Периодические решения уравнения колебания балки с жестко закрепленным концом

Выполнил: М.Д Зиновьев
Науч. руководитель: д.ф - м.н., профессор, Рудаков И.А.

МГТУ имени Н.Э.Баумана (национальный исследовательский университет)

Кафедра ФН-2(прикладная математика)

12 июня 2022 г.

Постановка задачи 1.

Рассматривается уравнение Эйлера—Бернулли

$$u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx} = g(x,t,u) + f(x,t),\ x \in (0,\pi),\ t \in \mathbf{R} \tag{1.1}$$

с однородными граничными условиями на отрезке

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = 0,\ t \in \mathbf{R} \tag{1.2}$$

$$u(\pi,t) = u_x(\pi,t) = 0,\ t \in \mathbf{R} \tag{1.3}$$

и с условием периодичности по времени

$$u(x,t+T) = u(x,t),\ x \in (0,\pi),\ t \in \mathbf{R}. \tag{1.4}$$

Линейная задача.

Рассмотрим линеаризованное уравнение:

$$u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx} = f(x,t),\ x \in (0,\pi),\ t \in \mathbf{R} \tag{2.1}$$

с однородными граничными условиями на отрезке

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = 0,\ t \in \mathbf{R} \tag{2.2}$$

$$u(\pi,t) = u_x(\pi,t) = 0,\ t \in \mathbf{R} \tag{2.3}$$

и с условием периодичности по времени

$$u(x,t+T) = u(x,t),\ x \in (0,\pi),\ t \in \mathbf{R}. \tag{2.4}$$

Задача Штурма—Лиувилля на поиск собственных значений оператора уравнения (2.1)

$$X'''' - aX'' = \lambda X, x \in (0, \pi),\ a > 0 \tag{2.5}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} X(0) &= X''(0) = 0, \\ X(\pi) &= X'(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Трансцендентное уравнение:

$$\operatorname{th}\left(\pi\sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+4\lambda})}\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4\lambda}-a)} - \operatorname{tg}\left(\pi\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4\lambda}-a)}\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+4\lambda})} = 0 \tag{2.6}$$

Собственные функции можно представить ввиде:

$$X_n = C_n(\sin(y_n x) - \frac{\sin(y_n \pi)}{\operatorname{sh}(z_n \pi)} \operatorname{sh}(z_n x)). \tag{2.7}$$

Из условия нормировки константа C_n равна

$$C_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} + \beta_n, \ \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0. \tag{2.8}$$

Произведя локализацию собственных значений, получим

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{4} - \theta_n\right)^4 + a\left(n + \frac{1}{4} - \theta_n\right)^2, \ \theta_n \in \left(0; \frac{1}{4}\right) \tag{2.9}$$

Также имеют место оценки:

$$\frac{a}{16(a+1)} \cdot \frac{1}{n^2} < \theta_n < \frac{a+2}{2\pi} \cdot \frac{1}{n^2}, \ n \in \mathbf{N} \tag{2.10}$$

$$|X_n^{(k)}| \leqslant A_k n^k, A_k = const. \tag{2.11}$$

Собственные функции оператора A.

Введем следующие условия на период и коэффициент a

$$T = 2\pi\frac{b}{c},\ b, c \in \mathbf{N},\ (b, c) = 1, \tag{2.12}$$

$$a > 0,\ (a + 1/8)b \notin \mathbf{N}. \tag{2.13}$$

Введем обозначение: $\Omega = [0;\pi] \times \mathbf{R}/(T\mathbf{Z})$. Решение исходной задачи будет представлено в виде ряда Фурье по следующей системе функций в $L_2(\Omega)$

$$\left\{\ \tfrac{1}{T}X_n, e^c_{nm}, e^s_{nm}\ \right\}.$$

$$e^c_{nm} = \sqrt{\frac{2}{T}}X_n\cos\left(\frac{2\pi}{T}mt\right),\ \ e^s_{nm} = \sqrt{\frac{2}{T}}X_n\sin\left(\frac{2\pi}{T}mt\right) \tag{2.14}$$

Функции (2.14) являются собственными функциями дифференциального оператора $A = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} - a\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ исходной задачи с собственными значениями

$$\mu_{nm} = \lambda_n - \left(\frac{c}{b}m\right)^2,\ n \in N,\ m \in Z_+, \tag{2.15}$$

Лемма для линейного уравнения.

Лемма. Пусть выполнены условия (2.12), (2.13). Тогда оператор $A^{-1}: R(A) \to D(A)$ является вполне непрерывным, обобщенное решение u исходной задачи существует и единственно на множестве $D(A) \cap R(A)$ и имеют место включения:
если $f \in L_2(\Omega) \cap R(A)$, то

$$u = A^{-1} f \in H_1(\Omega) \cap C(\Omega),\ u_x \in C(\Omega), \tag{2.16}$$

если $f \in H_1(\Omega) \cap R(A)$, то

$$u \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega),\ u_{xx} \in C(\Omega). \tag{2.17}$$

Квазилинейное уравнение с условием нерезонансности. Теорема 1.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (2.12), (2.13). Положим, что $g(x,t,u)$ удовлетворяет условиям:

1. $g \in C^1(\Omega \times \mathbf{R})$, $T-$периодична по t;
2. Существуют константы $\alpha, \beta, \widetilde{u}$, что

$$\alpha \leqslant \frac{g(x,t,u)}{u} \leqslant \beta \quad \forall (x,t) \in \Omega, \quad u \in (-\infty; -\widetilde{u}] \cup [\widetilde{u}; +\infty), \tag{3.1}$$

причем

$$\alpha < \beta, \widetilde{u} > 0, [\alpha, \beta] \cap \sigma = \emptyset, \tag{3.2}$$

где $\sigma = sp(A)$. Тогда исходная задача имеет обобщенное решение $u \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$, $u_{xx} \in C(\Omega)$ для любой T – периодической по t правой части $f \in H_1(\Omega)$. Если дополнительно условиям теоремы функция $g(x,t,u)$ удовлетворяет условию

$$\alpha \leqslant g'_u(x,t,u) \leqslant \beta \quad \forall (u,x,t) \in \Omega \times \mathbf{R}, \tag{3.3}$$

тогда задача имеет единственное решение.

Квазилинейное уравнение с условием резонансности.

Запишем уравнение в следующем виде:

$$u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx} = g(u) + f(x,t), \ \ x \in (0,\pi), \ t \in \mathbf{R} \tag{3.4}$$

Где $g(u)$:

$$g(u) = \lambda u + p(u), \tag{3.5}$$

Причем $\lambda \in \sigma$, а функция $p(u)$ ограниченная, то есть существует такая L, что

$$|p(u)| \leqslant L \ \ \forall u \in \mathbf{R} \tag{3.6}$$

Обозначим $N_2 = ker(A - \lambda I), \ N_1 = N_2^{\perp}, \ N_1, N_2 \in L_2(\Omega)$. Представим функцию $f \in L_2(\Omega)$ в виде суммы

$$f = f_1 + f_2, \ f_1 \in N_1, \ f_2 \in N_2. \tag{3.7}$$

Квазилинейное уравнение с условием резонансности. Теорема 2.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (2.12), (2.13), (3.5), (3.6), $\lambda \in \sigma$, функция $p(u) \in C^1(\mathbf{R})$ не убывает или не возрастает по u. Также предположим, что функция $f(x,t) \in H_1(\Omega)$ имеет представление (3.7) и слагаемое f_2 удовлетворяет либо неравенству:

$$p(-\infty) + \delta \leqslant -f_2(x,t) \leqslant p(+\infty) - \delta \ \ \forall (x,t) \in \Omega \tag{3.8}$$

в том случае, если $p(u)$ не убывает, либо неравенству

$$p(+\infty) + \delta \leqslant -f_2(x,t) \leqslant p(-\infty) - \delta \ \ \forall (x,t) \in \Omega \tag{3.9}$$

в том случае, если $p(u)$ не возрастает с константой $\delta > 0$, $(p(\pm\infty) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} p(u))$. Тогда задача имеет обобщенное решение $u \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ и $u_{xx} \in C(\Omega)$

Постановка задачи 2.

Рассматривается уравнение Эйлера—Бернулли

$$u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx} = g(x,t)|u|^{p-2}u + f(x,t), \ x \in (0,\pi), \ t \in \mathbf{R} \tag{4.1}$$

с однородными граничными условиями на отрезке

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = 0, \ t \in \mathbf{R} \tag{4.2}$$

$$u_x(\pi,t) = u_{xxx}(\pi,t) - hu(\pi t) = 0, \ t \in \mathbf{R} \tag{4.3}$$

и с условием периодичности по времени

$$u(x,t+T) = u(x,t), \ x \in (0,\pi), \ t \in \mathbf{R}, \tag{4.4}$$

константы a, h являются положительными, а p удовлетворяет условию

$$p > 2 \tag{4.5}$$

Линейная задача

Задача Штурма—Лиувилля примет следующий вид

$$Y'''' - aY'' = \lambda Y, x \in (0, \pi),\ a > 0 \tag{5.1}$$

с граничными условиями

$$\begin{gathered} Y(0) = Y''(0) = 0, \\ Y'(\pi) = Y'''(\pi) - hY(\pi) = 0. \end{gathered}$$

Трансцендентное уравнение:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\operatorname{ctg}\left(\pi\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4\lambda}-a)}\right)} = \\ &\qquad = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+4\lambda}-a}{\sqrt{a^2+4\lambda}+a}}\,\operatorname{th}\left(\pi\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4\lambda}+a)}\right) - \\ &\qquad\quad - \frac{1}{h}\left(2\sqrt[\frac{2}{3}]{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4\lambda}-a)} + \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4\lambda}-a)a}\right) \end{aligned} \tag{5.2}$$

Собственные функции можно представить ввиде:

$$Y_n = C_n(\sin(b_n x) - \operatorname{sh}(c_n x)\frac{b_n \cos(b_n \pi)}{c_n \operatorname{ch}(c_n \pi)}). \qquad (5.3)$$

После локализации собственных значений, получим

$$\lambda_n = \left(n - \frac{1}{2} + \rho_n\right)^4 + a\left(n - \frac{1}{2} + \rho_n\right)^2, \ \rho_n \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \qquad (5.4)$$

где величина ρ_n обладает следующим свойством

$$C_1 \cdot \frac{1}{n^3} < \theta_n < C_2 \cdot \frac{1}{n^3}, \ C_1, C_2 \in \mathbf{R}, \ n \in \mathbf{N} \qquad (5.5)$$

Лемма.

Введем следующие условия

$$T = 2\pi \frac{q}{p},\ \text{НОД}(q,p) = 1 \tag{6.1}$$

$$a > 0, \quad (2a+1)q/4 \neq N \tag{6.2}$$

Оператор исходной задачи P представим в виде

$$P = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} - a\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{6.3}$$

Лемма. *Пусть выполнены условия (6.1), (6.2), тогда ядро $N(P)$ оператора P является конечномерным, а оператор $P^{-1} : R(D) \to R(D)$ является вполне непрерывным*

Теорема.

Будем предполагать выполнение следующих условий:

$$g(x,t) \in C^1(\Omega), \text{а также } T - \text{периодична по } t, \tag{6.4}$$

$$g(x,t) > 0 \ \ \forall (x,t) \in \Omega, \tag{6.5}$$

тогда сформулируем теорему, которая будет доказана в этой работе
Теорема. Пусть выполнены условия (4.5), (6.1) — (6.5), тогда для любого $d > 0$ задача (4.1) — (4.4) имеет обобщенное решение

$$u \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega), \tag{6.6}$$

такое, что $\|u\|_p \geqslant d$, а $u_{xx}, u_{xxx} \in C(\Omega)$ и граничные условия (4.2), (4.3) выполнены в классическом смысле

Заключение.

1. Исследована соответствующая задача Штурма-Лиувилля на поиск собственных значений и собственных функций.
2. Получено трансцендентное уравнение на собственные значения и проведено исследование его корней.
3. Произведена полная локализация собственных значений.
4. Выведены асимптотические оценки для собственных значений.
5. Доказаны теоремы о существовании и единственности решения исходной задачи в нерезонансном и резонансном случаях.

- Yamaguchi M., Existence of periodic solutions of second order nonlinear evolution equations and applications. Funkcialaj Ekvacioj. 1995. v. 38. p. 519-538.
- Ji S. Periodic solutions for one dimensional wave equation with bounded nonlinearity. J. Differential Equations. 2018. v. 264. No 9. p. 5527-5540.
- А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. М: Издательство Наука, 1977. - 735 с.
- Рудаков И.А. Задача о периодических колебаниях двутавровой балки с жестко закрепленным концом в случае резонанса. Дифференциальные уравнения, 2020. - с. 691-700.
- Рудаков И.А. Периодические решения квазилинейного уравнения Эйлера– Бернулли. Дифференциальные уравнения, 2019. - с. 1581-1583.
- Рудаков И.А. Уравнение колебаний балки с закрепленными и шарнирно опертыми концами. Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 2020. №2 - с. 3-8.