線形計画法とその投資への応用

――今野研究室～人文社会群――

今野　浩教授

ここ数年、株式投資の魅力が世人の知るところとなり、一般家庭の主婦でさえ、株式を売買するほどの大ブームになっている。かつては博打の一種のようにさえ思われ、敬遠されがちだったこの投資手段も、大手証券会社の大々的な宣伝活動のおかげで日の目を見るようになった。しかし、周知の通り、株価は変動が激しいので、必ずしも利率が良いとは限らない。場合によっては大散材の憂き目をみることもありうる。ところがこの種の投資に、線形計画法などの数学的手法を用いることによって、リスクをある程度抑えることができる。この度、私たちがお訪ねした今野教授は、長年にわたって線形計画法などの最適化手法を研究されており、近年その応用として、投資の分野へも手を広げておられる。今回は、線形計画法とその投資への応用、という二つの面からお話をうかがった。

クラス編成問題に見る線形計画問題の具体例

最適化理論あるいはORという分野をご存じだろうか。これは、ある一定条件の下で、最良の手段を講じよう、というものである。具体的に述べるとすれば『一定資源の下で最良の物を』、あるいは『一定時間の下で最多のことを』、ということになろう。教授の研究されている線形計画法とは、このORの一分野であり、現在最も強力な手法の一つとして認められている。

線形計画法とは、さまざまな等式や不等式で表わされる制約条件のもとで、ある特定の関数の値を最大化（最小化）するものである。この関数は目的関数と呼ばれており、変数の一次結合で表わされる。したがって、次の形式で記述できる。

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

ここで、視点を変えると、目的関数 z は、一定なベクトル $\mathbf{c}$ と変化するベクトル $\mathbf{x}$ の内積である、と考えられる。

$${}^t\mathbf{c} = (c_1,\ c_1,\ \cdots,\ c_1)$$

$${}^t\mathbf{x} = (x_1,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$$

つまり、

$$z = {}^t\mathbf{c}\mathbf{x}$$

と、表わすことができる。

一方、線形計画法で問題を解くには、条件を数式で表わすことができなければならない。この数式化の過程をモデル化といって、これによって問題の解の傾向が決まるほど重要な過程である。解決までの面白さの半分はこのモデル化にあるといっても過言ではない。

教授の研究内容の紹介の前に、ここで、線形計画法で解決できる易しい例として、クラス編成問題を取り挙げてみよう。

クラス編成問題は、各学生が任意に履修を希望するような選択科目において、学生の意志を十分反映しつつ、かつ、各クラスの定員があふれないようにクラス分けをするものである。

早速この問題をモデル化してみよう。クラスの数を n 組、学生の人数を m 人とする。各学生には、希望のクラスを数クラス順位づけて申告してもらう（ここでは第三希望までとする）。学生は複数のクラスに所属することはできないし、クラスの定員がオーバーすることがあってもいけない。これを数式化するため、次の変数を導入する。

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \cdots \text{学生 } i \text{ がクラス } j \text{ に所属する} \\ 0 \cdots \text{所属しない} \end{cases}$$

この変数によって、前述の二つの条件は次のように表わされる。ここで a_j はクラス j の定員を表わしている。

「OR」

オペレーションズ・リサーチの略で、問題を科学的に把握、分析して解決方法をさぐること。

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1 \quad (i=1, 2, \cdots, m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqq a_j \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

しかし、これらの条件だけでは、学生の意志を反映するものがないので、さらに学生の満足度を表わす次のような定数を導入する。

$$*p_{ij}=\begin{cases} 100 & \text{学生 i がクラス j を第一希望したとき} \\ 40 & \text{第二希望したとき} \\ 1 & \text{第三希望したとき} \\ -10^6 & \text{希望していないとき} \end{cases}$$

このようにすると、学生iの満足度は、次のように表わされるはずである。

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_{ij}$$

この値の学生全員の総和が、最大化されるべき目的関数である。つまり、

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_{ij}$$

の値を既述の条件下で最大になるようにするのである。この場合、学生の満足度 p_{ij} を定義したが、学生の意志がまだ十分に反映されてないと考えたならば、p_{ij} を各自に決定してもらっても計算に支障はない。

この種のモデルは、実際に我が大学の本年度の総合講義Aのクラス編成にも利用されており、コンピュータを用いて処理させれば、入力に必要な時間を除くと２～３分で解けるということである。また、同様の手法で解決できる問題に、工場から問屋への製品輸送経費の最小化問題などがある。

双線形計画問題の解法を追う

現在教授が主として手がけられているテーマの一つは、双線形計画問題と呼ばれているものである。これは目的関数が二つの変化するベクトル **x**、**y** の内積の形で表わされており、さらに、制約条件が各々のベクトルについて独立になっている問題で、難問として知られている。

数式で表わせば、

$${}^t\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots x_{n_1})$$

$${}^t\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots y_{n_2})$$

であるから、目的関数は、

$$z = {}^t\mathbf{x}\mathbf{y}$$

と、表現できる。

ところで、クラス編成問題などの例の場合、問題の最適解となるベクトル **x** は、制約条件で表わされる多次元空間図形の頂点の位置ベクトルとして示されることが知られているので、頂点を順に調べていけば最適解にたどり着くことが可能である。それに対し、双線形計画問題の場合は、目的関数が二つのベクトルの内積で表わされていて、制約条件を表わす空間図形も二つ存在する。しかし、**x** と **y** のいずれか一方を固定してから、線形計画問題を解いても、最適解が得られるとは限らない。

また、クラス編成問題の例では、目的関数の極大値（極小値）は一つだけなので、そのまま最適解とすることが可能であるが、双線形計画問題では、極値は複数の点に対応しうることから、単純に、極値を最適解である、と決めることができない。そのため、解法に手を加える必要がある。

教授は７年間ほどこの解法について研究をされてきたが、最近になって、パラメトリック単体法という方法を応用することによって効果的に解くことができることを発見されたそうである。

以上に取り挙げた問題は、いずれもコンピュータを用いることによって、解答に必要な多大な時間を節約できる。一方、近年のコンピュータの発展はめざましく、性能も年々高まっている。今日、しだいに大型化していく線形計画問題に対して、高性能のコンピュータの存在は不可欠なものとなっている。このような状況のもとで、線形計画問題という分野は、今後ますます発展していく面白い分野であると思われる。

教授はこれらの問題の応用について、次のようなことを語られた。

「私達の社会は、高度情報化社会と言われるほど進歩しました。たとえば、ある経済学者は『工業社会は終わり、より複雑な知価社会が到来した』と述べています。しかし、我々は、いまだ工業は重要であり、またこの分野における最適化の需要は大きいと考えています。資源の乏しい国や発展途上国では、最適化技法は必要不可欠で、それらの技術を担ってあげるのが私達先進国の人々の役割でしょう。」

より良い投資パターンを模索する

教授の研究されているもう一つの分野に理財工学――線形計画法による投資の分析――がある。

ご承知の通り、株価変動の直因は株主の株式売買である。個々の株主の株式売買を把握するのは不可能であるが社会情勢や対外為替レート、原油価格等の遠因によって大きな流れはつかむことができる。しかし、個々の銘柄について将来の株価予想をたてるのはかなり難しい。当然リスクもかなり大きくなる。テクニカル分析やファンダメンタル分析という名の方法を用いて売買すれば、多少なりとも利潤を上げリスクを減ら

すことはできる。だが、それでもまだリスクは大きく、確実な利益を必要とする保険会社などでは、より危険性の低い手法が必要となる。そこで、ポートフォリオと呼ばれる、多数の銘柄への分散投資の手段が考え出された。

教授が研究されているテーマは、マーコビッツモデルと呼ばれる手法に改良を施し、具体的にポートフォリオを組む際の手助けをしようというものである。このマーコビッツモデルの概略を以下に説明する。

まず、それぞれの銘柄について一定期間後の株価を予想し、その確率分布を求め、さらに標準偏差を求めておく。標準偏差は「散らばりぐあい」を表わすものであるから、これをリスクの一つの指標とすることが可能である。そこで各銘柄の標準偏差から、リスクが最小になるような組み合わせを選択するのである。

具体的な例を取り挙げて説明しよう。今、三種の銘柄があって各々の収益率（リターン）が表のようであるとする。収益率は、収益と投資額の比であるから、株価から算出できるのは明らかであろう。三銘柄のうちリスクが小さいのがA、リターンが大きいがリスクも大きいのがBであるから、慎重派はAに、ギャンブラーはBに投資するのが相場であろう。ところが、資金の二割をB、残りをCに投資するDという組み合わせを考えると、Aよりも小さいリスクにもかかわらず大きな収益が得られることになる。さらに、資金の3分の2をA、残りをCに投資する組み合わせなら、リスクを0にすることもできる。このように、さまざまな組み合わせによって投資に幅をもたせることができるのが、このモデルの特徴である。

かっこ内は確率を表わす	ケース1 (1/3)	ケース2 (1/3)	ケース3 (1/3)	平均	標準偏差
A	12	14	16	14	1.6
B	−8	20	42	18	20.5
C	18	14	10	14	3.3
D 0.2B＋0.8C	12.8	15.2	16.4	14.8	1.5
2/3A＋1/3C	14	14	14	14	0

表　収益率（%）

しかし、この方法にも大きな欠点がある。一定期間後の株価の確率分布を算出するのが難しいのである。さらに、現実的に考えるならば、売買時に必要な手数料、自己の売買の行為が原因となって生ずる株価の変動等を加味する必要がある。だが何らかの方法でこの短所を補えば、より強力な手法を得ることができることになる。

最近は、某証券会社のテレビCFにみられるように、このマーコビッツモデルも株式の売買に対して、一般的に利用されるようになってきている。しかも、このモデルは株式のみならず、債券や土地、物品の相場にも応用の効く手法である。まさに無限の可能性を秘めたモデルといえるのではないだろうか。

注釈

p_{ij}は、この値である必要はなく、100、40、1は、担当者の主観で決定する。また、-10^6は、希望外のクラスに割り当てられる人がいないようにするためのもので、小さく決めておけばよい。

「パラメトリック単体法」

線形計画問題の係数が、パラメータを含むとき、解がそのパラメータの変化につれてどのように変化するか調べる方法。

「テクニカル分析」

経験による分析方法で、過去の株価の動きから将来の株価を予想するもの。

「ファンダメンタル分析」

金利、為替レート、経済成長率などから将来の株価を予測する方法。

「自己の～変動」

例えば、今1000円の株式を1000株買うとする。しかし、自分の『買い』という行為で、その株式の人気が上がったことになる。その結果株価が若干上がって1010円でしか買えなくなる、ということ。

金融証券業界の話に関連して東工大生の業界への就職についてうかがうと、教授はこう答えられた。

「最近、給与の良さに惹かれて金融業界へ就職する工大生が、増えています。そのような人たちの中で、業界の仕事の内容や、統計学をはじめとする数理的知識の乏しい人は、就職しても、初めのうちは、あまり役に立たないんです。そこで、経済金融関係の教育のために、東工大にビジネススクールのようなものを作ってみたらどうだろうか、と考えているんです。そうすれば、業界へ優秀な人材を送り出せますから。」

教授は、あと10年はこの理財工学の研究を続けたいと、おっしゃられた。数学の投資への応用は、まだ新しい分野で、研究の余地が十分あるという。取材担当者として、今後の教授の益々のご活躍を期待申しあげたい。

（木下）