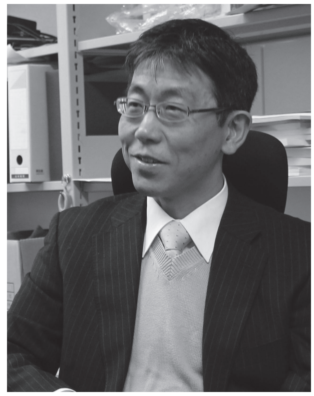
現代社会の最適解を探る

工学院 経営工学系
塩浦 昭義 研究室



塩浦 昭義 准教授　1970年新潟県生まれ。1998年東京工業大学大学院情報理工学研究科数理・計算科学専攻 博士(理学)取得。2001年より東北大学大学院情報科学研究科システム情報科学専攻助教授。2015年より東京工業大学大学院社会理工学研究科社会工学専攻准教授。2016年改組により同大学工学院経営工学系准教授。

塩浦研究室では、情報科学、経営工学、経済学などの分野で現れる問題と、その問題に関連のある数学の研究、そしてその研究の他分野への応用を行なっている。本稿では、まず塩浦研究室が扱っている問題とはどういうものかを説明し、数学との関連性を見ていく。そして、塩浦先生の取り組んだ研究の一つ、オークション理論に触れていく。

身近にある最適化問題

現代社会において、人は「最も良い解」というものを求めるものである。例えば、東京から大阪まで行くことを考えよう。特別な理由がなければ、できるだけ短い時間で到着するようにルートを選ぶはずである。しかし、その際必ずしも最良の解を求めることができるとは限らない。東京から大阪までのルートは非常に多く、それらの行き方すべてを比較し、最短のルートを求めることは人間にはほぼ不可能だからである。こういった非常に多くの選択肢から最適なものを求める問題のことを最適化問題と呼び、その問題で求める最適な選択肢のことを最適解という。

今挙げた問題というのは、連続的でなく、バラバラであるものの組合せが選択肢としてあって、最適解を求めたいというものであった。このように最適化問題のうち、選択肢がバラバラであるようなものを特に離散最適化問題と呼び、塩浦研究室ではこの離散最適化問題を数学的、理論的なアプローチにより研究している。

最適化問題とは

ここでは、離散最適化問題に入る前に、最適化問題に関してもう少し掘り下げてみよう。たとえば、高校数学で次のような問題を目にしたことはないだろうか。

1: 関数$y=-x^2+2x$ $(-3\leqq x\leqq 3)$の最大値を求めよ
(最大値も極大値も1)

2: 関数$y=x^3-3x$ $(-3\leqq x\leqq 3)$の最大値を求めよ
(最大値は18、極大値は2)

どちらもある連続関数の最大値を求める問題である。問題1では極大値が最大値に一致している一方で、問題2では、極大値と最大値が一致していない。最適化問題において、これは重要な情報である。今回の問題では、両方とも比較的簡単な多項式で関数が表されていたため、最適解、つま

り最大値が簡単に求まった。しかし、現実にあらわれるような最適化問題は、このようにきれいな式で表すことは難しく、一度に最適解が求まるというのは稀なのである。

そこで、最適化問題では、暫定的に解を一つ決めておいて、最適解に近づけていくという方法をとる。しかし、その近づけ方はでたらめではいけない。現実的に考えて、いつまでも最適解を求めることができなかったり、求めるのに長時間かかったりするような近づけ方は好ましくない。そこで、高速に最適解を求めるために、この問題で言うところの極大値を求める方法を用いる。

例えば、問題1で言うと、適当に変数$x=p$を取ってきて、その数pの周辺でより大きい値を取らせるような数$x=p'$に移るように変数pを動かすのである。そうすると、もし変数pがある数$x=a$で静止したとすると、そこでは極大値を取るはずである。このような方法を貪欲アプローチといい、離散最適化問題では基本的な手法だ。

しかし、この手法を使うためには、そもそも最大値と極大値が一致していなければならない。ここで、関数の凸性というものに注目してみよう。問題1の関数を表すグラフにおいて、グラフ上の2点を自由にとり、その2点を結ぶ線分を引く。すると、必ずグラフがその線分よりも上にあることがわかる。このような性質を持つことを「上に凸である」と言い、定義域「全て」において上に凸である関数のことを、上に凸な関数という（**図1**）。また、上に凸な関数を上下反転させたものを下に凸な関数という。そして、上に凸な関数は必ず最大値と極大値が、下に凸な関数は最小値と極小値が一致することが証明できる。つまり、この凸性が存在すると、貪欲アプローチを用いることができるようになる。このように、最適解を求める際には凸性は大変便利な性質である。

貪欲アプローチと凸性を表す関係は、山登りに例えることができる。富士山のように大きな凹凸がないような山の場合、ただ上に向かって山を登れば、いずれは頂上に着く。しかし、いくつかの山が連なって、凹凸があるような山脈だと、たとえ上に向かって山を登っても、その山脈で最も高い頂に着くとは限らない。先ほどの問題で言うと、問題1が富士山、問題2が凹凸のある山脈に当たる。

今までは連続関数における凸性というものを示し、連続な関数における最適化問題とそれに対する対処法を見てきた。ここでこの話を、整数や自然数といった、離散的な変数を持つ関数における離散最適化問題にまで広げてみようと思う。しかし、実は単に連続関数における凸性を、離散的な関数に広げるだけでは少し不具合が生じるのである。例えば、下図のような整数を定義域とした2変数関数fを考えてみよう（**図２**）。

関数fは実数の範囲では下に凸な関数であり、極小点と最小点が一致している。しかし、その最小点の周りの整数点が、整数を定義域としたときの最小点にならないうえに、その最小点と離れてしまっている。そのため、たとえ実数において凸関数であったとしても、整数を定義域として最小値を見つけようとする場合、不具合が出てくるのである。それでも、もし凸性を離散最適化問題にも生かすことができたら都合が良い。そのためには、離散的な変数を持つ関数にも整数における凸性というものを上手く定義し、その性質を調べることが必要になってくる。このような問題を扱う

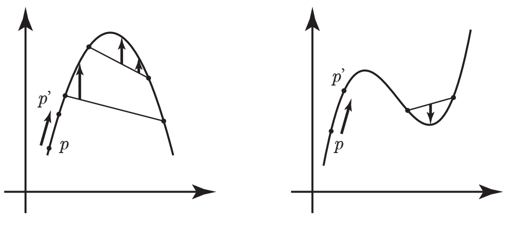


図１　凸関数のグラフと変数ｐの動き方

左図ではグラフが常に線分よりも上にあるため、上に凸である。右図ではグラフが線分よりも下にある部分があり、凸関数でない。

$$z = (5 \times |\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - \frac{1}{13}| + 1) \times (\frac{1}{5}|\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y| + 5 \times |\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - \frac{1}{13}|)$$

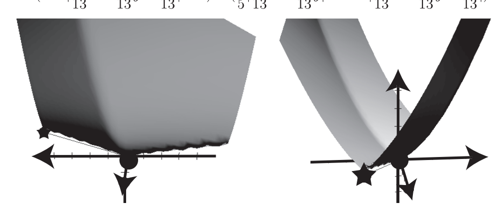


図２　最小点が実数範囲と整数範囲で大きく離れる例

●は実数範囲、★は整数範囲での最小点を表す。グラフは谷状になっており、谷底が整数格子上に乗りにくいようになっている。

のが、離散凸解析であり、塩浦先生の研究分野の一つである。

最小全域木問題とM凸関数

ここで、実際に離散凸解析の一端を具体例とともに見ていこう。

離散最適化問題の代表的な問題として、最小全域木問題というものがある。次のような具体的な問題を考えよう。

複数の建物の間で既存の通信用ケーブルを使って通信用ネットワークを構築することを考えよう(**図3**)。このとき、すべての建物をできるだけ短いケーブルで通信できるようにしたい。この時、ケーブルの総長を最小化するようなネットワークを最適解とすると、最適解はどのように導けるだろうか。

ここではネットワークT1,T2,T3をグラフという最適化問題における図で表現した。

では、これらのネットワークが最適解かどうか見てみよう。ネットワークT1の場合は建物A,B,Cと建物D,E,Fの間にはケーブルが設置されていない。そのため、これらの建物群の間では通信不可能ということになり、そもそも解ではないということになる。また、ネットワークT2においては建物B,C,Dの間には環状にケーブルが設置されていることがわかるだろう。そこで、この環状のケーブルから1つ、例えばB,D間のケーブルを抜いても全体としてはつながっている。つまり、まだ総長を小さくする余地があるという点で、T2も最適解ではない。では、ネットワークT3はどうだろうか。ネットワークT3には一つも環状の通信路がなく、すべての建物が無駄なくつながっている。このように環状の部分がなく、まるで木の枝のようにつながっているネットワークのことを全域木という。実は最小全域木問題での最適解はすべて全域木になっていることを示すことができる。そのため問題は、「ケーブルの総長を最小にするような全域木はどのようなものになるか。」という問題に読みかえることができるのだ。

実は最小全域木を求めるアルゴリズムを作るのはそう難しくはない。短いケーブルから順に環状の通信路を作らないようにつなげていけば最小全域木が簡単に求まる。しかし、この手法では最小全域木問題にしか対応できない。そこで、最適化問題への一般化を目指すため、最小全域木問題のどのような数学的性質が離散最適化問題を解きやすくしているのかを明らかにしていく。

今ネットワークは、建物という点とケーブルという直線で構成されることがわかる。ここでは、ケーブルを表す直線のことを、その見た目から「枝」と呼ぶことにする。そこで、頂点の集合V={A,B,…,F}というものを作る。この問題の最適解では、同じ建物の間には2本以上のケーブルが直接つながっていることはないので、グラフにおいて枝はその枝の両端にある2点によって表現することができる。例えば、点A,Bをつなぐ枝は、(A,B)と表す。図におけるすべての枝の集合を**E**={(A,B),(A,C),(B,C),(B,D),…,(E,F)}と表すと、ネットワークはそれらの枝の中でどの枝を使ったかによって互いに区別することができる。したがって、全てのネットワークは枝集合の部分集合として次のように表せるのだ。例えば、ネットワークT1、つまり枝集合**T1**は

T1={(A,B),(A,C),(D,E),(E,F)}

と表せるのだ。以後、ネットワークのことを、代

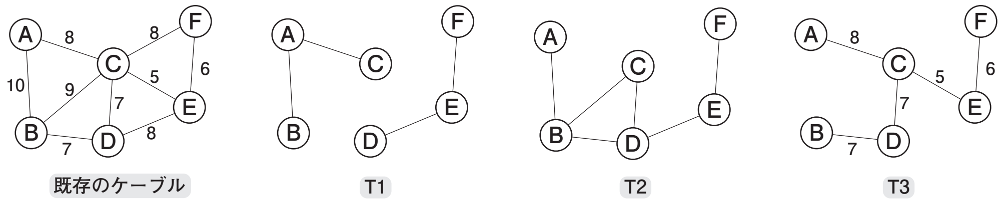


図3　グラフ化されたネットワーク

図中の数字は、建物環を結ぶのに必要なケーブルの長さを表している。

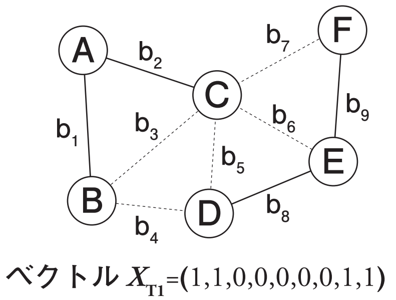


図４　ネットワークT1とそのベクトル表示
実線は使われている枝、点線は使われていない枝を表す。

わりに枝集合と呼ぶ。ただ、これではまだ通信路の長さが表現できていない。そこで、枝の長さをケーブルの長さと対応させ、枝(A,B)の長さをd[(A,B)]というようにする。そして、グラフ**T1**の枝の総長はd[T1]=d[(A,B)]+⋯+d[(E,F)]と定める。こうすることで、各々のグラフを各々の枝の総長と対応付けることができる。

ここで、全域木に関する重要な性質を一つ述べておこう。今、全域木**T,T'**があり、全域木**T**に含まれて**T'**に含まれない枝eを自由に選ぶ。全域木**T**から枝eを除く際、その枝eに対応して、グラフ**T'**に含まれて**T**に含まれない枝e'が必ず存在し、以下のことが成り立つ。

「グラフ**T**から枝eを除いて枝e'を加えたグラフ**T**−e+e'は全域木となり、同様にグラフ**T'**+e−e'も全域木となる。」

これはつまり、2つの全域木があったら、うまく行えば、それらの枝を比較的自由に取り換えられるということである。

今、頂点集合**V**とそれらをつなぐすべての枝の集合**E**があり、枝は番号付けられて、枝$b_1,b_2,\cdots,b_n$と表されているとする。全域木**T**そのものを$\{0,1\}^n$上のベクトル$\boldsymbol{X_T}$として次のように表す。もし、全域木**T**に枝b_kが含まれていれば、ベクトル$\boldsymbol{X_T}$の第k成分$X_{T,k}$は1で、含まれなければ0とする。たとえば、今扱っている問題では枝の本数は9本なので、ベクトルの成分は9個である。そして、枝を(A,B),(A,C),(B,C),(B,D),...,(E,F)と並べていって、順に番号を1,2,...,9とつけていくと、枝集合T1は、(1,1,0,0,0,0,0,1,1)と表せる（**図４**）。

そのようなベクトルの集合を**S**とする。ここで、

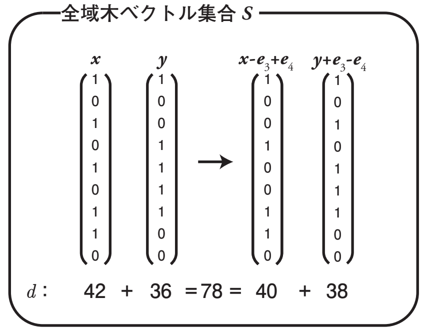


図５　全域木ベクトルと互いの関係性
枝の交換の前後で、枝の総長の和は変わらない。

$\boldsymbol{e}_k$は第k単位ベクトルとする。このとき、集合**S**に含まれるベクトル$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$に対し、$i$番目の成分$x_i,y_i$について$x_i>y_i$となる番号$i$を自由に選ぶ。先ほど述べた、全域木の枝は比較的自由に取り換えられるという性質から、$x_j<y_j$となるある番号jがあって、ベクトル$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{y}+\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{e}_j$はともに集合**S**に含まれるということになる。そして、枝の総長を表すのに用いたdを関数としてみれば、

$$d[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j]+d[\boldsymbol{y}+\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{e}_j]=d[x]+d[y]$$

という等式が導かれる。実はこれがM凸関数という、離散凸解析で現れる関数であることを示しているのである（**図５**）。

具体的には、M凸関数は枝の総長を表す関数dの条件を少し緩めた関数で、次のような関数fのことを言う。

まず、前提として関数fについては、独立変数は整数ベクトルまたは非負整数ベクトルをとり、値域は実数の範囲にあるということにする。ここでは、簡単のために3次元ベクトルを変数に持つ関数fを考える。そしてベクトル$\boldsymbol{x}$に関して、$\boldsymbol{x}$の第1,2,3成分をx_1,x_2,x_3と表すことにする。今、ベクトルとして$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$を取る。この時、お互いの成分どうしを比較して$x_i>y_i$となる番号iと、$x_j<y_j$となる番号jに注目する。例えば、ベクトル$\boldsymbol{x}$=(1,3,5),$\boldsymbol{y}$=(4,2,0)に関しては、第2,3成分を比べると$\boldsymbol{x}$の方が大きいので、番号iとしては2と3があり、同様に番号jとしては1が挙げられる。この時、ベクトル$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$についてお互いの成分を比較して、$x_i>y_i$となるような番号$i$を任意にとってきても、$x_j<y_j$となる番号$j$の中で、次の条件を満たす

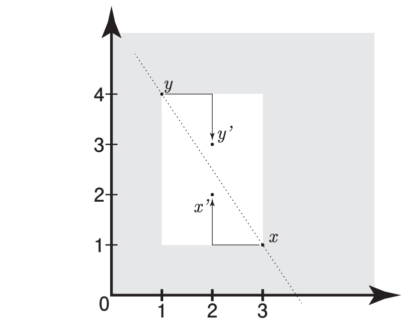


図６　2つの整数ベクトルの間のベクトル

番号jが存在するとき、関数fをＭ凸関数と呼ぶ。

$$f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y}) \geqq f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j)+f(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{e}_j)$$

そして、この条件のことを特にＭ凸関数の交換公理という。

実は、このＭ凸関数というものが連続凸関数を離散の世界に拡張した例の一つである。実際、ベクトルを2次元に限定して考えると、連続における凸性が残っていることがわかる。例えば、ベクトル$\boldsymbol{x}=(3,1),\boldsymbol{y}=(1,4)$をとると、定義に従ってベクトルの成分を変更したベクトル$\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}'$は、$\boldsymbol{x}'=(2,2),\boldsymbol{y}'=(2,3)$となり、ベクトル$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$の間にあるベクトルであることがわかる（**図６**）。そして、Ｍ凸関数の交換公理というのは、そのベクトル$\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}'$での関数の値の和が$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$での関数の値の和より小さいということを意味しており、連続凸関数における「下に凸な関数のグラフが、グラフ上の2点を結ぶ線分よりも下にある」という性質を整数に拡張したものである。

ただ、これでは最小全域木問題がＭ凸関数の最小化問題になっただけで、あまり利点がないように思える。しかし、離散凸解析によると、Ｍ凸関数であれば、それに対して貪欲アプローチのみならず、様々な手法によって最適解を見つけることができるのだ。例えば、その手法の一つとして、塩浦先生が提案した領域縮小アルゴリズムというものがある。これは、今までのようにベクトル一つ一つを吟味しながら解を最適化するというものではなく、最適解が含まれる領域を縮小していき、最適解を炙り出していくというものである。この方法で最適化を行うと、貪欲アルゴリズムより計算時間が短くなるという。できるだけ短時間で最適化したい場合には貪欲アルゴリズムより優れている事が理論的に保障されている。

離散凸解析とその応用

これまでは、離散最適化問題や離散凸解析がどのようなものであるかを見てきた。そこでここでは、実際に塩浦先生が他の大学の教授と共同で、このような離散凸解析の手法をオークションに適用した研究を例に見てみる。

オークションと言えば、1つの商品に対して購入可能な人が1人になるまで価格を徐々に上げていくオークションを思い浮かべる人が多いと思う。

しかし、ここでは複数の商品の価格とそれらの商品の分配の仕方を、参加者の需要に応じて決定するというオークション方式を考える。例えば、商品1,2,3があるとしよう。そして参加者A,B,C,Dは事前にどのような商品もしくは商品のセットに対してはいくら払うかを提示しておく。出品者はその情報をもとに、参加者の最も満足納得のいくような商品の分配の仕方と価格設定を調節し、全員が満足するような価格、つまり均衡価格を定めることができた時にオークションを終了するので

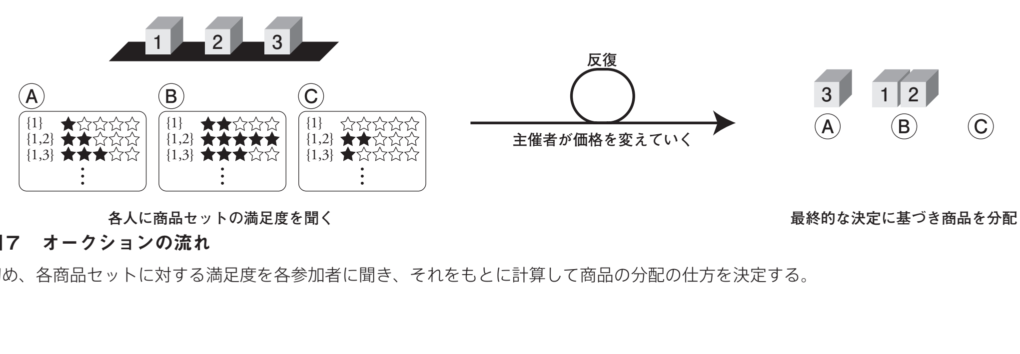


図７　オークションの流れ

初め、各商品セットに対する満足度を各参加者に聞き、それをもとに計算して商品の分配の仕方を決定する。

ある。ただし、商品の分配は必ずしも1人1商品である必要はなく、1人が全ての商品を購入するということもある。すると、参加者に対して最も満足度の高い商品の分配方法と均衡価格を求める問題としてこのオークションを捉えれば、一種の離散最適化問題として見ることができる（**図7**）。

そこで、オークションを離散凸解析に落とすと、最小全域木問題のように商品を集合として、価格をベクトルとして表せる。例えば、商品1,2を参加者Aに渡すというのは、商品セットX={1,2}を渡すということになる。また、何も渡さないというのは商品セット{ }という何も入っていない集合、いわゆる空集合を渡すということにする。一方、価格に関しては、商品1,2,3に対して価格がそれぞれ10,20,30円となっていた場合、それらをまとめて価格ベクトル$\boldsymbol{p}$=(10,20,30)として表すことになる。すると、商品セットXに対する各参加者iの満足度と、そのセットの価格をそれぞれf_i(X),p(X)として表すことにすると、参加者のその商品セットXに対する実質的な満足度というのはそれらの差f_i(X)−p(X)として考えられる。そうすると、参加者iがその商品セットXを買いたいかどうかというのは、その実質的な満足度の値によって定めることができる。参加者iにとってその実質的な満足度の値が最も高いような商品セットを集めた集合を$\boldsymbol{D}_i(\boldsymbol{p})$として表し、需要集合と呼ぶ（**図8**）。つまり、需要集合は参加者iが最もほしいような商品セットの集合を表すことになる。価格によって参加者が買いたいものは変わるので、価格ベクトル$\boldsymbol{p}$によって需要集合の元も変わる。そこで、ある商品jだけを値上げしてみよう。この時、需要集合にどのような変化が起きるだろうか。もしそれが世界に1つしかないような商品だとしたら、需要集合に変化は起きないかもしれない。しかし、

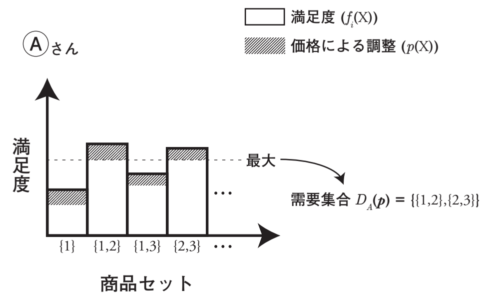


図８　需要集合

Aさんの各商品セットに対する絶対的な満足度から、購買価格を引いたものの値が最大の商品セットを、需要集合に含める。

それがほかの商品kで代替できるものだとしたら、値上げに伴い需要集合は変わることもある。例えば、商品jを含む商品セットXが参加者Aにとって欲しいものであったが、価格の上昇によって、商品jの代わりに商品kを含めた商品セットX'が最もほしいものに変わるといったことである。また逆に、参加者Bにとって商品jは重要なものなので、値段に関わらず商品セットXを求め続けるということもありうる。つまり、参加者と商品の性質によって、需要集合の変動の仕方は異なることになる。今、どの商品も代わりがあるような状態を粗代替性と言い、満足度を表す関数f_i上で次のように数学的に表現することができる。

価格ベクトル$\boldsymbol{p}$を任意に取ってきて、その$\boldsymbol{p}$の、商品jをλ円だけ上げた価格ベクトルを$\boldsymbol{q}$とする。つまり、$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}+\lambda \boldsymbol{e}_j$という関係が成り立つ。また、価格$\boldsymbol{p}$における需要集合$\boldsymbol{D}_i(\boldsymbol{p})$に含まれる商品セットXも任意に取ってくる。このとき、商品セットXに含まれる、商品j以外すべての商品を含むような商品セットYが、価格$\boldsymbol{q}$における需要集合$\boldsymbol{D}_i(\boldsymbol{q})$に存在するとき、満足度を表す関数$f_i$は粗代替性を満たすということにした（**図9**）。

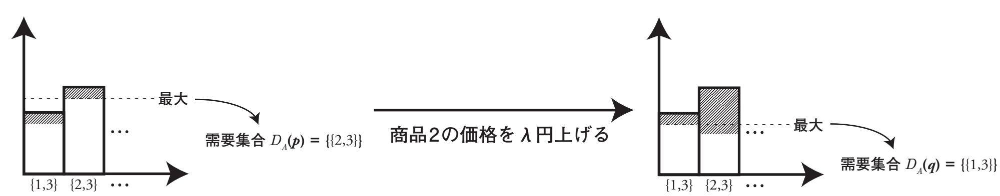


図９　粗代替性のイメージ図

商品2の値上げにより、商品2以外の値上がりしていない商品を含む商品セットが需要集合に含まれる。これが粗代替性を満たす状態である。

ここで、価格ベクトル$\boldsymbol{p}$の第j成分のみをλだけ増やしたり、需要集合Xから商品jを抜いたりという様子は、どこかM凸関数や最小全域木問題を彷彿とさせないだろうか。実際、ある研究によると、この満足度を表す関数が粗代替性を満たすとき、それはM凸関数に似た関数になることが分かったという。そして、ある種のオークションモデルにおいて、均衡価格は離散凸解析に出てくるM凸関数に似た凸関数の、最適解になることが明らかになった。このことから、離散凸解析での技術を、オークションを考える際に利用できるようになったのだ。その例の一つとして、均衡価格を求める手続きの解析が挙げられる。M凸関数と深い関係にある関数の最小化のアルゴリズムとしてとらえることにより、均衡価格を求める手続きの調整回数を調べることができるようになった。そうすることで、オークション理論が後にWEB広告において活躍する可能性が出てきたのだ。WEB広告というのは、いくつかの広告を出す場所に対して、広告を出したい人が複数人いて、需要と供給に応じて、広告の価格の調整と広告を出す人の決定が行なわれている。まさに、複数商品の場合のオークションである。ここにオークション理論を用いれば、数学的な保証を持ちながらWEB広告のシステムを解析することができるのだ。

塩浦研究室とその展望

塩浦研究室では、このように離散最適化という比較的数学に近い研究をしている。ゆえに、他の実験をたくさん行うような研究室とは異なり、学生の自主性を重んじており、それぞれ独立して比較的自由に研究させているそうだ。そこで、先生に研究室に求める人物像を尋ねたところ、ぜひ研究が好きな学生に来て欲しいと話していた。研究熱心な学生と研究している時が楽しいからだそうだ。そして、塩浦研究室で扱うような数学というのは、数独のようなパズルに近いものであるため、塩浦研究室を勧めたい人として、パズルが好きな人を挙げていた。

いまや最適化問題に関連した事柄は日常のいろいろな場面で出会うことができる。例えば、既に述べたように、WEB広告において離散凸解析は使われている。また、他にも画像処理や建築などにおいても最適化問題は関わっている。そんな中、実は離散最適化問題、離散凸解析においてまだ重要な問題が残っている。

これまで見たようにM凸関数であれば、貪欲アルゴリズムといった高速に最適解が得られるアルゴリズムが存在することが分かった。そして、実はM凸関数をはじめとした離散凸関数であれば、同様に高速で最適解を得ることができることが分かっている。しかし、M凸関数というのは先生曰くきれいな構造をもった関数であるがゆえに、現実の複雑な問題に対しては今のままでは適応できないことがあるという。それでも、先生は、M凸関数といった既存の概念や貪欲アルゴリズムといったアルゴリズムを拡張することで、より現実の問題に対応できるようにできるのではないかと考えている。そして、理論的な面では高速で最適解が得られるような関数の必要十分な性質を求めることが、離散凸解析を研究する塩浦研究室にとって大きなテーマだと話していた。塩浦研究室で行なっている研究が世の中の諸問題を解決する日が来るかもしれない。

執筆者より

本稿の執筆にあたり、塩浦先生には最適化問題や離散凸解析についていろいろ伺いました。数学的な内容も含み、難しい部分もありましたが、先生の丁寧な説明のおかげで私たちでも理解することができました。そして、取材を通して先生の研究について知ることができたのは、とても貴重な経験でした。お忙しい中、取材に快く応じてくださいました塩浦先生に、厚く御礼申し上げます。

(山崎 素士)