidumbre y diversos puntos de vista sobre la deseabilidad de las opciones. Formalmente, un problema de decisión está compuesto por cuatro elementos:
>
> - La meta
> - Los criterios de decisión
> - Las alternativas
> - Las restricciones

Entre las técnicas de modelación multicriterio, el AHP, creado por Saaty en 1987, resalta por su capacidad para registrar minuciosamente todos los elementos involucrados en una decisión, y porque permite resolver de manera ordenada, justificada y repetible qué tan adecuada es una alternativa bajo las expectativas determinadas. Algunas de las ventajas de utilizar esta técnica son:

1. Obliga a definir cada elemento considerado en el problema de decisión, lo cual disminuye la ambigüedad que puede surgir a lo largo del proceso de priorización.

2. Permite incluir criterios intangibles —como valores y principios— y tangibles —como costos, especificaciones técnicas, capacidad de producción, o características de una población—.

3. Es flexible para admitir tanta complejidad como el usuario necesite.

4. Pueden aplicarlo un usuario o un grupo de usuarios; en el segundo caso, permite la discusión organizada de visiones o preferencias contrapuestas.

5. Su implementación conlleva procesos mentales intuitivos y simples.

El AHP es la representación de un problema de decisión en una estructura jerárquica. De manera general, los pasos a seguir en el AHP son:

1. Establecer una meta u objetivo.
2. Identificar las alternativas de decisión (por ejemplo, elegir el sitio A, B o C).
3. Elegir los criterios de decisión (las características de cada alternativa que serán evaluadas con respecto a la meta).
4. Ponderar los criterios según su importancia relativa (es decir, con respecto a otro elemento del modelo multicriterio).

> Es importante que la meta sea lo más específica posible y que su enunciado comience con un verbo; esto evitará imprecisiones y divagaciones durante el proceso de priorización. Entre más clara está la meta para los usuarios, más acertada será la decisión. Por ejemplo, en lugar de enunciar una meta como “Buscar un sitio para ubicar una fábrica”, te recomendamos definirla como “Seleccionar el mejor sitio para ubicar una fábrica de chocolates en el estado de Yucatán”.

La estructura general de un modelo AHP consiste en tres niveles organizados: la meta como primer nivel, los criterios como segundo y las alternativas de decisión como tercero (Figura 1). El usuario puede desagregar los criterios (es decir, desarrollar subcriterios) tanto como crea conveniente, lo cual resulta en más de tres niveles de desagregación.

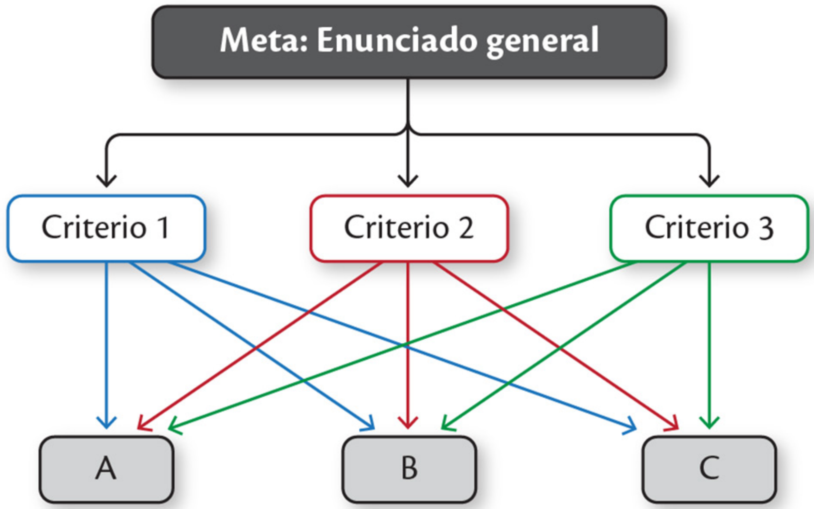


Figura 1. Estructura general de un modelo AHP. © LANCIS.

Es importante notar que cada elemento de un nivel está conectado con todos los elementos de su nivel inferior. Esto lo puedes observar en la figura anterior, donde la meta está conectada con los tres criterios y cada uno de estos está conectado con las tres alternativas.

En estos enlaces podrás encontrar videos en inglés de Thomas Saaty explicando el AHP:

https://www.youtube.com/watch?v=ChkBNabdfjo&t=378s

https://www.youtube.com/watch?v=AtutEppDCNo

2.1 COMPARACIONES PAREADAS

El AHP está fundamentado en la facilidad del cerebro humano para hacer comparaciones pareadas. Esto significa que el usuario debe priorizar elementos de decisión de dos en dos. Por ejemplo, si se tienen peras, manzanas y guayabas, es más fácil elegir comparando de dos en dos: ¿me gustan más las manzanas o las peras?; ¿me gustan más las manzanas o las guayabas?, etcétera. Este procedimiento simplifica la tarea de priorizar ordenadamente cada elemento entre múltiples opciones.

Para realizar las comparaciones pareadas, la modelación multicriterio también aprovecha que el ser humano está acostumbrado a expresar grados de importancia o preferencia relativa mediante el lenguaje. Los juicios de importancia en las comparaciones pareadas se establecen con el uso de la escala fundamental de Saaty (Tabla 1), la cual relaciona expresiones lingüísticas con una escala cardinal (Saaty 1987). Esta escala brinda al usuario la posibilidad de transformar conceptos en valores numéricos matemáticamente operables.

Importancia o preferencia	Valor cardinal
Igual	1
Entre igual y moderado	2
Moderado	3
Entre moderado y fuerte	4
Fuerte	5
Entre fuerte y muy fuerte	6
Muy fuerte	7
Entre muy fuerte y extremadamente fuerte	8
Extremadamente fuerte	9

Tabla 1. Escala fundamental de Saaty. © LANCIS.

Por consiguiente, a partir de las comparaciones pareadas se obtienen valores numéricos que representan la importancia relativa de los dos elementos comparados respecto a una característica en común. Por ejemplo, en la comparación pareada entre los elementos **a** y **b** con respecto a **Z**, el juicio de valor se obtiene a través del siguiente cuestionamiento:

¿Con respecto a ***Z****, qué tanto es* **a** *más importante que* **b***?*

Si suponemos que la respuesta a la pregunta es “con respecto a **Z**, **a** es **mucho <u>más</u>** importante que **b**”, entonces, el valor cardinal que le corresponde es **5/1**. De manera inversa, si suponemos que la respuesta es “con respecto a **Z**, a es **mucho <u>menos</u>** importante que **b**”, entonces, el valor cardinal que le corresponde es **1/5**.

Las respuestas de las comparaciones pareadas se organizan en matrices, denominadas “matrices de comparaciones pareadas”, que se caracterizan por ser recíprocas, positivas y cuadradas. De esta manera, el AHP involucra $\frac{n(n-1)}{2}$ comparaciones pareadas, donde n es el número de elementos de cada matriz. Por ejemplo, la evaluación de tres criterios con respecto a la meta requiere $\frac{3(3-1)}{2} = 3$ comparaciones pareadas para construir una matriz.

2.2 ÍNDICE DE CONSISTENCIA

Otra de las bondades del AHP es que permite al usuario identificar el porcentaje de consistencia lógica de las comparaciones pareadas. El objetivo de obtener esta consistencia es verificar que se está construyendo una explicación coherente de un conjunto de hechos. Esto se logra con el denominado índice de consistencia (CI), cuyo valor debe ser menor a 0.1, que hace referencia a aceptar 10% de incapacidad de distinguir los resultados de aquellos que se hubieran obtenido al azar.

Para diferenciar una matriz obtenida al azar de una obtenida por medio de razonamiento lógico, el índice de consistencia funciona a través de la propiedad de transitividad. La propiedad de transitividad es que si **A ≥ B** y **B ≥ C**, entonces **A ≥ C**. Donde no sólo se debe cumplir la dirección, sino también la magnitud, lo cual significa que si **A ≥ 2B** y **B ≥ 4C**, entonces **A ≥ 8C**.

El índice de consistencia se calcula mediante los pasos siguientes:

Primero, se estima la aproximación de las comparaciones pareadas a juicios obtenidos por azar mediante la ecuación

$$IC = \frac{(\lambda_{max} - n)}{(n - 1)}$$

con λ_{max}=n (el valor propio máximo) para matrices consistentes, positivas, recíprocas y cuadradas. Por lo tanto, (λ_{max} - n) puede considerarse como una medida de qué tanto una matriz se aleja de ser consistente (Eaking y Bojórquez-Tapia 2008).

Posteriormente, se calcula el **CI** de una matriz obtenida al azar, denotado como **RI** (índice al azar), el cual se deriva de matrices recíprocas generadas aleatoriamente utilizando los números enteros de la escala fundamental de Saaty. Por último, ambos índices se combinan en la ecuación del **CR**, o "cociente de consistencia", **CR=CI/RI**, donde se dice que la matriz de comparaciones pareadas es consistente cuando **CR≤ 0.1**, lo cual significa que solo una matriz de un conjunto finito de diez matrices no podrá distinguirse del azar.

En caso de obtener *CC* > 0.1 es necesario reevaluar las comparaciones pareadas.

3. Ejemplo práctico

Supongamos que en la jerarquía mostrada en la Figura 1 la meta es encontrar el mejor sitio para ubicar una planta industrial de chocolate en Yucatán, considerando tres criterios (C1 = precio del terreno, C2 = distancia a proveedores y C3 = distancia de las oficinas corporativas). Los sitios (las alternativas de decisión) son A, B y C. Las comparaciones con respecto a la meta son las siguientes:

- El precio del terreno (C1) es **un poco más** importante que la distancia a proveedores (C2).
- El precio del terreno (C1) es entre **mucho y muchísimo más** importante que la distancia de las oficinas corporativas (C3).
- La distancia a los proveedores (C2) es entre **igual y un poco más** importante que la distancia a las oficinas corporativas (C3).

A continuación, podrás observar cómo se resuelve AHP en una hoja de cálculo.

Un programa computacional gratuito y de acceso abierto frecuentemente utilizado para llevar a cabo el AHP se puede descargar en: https://superdecisions.com/downloads/

Operativamente, las comparaciones pareadas resultan en la matriz que se muestra a continuación (celdas B4:D6):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Matriz de comparaciones pareadas con**									
2	**respecto a la meta**									
3		**C1**	**C2**	**C3**						
4	**C1**	1	3	6						
5	**C2**	1/3	1	4						
6	**C3**	1/6	1/4	1						
7	Suma	2	4	11						
8										
9		**C1**	**C2**	**C3**	**Peso**					
10	**C1**	0.67	0.71	0.55	**0.64**		**C1**	3.10	**λ_{max} =**	3.05
11	**C2**	0.22	0.24	0.36	**0.27**		**C2**	3.05	**CI=**	0.03
12	**C3**	0.11	0.06	0.09	**0.09**		**C3**	3.01	**CR=**	**0.05**

Celda	Formula	Copiada en
B7	=SUMA(B4:B6)	B7:D7
B10	=B4/B$7	B10:D12
E10	=PROMEDIO(B9:D9)	E10:E12
H10	=MMULT(B4:D4,E$10:E$12)/E10	H10:H12
J10	=PROMEDIO(H10:H12)	-
J11	=(J10-3)/(3-1)	-
J12	=J11/0.58	-

Figura 2. Cálculo del peso de los criterios con respecto a la meta. © LANCIS.

El parámetro 0.58 utilizado en la celda J12 para calcular el índice de consistencia corresponde al RI (índice al azar) para matrices 3X3, es decir, cuadradas de tres elementos.

A continuación, puedes observar otro método para obtener los pesos de importancia relativa, el método del vector propio. A partir de la matriz de comparaciones pareadas que se muestra en la Figura 3 (celdas B2:D4) se obtienen tres vectores de pesos —señalados en azul (K2:K4), amarillo (K6:K8) y rojo (K10:K12)—. Observa que el tercero (K10:K12) no cambió respecto al segundo (K6:K8); por lo tanto, este tercero es el vector propio de pesos.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		**C1**	**C2**	**C3**		**C1**	**C2**	**C3**		**Prom**	**Peso**
2	**C1**	1	3	6		3.0	7.5	24.0		11.50	0.65
3	**C2**	1/3	1	4		1.3	3.0	10.0		4.78	0.27
4	**C3**	1/6	1/4	1		0.4	1.0	3.0		1.47	0.08
5											
6						29.0	69.0	219.0		105.67	0.64
7						12.2	29.0	92.0		44.39	0.27
8						3.8	9.1	29.0		13.99	0.09
9											
10						2520.0	6000.4	19050.0		9190.13	0.64
11						1058.3	2520.0	8000.5		3859.61	0.27
12						333.4	793.8	2520.0		1215.70	0.09

Celda	Formula	Copiada en
F2	=MMULT($B2:$D2,B$2:B$4)	F2:H4
J2	=PROMEDIO(F2:H2)	J2:J4
K2	=J2/SUMA(J$2:J$4)	K2:K4
F6	=MMULT($F2:$H2,F$2:F$4)	F6:H8
J6	=PROMEDIO(F6:H6)	J6:J8
K6	=J6/SUMA(J$6:J$8)	K6:K8
F10	=MMULT($F6:$H6,F$6:F$8)	F10:H12
J10	=PROMEDIO(F10:H10)	J10:J12
K10	=J6/SUMA(J$10:J$12)	K10:K12

Figura 3. Cálculo de peso de los criterios con respecto a la meta por medio de vector propio. © LANCIS.

Formalmente, el método del vector propio consiste en (1) la matriz de comparaciones pareadas $C \in R^{m\times m}$ y (2) la ecuación $Cw= \lambda_M w$, donde w es el vector de pesos $w=(w\_1,w\_2,... w\_n)$, λ_M es el vector propio máximo, n es el número de elementos de la matriz, y w es el vector propio de la matriz C. Los resultados se normalizan para cumplir que $0 \leq w_i \leq 1$ y $\sum w_i = 1$.

Ahora, supongamos que alguien sugiere que la distancia a los proveedores (C2) es en realidad **muchísimo más** importante que la distancia a las oficinas corporativas (C3). El resultado sería el siguiente:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Matriz de comparaciones pareadas con respecto a**									
2	**la meta**									
3		**C1**	**C2**	**C3**						
4	**C1**	1	3	6						
5	**C2**	1/3	1	7						
6	**C3**	1/6	1/7	1						
7	Suma	2	4	14						
8										
9		**C1**	**C2**	**C3**	**Peso**					
10	**C1**	0.67	0.72	0.43	**0.61**		**C1**	3.30	**λ_{max} =**	3.18
11	**C2**	0.22	0.24	0.50	**0.32**		**C2**	3.21	**CI=**	0.09
12	**C3**	0.11	0.03	0.07	**0.07**		**C3**	3.03	**CR=**	**0.16**

Celda	Formula	Copiada en
B7	=SUMA(B4:B6)	B7:D7
B10	=B4/B$7	B10:D12
E10	=PROMEDIO(B9:D9)	E10:E12
H10	=MMULT(B4:D4,E$10:E$12)/E10	H10:H12
J10	=PROMEDIO(H10:H12)	-
J11	=(J10-3)/(3-1)	-
J12	=J11/0.58	-

Figura 4. Ejemplo de matriz de comparaciones pareadas inconsistentes. © LANCIS.

Observa que el índice de consistencia es mayor a 0.1, lo cual indica que esta última matriz es inconsistente, o incoherente. Por lo mismo, se debería descartar a favor de la primera. Evidentemente, esta información es de sumo valor cuando se busca lograr el consenso entre grupos de ejecutivos o funcionarios.

Una vez concluida la evaluación de los criterios es necesario evaluar las alternativas siguiendo el mismo procedimiento. Supongamos que con respecto al precio del terreno (C1) el sitio A es **un poco más** preferible que el B y **muchísimo más** preferible que el C, mientras que el sitio B es **mucho más** preferible que el C. Esto resulta en lo siguiente:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Matriz de comparaciones pareadas con respecto a C1**									
2										
3		**A**	**B**	**C**						
4	**A**	1	3	6						
5	**B**	1/3	1	5						
6	**C**	1/6	1/5	1						
7	Suma	2	4	12						
8										
9		**A**	**B**	**C**	**Peso**					
10	**A**	0.67	0.71	0.50	**0.63**		**C1**	3.17	**λ_{max} =**	3.10
11	**B**	0.22	0.24	0.42	**0.29**		**C2**	3.10	**CI=**	0.05
12	**C**	0.11	0.05	0.08	**0.08**		**C3**	3.02	**CR=**	**0.08**

Celda	Formula	Copiada en
B7	=SUMA(B4:B6)	B7:D7
B10	=B4/B$7	B10:D12
E10	=PROMEDIO(B9:D9)	E10:E12
H10	=MMULT(B4:D4,E$10:E$12)/E10	H10:H12
J10	=PROMEDIO(H10:H12)	-
J11	=(J10-3)/(3-1)	-
J12	=J11/0.58	-

Figura 5. Cálculo de los pesos de las alternativas con respecto al criterio 1 (C1). © LANCIS.

Luego, supongamos que con respecto a la distancia a proveedores (C2), el sitio A es **entre un poco** y **mucho más** preferible que el B y **entre igual** y **un poco menos** preferible que el C, mientras que el sitio B es **entre un poco** y **mucho menos** preferible que el C. Entonces, tenemos lo siguiente:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Matriz de comparaciones pareadas con respecto a**									
2			**C2**							
3		**A**	**B**	**C**						
4	**A**	1	4	1/2						
5	**B**	1/4	1	1/4						
6	**C**	2	4	1						
7	Suma	3	9	2						
8										
9		**A**	**B**	**C**	**Peso**					
10	**A**	0.31	0.44	0.29	**0.35**		**C1**	3.06	**λ_{max} =**	3.05
11	**B**	0.08	0.11	0.14	**0.11**		**C2**	3.02	**CI=**	0.03
12	**C**	0.62	0.44	0.57	**0.54**		**C3**	3.08	**CR=**	**0.05**

Celda	Formula	Copiada en
B7	=SUMA(B4:B6)	B7:D7
B10	=B4/B$7	B10:D12
E10	=PROMEDIO(B9:D9)	E10:E12
H10	=MMULT(B4:D4,E$10:E$12)/E10	H10:H12
J10	=PROMEDIO(H10:H12)	-
J11	=(J10-3)/(3-1)	-
J12	=J11/0.58	-

Figura 6. Cálculo de los pesos de las alternativas con respecto al criterio 2 (C2). © LANCIS.

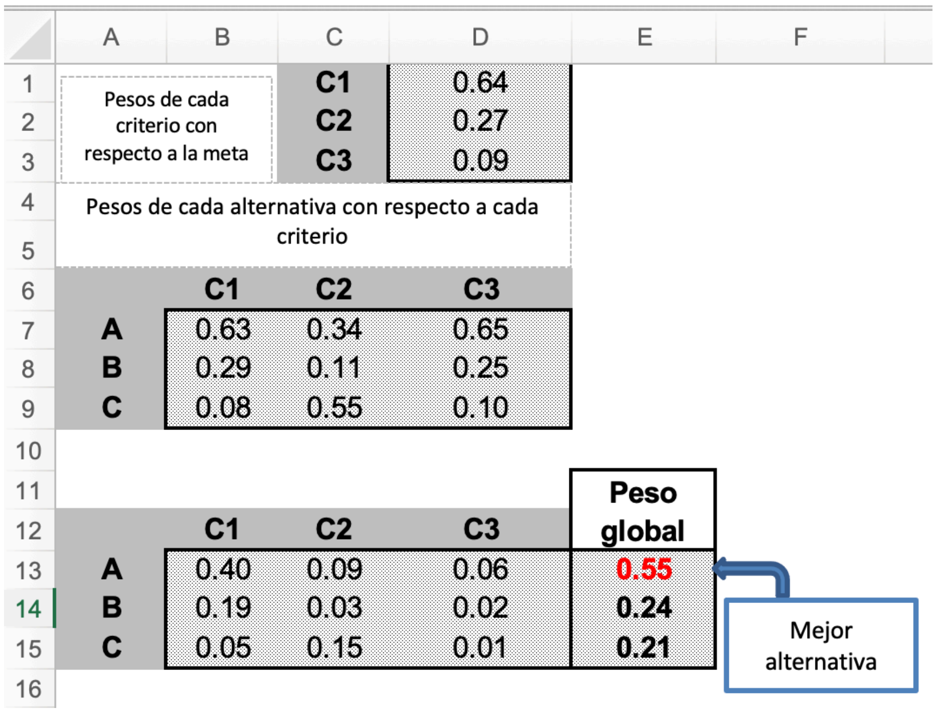
Por último, supongamos que con respecto a oficinas corporativas (C3), el sitio A es **entre igual** y **un poco más** preferible que el B y extremadamente más preferible que el C, mientras que el sitio B es **entre igual** y **un poco más** preferible que el C. Por lo tanto, tenemos lo siguiente:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Matriz de comparaciones pareadas con respecto a**									
2			**C3**							
3		**A**	**B**	**C**						
4	**A**	1	2	9						
5	**B**	1/2	1	2						
6	**C**	1/9	1/2	1						
7	Suma	2	4	12						
8										
9		**A**	**B**	**C**	**Peso**					
10	**A**	0.62	0.57	0.75	**0.65**		**C1**	3.15	**λ_{max} =**	3.07
11	**B**	0.31	0.29	0.17	**0.25**		**C2**	3.05	**CI=**	0.04
12	**C**	0.07	0.14	0.08	**0.10**		**C3**	3.02	**CR=**	**0.06**

Celda	Formula	Copiada en
B7	=SUMA(B4:B6)	B7:D7
B10	=B4/B$7	B10:D12
E10	=PROMEDIO(B9:D9)	E10:E12
H10	=MMULT(B4:D4,E$10:E$12)/E10	H10:H12
J10	=PROMEDIO(H10:H12)	-
J11	=(J10-3)/(3-1)	-
J12	=J11/0.58	-

Figura 7. Cálculo de los pesos de las alternativas con respecto al criterio 3 (C3). © LANCIS.

A continuación, verás el cálculo de los pesos globales de las alternativas, que corresponden a la multiplicación de los pesos locales del tercer nivel del modelo multicriterio (G3:I5) por los pesos del segundo nivel del modelo (G8:G11):



Celda	Formula	Copiada en
B13	=B7*D1	B13:B15
C13	=C7*D2	C13:C15
D13	=D7*D3	D13:D15
E13	=SUMA(B13:D13)	E13:E15

Figura 8. Cálculo de los pesos globales de las alternativas de decisión. © LANCIS.

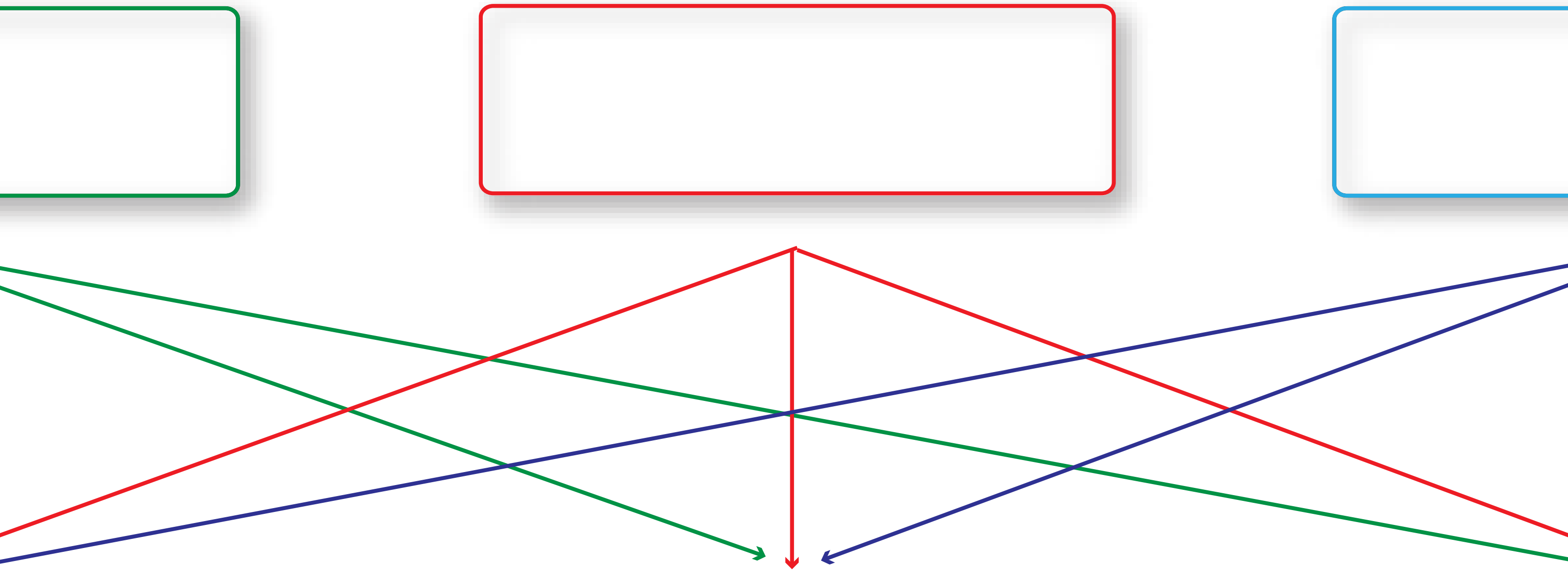
4. Referencias

Eakin, H. y L. A. Bojórquez-Tapia. (2008). “Insights into the Composition of Household Vulnerability from Multicriteria Decision Analysis.” *Global Environmental Change*. https://doi.org/10.1016/j.gloenvcha.2007.09.001

Saaty, R. W. (1987). “THE ANALYTIC HIERARCHY PROCESS-WHAT AND HOW IT IS USED” 9 (3): 161–76.

Creative Decisions Foundation. (s.f.). Talking with Tom: Choosing a school [Video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=ChkBNabdfjo&t=378s

Creative Decisions Foundation. (s.f.). Talking with Tom: Thomas Saaty on the origins of AHP [Video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=AtutEppDCN0



UNAM

LANCIS

INSTITUTO DE ECOLOGIA UNAM