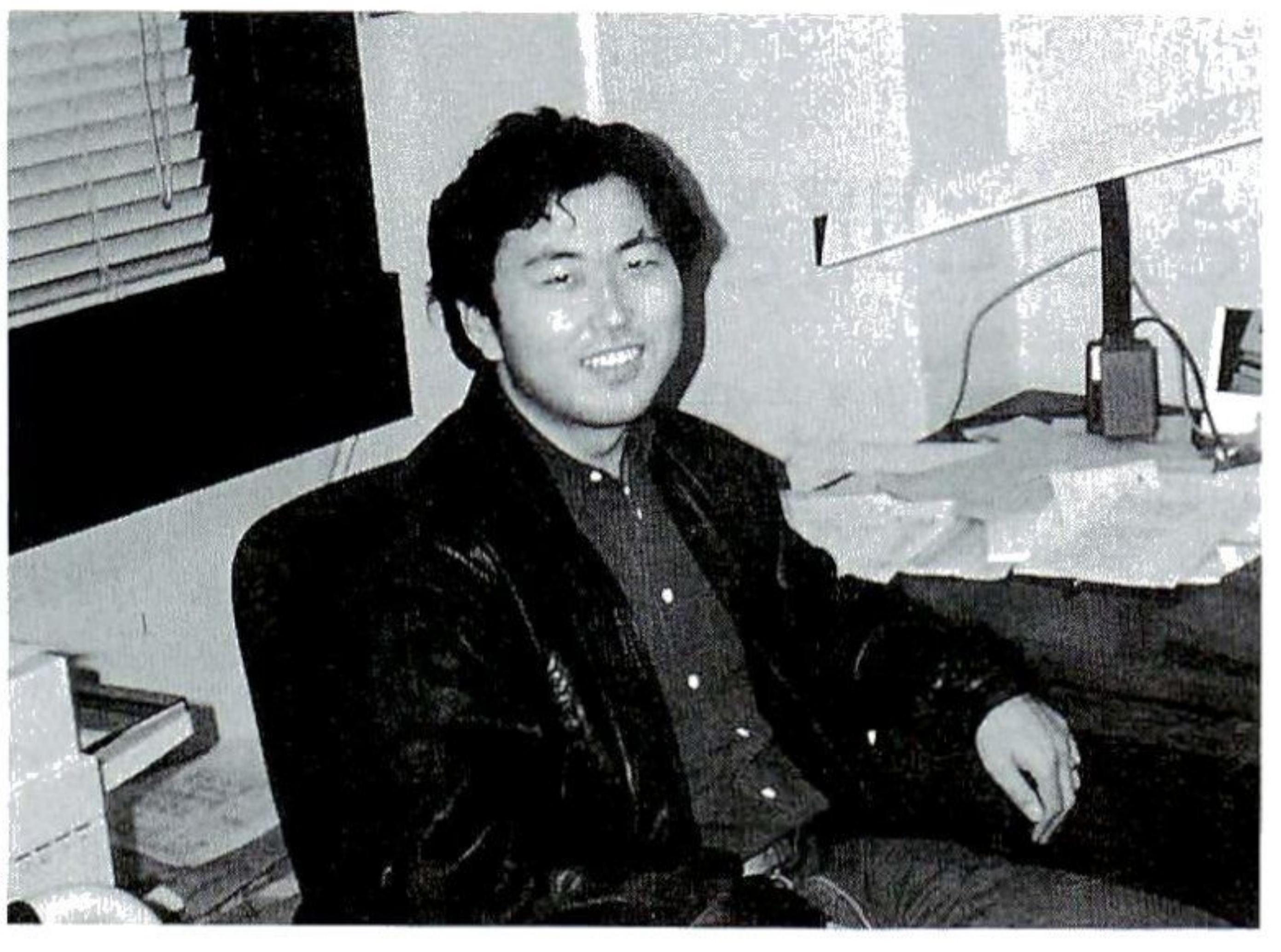
In Laboratory Now

研究室訪問 2

混沌のなかに潜む世界
宍倉研究室〜数学科



宍倉　光広　助教授

皆さんは今までカオスという言葉を耳にしたことがあるだろうか。このカオスは混沌という意味で昔から使われてきた。しかし近年、コンピュータの発達によって発展をとげた数学の新しい学問分野としても知られるようになった。

図１を見ていただきたい。数学やコンピュータに親しみのある人は一度は目にしたことがあるかもしれない。この不思議な図形はマンデルブロート集合と呼ばれるもので、カオスに深く関係している。

今回訪れた宍倉研究室では、このカオスを研究している。

カオスとフラクタルって何だろう

カオスの現象は、時間を含む関数や方程式の解の振舞いの中によく見られる。物体の運動についての微分方程式を例にあげると、その方程式は時間を変数として含む。よってその解は時間とともに変化する。方程式が普通に解ける場合、解はよく知られた関数で表されるため、その時間変化はそれほど複雑ではない。ところがそうではない場合、解は非常に複雑な変化を示して、長期的な挙動を予測することができなくなる。このような現象をカオスという。

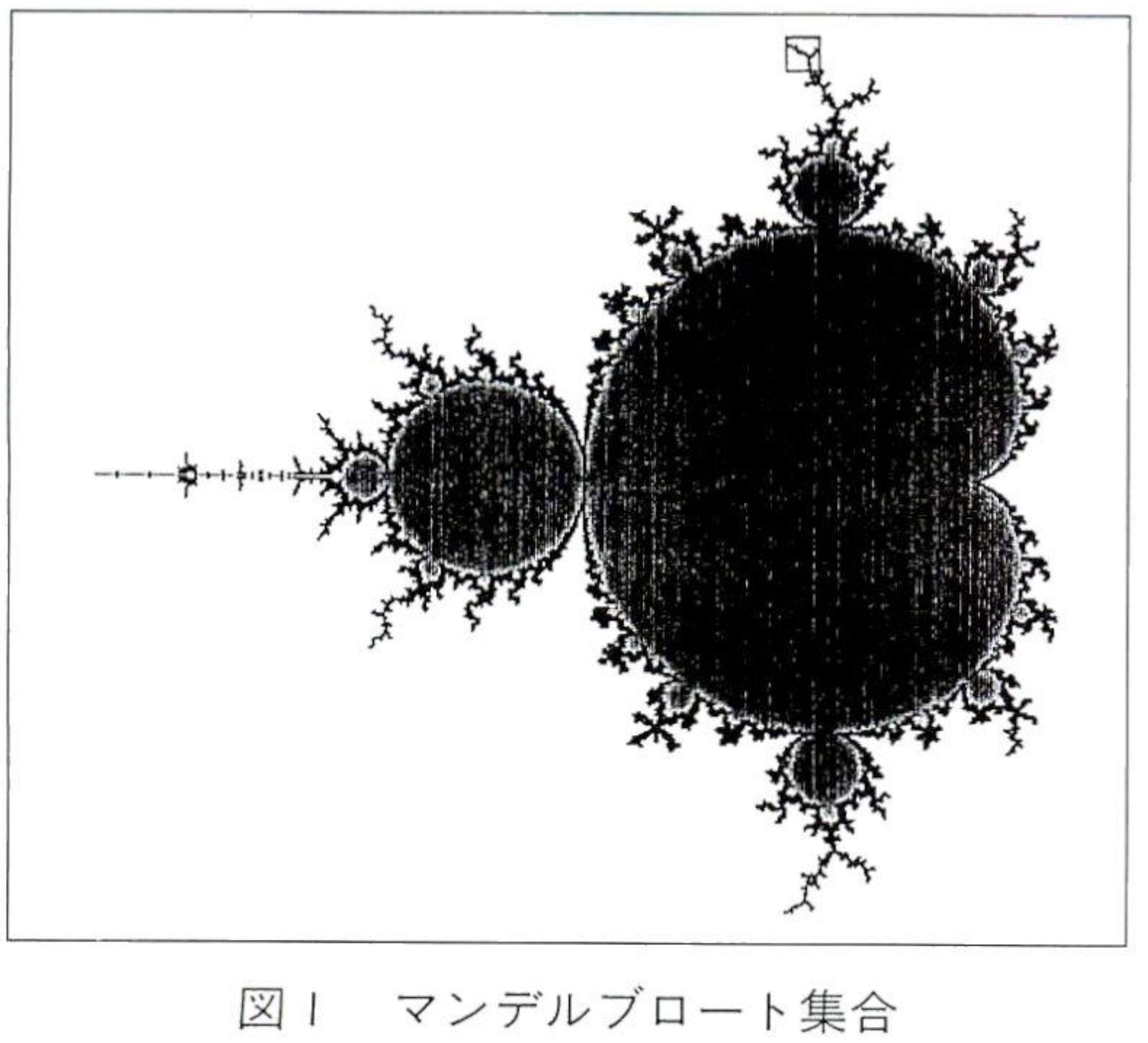


図１　マンデルブロート集合

近年におけるコンピュータの飛躍的な発展とともに、コンピュータを用いて方程式を数値的に解けるようになった。すると解が一定にならなかったり、解を簡単な式で表すことのできないものが多く見つかったのである。

例えば、天体の運動を考えてみる。その運動はニュートンの運動方程式に従い、天体が２つしかない場合には、その解の軌跡は周期的な楕円軌道を示す。位置や速度といった初期値が違っても、軌跡が楕円軌道を示すことには変わりがない。しかし天体を３つにした場合、図２を見てもわかるとおり、天体は非常に複雑な運動をする。また、初期値がわずかに違うと、その後の運動は大きく変わる。

実際、私たちの太陽系の長期にわたる挙動を完全に予測することは不可能である。初期条件におけるわずかな数値のズレが長期的にみると拡大されて、予測が大きく狂ってしまうからである。

また、バネの運動の中にもカオスを見いだすこ

とができる。バネは普通、フックの法則に従う運動をする。だが、そのバネの弾性力が変位の3乗に比例して、抵抗力と周期的な外力が加わった場合は、運動方程式は立てられるが、その解は普通に導き出すことはできない。解の挙動を調べるためには、実際に数値を代入していくしかないのだが、そうして求まった解は、実に予測不可能な振舞いを示すのである。

ところで、カオスとともによく使われる言葉にフラクタルがある。フラクタルとは、図形の一部分が全体の形と相似の関係になるものである。このような性質を自己相似性と呼ぶ。カオスとフラクタルは何の関係もないように思われるが、後述のような深いつながりを持っているのである。

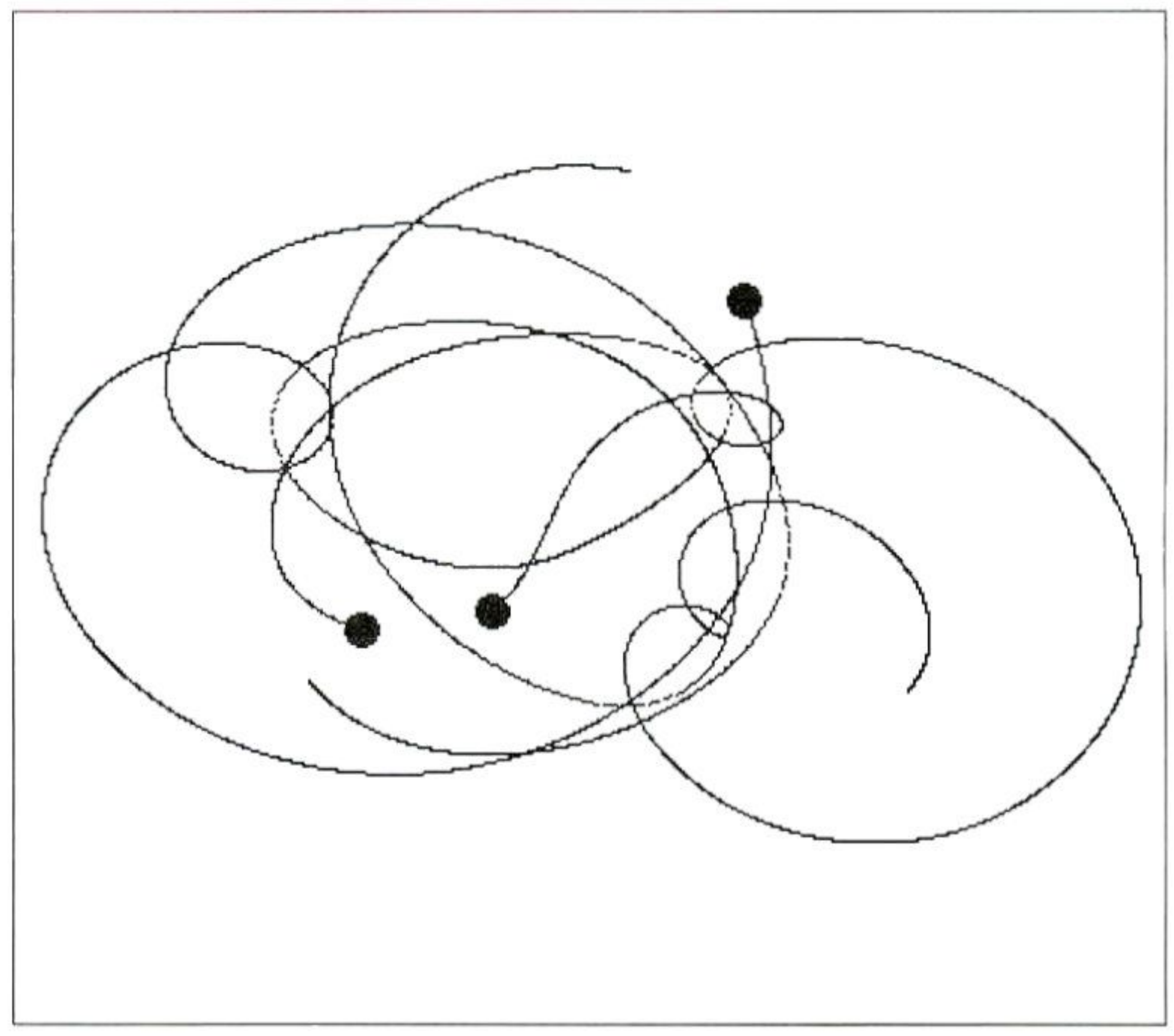


図2　三体問題

複素力学系にみるカオスの複雑さ

宍倉先生は、複素力学系におけるカオスを研究されている。力学系とは、先ほどのような時間に関する方程式を一般化したものである。力学系の簡単な例として、漸化式における反復計算があげられる。ある漸化式が与えられた場合、初項が決まると無限数列ができる。このような数列がどのように発展していくかを調べるのが力学系の研究の1つである。この場合、数列が続いていく様子は、先の例における時間の進行と同等に考えることができる。このとき、漸化式が時間を含む方程式に、数列が方程式の解にあたる。

漸化式と数列は実数に限られたものではない。複素数の範囲に拡張することもできる。この場合を複素力学系と呼び、これが先生の研究されている分野である。

具体的に先生は次のような漸化式を扱っている。

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C \quad (C,\ Z_n\text{は複素数})$$

複素数の足し算とかけ算で表されるごく簡単な漸化式であるが、これによって得られる数列は、カオス現象を示す。すなわち、Z_nの長期的な挙動が予測できないのである。パラメータC、初期値Z_0によってこの数列は$n \to \infty$で$|Z_n| \to \infty$になるときもあれば、そうでない場合もある。そこで数列が無限大に発散するかしないかでC及びZ_0を分類してみる。これらの要素は2つの複素数であるため、それが表す空間は、直感的にはわかりにくい。そこで分類を視覚的に捉えるために平面上で表す。

まず、Cを固定しZ_0で分類してみる。この初期値Z_0の集合は次の式で与えられる。

$$K_C = \{Z_0 | \lim_{n\to\infty} |Z_n| \neq \infty\}$$

つまり、数列が無限大に発散しないZ_0の集合をつくるのである。この集合はコンピュータの画面を初期値Z_0の複素平面にすることによって表現することができる。だが実際には$n=\infty$まで計算できないので、次のような集合を考えてみる。

$$K_C = \{Z_0 |\ |Z_n| \leq M \ \ (n = 0, 1, \cdots, N)\}$$

これは、有限な値Nまで$|Z_n|$がMを越えないようなZ_0の集合である。この集合に対応する画面上の点を黒く塗り、それ以外を白く塗れば画面に図形が現れる。こうしてできた図形が充填ジュリア集合といわれているものである（図3）。

また、Z_0の代わりにCを変化させると、今度はパラメータCの集合が形成される。ただしこのとき、$Z_0=0$としておく。この集合は次のような式で表される。

$$M = \{C | \lim_{n\to\infty} |Z_n| \neq \infty,\ \ Z_0 = 0\}$$

これをマンデルブロート集合といい、複素平面で表すと図1のような複雑な模様をつくる。

さて、図1の四角に囲まれた部分を拡大したものが図4である。見て頂ければわかるが、図4は図1の図形に酷似している。このことから、マンデルブロート集合はフラクタルであることがわかる。この自己相似性は、充填ジュリア集合にもいえることである。

このように導き出された充填ジュリア集合とマンデルブロート集合だが、集合の定義は違っても同じ式を基にしているので様々な関連性を持っている。例えば、マンデルブロート集合の一部分と充填ジュリア集合の間に相似性を見出すことができる（図5参照）。

これらの集合の定義式はとても簡単であるが、この式から得られる集合は非常に複雑な図形をつくる。このようなことはカオスの興味深い点のひとつといえるだろう。

さて、今までマンデルブロート集合は複雑であると述べてきたが、数学的にはその複雑さはどのように示されるのだろうか。

数学では次元と呼ばれる概念があり、直線なら1次元、平面では2次元というように自然数の範囲で次元を定義することができる。そして、曲がりくねった曲線でも、十分になめらかならば1次元と考えることができる。だが、マンデルブロート集合や充填ジュリア集合の境界線（図中の白と黒の境目）は、いくら拡大しても複雑なので、なめらかとはいえず1次元にはならない。よって、

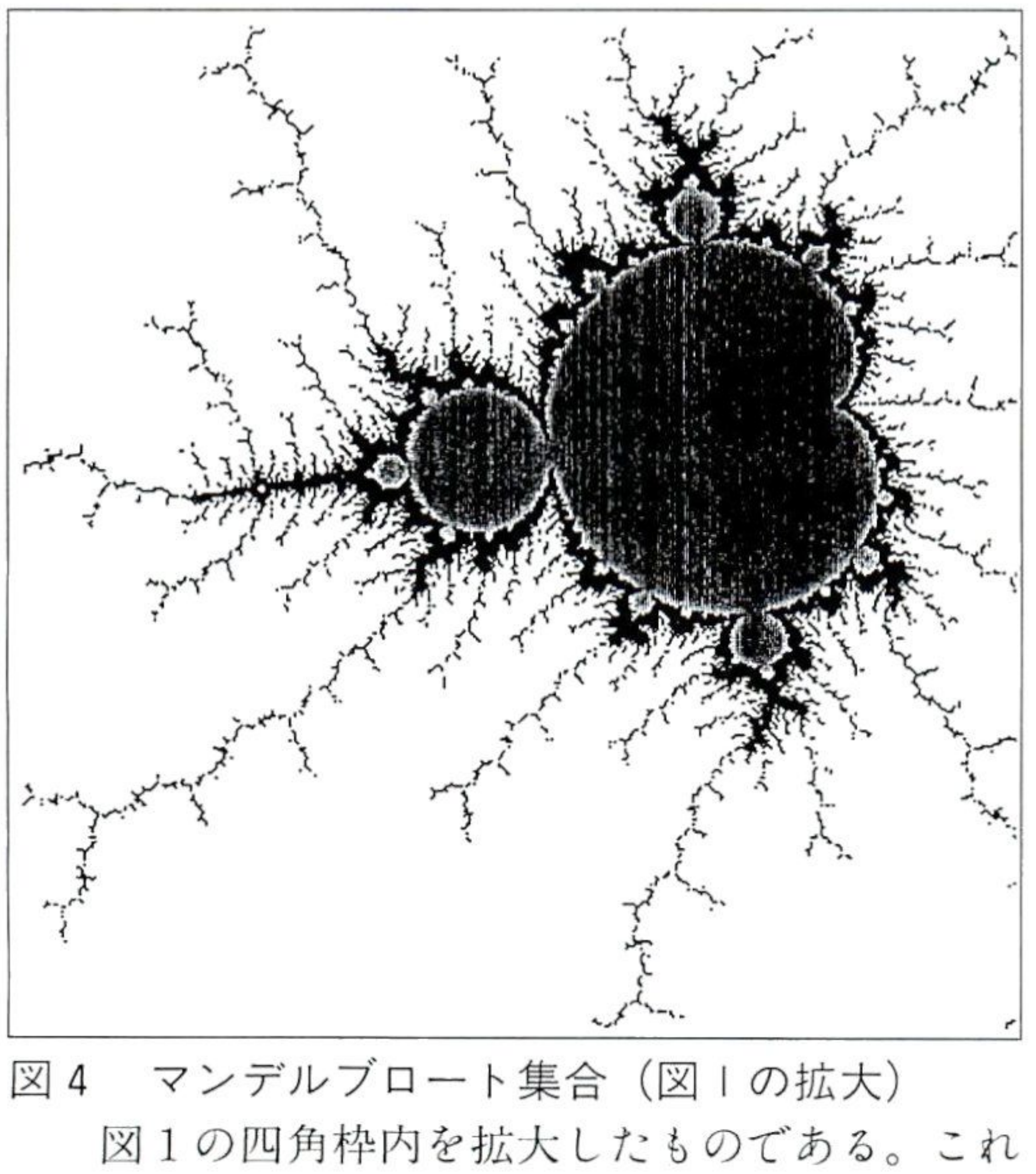


図4　マンデルブロート集合（図1の拡大）
図1の四角枠内を拡大したものである。これは図1の全体によく似ている。

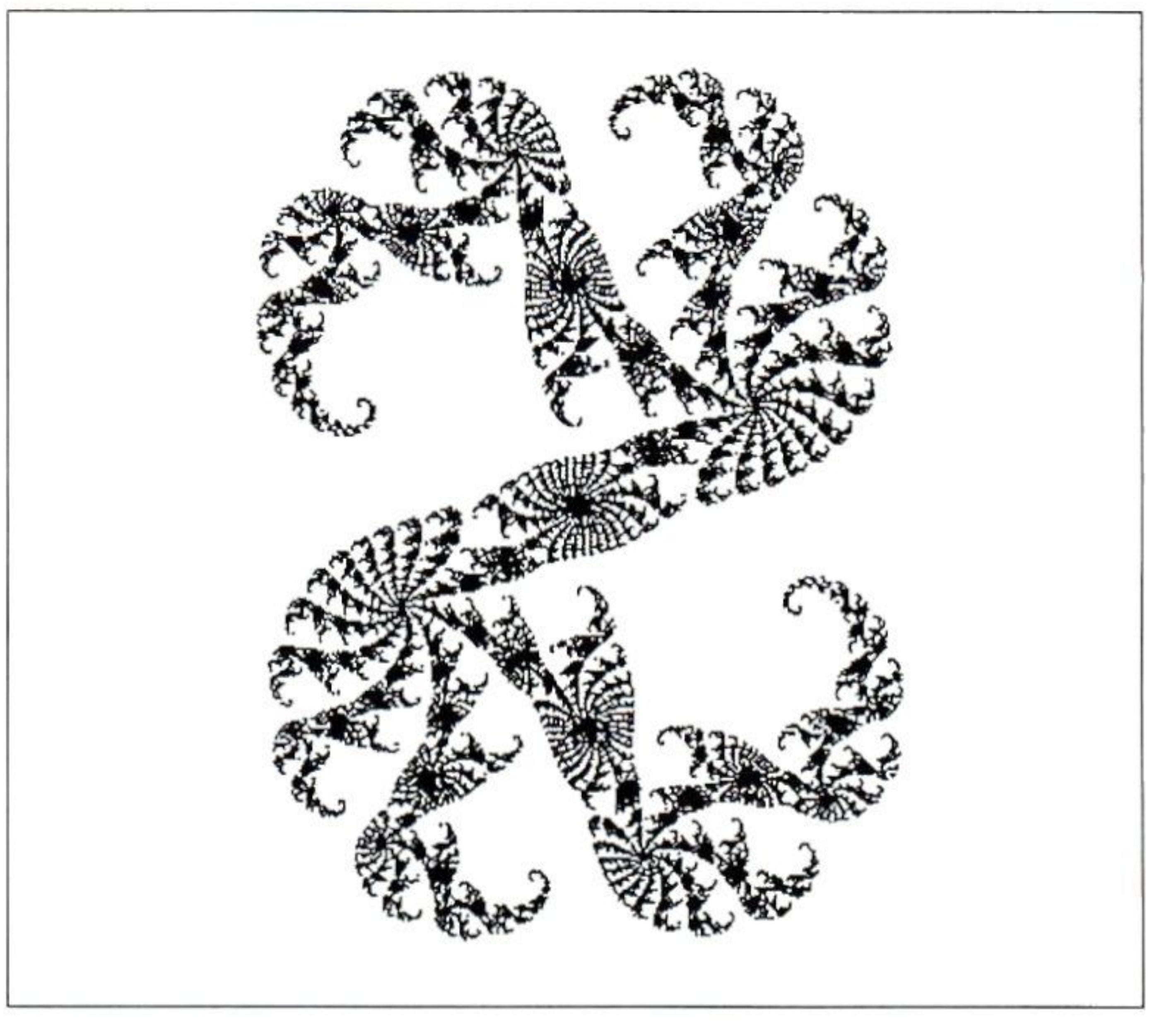


図3　充填ジュリア集合

この次元の定義を実数に拡張したハウスドルフ次元の考え方が必要になってくる。これによって、1/2次元や2/3次元などが考えられる。それを用いて最近、宍倉先生はマンデルブロート集合の境界の次元が2であることを証明された。このことはマンデルブロート集合の境界が平面内において最大の複雑さを持つことを示している。これによってマンデルブロート集合が理論的にまさしく複雑である、ということが明らかにされたのである。

そして現在先生は充填ジュリア集合についての研究に取り組んでおられる。充填ジュリア集合についての秘密のベールがはがされる日もそう遠くはないだろう。

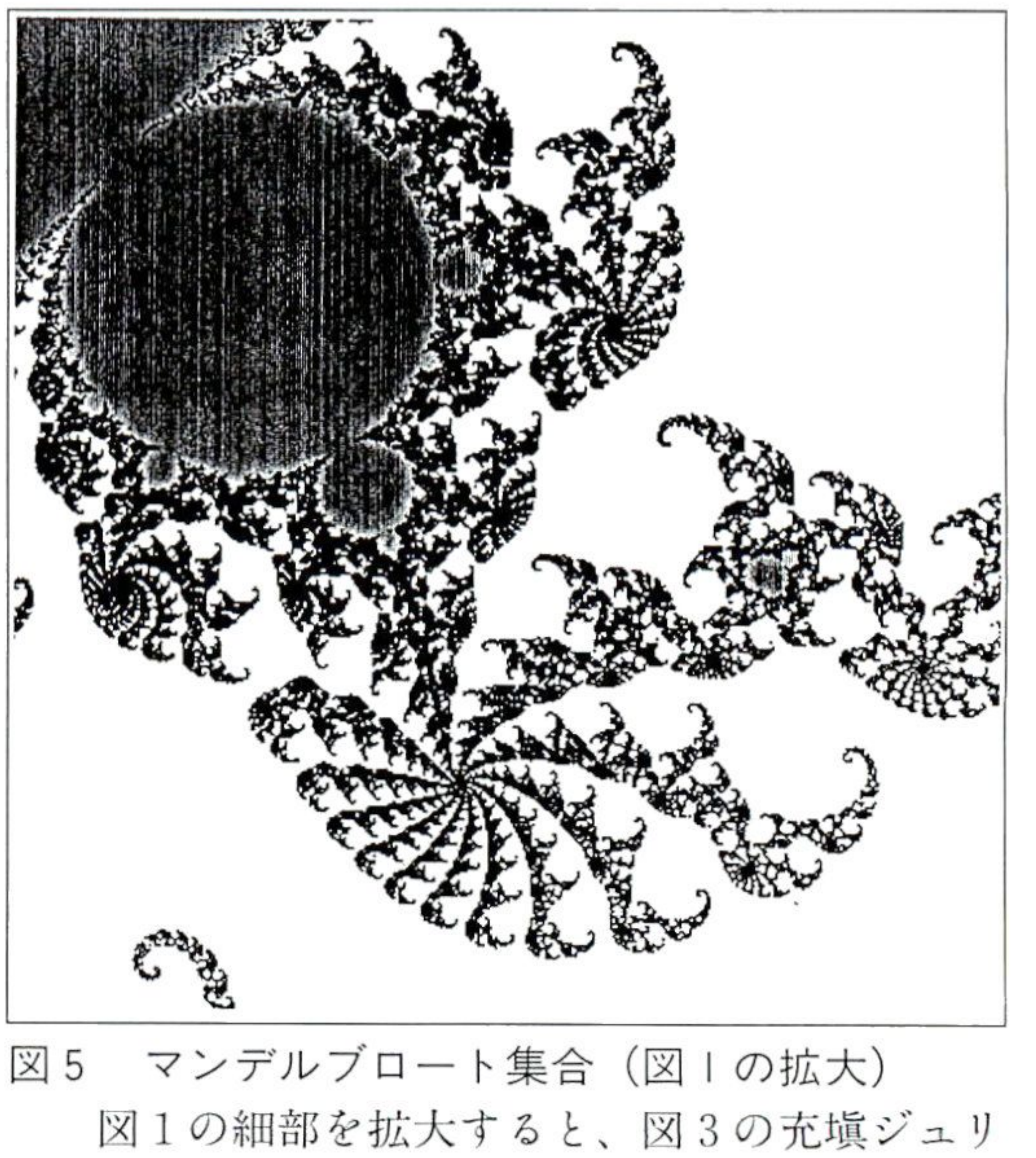


図5　マンデルブロート集合（図1の拡大）
図1の細部を拡大すると、図3の充填ジュリア集合に似た図形がでてくる。

先生と数学ってどんな関係?

数学と一口にいっても、非常に多くの分野がある。その中で、カオスとフラクタルのどのようなところに興味を持って研究を始められたのかを宍倉先生にうかがってみた。

まずカオスやフラクタルに出会ったきっかけは卒業研究だったそうである。数学の研究をする場合、よく行われることはすでに確立している定理や公式などを、条件を広げて同様な証明をする、といったことである。しかし宍倉先生は、すでにあるものに手を加えるようなことはあまり好まなかったそうである。そして、先生が卒業研究を始めようとしていたちょうどその頃、カオスとフラクタルが数学の世界に入ってきたのである。この分野はその後、どのように発展していくかが全く予想できなかったという。そこで宍倉先生は、まだ未知の分野であることに興味を持って、これらを学び始めた。そして修士1年のとき、特に複素力学系について勉強を始めた。もともと複素解析関係が好きだったからだそうである。宍倉先生にとって、複素関数論は理論的な美しさを持っているとのことである。

さて、数学の研究は他の研究と比べて実験や観察がなく、抽象概念が研究対象であるということが私たちの一般的な考え方だが、このことについて数学者の観点から宍倉先生にたずねた。

先生がおっしゃるには、実験中心の研究は実験している対象が存在し、常に実験者は自分が何を行っているのかを認識できる。数学といってもそれとの違いはなく、ただ対象物が頭の中に存在していることだけである。そして、数学者は頭の中にある対象を具体的にイメージをし、実際に存在する物と同様に扱うことができるという。

また数学でも思考実験という実験がある。研究中にある程度の論理の枠組みをつくると、まず、すでに知られている簡単な例をその枠組みにあてはめて、それについて詳しいことを調べる。これは、すでに知られていることを用いて、今自分が考えている枠組みを試してみたり、それと比較したりしているのだから、実験の一つであるといえる。また、先生がされているような研究では、実際にコンピュータを使って数値実験を行ったりもしている。広い意味でいうと数学も実験科学ということができるのではないのだろうか、と先生は語った。

私たちの持っている数学に対するイメージは、「厳密である」の一言につきるのではないのだろうか。しかし、その数学にこのような『混沌』として予測がつかないことが存在したことは驚きである。これから数学というものがまた一つの違った視点で見られるのではないのだろうか。

最後に、忙しい中取材に快く応じていただいた宍倉先生に深く感謝いたします。ありがとうございました。

(阪田)