東工大物理 2022 解答速報

1　力学

[A]

(a)

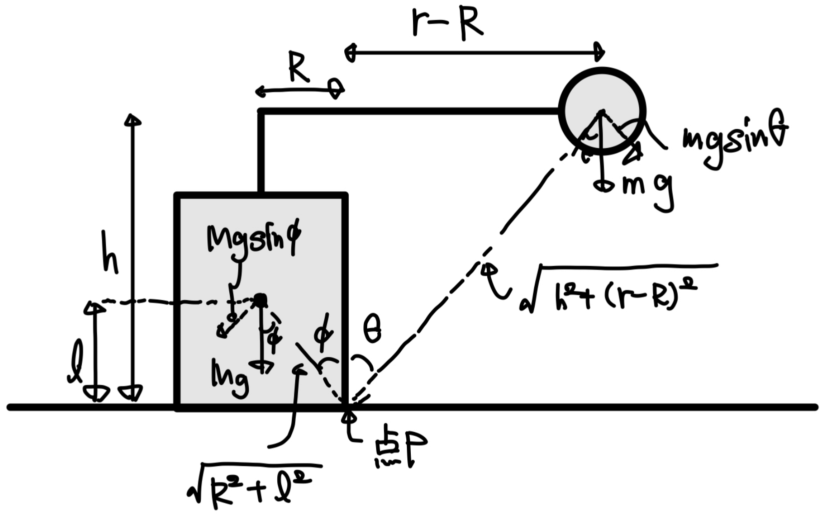

図 1

点 P(図 1 を参照) 周りのモーメントのつり合いを考えると、

$$Mg\sin\phi\cdot\sqrt{l^2+R^2}\geq mg\sin\theta\sqrt{h^2+(r-R)^2} \tag{1}$$

が得られる。この式を整理することで、

$$\frac{M}{m}\geq\frac{r-R}{R} \tag{2}$$

(b) 小球と一緒に回転する系をとる。すると横方向の力のつり合いは小球の回転運動の遠心力と台に働く静止摩擦力になる。滑り始めるとき静止摩擦力は最大静止摩擦力となり、力のつり合いの式は

$$mr\omega_1^2=\mu(m+M)g \tag{3}$$

で与えられる。ω_1 について解くことで、

$$\omega_1=\sqrt{\frac{\mu g}{r}\left(1+\frac{M}{m}\right)} \tag{4}$$

(c) (a) の点 P 周りのモーメントの式につり合いの条件に回転運動による慣性力を取り入れる。よってモーメントの式は

$$Mg\sin\phi\cdot\sqrt{\left(\frac{h-a}{2}\right)^2+R^2}\geq mg\sin\theta\sqrt{h^2+(r-R)^2}+mr\omega_2^2\cos\theta\cdot\sqrt{h^2+(r-R)^2} \tag{5}$$

となる。この方程式を解くことで、

$$\omega_2=\sqrt{\frac{g}{h}\left[\frac{MR}{mr}+\frac{R-r}{r}\right]} \tag{6}$$

[B]

(d) 2 物体間の反発係数 e は物体 a の速度が v_a から v'_a に、物体 b の速度が v_b から v'_b に変化したとすると、

$$e=-\frac{v'_a-v'_b}{v_a-v_b} \tag{7}$$

で与えられる。$v_a=0, v'_a=v_1, v_b=v'_b=r\omega$ を代入すると、

$$e=-\frac{v_1-r\omega}{0-r\omega} \tag{8}$$

これを解くことで、

$$v_1=r\omega(1+e) \tag{9}$$

が得られる。同様に、$v_a=-v_1, v'_a=v_2, v_b=v'_b=r\omega$ を代入すると、

$$e=-\frac{v_2-r\omega}{-v_1-r\omega} \tag{10}$$

これを解くことで、

$$v_2=r\omega(1+e)^2 \tag{11}$$

(e) 振り子の周期 T は

$$T=w\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{12}$$

と知られているので、

$$\omega=\frac{2\pi}{T/2}=2\sqrt{\frac{g}{l}} \tag{13}$$

(f) エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}mv_1^2=mgl(1-\cos\frac{\pi}{3}) \tag{14}$$

v_1 について解くことで、

$$v_1=\sqrt{gl} \tag{15}$$

(g) B で張力が 0 になった。つまり B において遠心力と重力の中心むきの力が釣り合っていることになる。力のつり合いの式を立てると、

$$mg\cos\frac{\pi}{3}=m\frac{v_B^2}{l} \tag{16}$$

となる。v_B について解くことで、

$$v_B=\sqrt{\frac{gl}{2}} \tag{17}$$

エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgl(1-\cos\frac{2\pi}{3}) \tag{18}$$

これを v_2 について解くことで

$$v_2 = \sqrt{\frac{7}{2}gl} \tag{19}$$

(h) (d) より

$$1+e = \frac{v_2}{v_1} \tag{20}$$

となる。(f),(g) の結果を代入して、

$$e = \sqrt{\frac{7}{2}} - 1 \tag{21}$$

2　電磁気

[A]

(a) (ア) 正電荷の単位体積当たりの電荷は $e/(\frac{4}{3}\pi R^3)$ で与えられる。よって力の大きさは

$$F = \left| k\frac{1}{r^2}(-e)\cdot \underbrace{\frac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{4}{3}\pi r^3}_{r\text{ より内側にある正電荷}} \right| = \frac{ke^2}{R^3}r \tag{22}$$

よって、ア：$\frac{ke^2}{R^3}$

(イ)

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} \tag{23}$$

と与えられる。よって力を積分し、$r=0$ にてエネルギーが 0 となるので、イ: $\frac{1}{2}\left(\frac{ke^2}{R^3}\right)$

(ウ) $r \geq R$ の領域ではすべての正電荷が負電荷に働く力に寄与する。したがって、ウ: ke^2

(エ) 静電エネルギーの定義から、エ: $-ke^2$

(オ) (イ) と (エ) の結果を用いて、オ: $\frac{3ke^2}{2R}$

(カ) 位置エネルギーの差分だけ仕事をすればよい。

$$W = U(\infty) - U(0) = C - 0 = C \tag{24}$$

よって、オ: $\frac{3ke^2}{2R}$

(b) 力のつり合いを計算する。r_0 に位置する粒子には 2 つの負電荷の粒子と半径 r_0 の内側に一様分布する電荷からの力の合力が釣り合っていることになる。x 方向の力のつり合いを考える。

負電荷についての力の寄与について求める。負電荷間の距離は $\sqrt{3}r_0$ となる。よって負電荷から受ける力は $2\cdot k\frac{e^2}{(\sqrt{3}r_0)^2}\cdot\cos\frac{\pi}{6}$ と求まる。また正電荷から受ける力は (a) より $-k\frac{e^2}{r_0^2}\frac{r_0^3}{R^3}$ となる。二つの力の和が 0 となる式を立てると、

$$r_0 = \frac{R}{\sqrt{3}} \tag{25}$$

[B]

(c) 運動方程式は

$$ma\omega^2 = Ka + ea\omega B \tag{26}$$

となる。ω について解くと、

$$\omega = \frac{eB \pm \sqrt{e^2B^2 + 4mK}}{2m} \tag{27}$$

ここで、$\omega > 0$ に注意して、

$$\omega = \frac{eB + \sqrt{e^2B^2 + 4mK}}{2m} \tag{28}$$

となる。

(d) 長時間でみると、円運動の周期を T として、

$$I = \frac{dQ}{dt} = -e/T \tag{29}$$

で与えられる。よって、

$$I = -e \times \frac{\omega}{2\pi} = -\frac{e\omega}{2\pi} \tag{30}$$

(e) 円形電流が作る磁場は

$$H_z = \frac{I}{2r} = \quad -\frac{e\omega}{4\pi a} \tag{31}$$

[C]

(f) 振動をもたらすポテンシャルは局所的に下に凸である必要がある。よって、①、②は除かれる。負方向に力が加わるから振動の中心は負の位置ににシフトする。したがって、⑥、⑧、⑩のいずれかになる。原点から運動を開始するため、x 軸との U の交点まで達する。今振動が半径 R の球内にとどまらないから、⑧となる。

(g)

$$U = \begin{cases} -ke^2\frac{1}{r} + \frac{3ke^2}{2R} & r \geq R \\ \frac{1}{2}\left(\frac{ke^2}{R^3}\right)r^2 & r < R \end{cases} \tag{32}$$

と (a) で計算されていた。一様外場によるポテンシャルはポテンシャルの基準点が原点であることに注意し、eEx と与えられる。また $x < 0$ の領域では $r \to -x$ と書き換える必要があることに注意して、ポテンシャル U は

$$U = \begin{cases} -ke^2\frac{1}{-x} + \frac{3ke^2}{2R} + eEx & x \leq -R \\ \frac{1}{2}\left(\frac{ke^2}{R^3}\right)x^2 + eEx & -R \leq x \leq 0 \end{cases} \tag{33}$$

となる。$U(-R) \leq 0$ であればよい。E について解くことで、

$$E > \frac{ke^2}{2eR^2} = \frac{ke}{2R^2} \tag{34}$$

(h) $U_{極大} \geq 0$ であればよい。極大点は $x \leq -R$ の領域に存在する。ポテンシャルの微分は

$$\frac{dU}{dx} = -ke^2\frac{1}{x^2} + eE \tag{35}$$

となるので、極大を与える点は

$$x = -\sqrt{\frac{ke}{E}} \tag{36}$$

となる。

$$U\left(-\sqrt{\frac{ke}{E}}\right) = -ke^2\sqrt{\frac{E}{ke}} + \frac{3ke^2}{2R} - eE\sqrt{\frac{ke}{E}} > 0 \tag{37}$$

E について解くことで、

$$E < \frac{9}{16}k\frac{e}{R^2} \tag{38}$$

3　熱力学

[A]

(a) ポアソンの公式より、$PV^{5/3}$ が一定のため

$$P_0V_0^{5/3} = 2P_0V_2^{5/3} \tag{39}$$

$$V_2^{5/3} = \frac{1}{2}V_0^{5/3} \tag{40}$$

よって

$$V_2 = 2^{-3/5}V_0 \tag{41}$$

$$T = \frac{2P_0 2^{-3/5}V_0}{R} = 2^{2/5}\frac{P_0V_0}{R} = 2^{2/5}T_0 \tag{42}$$

(b) 今回は定圧変化になるので、

$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3} \tag{43}$$

よって,

$$T_3 = \frac{V_0}{V_2}T_2 = 2^{3/5}\cdot 2^{2/5}T_0 = 2T_0 \tag{44}$$

(c) 状態 1 から状態 2 への変化は断熱変化のため、$Q_{in} = 0$
状態 2 から状態 3 への定圧変化なので、

$$Q_{in} = \frac{2}{5}R\Delta T = \frac{5}{2}R(2T_0 - 2^{2/5}T_0) = \frac{5}{2}(2 - 2^{2/5})RT_0 \tag{45}$$

[B]

(d) 解答は図 2 となる。

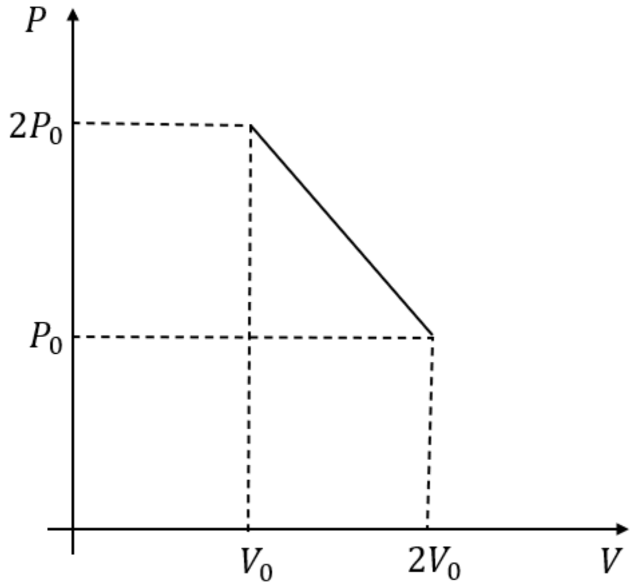

図 2

(e) 状態 A は、

$$p = -\frac{P_0}{V_0}(V - V_0)2P_0 = -\frac{P_0}{V_0}V + 3P_0 \tag{46}$$

よって

$$Q_{in} = \frac{3}{2}nR\Delta T + \int_{V_0}^{V}(-\frac{P_0}{V_0}V + 3P_0)dV \tag{47}$$

計算すると、

$$Q_{in} = -2\frac{P_0}{V_0}V^2 + \frac{15}{2}P_0V - \frac{11}{2}P_0V_0 \tag{48}$$

(f)

$$T = \frac{PV}{R} = \frac{V}{R}(-\frac{P_0}{V_0} + 3P_0) = -\frac{P_0V_0}{R}(\frac{V}{V_0})^2 + \frac{3P_0V_0}{R}\frac{V}{V_0} \tag{49}$$

今、$T_3 = 2T_0$ より、$2P_0V_0 = 2T_0R$ が成り立つ。よって

$$\frac{P_0V_0}{R} = T_0 \tag{50}$$

となる。これより、

$$T = -\frac{T_0}{V_0^2}V^2 + 3\frac{T_0}{V_0}V \tag{51}$$

(g) T が極大のとき、$\frac{\partial T}{\partial V} = 0$ のため、

$$-2\frac{T_0}{V_0^2}V + \frac{3T_0}{V_0} = 0 \tag{52}$$

となる。V について解くことで、

$$V = \frac{3}{2}V_0 \tag{53}$$

となる。

$$T_M = -\frac{T_0}{V_0^2}(\frac{3}{2}V_0)^2 + 3\frac{T_0}{V_0}\cdot\frac{3}{2}V_0 = \frac{9}{4}T_0 \tag{54}$$

(h) V が極大になるのは $\frac{\partial Q_{in}}{\partial V} = 0$ の時なので、

$$-2\frac{T_0}{V_0^2}V + \frac{3T_0}{V_0} = 0 \tag{55}$$

よって

$$-4\frac{P_0}{V_0}V + \frac{15}{2}P_0 = 0 \tag{56}$$

のため、

$$V = \frac{15}{8}V_0 \tag{57}$$