In Laboratory Now

研究室訪問 5

数学の中の交差点から眺めて

── 盛田研究室～数学科 ──

盛田 健彦 助教授

代数、幾何、確率統計、微分積分。ひとくちに数学といっても、その中には様々な分野がある。盛田先生が研究なさっているのは、エルゴード理論という分野である。

聞き慣れない分野名だと感じる方が多いのではないだろうか。この分野は今は亡き大数学者コルモゴロフによって"数学の中の交差点"と言われたほど、他の様々な分野に関係しているのだという。いったいどのような分野なのだろうか。

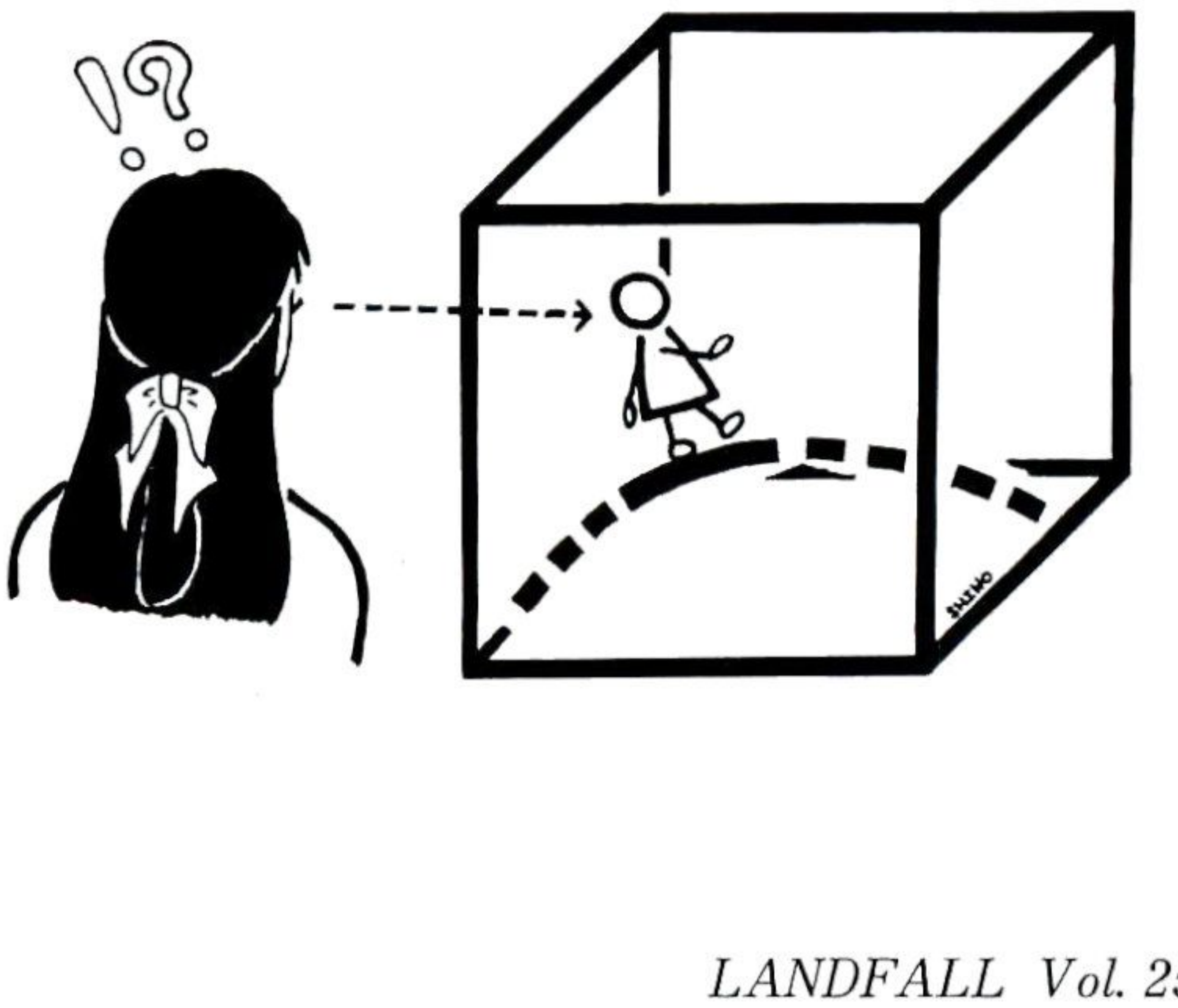
エルゴードはボルツマンから生まれた

エルゴード理論がどのような分野なのかということを探る手がかりは、その名にある。エルゴードという単語は、ギリシャ語のエルゴン(仕事、エネルギー)とオドス(道、軌道)との複合語で、気体分子運動論でおなじみのボルツマンによって作り出されたものである。

気体分子運動論とは閉じた容器内の気体に関する例えば圧力やエネルギーといった物理量を、個個の分子の運動によって説明しようという分野である。少し飛躍はあるが、分子を粒子とみなして考えてみよう。一つの粒子についてその運動に伴う物理量を計算するためには、粒子の位置、速度、質量がわかればよい。例えば皆さんは運動エネルギーが$mv^2/2$で表されることをご存じだろう。それでは無数といえるほど粒子がある場合、粒子の集団としての振る舞いから決定される物理量はどう計算されるのだろう。まともに考えると無数にある各粒子の、ある時刻における位置、速度が全てわかっていなくてはならないという困難にぶつかってしまう。そこでボルツマンはこれを簡単に計算できるようにする手段として、エルゴード仮説というものを導入した。

エルゴード仮説がどのようなものかは、本筋から外れるので説明は省略する。ここではなぜ、その仮説がエルゴード理論という数学の一分野を生むに至ったかを説明しよう。

エルゴード仮説は、その後論理的に矛盾していることが判明し、ボルツマンは粒子の集団としての振る舞いを記述することに失敗してしまった。そこでエルゴード仮説の修正が試みられ、さらに修正されたエルゴード仮説を個々の力学系（空間と運動）が満足するかどうかを考えてみようという分野が生まれた。これが現在のエルゴード理論のルーツである。



エルゴード理論研究者たちは当初、私たちの空間においてもエルゴード仮説が成り立つかどうか以下の手法で考えようとしたという。まず修正されたエルゴード仮説が成立する力学系をできる限り見つけ出す。そしてそれを私たちの住んでいる空間の性質に従って存在する力学系と比較するのである。

この手法ではまず“空間”を考えなくてはならない。そこでエルゴード理論研究者たちが最初に注目したのは“非ユークリッド空間”の中でも特に閉じた空間だった（図１参照)。なぜなら閉じた空間は次のような利点を持つので元来何かと考えやすい空間だとされてきたからである。その利点は開いた空間上では無限遠へと飛び去り無意味となる粒子の並進運動も、閉じた空間では意味のある運動になるということだ。それは時には閉じた軌道を持つ運動となり非常に扱いやすいのだ。

しかし盛田先生は開いた空間上でも粒子の運動を扱ってみようとしたそうだ。開いた空間に障害物Ａ、Ｂ、Ｃが立っているとする。粒子がＡを出てＢやＣに衝突した後に再びＡに戻ってくるような軌道はいくつあるだろうか。実はこのような軌道の数は想像を絶するほど膨大なものになる。盛田先生はこの様々な軌道の長さを次のリーマンのゼータ関数とよばれるもののpに代入した。

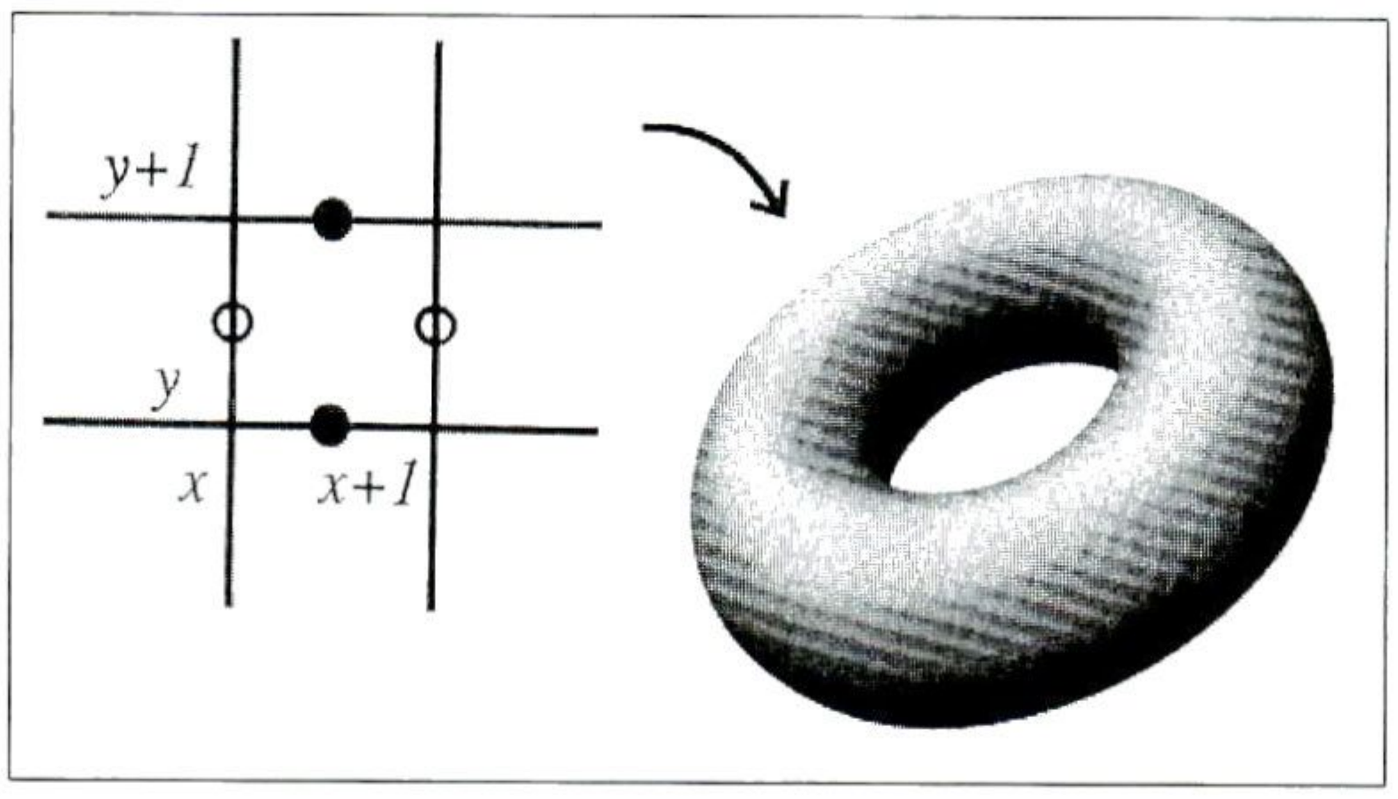


図１　簡単に作れる閉じた空間の例

実平面で整数点（x, y）と（x+1, y+1）とは同一とみなす処理をすると、上のようなドーナツ型の閉空間が簡単にできあがる。

$$\zeta(s)=\Pi(1-p^{-s})^{-1}$$

この関数はもともと、pに素数を代入して素数の分布を知るための式である。この作業により先生は、軌道の長さの分布の大まかな様子を関数で表すことに成功し、開いた空間でも粒子の閉じた軌道を持つ運動の様子を容易に探ることができることを示したのである。私たちの住んでいる空間は開いた空間であるから、閉じた空間でしか閉じた軌道を持つ運動を扱ってこなかった当時において、先生のこの試みがいかに意義のあるものだったかおわかりいただけるだろう。

ある非ユークリッド空間に住む人の話

エルゴード理論研究者たちは“非ユークリッド空間”に注目し、その性質を調べようという方向に進んだと先に述べた。以下では彼らによって研究された非ユークリッド空間の性質を私たちが感覚的に知っているユークリッド空間の性質と比較しながら見ていくことにしよう。

私たちの住む空間はユークリッド空間と呼ばれることをご存知だろうか。普通の空間のことをそう呼ぶのかと思われた方もいるだろう。だが私たちには普通に感じられているユークリッド空間とは、三角形の内角の和が180°あるいは２点の最短距離が直線で与えられるといった法則が常に成り立つ特別な性質をもった空間なのである。

これに対し非ユークリッド空間とはそういった私たちの空間の法則が成り立たない空間である。一例として、三角形の内角の和が180°より小さいロバチェフスキー空間をご存知かもしれない。今回考えてほしい非ユークリッド空間は、虚軸（Ｙ軸）が正方向しか存在せず、点$(0, y_1)$と点$(0, y_2)$との距離が$|\log(y_2/y_1)|$となるような複素空間である。このように定められた空間は、私たちの住んでいるユークリッド空間とは全く異なる性質を持つことになる。

例えば私たちが“距離”という時、それは場所によらず、２点の各Ｘ，Ｙ座標の差の２乗を足して平方根をとったものであるが、この空間でいう距離とは、前述の条件を満足するものである。つまりユークリッド空間でＡとＢの最短距離とは２点を直線でつないだものであるが、今回考えている複素空間では図２のような円弧となるのだ。かりに、この空間に住む人がいて「まっすぐ歩いて下さい」と頼むことができたとしよう。この空間

にいる人は、もちろんまっすぐ歩いていく。しかしその軌跡をユークリッド空間から眺めると空間の持つ性質にのっとって図2のような円弧となっているのである。ところでもし、私たちがこの空間に行ったらどうだろう。ある地点に最短距離で行こうとして、ユークリッド空間でのまっすぐの感覚で歩いてゆく。すると歩くにつれ最初に目標としていた地点が動いて見えて、結局その地点にたどり着くためには図2のような曲線を描くように方向修正しなくてはならないのである。

次に、両空間にそれぞれ点球をおき力をポンと加えてみよう。私たちの空間では点球が単純な等速直線運動をするであろうことは容易に想像がつく。では今回考えているような複素空間ではどうだろう。答えは「等速直線運動をする」のである。ただしこれはあくまで、その空間に住む人が見ればである。私たちの空間から眺めれば、速さは同じだが運動の方向を複雑に変化させながら、やはり図2のような円弧を描く運動をするのである。これは非常に興味深いことである。なぜなら彼らの視点から確立した力学とは全く別の特性を、私たちは見い出すことができるからだ。このようなことは私たちの世界にも言えることである。私たちの世界においてすでにわかりきっている事実や理論というのも、場所をかえてみれば全く違うものかもしれないのである。

さらに次のような面白いこともわかってくる。今回考えている空間に住む人にとって、X軸は無限遠を意味する。この空間とユークリッド空間とを隣に並べ、その中でそれぞれの人が出発速度vでY軸に沿ってX軸に近づくとしよう。3分たったとする。ユークリッド空間内の人は3分間一定

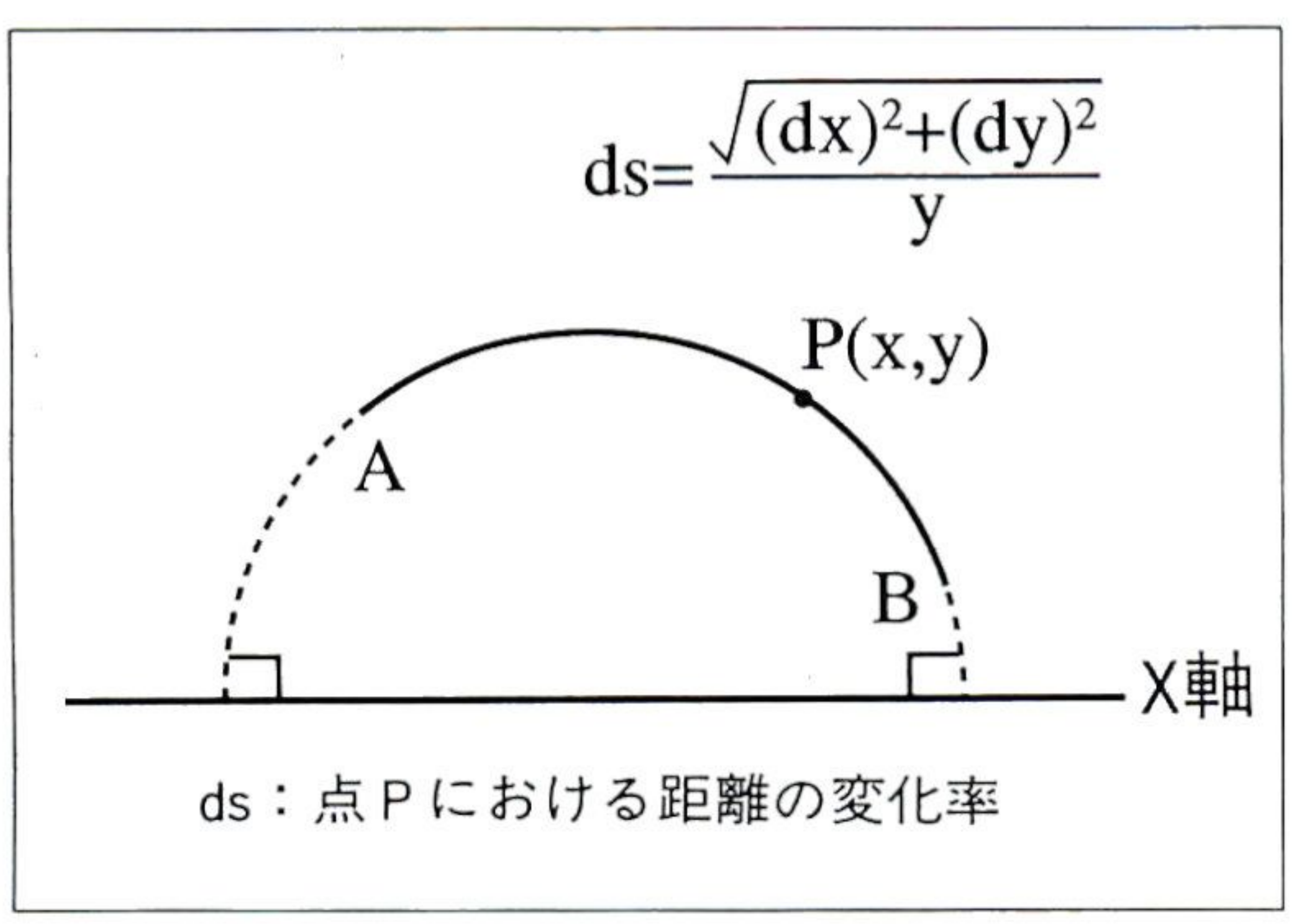


図2　今回考えている空間でのAとBの最短軌道

速度vで歩き続け、3分後にはY軸上を3vの距離を進んでいるだろう。今回考えている空間内の人はどうだろう。出発地点ではユークリッド空間内の人の隣にいたはずが、3分後にはずっと後ろにいるのである。これはなぜなら虚軸上の距離変化率すなわち速度が－vyで表され、彼らがどんなに努力しても進めば進むほど歩みが遅くなってしまうからである。このような状態で時間が過ぎてゆけば、彼らの歩みの速度はどんどん0に近くなってゆく。つまり私たちが見れば明らかにある、それ以上先にいけないという空間の果て(X軸)に彼らは永遠にたどりつけないのである。

彼らには認識できない果てを、私たちが認識できるメリットは大きいものがある。例えば先ほどの点球の運動を思い出してもらいたい。彼らは果てに行き得ないのだから、無限時間後の点球の挙動、すなわちX軸に行き着くところを見ることはできず、観察できるのはいつも円弧の一部でしかない。だが私たちは無限時間後の挙動も含め、点球の運動の全てを見ることができる。すなわちその空間における運動の法則を正確に知ることができるのだ。運動は空間の性質にのっとって起こるものである。したがって運動の法則を知ることは空間の性質を探ることにつながるのだ。

エルゴード理論はエルゴード仮説の検証を目標に出発したわけであったが、現在ではその事情が少し変わってきているという。エルゴード理論が影響を受けまた与えた研究対象には、今まで見てきた非ユークリッド空間の他に確率論や力学系理論がある。これらは長い年月をかけて深く考察され、今では独自の数学の分野として存在するようになってきているのである。さらに対象が対象を呼び、その対象を個々に追求した結果、連分数やフラクタルなどという一見エルゴード仮説とは無関係に思われるものも研究対象となってきた。エルゴード理論が“数学の中の交差点”と言われるゆえんはここにある。エルゴード理論は無限に広がる可能性を持った分野なのである。

今回、紙面の都合上紹介できなかったが盛田先生は様々なお話をしてくださった。先生にお話をうかがい、私は思いもつかなかった数学の面白さに触れることができたように思う。知識不足の私たちにもわかるように丁寧に指導してくださり、ありがとうございました。　（渡邊　木綿子）