In Laboratory Now

研究室訪問 5

不動点定理へ帰着させて

――高橋研究室～情報科学科――

線形とは $f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$ が成り立つもので、非線形とは線形でないものをいう。そして非線形の問題は、線形の問題に比べると範囲が広い。応用分野も広く、社会・経済などの問題とのかかわり合いも深い。たとえば数学的な問題では微分方程式、オペレーションズリサーチの問題では最適化問題などに応用される。しかし本格的に非線形の問題の研究が始まったのは、1960年代あたりからである。というのは、それまでは非線形の問題を解くためのよい道具がなかったからである。非線形の問題を解くための道具としていちばん有用なのが不動点定理である。それでは不動点定理とはどのようなもので、どのように役に立つのだろうか。非線形の問題を不動点定理を用いて研究されている情報科学科の高橋渉助教授のお話を伺った。

高橋　渉　助教授

不動点定理とはどのようなものか

不動点とはどういうものだろうか。動かない点と書くが動くというのはどういうことだろうか。動くとはある点が別の位置に変換されるということを意味する。そして不動点とは変換される前と変換された後で位置が変わらない点を意味する。ようするに、Xを与えられた集合とし、fをXからXへの写像とするとき、$f(x_0)=x_0$となる点x_0をfの不動点というのである。不動点定理というのは、どういった条件のもとで不動点が存在するかを示したもので、存在を証明する数学の問題をより一般的な形で示している。

では不動点定理とはどのような形をしていて、どのように使われるのだろうか。そこで実際の不動点定理を例にとって説明していきたい。次に示すのが不動点定理の一例である。

縮小写像の不動点定理

Xを完備距離空間とし、fをXからXへの縮小写像とする。このとき、Xの中にfの不動点がただ1つ存在する。

この定理を見てわけのわからない言葉が並んでいると思った人は多いだろう。そこで使われている言葉を簡単に説明していくことにする。

まずはじめに完備距離空間についての説明である。

集合Xの中に任意の2点x, yの関数$d(x,y)$が、次の3つの条件を満たすとき(X,d)を距離空間という。(X,d)のdを省いてXとも書く。

1.　$d(x,y)\geqq 0$；
また、$d(x,y)=0 \leftrightarrow x=y$

2. $d(x,y)=d(y,x)$
3. $d(x,y)\leqq d(x,z)+d(z,y)$

距離空間の例としては、次のような集合があげられる。$\boldsymbol{R}$を実数の全体の集合とすると、

$$\boldsymbol{R}^n=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1,x_2,\cdots,x_n\in\boldsymbol{R}\}$$

の2点x,y

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

に対して

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2}$$

とすると$d(x,y)$は上の3つの条件を満たすので$(\boldsymbol{R}^n,d)$は距離空間となる。これは2点間の直線距離で、中学・高校以来おなじみの“距離”といわれているものである。ほかにも

$$d(x,y)=\sqrt[3]{\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^3}$$

とした$(\boldsymbol{R}^n,d)$も距離空間である。

そして、完備距離空間とは、距離空間におけるコーシー列がつねにその距離空間内の点に収束する空間をいう。完備な距離空間の例として、先にでてきた$(\boldsymbol{R}^n,d)$があげられる。

ここでは、コーシー列や収束するという言葉がでてきた。多少本筋とはずれるがこれらの言葉の説明もしていく。

Xを距離空間とし、$\{x_n\}$をXの点列とする。点列とはx_nという点がnによって定まるXの点の集合である。そして、コーシー列というのは、次のような条件を満たす点列$\{x_n\}$である。任意の$\varepsilon>0$に対して、ある自然数n_0が存在して$m,n\geqq n_0$ならば$d(x_m,x_n)<\varepsilon$が成立する。

また$\{x_n\}$がXの点x_0に収束するとは、任意の正数$\varepsilon>0$に対して、ある自然数n_0が存在して、$n\geqq n_0$ならば$d(x_n,x_0)<\varepsilon$となるときをいう。

ここまでの説明で完備距離空間についていくらかはわかってもらえただろうか。次は縮小写像についての説明である。

距離空間XからXへの写像fが縮小写像であるとは、ある数$r\,(0\leqq r<1)$が存在して、

$$d(f(x),f(y))\leqq rd(x,y),\quad \forall x,y\in x$$

が成り立つときをいう。

これで縮小写像の不動点定理で使われている言葉の説明は終わりとなる。十分な説明ではないが詳しいことは高橋先生がお書きになった本などを読んでもらいたい。

不動点定理をどのようにして使うか

ここまでで不動点定理というものがどういう形をしているのか多少はわかってもらえたと思う。それでは、実際にどのように使って問題を解いていくのだろうか。先の縮小写像の不動点定理を使って問題を解く例として、“$x^3+5x-3=0$は閉区間$[0,1]$で実数解を持つ”ということを証明することにする。

$$f(x)=\frac{1}{5}(3-x^3)$$

とすると、$0\leqq x\leqq 1$のとき、$0\leqq f(x)\leqq 1$である。また、閉区間$[0,1]$は完備距離空間であり、$x,y\in[0,1]$に対して、距離関数を$d(x,y)=|x-y|$とすると

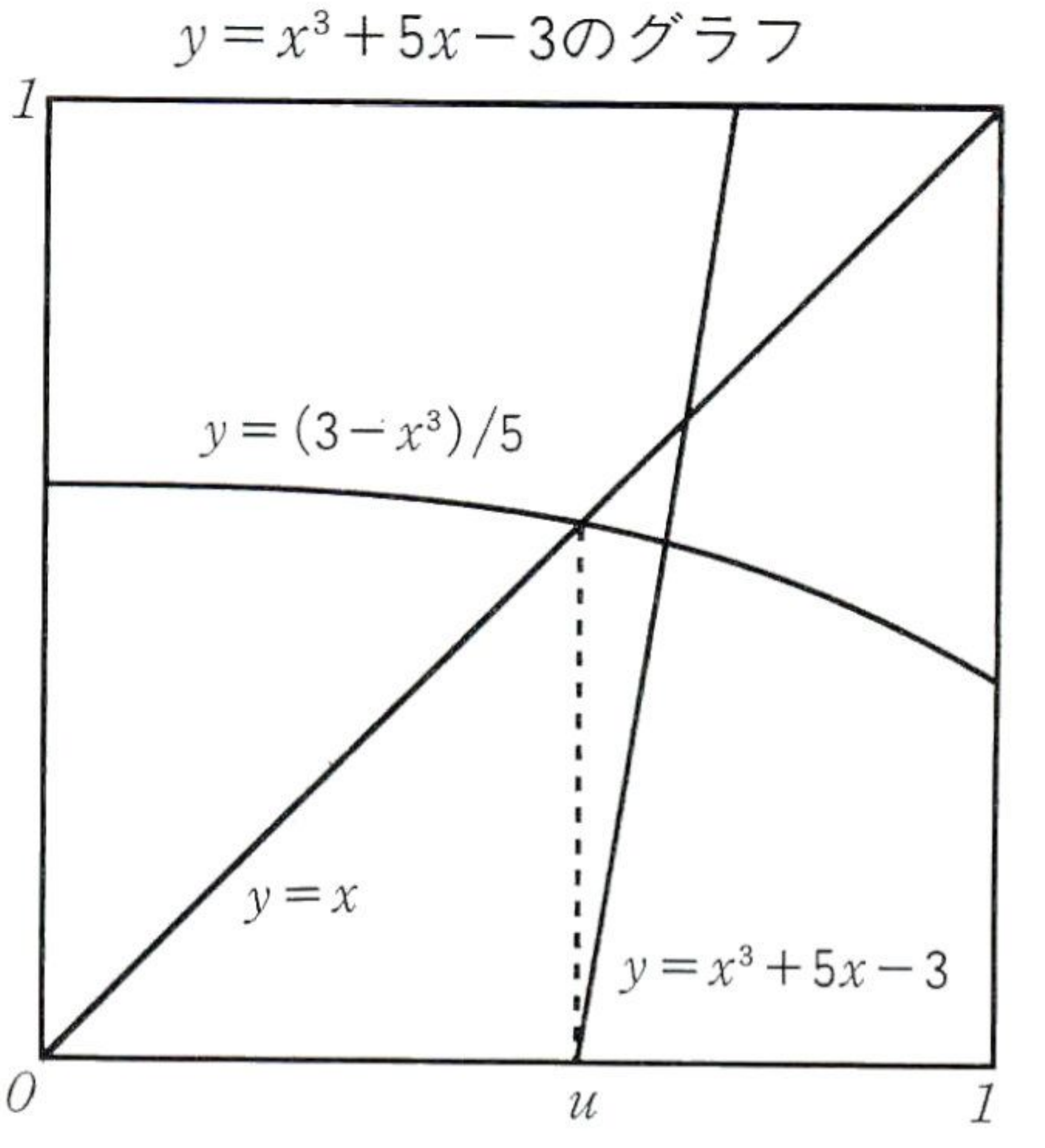
$$\begin{aligned}&|f(x)-f(y)|\\&=\frac{1}{5}|x^3-y^3|\\&=\frac{1}{5}|x-y|\,|x^2+xy+y^2|\\&\leqq\frac{3}{5}|x-y|\end{aligned}$$

であるので、fは［0,1］上での縮小写像である。よって縮小写像の不動点定理から、

$$u=f(u)=\frac{1}{5}(3-u^3)$$

なるu ★［0,1］が存在する。これは$u^3+5u-3=0$が$0 \leqq u \leqq 1$という実数解を持つことを意味する。

このようにして不動点定理を使うことにより、不動点定理を使わない場合よりも比較的容易に与えられた問題の答えを得ることができる。



現在の研究と5年後の研究を融合させる

不動点定理を使い実際の問題を解いてみたが、不動点定理はこれだけではない。この他にも多くの不動点定理があり、それぞれの問題の合わせて定理を使い分ける。専門書を読めばいろいろなタイプの不動点定理をそれぞれの問題にどのように使うかがわかるだろう。それでは先生は実際にはどのようにして研究をしているのだろうか。

“存在に関する数学の問題は不動点定理に帰着できる”という信念をもち先生は研究をされている。先生は多くのタイプの不動点定理を知っていられる。そして与えられた問題がどのタイプの不動点定理に帰着できるかを考える。どのタイプの不動点定理に帰着させることができそうかわかったら、与えられた問題を不動点定理を使った形に書き換えて解く。不動点定理に帰着させることにより、問題を新しい形で書き直すことができる。

不動点定理の応用によって解ける問題として、数学と経済などの中間領域の問題が多くある。先生は現在、不動点定理を中心に研究されていて、経済などの問題を数学の問題と捉えて研究されている。先生がこのような中間領域の研究を始めたのは、中間領域には面白いテーマがあるからだと言われた。中間領域にはまだ誰も手に付けていないような問題が多くある。これらの問題を不動点定理によって解決していく。そしてこのような問題からできた定理が使われるのは学者冥利につきると言われた。

また、先生は現在論文が書ける分野と、5年後に論文が書ける分野を想定して同時に研究されている。今研究している分野ともう1つ新しい分野を同時に研究することによって、今までの分野と新しい分野とが合体し、知識としても広がり、さらに新しい中間領域ができあがっていく。このように研究分野は増え続けいつでも論文が書ける状態である。研究対象がつきることはないのだ。

不動点定理を用いて非線形の問題を統一的に

先生の研究室では不動点定理を核として、数学と物理、数学と経済との中間領域などをそれぞれ研究している。いままで非線形の問題は個々の問題ごとに研究されてきたが、先生の研究室では非線形の問題を不動点定理を用いて統一的に研究している。非線形の問題を統一的に研究することにより幅広い研究が可能になるという。非線形の問題を研究しているうちに思いがけない問題に何度かであったという。たとえば次のようなものがある。関数全体の集合は無限次元空間となる。無限次元空間の幾何学の問題は非線形の問題がないときはクローズアップされず研究することも既にな

くなってしまったと考えられていた。しかし非線形の問題がいろいろと取り上げられたら、無限次元空間の幾何学についてほとんど研究されていないことがわかった。このように非線形の問題が出てきた為に新しくクローズアップされた問題が他にもあるという。

先生の研究室は人数が多いが、先生と塩路助手を中心にして常にコミュニケーションをとって研究を行っている。数学を研究する人は暗いと思われがちだが、研究室は明るい雰囲気だという。毎年夏には2泊3日程度勉強がてらに夏ゼミを行っているという。このような行事には研究室の出身者も集まってくるという。普段は先生と学生のふれあいはゼミが中心になっていて、学生は先生の部屋によく質問や話をしに来るそうだ。

学生時代に積極的に海外へ

次の問題にあなたならどのように答えるだろうか。

問題：次の□に当てはまる数字を入れなさい。

1，2，3，□，5，…

たぶんほとんどの人は□に4を入れるだろう。先生はこのことを“恐いこと”だと言われた。別に□が4でなくても、例えば5でも、

1，2，3，5，5，1，2，3，5，5，…

と考えれば、規則は成り立っている。しかし、ほとんどの人は、

1，2，3，4，5，6，7，…

という規則しか答にならないと考えて、またそう考えることに疑問を抱かない。これが恐いことだと言われた理由だ。大学に入るまで受験勉強という、□に4を入れる練習をしてきた。しかしこれからは、練習したことしかできないというのではなく、自分で解決する方法を見つけだすことが必要となるだろう。

数学は技術的な事を学ぶのではなくむしろ理論的な物の見方を養うものだ、と先生は言われた。時間がたてば技術的な事は忘れてしまうが、数学的な物の考え方や見方というものは残る。中学や高校で勉強してきた数学は、いろいろな定理や公式をうまく使うということが主流だったが、むしろ定理や公式を使っていくうちに身につけた考え方が数学的なものの考え方として最後に残る。そして数学が高度になればなるほど、数学的な物の見方というものは養われる。どの段階まで数学をやったかによって頭の鍛えられ方に違いがでてくる。

また先生は学生時代に旅行、特に海外に行くことが大事だとアドバイスされた。その理由について先生は次のように話された。日本にいると価値観が固定されてしまうが、外国に行っていろんな人と接するとその人達の価値観が非常に多様で、自分の価値観がとても狭かったことに気づく。そして海外に行って1年や2年遅れても、そのことは人生の中では別段大したことではなく、長い眼でみればその期間の経験は、たいへんプラスになる。そして先生は、学生時代に留学のチャンスがあれば留学することを勧め、留学のチャンスは自ら積極的につかむものだと言われた。

先生は1960年ごろから非線形の研究を始められた。初めにも述べたようにこのころは非線形の研究が本格的に始まり出したころでもある。先生が研究を始めたころは、日本ではまだ非線形の基礎的な研究はほとんどされてはおらず、最初は受け入れてもらえなかったそうだ。しかし非線形の基礎的な研究は大事だと考えて研究を続けた。こうして非線形の国際雑誌の編集委員に選ばれるなど日本を代表する研究者となられたのである。先生は大学院をでた後からずっと非線形と不動点理論について研究を続けてこられた。先生の研究と共に非線形、特に不動点理論の分野は発展してきたのだ。これからの非線形の分野の益々の発展と、先生の今後の一層のご活躍が期待される。

（市沢）