In Laboratory Now

研究室訪問 6

予測できない点を予測する

――岡研究室～数学科――

他の工学系などの研究室などと比べて数学科はだいぶ違う形式をとっている。一つの研究室に集まって一緒に研究するという形でなく、同じ研究室に属する学生でも一人一人別のことを研究している。そのためもあって、数学科の研究室がどのようなことをやっているのかというのははっきりとはつかみにくい。その中で我々は特異点論を研究されている岡教授の研究室に取材に伺った。

岡　睦雄　教授

特異点とは何か

まず最初に先生の専門である特異点について説明したい。

非常に大まかな例だが川の流れがあったとしよう。その川上にボールを落してみる。普通は、ずっと川下で待っていればいつかはボールは流れてくる。しかし途中で渦が巻いていた場合には、そこに留まってボールが流れてこないこともあり得る。そのようなとき、渦が巻いている点が正則でない点として特異点と呼ぶのである。数学的にいえば、その点では速度のベクトルが0である。普通の点では水がある程度の速さで流れているので速度ベクトルは0でない。速度が0であるときは、その点の近傍にあったものがわずかな時間のあと、どこにあるかということが予測できない。逆に言えば、予測できない点を特異点と言うのである。

予測できるとはどういう事か。その疑問に対して先生は次のように説明された。例えば関数fをxのまわりでテーラー展開したものは

$$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x+\frac{1}{2}f''(x)\Delta x^2+\frac{1}{6}f'''(x)\Delta x^3+\cdots$$

と書き表せる。ここでΔxが非常に小さい値、例えば一万分の一であるとしてみよう。するとΔx^2は一億分の一、Δx^3・Δx^4…の項ではさらに小さくなってほとんど無視できるほどの量となる。よって

$$\Delta f(x)\fallingdotseq f'(x)\Delta x$$

要するにxのごく近くで見ればΔfはΔxに比例している、つまり線型な関係にあるのだ。これが予測できるということの意味である。

さらに一般の特異点は次のように説明される。n個の変数$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$によって定義されるk個の関数$(f_1, f_2, \cdots, f_k)$があったとする（ただし$k \leqq n$）。ここで次のような集合を考える。

$$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0\ (0<i\leqq k)\}$$

これはn次元空間におけるある図形を表している。多変数関数においても線型な近似というのは重要な考え方である。そこで多次元空間における線型近似である接空間という概念を導入してみる。これは曲線における接線に当るものである。多次元空間の図形を予測するときにはこの接空間の有無が問題となる。多変数関

数の導関数に当るヤコビ行列

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

の階数がｋの点について接空間は存在し、その次元はｎ－ｋである。ヤコビ行列の階数がｋよりも小さい点では接空間は存在せず、その点の近くでの線型な近似が出来なくなる。ほとんどの点では接空間が存在するのだが、存在しない点もある。するとその点の近くではその図形の線型な近似が不可能になり、予測ができなくなってしまう。これが多次元空間における特異点である。

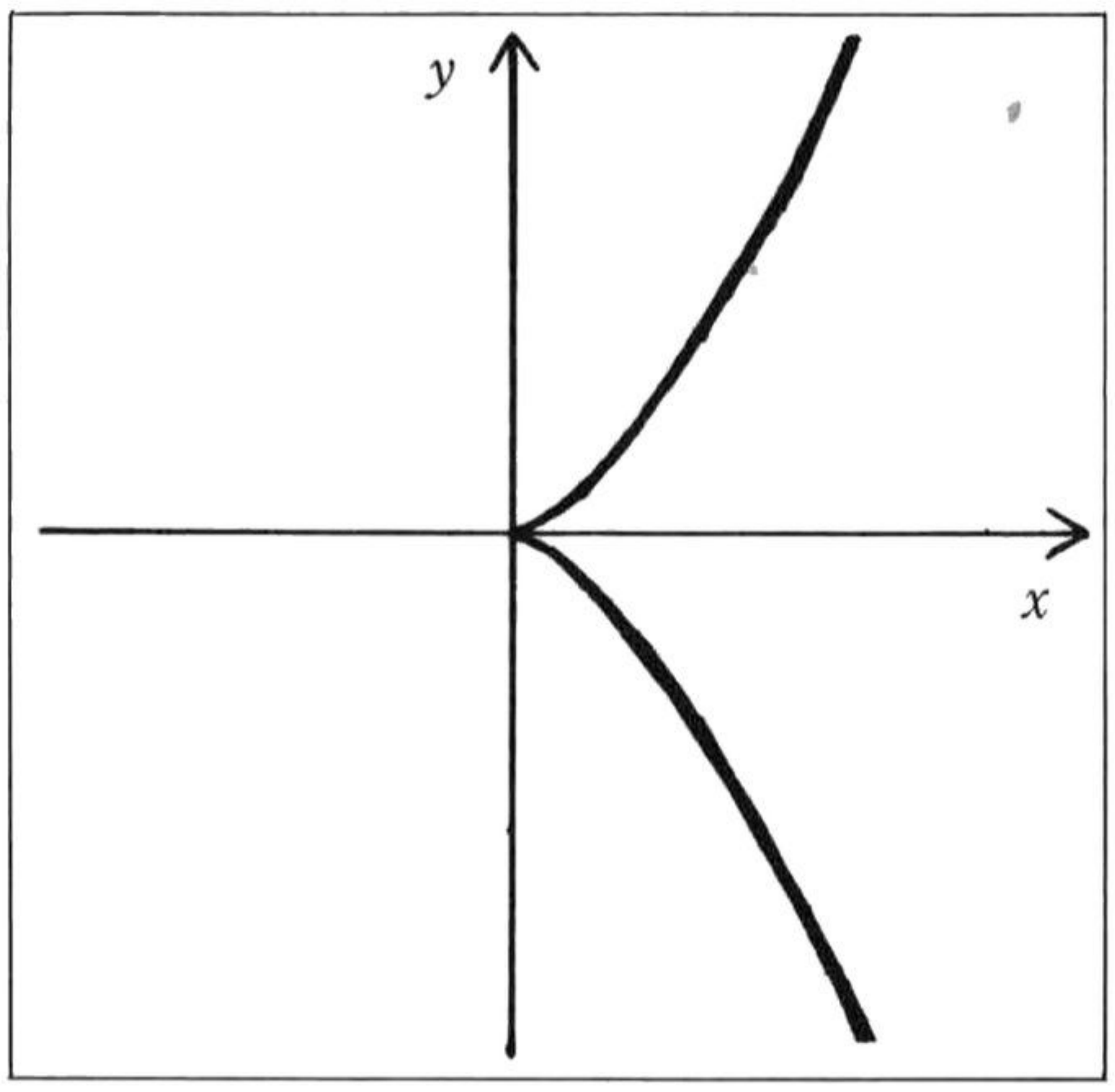

図１

分かりやすいようｎ＝２、ｋ＝１の場合の実例を挙げてみる。

$$f(x, y) = x^3 - y^2 = 0$$

で表される図形は、図１のようになる。この原点においてヤコビ行列を求めてみると

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\Bigg|_{(x,y)=(0,0)}$$

$$= (3x^2,\ -2y)\Big|_{(x,y)=(0,0)}$$

$$= (0,\ 0)$$

となりその階数は０でｋ＝１よりも小さい。よってこの図形は原点に特異点を持つことが言える。実際に図を見ると、原点で妙に尖っていて接線を引けるような状態ではない。これによって特異点というものを実感してもらえたと思う。

要するにその近くでの図形の様子が予測できないような点を特異点というのである。一口に予測できない点だと言ってもいろいろな種類がある。先生の研究分野、複素特異点論は複素数の範囲で特異点の幾何・代数的性質などを調べるものである。

特異点を本質的に特徴づけるものを探る

先生の研究の一つとして特異点の分類が挙げられる。一変数関数により表される図形の特異点はその重複度によってのみ分類される。つまり特異点の回りでテーラー展開した式のうち、もっとも次数が低い項により分類される。これは次数のもっとも低い項が、特異点のごく近くではもっとも大きく影響をあたえるからである。しかし多変数関数によって表される図形の場合、その特異点は単純にもっとも次数が低い項によって分類されるわけではない。それでは多変数関数においては特異点の分類はどのようなものによって決定されるのであろうか。

先生はニュートン境界という考えを使い、これを解決しようとしていらっしゃる。例えば次のような二変数関数により表される図形があったとする。

$$f(x, y) = x^3 + x^2 y + xy^3 - x^4 y^2$$

これはヤコビ行列を求めてみれば分かるように原点が特異点となっている。そこで原点でテーラー展開をした式、つまりこの式自体について次のような操作を行う。

それぞれの項について係数を無視し、その次数に対応した点を平面上にとる。例えば一番左の項についてはxの次数が３、yの次数が０なので点（3，0）をとる。このような操作を全ての項について繰り返していき、得られた全ての点を含む最小の凸多角形を求める。その辺のうち、

x軸にもっとも近い点より左側でy軸にもっとも近い点より下側にある辺（図２の太線部）だけを集める。これがニュートン境界である。このニュートン境界によって多変数関数における特異点は特徴づけられる。ニュートン境界およびx軸・y軸に平行な線で囲われた領域内の点で表される項があったり、それぞれの項の係数が多少変ったりしても、局所的な目で見れば特異点の性質には影響しない（実は特殊な係数の場合は事情が異なってくる場合もある）。

実際の場合にはこれが三変数以上になるのでもっと話は複雑である。しかしながら本質的なことは変らない。「数学者にとっては多次元空間は特殊なものではないんだよ。そういう意味では一次元空間こそ特殊だね。」先生はそうおっしゃった。

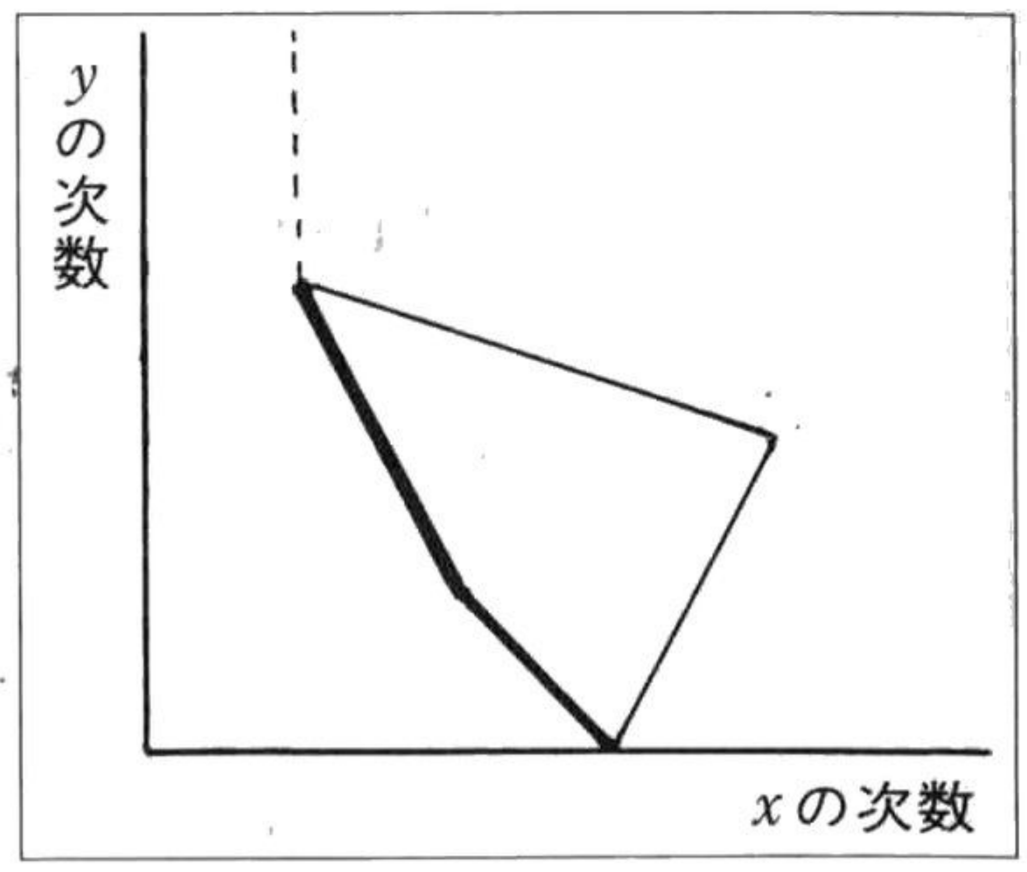

図2

非連続現象への応用 ── カタストロフィー理論

特異点理論というのは純粋数学の中で発展してきたにもかかわらず、大変応用の広い分野である。この一つとして不連続現象の解明が挙げられる。ニュートン以来発展してきた通常の微積分による方法は質点の運動などの連続現象には極めて強力である。しかしひとたび不連続な現象が入ればなすすべを失ってしまう。

例えば水の蒸発の場合、温度を連続的に変化させても体積の変化は不連続的に起こる。このようなことは今までの解析学などではうまく説明できない、というより研究の対象にさえできないことだったのだ。ところがこれは特異点理論を使うことによって解析することができる。このような分野をカタストロフィー理論という。これはさまざまな分野（例えば生物学・地質学・社会科学等）への応用が可能である。

またカタストロフィー理論の他にも、最近話題になっているカオス・フラクタルなどの複素力学系も特異点理論とかかわりがある。

数学の学び方―何をどうやって学ぶのか

先生に東工大の学生についてお聞きしたところ、「計算はよくできるが考えるということを知らない。」とおっしゃった。

「考えるというのは、分からなくなったときに試行錯誤することなんだね。ところが東工大の学生は公式に当てはまらなくなったら諦めてしまう。それはおかしいんだよね。試行錯誤して複雑な問題を定式化してある方程式にたどり着く、そのことが重要なんだ。そのためには講義を聞いて定理を覚えるのではなく、定理に至る思考過程や定理の証明の本質的なアウトラインを理解しなくてはならない。つまりは数学で使っている本物のロジックを学ばなくてはならない。」

さらに授業に関しても先生は次のようにおっしゃった。

「数学を理解するには教科書を読むだけでは駄目なんだね。教科書の行間を読まなくてはならないから。しかし行間を自分で埋めるのはかなり難しいことだ。だからこそ授業に出て先生が行間を埋めてくれるのを聞かなくてはならない。よい先生は数学を理解するのに必要なことは大体言っているはずだから。だから講義に出たら予習はする必要はないけれど復習はすべきだ、と僕はいつも言ってるんだ。」

取材にお伺いした頃、先生は夏に行われるワークショップの準備に大変お忙しそうでした。その中を貴重な時間を割いて取材に応じてくださり、ともすれば難しくなりがちな専門分野の話を私達にも分かるように易しく話して下さった先生にお礼を申し上げるとともに、先生の今後のご活躍を期待します。

（佐々木）