



Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Фундаментальные науки»

КАФЕДРА «Прикладная математика»

**РАСЧЁТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ
НА ТЕМУ:**

**ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ
УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ
С ЖЕСТКО ЗАКРЕПЛЕННЫМ КОНЦОМ**

Студент группы ФН2-81

М.Д. Зиновьев

(Подпись, дата)

Руководитель ВКР

И.А. Рудаков

(Подпись, дата)

Нормоконтролер

М.М. Лукашин

(Подпись, дата)

2020 г.

АННОТАЦИЯ

Расчётно-пояснительная записка 77 с., 3 рис., 11 источников.

Объектом исследования является квазилинейное уравнение Эйлера—Бернулли. Метод исследования — использование аппарата нелинейного функционального анализа

Цель первой части работы — рассмотреть уравнение Эйлера—Бернулли с граничными условиями, соответствующими случаю, когда один край балки шарнирно оперт, а другой жестко закреплен, получить условия существования, несуществования и единственности периодического решения уравнения, в случаях когда нелинейное слагаемое удовлетворяет условию нерезонансности на бесконечности, или когда разность между ним и линейной функцией представляет собой ограниченную функцию, причем коэффициент линейной функции совпадает с собственным значением дифференциального оператора.

Поставленная цель достигается с помощью методов: малого параметра, компактности, монотонности и принципа Лере—Шаудера о неподвижной точке.

Цель второй части работы — рассмотреть уравнение Эйлера—Бернулли с граничными условиями, соответствующими случаю, когда левый край шарнирно оперт, а правый [??], нелинейный член которого представим в виде $g(x, t, u) = g(x, t)|u|^{p-2}u$, получить условия существования, несуществования и единственности периодического решения уравнения.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|----|
| АННОТАЦИЯ | 2 |
| ВВЕДЕНИЕ | 5 |
| 1. Теоретическая часть | 8 |
| 2. Постановка задачи 1 | 10 |
| 3. Линейное уравнение | 11 |
| 3.1. Задача Штурма-Лиувилля | 11 |
| 3.2. Вывод трансцендентного уравнения для поиска собственных значений | 13 |
| 3.3. Локализация собственных значений | 15 |
| 3.4. Оценка ρ_n | 18 |
| 3.5. Свойства собственных функций | 22 |
| 3.6. Базисные функции дифференциального оператора A и их свойства | 24 |
| 3.7. Лемма 1 | 26 |
| 4. Теорема о существовании решения задачи (2.1) - (2.4) в нерезонансном случае | 29 |
| 5. Теорема о существовании решения задачи (2.1) - (2.4) в резонансном случае | 35 |
| 6. Постановка задачи 2 | 42 |
| 7. Линейное уравнение | 43 |
| 7.1. Задача Штурма-Лиувилля, соответствующая случаю закрепления концов | 43 |

| | |
|--|-----------|
| 7.2. Локализация собственных значений | 46 |
| 7.3. Оценка ρ_n | 48 |
| 7.4. Нормировка собственных функций оператора | 50 |
| 7.5. Собственные значения λ_n | 51 |
| 7.6. Базисные функции дифференциального оператора P и их свойства | 54 |
| 8. Теорема о существовании решений задачи (6.1) - (6.4) | 56 |
| 8.1. Лемма о вполне непрерывности оператора | 56 |
| 8.2. Теорема о существовании бесконечного числа решений задачи (6.1) - (6.4) | 58 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ | 68 |
| СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ | 69 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ А Графическая часть дипломного проекта . . | 71 |

ВВЕДЕНИЕ

Во многих физических задачах, связанных с процессами колебаний, возникают квазилинейные эволюционные уравнения. В том случае, если нелинейное слагаемое g и внешняя сила f периодичны по времени с периодом T , то возникает задача о доказательстве существования T —периодических по времени решений. В данной работе рассматривается квазилинейное уравнение Эйлера—Бернулли, описывающее процессы колебаний проводов, стержня, способного сопротивляться изгибу и двутавровых балок

$$u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx} = g(x, t, u) + f(x, t). \quad (0.1)$$

Работа разбита на две части, в первой рассмотрен общий случай уравнения с граничными условиями, соответствующими жесткому закреплению на правом конце и шарнирно опертому левому концу, эта задача имеет следующий вид:

$$u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx} = g(x, t, u) + f(x, t), \quad x \in (0, \pi), \quad t \in \mathbf{R} \quad (0.2)$$

с однородными граничными условиями на отрезке

$$u(0, t) = u_{xx}(0, t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (0.3)$$

$$u(\pi, t) = u_x(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (0.4)$$

и с условием периодичности по времени

$$u(x, t + T) = u(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (0.5)$$

Во второй части рассматривается случай, когда нелинейное слагаемое представимо в виде $g(x, t, u) = g(x, t)|u|^{p-2}u$, а граничные условия соответствуют шарнирному закреплению на левом конце и [??], эта задача имеет следующий вид:

$$u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx} = g(x, t)|u|^{p-2}u, \quad x \in (0, \pi), \quad t \in \mathbf{R} \quad (0.6)$$

с однородными граничными условиями на отрезке

$$u(0, t) = u_{xx}(0, t) = 0, \quad t \in \mathbf{R} \quad (0.7)$$

$$u_x(\pi, t) = u_{xxx}(\pi, t) - hu(\pi t) = 0, \quad t \in \mathbf{R} \quad (0.8)$$

и с условием периодичности по времени

$$u(x, t + T) = u(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (0.9)$$

Начиная с семидесятых годов, задача о периодических и квазипериодических решениях уравнения Эйлера—Бернулли в случае, когда $a = 0$ (когда отсутствует сила растяжения вдоль горизонтальной оси) исследовалась многими авторами [АВТОРЫ]. Первой работой, в которой рассмотрена задача о вынужденных колебаниях для уравнения Эйлера—Бернулли с константой $a > 0$ является работа [1]. В ней автор, используя принцип сжимающих отображений, доказал существование периодического решения достаточно малой амплитуды при малой правой части в случае граничных условия типа (0.3) на обоих концах, то есть шарнирного закрепления левого и правого концов. В статье [2] с использованием вариационного метода доказано существование счетной неограниченной в L_p последовательности решений в случае шарнирно опертых концов и $a > 0$.

В приведенных выше работах граничные условия на обоих концах имели вид (0.3), при таких граничных условиях задача Штурма—Лиувилля на собственные значения имеет явное решение, ее собственные значения представляют из себя числа $n^4 + an^2$, где этим собственным числам соответствуют собственные функции $\sin(nx)$. В данной работе, в связи с тем, что и в первой, и во второй части мы рассматриваем жесткое закрепление (0.4), (0.8) на одном из концов [????], в результате решения задачи Штурма—Лиувилля, возникает громоздкое трансцендентное уравнение. В работе была исследована асимптотика собственных значений этой задачи, а также исследованы

свойства дифференциального оператора уравнения (0.1). Также в работе доказан ряд теорем о существовании и единственности периодического решения задач, поставленных выше.

В первой части данной работы проводится развитие метода Ji S., который был использован в статье [3] при исследовании задачи о периодических решениях волнового уравнения в случае резонанса на нулевом собственном значении соответствующего дифференциального оператора. В текущей работе этот метод обобщается на случай резонанса с произвольным собственным значением дифференциального оператора уравнения (0.2). Во второй части работы используется вариационный метод для нахождения критических точек функционала. [??]

1. Теоретическая часть

Приведем теоретические сведения, которые потребуются в дальнейших выкладках

Определение. Функцию $g : N \rightarrow \mathbf{R}$, отображающую линейное пространство в множество действительных чисел называют функционалом. Если же для любых чисел $a, b \in \mathbf{R}$ и любых элементов $m, k \in N$ справедливо равенство

$$g(am + bk) = a \cdot g(m) + b \cdot g(k), \quad (1.1)$$

то такой функционал называется линейным

Определение. Пусть $g : N \rightarrow \mathbf{R}$ — линейный функционал, если существует такое число $M \in \mathbf{R}$ что для любого $y \in N$ имеет место равенство

$$|g(x)| \leq M \|y\|, \quad (1.2)$$

то такой функционал называется ограниченным

Определение. Функционал J называется дифференцируемым по Гато в точке v гильбертова пространства L , если существует элемент $J'(v)$, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{J(v + \delta f) - J(v)}{\delta} = (J'(v), f), \quad \forall f \in L, \quad (1.3)$$

причем элемент $J'(v)$ называется производной Гато функционала J в точке v

Определение. (Неравенство Гёльдера для интегралов). Рассмотрим промежуток $[c, d] : c, d \in \mathbf{R}$, пусть функция $g(x) \in L_p[c, d]$, а $h(x) \in L_q[c, d]$, где $p, q \geq 1$, а также $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, тогда произведение функций $g(x) \cdot h(x) \in L_1[c, d]$, и выполнено

$$\int_c^d |g(x) \cdot h(x)| dx \leq \left(\int_c^d |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_c^d |h(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \quad (1.4)$$

Определение. (Неравенство Гёльдера для рядов). Рассмотрим евклидово пространство $M = \mathbf{R}^n$, тогда для любых $c, d \in M$ выполнено:

$$\sum_{i=1}^n |c_i \cdot d_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |c_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |d_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (1.5)$$

где , где $p, q \geq 1$, а также $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

2. Постановка задачи 1

В первой части работы рассматривается квазилинейное уравнение Эйлера—Бернулли

$$u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx} = g(x, t, u) + f(x, t), \quad x \in (0, \pi), \quad t \in \mathbf{R} \quad (2.1)$$

с однородными граничными условиями на отрезке

$$u(0, t) = u_{xx}(0, t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (2.2)$$

$$u(\pi, t) = u_x(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (2.3)$$

и с условием периодичности по времени

$$u(x, t + T) = u(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (2.4)$$

Граничные условия соответствуют случаю, когда левый конец шарнирно оперт, а правый жестко закреплен.

Цель первой чаасти работы — получить условия существования, несуществования и единственности периодического решения задачи (2.1) – (2.4), в случаях когда нелинейное слагаемое удовлетворяет условию резонансности и нерезонансности на бесконечности.

3. Линейное уравнение

3.1. Задача Штурма-Лиувилля

Рассмотрим уравнение, которое получается, если положить в (2.1)
 $g(x, t, u) \equiv 0$.

$$u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx} = f(x, t), \quad x \in (0, \pi), \quad t \in \mathbf{R} \quad (3.1)$$

с однородными граничными условиями на отрезке

$$u(0, t) = u_x(0, t) = 0, \quad t \in \mathbf{R} \quad (3.2)$$

$$u(\pi, t) = u_x(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbf{R} \quad (3.3)$$

и с условием периодичности по времени

$$u(x, t + T) = u(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (3.4)$$

Исследуем линейный случай, получим оценки, которые потребуются в дальнейшем для обоснования существования решения исходной задачи.

Рассмотрим задачу Штурма—Лиувилля на поиск собственных значений оператора уравнения (3.1).

Определение 1. Собственной функцией $X(x)$ называется любое нетривиальное решение задачи Штурма—Лиувилля, а значения параметра λ , соответствующие полученным собственным функциям называется собственным значением.

Имеем следующую задачу:

$$X'''' - aX'' = \lambda X, \quad x \in (0, \pi), \quad a > 0 \quad (3.5)$$

с граничными условиями

$$X(0) = X'(0) = 0, \quad (3.6)$$

$$X(\pi) = X'(\pi) = 0. \quad (3.7)$$

Покажем, что $\lambda > 0$ для любого нетривиального решения, для это домножим обе части уравнения на X и проинтегрируем.

$$\int_0^\pi X'''' X dx - a \int_0^\pi X'' X dx = \lambda \int_0^\pi X^2 dx.$$

В правой части λ умножается на положительное число. Теперь проведем оценку правой части

$$\begin{aligned} \int_0^\pi X'' X dx &= X' X \Big|_0^\pi - \int_0^\pi X' X' dx = - \int_0^\pi X'^2 < 0 \\ \int_0^\pi X'''' X dx &= X X'''' \Big|_0^\pi - \int_0^\pi X' X''' dx = -X'' X' \Big|_0^\pi - \int_0^\pi X'' X'' dx = \int_0^\pi X''^2 > 0 \\ \int_0^\pi X''^2 dx + a \int_0^\pi X'^2 dx &= \lambda \int_0^\pi X^2 dx. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что $\lambda \geq 0$, осталось показать, что $\lambda \neq 0$, докажем от противного. Пусть $\lambda = 0$, тогда левая часть уравнения (3.5) равна нулю.

$$\int_0^\pi X''^2 dx + a \int_0^\pi X'^2 dx = 0. \quad (3.8)$$

Равенство (3.8) выполняется только в том случае, если функция X — тождественный ноль. Так как мы рассматриваем только нетривиальный случай, то $X \not\equiv 0$, поэтому $\lambda \neq 0$, отсюда следует, что λ всегда положителен.

3.2. Вывод трансцендентного уравнения для поиска собственных значений

Рассмотрим задачу (3.5) - (3.7)

$$X'''' - aX'' = \lambda X, \quad x \in (0, \pi), \quad a > 0. \quad (3.9)$$

Составим и решим характеристическое уравнение

$$k^4 - ak^2 - \lambda = 0,$$

$$D = a^2 + 4\lambda = 0,$$

$$k^2 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 + 4\lambda}) < 0,$$

$$k^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 4\lambda}) > 0.$$

Произведем замену, для упрощения вычислений

$$-y^2 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 + 4\lambda}), \quad (3.10)$$

$$z^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 4\lambda}), \quad (3.11)$$

$$k^2 = z^2, \quad k^2 = -y^2,$$

$$k_1 = z, \quad k_2 = -z, \quad k_3 = iy, \quad k_4 = -iy,$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + 4\lambda} - a)}, \quad z = \sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 4\lambda})}. \quad (3.12)$$

Выберем следующую фундаментальную систему решений

$$\{\operatorname{ch}(zx), \operatorname{sh}(zx), \cos(yx), \sin(yx)\},$$

представим общий вид частного решения в следующем виде

$$X = C_1 \operatorname{ch}(zx) + C_2 \operatorname{sh}(zx) + C_3 \cos(yx) + C_4 \sin(yx). \quad (3.13)$$

После подстановки первых граничных условий (3.6) получим

$$\begin{cases} X(0) = C_1 + C_3 = 0 \\ X'(0) = C_2 z + C_4 y = 0 \end{cases}$$

Тогда уравнение (3.13) примет вид

$$X = C_1(\operatorname{ch}(zx) - \cos(yx)) + C_2(\operatorname{sh}(zx) - \frac{z}{y}\sin(yx)).$$

Из (3.7) следует, что

$$\begin{cases} X(\pi) = C_1(\operatorname{ch}(z\pi) - \cos(y\pi)) + C_2(\operatorname{sh}(z\pi) - \frac{z}{y}\sin(y\pi)) = 0 \\ X'(\pi) = C_1(z\operatorname{sh}(z\pi) + y\sin(y\pi)) + C_2(z\operatorname{ch}(z\pi) - z\cos(y\pi)) = 0 \end{cases}$$

Система имеет решения относительно констант C_1, C_2 только в том случае, когда её определитель равен нулю

$$\begin{aligned} &(\operatorname{ch}(z\pi) - \cos(y\pi)) \cdot (z\operatorname{ch}(z\pi) - z\cos(y\pi)) - \\ &\quad - (\operatorname{sh}(z\pi) - \frac{z}{y}\sin(y\pi)) \cdot (z\operatorname{sh}(z\pi) + y\sin(y\pi)) = 0 \end{aligned}$$

После преобразований получим следующее уравнение

$$\cos(y\pi) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi z)} + \frac{a \sin(\pi y) \operatorname{th}(\pi z)}{2yz} \quad (3.14)$$

После подстановки в него выражений для $y(\lambda), z(\lambda)$ получим трансцендентное уравнение относительно λ .

Собственные функции можно представить в виде:

$$X = C_1(\operatorname{ch}(zx) - \cos(yx)) + C_2(\operatorname{sh}(zx) - \frac{z}{y}\sin(yx)), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad (3.15)$$

3.3. Локализация собственных значений

Для начала, выразим λ из (3.12)

$$\lambda = y^4 + ay^2 \quad (3.16)$$

Покажем, что найдется такое $n_0 \in \mathbf{N}$, что для любого натурального $n \geq n_0$ на интервале $(n, n + \frac{1}{2})$ существует единственный корень y_n уравнения (3.14), а на отрезке $[n + \frac{1}{2}, n + 1]$ уравнение не имеет решений. Рассмотрим функцию

$$H(y) = \frac{1}{\operatorname{ch}(z\pi)} + \frac{a \sin(y\pi) \operatorname{th}(z\pi)}{2yz} - \cos(y\pi) \quad (3.17)$$

Для любого натурального n справедливы неравенства:

$$H(2n) = \frac{1}{\operatorname{ch}(z\pi)} - 1 < 0 \quad (3.18)$$

$$H\left(2n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\operatorname{ch}(z\pi)} + \frac{a}{2c(2n + \frac{1}{2})} \operatorname{th}(z\pi) > 0 \quad (3.19)$$

Из этого следует, что на интервале $(2n, 2n + \frac{1}{2})$ существует корень уравнения (3.14). Также имеем следующие соотношения:

$$H(2n - 1) = \frac{1}{\operatorname{ch}(z\pi)} + 1 > 0 \quad (3.20)$$

$$H\left(2n - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\operatorname{ch}(z\pi)} - \frac{a}{2c(2n - \frac{1}{2})} \operatorname{th}(z\pi) > 0 \quad (3.21)$$

Существует такое $n_1 \in \mathbf{N}$, что для любого натурального $n > n_1$ $H(2n - \frac{1}{2}) < 0$. Значит для любого $n > n_1$ на интервале $(2n - 1, 2n - \frac{1}{2})$ существует корень уравнения (3.14). Рассмотрим отрезок $b \in [2n + \frac{1}{2}, 2n + 1]$, для любого натурального n справедливо, что $\sin(b\pi) \geq 0$, $\cos(b\pi) \leq 0$, следовательно $H(b) > 0$, значит на этом промежутке уравнение (3.14) не имеет решений. Осталось доказать, что уравнение не имеет решений на промежутке $[2n - \frac{1}{2}, 2n]$. Существует такое $n_2 \in \mathbf{N}$, что для любого натурального $n \geq n_2$ выполнены равенства:

$$\operatorname{th}(z\pi) \geq 0, \quad \operatorname{ch}(z\pi) \geq 0, \quad \frac{1}{\operatorname{ch}(z\pi)} \leq \frac{a}{4bc} \quad (3.22)$$

Рассмотрим два промежутка: $[2n - \frac{1}{2}, 2n - \frac{1}{4}]$ и $[2n - \frac{1}{4}, 2n]$. На первом промежутке выполнено:

$$H(y) \leq \frac{1}{\operatorname{ch}(z\pi)} + \frac{a}{2bc} \sin(y\pi) \operatorname{th}(z\pi) \leq \frac{a}{4bc} - \frac{a}{2bc} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{8} \leq \frac{a}{4bc} \left(1 - \frac{3\sqrt{2}}{4}\right) < 0 \quad (3.23)$$

На втором промежутке:

$$H(y) \leq \frac{1}{\operatorname{ch}(z\pi)} - \cos(y\pi) \leq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} < 0 \quad (3.24)$$

Значит для любого $n > n_2$ на всем промежутке $y \in [2n - \frac{1}{2}, 2n - \frac{1}{4}]$ уравнение (3.14) не имеет решений. Покажем единственность решения данного уравнения на интервале $(n, n + \frac{1}{2})$ при достаточно больших n , положим $n_3 = \max(n_1, n_2)$. Для любого натурального $n > n_3$ корень $y \in (n, n + \frac{1}{2})$ уравнения (3.14) представляется в виде:

$$y = n + \frac{1}{2} - \rho, \quad \rho \in (0, 1/2) \quad (3.25)$$

Используя полученное соотношение, уравнение (3.14) можно привести к виду:

$$\sin(\rho\pi) = \frac{(-1)^n}{\operatorname{ch}(z\pi)} + a \cos(\rho\pi) \operatorname{th}(z\pi) \frac{1}{yz} \quad (3.26)$$

Отсюда следует, что $\rho \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Для производной H' имеем следующее представление:

$$H'(y) = \pi \sin(y\pi) + \psi(y), \quad (3.27)$$

где $\psi(y) = O(\frac{1}{y^2})$ при $y \rightarrow \infty$. Значит найдется такое натуральное $n_4 > n_3$, что для любого натурального $n > n_4$

$$|H'(y)| \geq \frac{\sqrt{2}\pi}{2} - |\psi(y)| > 0 \quad \forall y \in [n + 1/4, n + 1/2] \quad (3.28)$$

Значит при $n > n_4$ на каждом интервале $(n, n + 1/2)$ уравнение (3.14) имеет единственный корень y_n :

$$y_n = n + \frac{1}{2} - \rho_n \quad (3.29)$$

Получим из (3.16) следующий вид собственных значений:

$$\lambda_n = (n + \frac{1}{2} - \rho_n)^4 + a(n + \frac{1}{2} - \rho_n)^2, \quad \rho_n \in (0, 1/2) \quad (3.30)$$

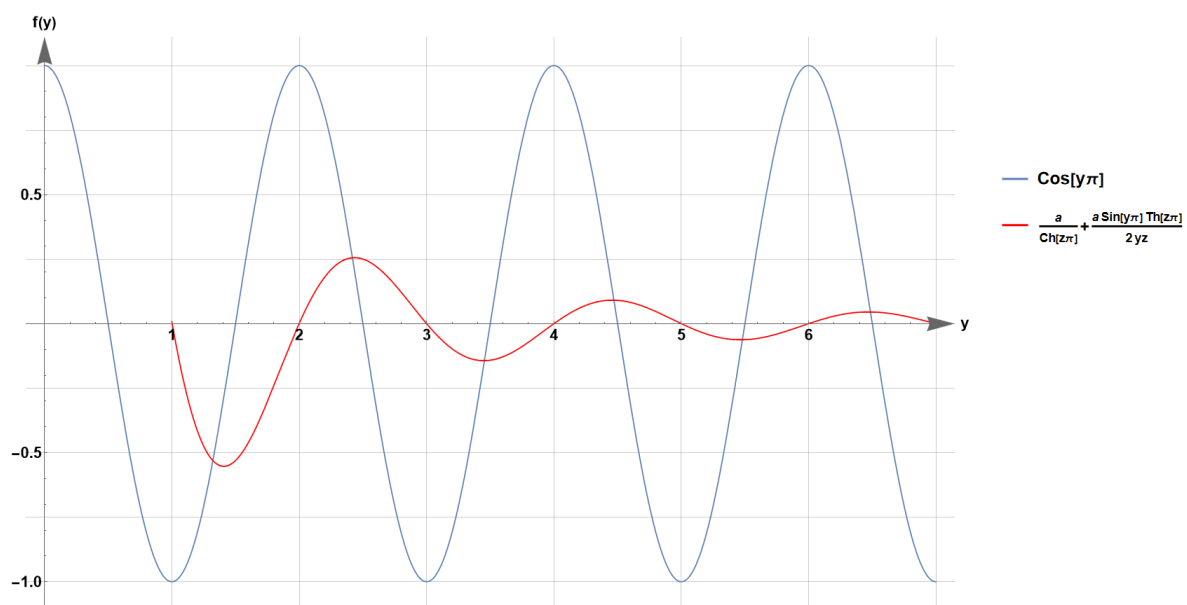


Рис.1 Иллюстрация решения уравнения (2.1)

3.4. Оценка ρ_n

Решения уравнения (3.14) представимы в виде [11]:

$$y_n = n + \frac{1}{2} - \rho_n \quad (3.31)$$

Покажем, что $\rho_n > 0$, для этого домножим уравнение (3.14) на $\frac{\rho_n}{\cos(y_n\pi)}$, тогда получим

$$\rho_n = \frac{\rho_n}{\operatorname{ch}(\pi\sqrt{y_n^2 + a}) \cos(z_n\pi)} + \frac{a \sin(b_n\pi) \operatorname{th}(\pi\sqrt{y_n^2 + a}) \rho_n}{2y_n \cos(\pi b_n) \sqrt{y_n^2 + a}}. \quad (3.32)$$

Учтем, что

$$\begin{aligned} \cos(\pi b_n) &= \cos \pi \left(n + \frac{1}{2} + \rho_n \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \pi n + \pi \rho_n \right) = -\sin(\pi n + \pi \rho_n) = \\ &= -\cos(\pi n) \sin(\pi \rho_n) = (-1)^{n+1} \sin(\pi \rho_n) \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \sin(\pi y_n) &= \sin(\pi(n + \frac{1}{2} + \rho_n)) = \sin \left(\frac{\pi}{2} + \pi n + \pi \rho_n \right) = \cos(\pi n + \pi \rho_n) = \\ &= -\cos(\pi n) \sin(\pi \rho_n) = (-1)^n \cos(\pi \rho_n) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Тогда, выражение (3.32) примет вид

$$\begin{aligned} \rho_n &= \frac{\rho_n}{\operatorname{ch}(\pi\sqrt{y_n^2 + a}) (-1)^{n+1} \sin(\pi \rho_n)} + \frac{a (-1)^n \cos(\pi \rho_n) \operatorname{th}(\pi\sqrt{y_n^2 + a}) \rho_n}{2y_n \sqrt{y_n^2 + a} (-1)^{n+1} \sin(\pi \rho_n)} = \\ &= (-1)^{n+1} \frac{\pi \rho_n}{\sin(\pi \rho_n)} \cdot \frac{1}{\pi \operatorname{ch}(\pi\sqrt{y_n^2 + a})} - \frac{a \cos(\pi \rho_n) \operatorname{th}(\pi\sqrt{y_n^2 + a})}{2\pi y_n \sqrt{y_n^2 + a}} \cdot \frac{\pi \rho_n}{\sin(\pi \rho_n)} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Докажем, что существуют такие $c_0, c_1 > 0$, что $0 < c_0 \frac{1}{n^2} < \rho_n < c_1 \frac{1}{n^2}$.

Сначала оценим сверху. Очевидно, что $th(\rho_n) < 1$. Далее рассмотрим функцию

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{\sin t}, & t \in [\frac{-\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}] \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

$$f'(t) = \frac{\sin t - t \cos t}{\sin^2 t} = \frac{\cos t(tg(t) - t)}{\sin^2 t}$$

Покажем, что $tg(t) > t$ при $t \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Посчитаем производную функции $P(t) = tg(t) - t$ и наложим условие $P'(t) > 0$

$$P'(t) = \frac{1}{\cos^2(t)} - 1 > 0$$

$$\cos^2(t) < 1$$

Это выполняется на всем промежутке $t \in (0, \frac{\pi}{2}]$, значит функция $tg(t) - t$ имеет положительную производную на всем промежутке $(0, \frac{\pi}{2}]$, в нуле принимает значение ноль, следовательно возрастает и положительна на всем промежутке. Значит

$$P(t) = \frac{\sin t - t \cos t}{\sin^2 t} > 0, \text{ при } t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$$

Исходная функция при t , стремящемся к 0 имеет предел $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1$, а в точке $t = \frac{\pi}{2}$ принимает значение $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, функцию $f(t)$ можно оценить как:

$$1 \leq \frac{t}{\sin t} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$|\rho_n| \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{ch(\pi c_n)} + \frac{\pi}{4} \frac{a}{\pi b_n c_n} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{ch(\pi c_n)} + \frac{a}{2\pi b_n c_n} \right)$$

Из (3.12) получим оценку $b_n c_n$

$$b_n c_n = \sqrt{\frac{1}{4}(a^2 + 4\lambda_n - a^2)} = \sqrt{\lambda_n} =$$

$$= \sqrt{\left(n + \frac{1}{2} - \rho_n\right)^4 + a\left(n + \frac{1}{2} - \rho_n\right)^2} \geq \left(n + \frac{1}{2} - \rho_n\right)^2 \geq n^2$$

$$\frac{1}{b_n c_n} \leq \frac{1}{n^2}$$

$$|\rho_n| \leq \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{ch(\pi c_n)} + \frac{a}{2\pi n^2} \right)$$

$$\frac{1}{ch(\pi c_n)} = \frac{2}{e^{\pi c_n} + e^{-\pi c_n}} < \frac{2}{e^{\pi c_n}}$$

Докажем, что $\frac{1}{e^x} < \frac{2}{x^2}$. Рассмотрим функцию $Q(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$, возьмем ее первую и вторую производные

$$Q'(x) = e^x - x$$

$$Q''(x) = e^x - 1$$

Вторая производная положительная при всех $x > 0$, значит $Q'(x)$ возрастает на этом интервале, а так как в нуле она принимает значение $Q'(0) = 1$, то она положительна на все положительной полуоси. А значит исходная функция возрастает при $x > 0$, но в нуле $Q(0) = 1$, значит и исходная функция положительна.

$$|\rho_n| \leq \frac{1}{\pi c_n^2} + \frac{a}{2\pi n^2}$$

Оценим c_n .

$$c_n = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + 4\lambda_n)} > \sqrt[4]{\frac{1}{2} - 4\lambda_n} > \sqrt[4]{\lambda_n} > n$$

Отсюда получаем финальную оценку сверху ρ_n

$$|\rho_n| \leq \frac{2}{\pi n^2} + \frac{a}{2\pi n^2} = \frac{1}{n^2} \left(\frac{2}{\pi} + \frac{a}{2\pi} \right) \quad (3.36)$$

Теперь оценим снизу. Используем, то, что

$$\frac{\pi \rho_n}{\sin(\pi \rho_n)} \geq 1$$

Оценим $\cos(\pi \rho_n)$. Его аргумент стремится к нулю, следовательно сама функция возрастает, стремясь к единице, $\forall \varepsilon : 1 > \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n > n_0 \cos(\pi \rho_n) > 1 - \varepsilon$ значит мы можем оценить ее снизу константой

$$\cos(\pi \rho_n) \geq d$$

Прделаем то же самое с $\text{th}(\pi c_n)$. При стремлении его аргумента к бесконечности, он стремится к единице, $\forall \varepsilon : 1 > \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n > n_0 \text{th}(\pi c_n) > 1 - \varepsilon$ значит его тоже можно оценить снизу константой

$$\text{th}(\pi c_n) \geq g$$

Отсюда получаем:

$$|\rho_n| \geq \frac{a \cdot g \cdot d}{2\pi b_n c_n} - \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi c_n)}$$

$$\begin{aligned} b_n c_n &= \sqrt{(n + \frac{1}{2} - \rho_n)^4 + a(n + \frac{1}{2} - \rho_n)^2} \leq \sqrt{(a+1)(n + \frac{1}{2} - \rho_n)^4} = \\ &= \sqrt{a+1} \cdot (n + \frac{1}{2} - \rho_n)^2 \leq \sqrt{a+1} \cdot (2n)^2 \\ \frac{1}{b_n c_n} &\geq \frac{1}{4\sqrt{a+1}n^2} \end{aligned}$$

Имеем:

$$|\rho_n| \geq \frac{a \cdot g \cdot d}{8\sqrt{a+1}n^2} - \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi c_n)}$$

Оценим $\operatorname{ch}(\pi c_n)$

$$\frac{1}{\operatorname{ch}(\pi c_n)} = \frac{2}{e^{\pi c_n} + e^{-\pi c_n}} \geq \frac{1}{e^{\pi c_n}}$$

Обозначим $A = \frac{a \cdot g \cdot d}{8\sqrt{a+1}}$ и покажем, что $\exists n_0 : \forall n > n_0 \quad e^{\pi c_n} > \frac{2}{A}n^2$

$$e^{\pi c_n} = e^{\pi \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{a^2 + 4(n + \frac{1}{2} - \rho_n)^4 + a(n + \frac{1}{2} - \rho_n)^2}}} \geq e^{\pi n}$$

$$\begin{aligned} e^{\pi n} &> \frac{2}{A}n^2 \\ e^{\pi n_0} &> \frac{2}{A}n_0^2 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Докажем, что $\exists n_0$ такое, что (3.37) выполняется для $\forall n \geq n_0$. Рассмотрим функцию $R(n) = \ln(e^{\pi n} - \frac{2}{A}n^2) = \pi n - \ln(\frac{2}{A}) - \ln(n^2)$ и докажем исходное утверждение.

$$\pi n - 2\ln(n) > \ln(\frac{2}{A})$$

Линейная функция имеет более высокий порядок роста, чем логарифмическая, значит $\forall A \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \quad e^{\pi n} > \frac{2}{A}n^2$

Значит

$$|\rho_n| \geq \frac{a \cdot g \cdot d}{8\sqrt{a+1}n^2} \tag{3.38}$$

Из верхней и нижней (3.36), (3.38) оценок получаем финальную:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R} : \quad \forall n > n_0 \quad \frac{c_1}{n^2} \geq |\rho_n| \geq \frac{c_2}{n^2} \tag{3.39}$$

3.5. Свойства собственных функций

Докажем, что любые две собственные функции X_n и X_m ортогональны в пространстве $L_2[0; \pi]$, т.е. что:

$$\int_0^{\pi} X_n(x) X_m(x) dx = 0$$

Рассмотрим интеграл

$$\lambda_n \int_0^{\pi} X_n X_m dx = \int_0^{\pi} (X_n^{(4)} - a X_n'') X_m dx = \int_0^{\pi} X_n^{(4)} X_m dx - a \int_0^{\pi} X_n'' X_m dx \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} X_n^{(4)} X_m dx &= X_n''' X_m \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} X_n''' X_m' dx = -(X_n'' X_m' \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} X_n'' X_m'' dx) = \\ &= X_n' X_m'' \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} X_n' X_m''' dx = -(X_n X_m''' \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} X_n X_m^{(4)} dx) = \int_0^{\pi} X_m^{(4)} X_n dx \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} X_n'' X_m dx = X_n' X_m \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} X_n' X_m' dx = -(X_n X_m' \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} X_n X_m'' dx) = \int_0^{\pi} X_m'' X_n dx$$

Подставив полученные выражения в (3.40), получим:

$$\begin{aligned} \lambda_n \int_0^{\pi} X_n X_m dx &= \lambda_m \int_0^{\pi} X_n X_m dx \\ (\lambda_n - \lambda_m) \int_0^{\pi} X_n X_m dx &= 0 \end{aligned}$$

Так как $\lambda_n \neq \lambda_m$, собственные функции ортогональны.

После нормировки собственные функции примут вид

$$\begin{aligned} X_n &= C_n ((\operatorname{ch}(z_n \pi) - \cos(y_n \pi)) (\operatorname{sh}(z_n x) \frac{z_n}{y_n} \sin(y_n x)) + \\ &\quad + (\cos(y_n x) - \operatorname{ch}(z_n x)) (\operatorname{sh}(z_n \pi) - \frac{z_n}{y_n} \sin(y_n \pi))), \quad (3.41) \end{aligned}$$

где $C_n = 1/(\operatorname{sh}(z_n\pi)(\pi + O(\frac{1}{n})))\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

Также, функции обладают свойством равномерной ограниченности в $L_2[0; \pi]$:

$$|X_n|^{(k)} < A_k \cdot n^k, \quad A_k = \text{const}, \quad (3.42)$$

это следует из прямых вычислений.

3.6. Базисные функции дифференциального оператора A и их свойства

Период в условии (3.4) представлен в виде:

$$T = 2\pi \frac{b}{c}, \quad b, c \in N, \quad \text{НОД}(b, c) = 1. \quad (3.43)$$

Решение исходной задачи (2.1) - (2.4) будет представлено в виде ряда Фурье по следующей системе функций, обладающей свойствами полноты и ортонормированности в $L_2(\Omega)$

$$\left\{ \frac{1}{T} X_n, \sqrt{\frac{2}{T}} X_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} mt\right), \sqrt{\frac{2}{T}} X_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} mt\right) \right\}.$$

Положим, что коэффициент a исходного уравнения

$$a > 0, \quad (a + 1/8)b \notin \mathbf{N}, \quad (3.44)$$

обозначим

$$e_{nm}^c = \sqrt{\frac{2}{T}} X_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} mt\right), \quad (3.45)$$

$$e_{nm}^s = \sqrt{\frac{2}{T}} X_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} mt\right). \quad (3.46)$$

Введем обозначение: $\Omega = [0; \pi] \times \mathbf{R}/(T\mathbf{Z})$. Обозначим D множество конечных линейных комбинаций функций из базиса. Рассмотрим оператор $A_0 : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$, с областью определения $D(A_0) = D$, и такой, что

$$A_0 u = u_{tt} + u_{xxxx} - a u_{xx}, \quad u \in D.$$

Далее обозначим $A = A_0^*$ в $L_2(\Omega)$, они совпадают на $D(A_0)$. Оператор A является самосопряженным в $L_2(\Omega)$, покажем, что (3.45), (3.46) являются собственными функциями оператора A с собственными значениями

$$\mu_{nm} = \lambda_n - \left(\frac{c}{b} m\right)^2, \quad n \in N, \quad m \in Z_+, \quad (3.47)$$

то есть убедимся в выполнении равенства

$$Ae_{nm}^{c,s} = \mu_{nm}e_{nm}^{c,s}.$$

Оператор A задачи (3.1) – (3.4) можно записать в виде:

$$A = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} - a \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (3.48)$$

Вычислим для e_{nm}^c :

$$\begin{aligned} Ae_{nm}^c &= \frac{4\pi^2}{T^2} m^2 \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} mt\right) + (X_n^{(4)} - aX_n'')e_{nm}^c = \\ &= \left((X_n^{(4)} - aX_n'')/X_n - \frac{4\pi^2 m^2}{T^2}\right)e_{nm}^c = \left(\lambda_n - \left(\frac{2\pi m}{T}\right)^2\right) = \\ &= \left(\lambda_n - \left(\frac{c}{b}m\right)^2\right)e_{nm}^c = \mu_{nm}e_{nm}^c. \end{aligned}$$

Аналогичное доказательство можно провести и для e_{nm}^s . Введем обозначение

$$\mu_{nm} = \frac{c^2}{b^2} M(n, m) \left(\frac{b}{c} \sqrt{\lambda_n} + m\right), \quad (3.49)$$

где $M(n, m) = \left(\frac{b}{c} \sqrt{\lambda_n} - m\right)$

3.7. Лемма 1

Сформулируем лемму, которая потребуется нам для доказательства следующей теоремы.

1. Для любого $n_1 \in \mathbf{N}$ существует $\alpha_0 > 0$, такая что, если выполнены условия (3.44), то выполнено неравенство

$$|M(n, m)| \geq \alpha_0, \forall n > n_1, m \in Z_+. \quad (3.50)$$

2. Существует такая c_0 , что если $\mu_{nm} \neq 0$

$$|\mu_{nm}| \geq c_0(bn^2 + cm). \quad (3.51)$$

Докажем первое утверждение: Для начала рассмотрим выражение для $\sqrt{\lambda_n}$, его можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_n} &= \sqrt{\left(n + \frac{1}{4} - \rho_n\right)^4 + a\left(n + \frac{1}{4} - \rho_n\right)^2} = \\ &= \left(n + \frac{1}{4} - \rho_n\right)^2 \sqrt{1 + \frac{a}{(n + 1/4 - \rho_n)^2}}. \end{aligned}$$

Для произвольного $\delta \in (0; 1/2)$ обозначим $n_0(\delta) = [\delta\sqrt{a/(1-2\delta)}] + 1$, тогда для любого натурального $n \geq n_0(\delta)$ имеет место соотношение

$$\sqrt{\lambda_n} = \left(n + \frac{1}{4} - \rho_n\right)^2 + r(n)a, r(n) \in (\delta, 1/2). \quad (3.52)$$

Выберем и зафиксируем $\delta \in (0, 1/2)$, при $n \geq n_0(\delta)$, тогда из равенства (3.52) выведем соотношение

$$|M(n, m)| = \frac{1}{2c} \left| (n + 2n^2)b - 2cm + \beta(n) + V_n \right|,$$

где $\beta(n) = b(2\rho_n^2 - (4n+1)\rho_n)$, $V_n = b(2v(n)a + \frac{1}{8})$, $v(n) \in (\delta, 1/2)$. Из условия на a и b (3.44) следует, что:

$$b\left(a + \frac{1}{8}\right) \in (k-1, k), k \in N.$$

Положим $k = 1$, тогда имеем $a < \frac{1}{b} - \frac{1}{8}, b < 8$, из выражения для V_n следует, что

$$\frac{b}{8} < V_n < \left(a + \frac{1}{8}\right)b < 1. \quad (3.53)$$

Положим $k \geq 2$, тогда при $l \geq \frac{b}{8} + 1$ зафиксируем

$$\delta = \left(\frac{\frac{k-1}{b} - \frac{1}{8}}{a} + 1\right)/4,$$

значит для любого $n \geq n_0(\delta)$ имеем

$$k - 1 < \left(\frac{1}{2}\left(\frac{l-1}{b} + a\right) + \frac{1}{16}\right) \cdot b < V_n < \left(a + \frac{1}{8}\right)b < k. \quad (3.54)$$

Если же $b > 8$ и $2 \leq l \leq \frac{b}{8} + 1$, тогда для $n \geq n_0(\delta)$ зафиксируем $\delta = \frac{1}{4}$, получим следующее выражение:

$$k - 1 < \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{8}\right)b < V_n < \left(a + \frac{1}{8}\right)b < k. \quad (3.55)$$

Из неравенств (3.53), (3.54), (3.55) можно заключить, что существует такая $\alpha_1 \in (0, 1)$, что

$$|R_n + l| \geq \alpha_1, l \in Z.$$

Из оценки для ρ_n (3.39) следует, что если выбрать $n_1 \geq n_0(\delta)$, то для любого $n \geq n_1$ имеет место оценка $|\beta_n| < \frac{\alpha_1}{2}$. Обозначив $l = (n + 2n^2)b - 2ct$ при $n \geq n_1$, $t \in Z$ имеем следующее неравенство

$$|M(n, m)| \geq \frac{1}{2c}(|l + R_n + \beta_n|) \geq \frac{1}{2c}(|l + R_n| - |\beta_n|) \geq \frac{1}{2c}(\alpha_1 - \frac{\alpha_1}{2}) = \frac{1}{4c}\alpha_1 = \alpha_0.$$

Первое неравенство доказано

Докажем второе неравенство, μ_{nm} имеет вид

$$\mu_{nm} = \frac{c^2}{b^2}M(n, m)\left(\frac{b}{c}\sqrt{\lambda_n} + m\right).$$

Мы только что доказали, что существует $\alpha_0 > 0$, такая что $|M(n, m)| > \alpha_0$, тогда

$$\frac{c^2}{b^2}M(n, m)\left(\frac{b}{c}\sqrt{\lambda_n} + m\right) > \alpha_0\left(\frac{c}{b}\sqrt{\lambda_n} + \frac{c^2}{b^2}m\right).$$

Из выражения (3.52) для $\sqrt{\lambda_n}$ следует, что

$$\alpha_0 \left(\frac{c}{b} \sqrt{\lambda_n} + \frac{c^2}{b^2} m \right) > c_0 (bn^2 + cm). \quad (3.56)$$

Второе неравенство леммы доказано.

4. Теорема о существовании решения задачи (2.1) - (2.4) в нерезонансном случае

Введем понятие обобщенного решения. Обобщенным решением задачи (3.1) - (3.4) называют такую функцию $u \in L_2(\Omega)$, что для любой функции $\varphi \in D : |\varphi| < \infty$

$$\int_{\Omega} u(\varphi_{tt} + \varphi_{xxxx} - a\varphi_{xx}) dxdt = \int_{\Omega} f(x, t)\varphi dxdt. \quad (4.1)$$

Для начала сформулируем лемму, которая потребуется нам для доказательства

Лемма 2. Пусть выполнены условия (3.43), (3.44). Тогда оператор $A^{-1} : R(A) \rightarrow D(A)$ является вполне непрерывным [?], решение u существует и единственно на множестве $D(A) \cap R(A)$ и имеют место включения: если $f \in L_2(\Omega) \cap R(A)$, то

$$u = A^{-1}f \in H_1(\Omega) \cap C(\Omega), \quad u_x \in C(\Omega), \quad (4.2)$$

если $f \in H_1(\Omega) \cap R(A)$, то

$$u \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega), \quad u_{xx} \in C(\Omega). \quad (4.3)$$

Теорема. (О существовании и единственности решения задачи (2.1) - (2.4) в нерезонансном случае.)

Будем полагать, что нелинейное слагаемое $g(x, t, u)$ удовлетворяет условиям:

1. $g \in C^1(\Omega \times R)$, T периодична по t

2. Существуют константы α, β, \tilde{u} , что

$$\beta \geq \frac{g(x, t, u)}{u} \geq \alpha \quad \forall (x, t) \in \Omega, \quad u \in (-\infty; -\tilde{u}] \cup [\tilde{u}; +\infty). \quad (4.4)$$

Пусть выполнены условия (3.43), (3.44), (4) с условием на константы α, β, \tilde{u} :

$$\alpha < \beta, \tilde{u} > 0, [\alpha, \beta] \cap \sigma = \emptyset, \quad (4.5)$$

где $\sigma = sp(A)$. Тогда задача (2.1) - (2.4) имеет обобщенное решение $u \in H_2(\Omega) \cup C^1(\Omega)$, $u_{xx} \in C(\Omega)$ для любой T – периодической по t правой части $f \in H_1(\Omega)$

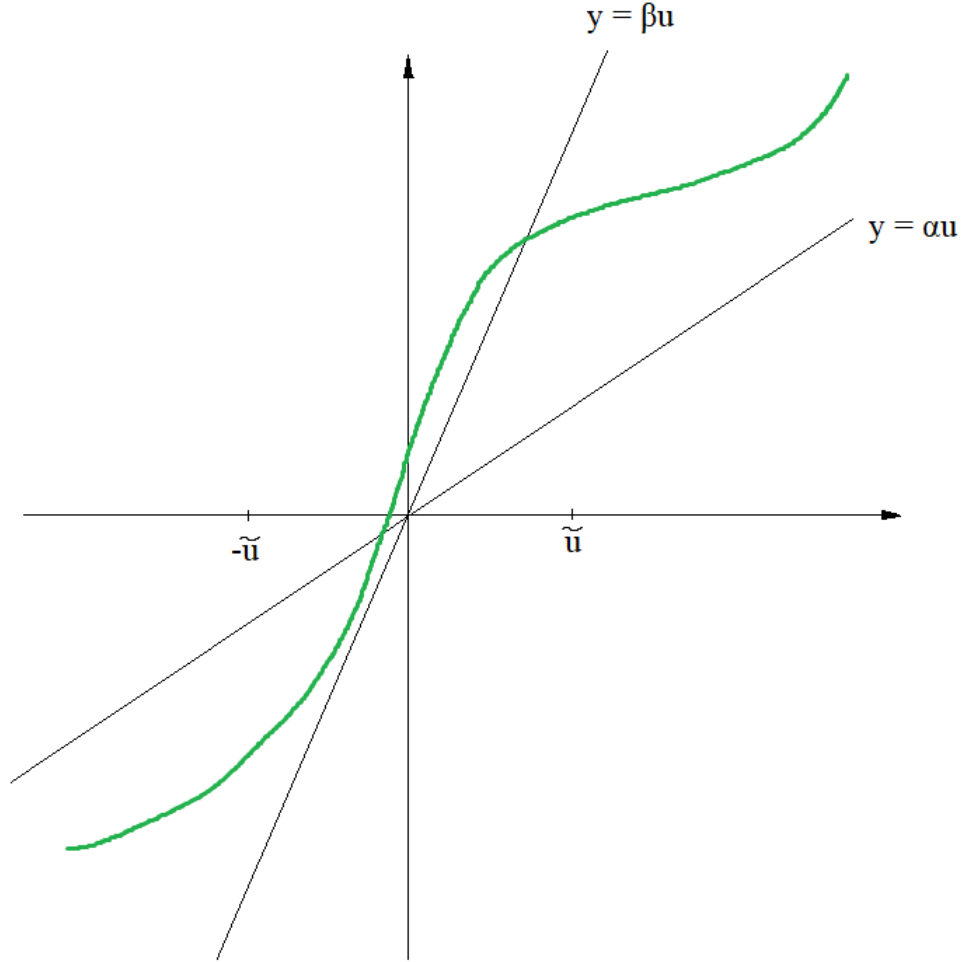


Рис.2 Иллюстрация теоремы

Доказательство. Введем обозначения: $H = L_2(\Omega)$, $p(x, t, u) = g(x, t, u) - \alpha u$. Из леммы 2 следует вполне непрерывность оператора $A : ImA \rightarrow ImA$. Так как $\alpha \notin \sigma$, то $(A - \alpha I)^{-1} : H \rightarrow H$ тоже является вполне непрерывным. Действительно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(\mu_{nm} - \alpha)^2} = \frac{d}{\alpha^2} + \sum_{\mu_{nm} \neq 0} \frac{1}{\mu_{nm}^2 (1 - \alpha/\mu_{nm})^2}, \quad (4.6)$$

где d – размерность ядра оператора A . Так как $\alpha \notin \sigma$, то из (3.51) следует, что существует такое $\varepsilon > 0$, что $(1 - \frac{\alpha}{\mu_{nm}})^2 > \varepsilon > 0$ для всех $n \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{Z}_+$

таких, что $\mu_{nm} \neq 0$. Отсюда получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(\mu_{nm} - \alpha)^2} \leq \frac{d}{\alpha^2} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\mu_{nm} \neq 0} \frac{1}{\mu_{nm}^2}. \quad (4.7)$$

Будем искать обобщенное решение задачи (2.1) - (2.4) как решение операторного уравнения

$$Au - g(x, t, u) = f \quad (4.8)$$

Введем обозначение

$$T(u) = (A - \alpha I)^{-1}(p(x, t, u) + f), \quad (4.9)$$

тогда уравнение (4.8) можно переписать в виде

$$u = T(u) \quad (4.10)$$

Оператор $T : H \rightarrow H$ является вполне непрерывным [12]. Рассмотрим уравнение:

$$u = \xi T(u), \quad \xi \in (0, 1]. \quad (4.11)$$

Оценим L_2 -норму решений уравнения (4.11), для этого введем обозначение $\omega = (A - \alpha I)^{-1}f$ и приведем уравнение к виду

$$p(x, t, u) = -\frac{1}{\xi}(\alpha I - A)(u - \xi\omega). \quad (4.12)$$

Пусть λ_1, λ_2 – соседние значения из спектра оператора A , т.е. $(\lambda_1, \lambda_2) \cap \sigma = \emptyset$, также потребуем, чтобы $[\alpha, \beta] \subset (\lambda_1, \lambda_2)$. Умножим равенство (4.12) скалярно на $u - \xi\omega$ в H , воспользуемся тем, что $\alpha - \lambda_2$ является наименьшим по модулю собственным значением оператора $\alpha I - A$, тогда получим:

$$\begin{aligned} (p(x, t, u), u - \xi\omega) &= -\frac{1}{\mu}((\alpha I - A)(u - \xi\omega), u - \xi\omega) \leq \\ &\leq \frac{1}{\xi(\lambda_2 - \alpha)} \|(\alpha I - A)(u - \xi\omega)\|^2 = \frac{\xi}{\lambda_2 - \alpha} \|p(x, t, u)\| \end{aligned} \quad (4.13)$$

Выведем существования таких констант C_1, C_2 , что

$$u \cdot p(x, t, u) \geq -C_1, \quad |p(x, t, u)| < (\beta - \alpha)|u| + C_2 \quad \forall (x, t, u) \in \Omega \times R \quad (4.14)$$

Докажем первое неравенство. $u \cdot p(x, t, u) \geq 0 \quad \forall |u| > u_0$, введем функцию $F(x, t, u) = u \cdot p(x, t, u)$, она непрерывна на компакте $\Pi = [0, \pi] \times [-\tilde{u}, \tilde{u}]$, значит на этом компакте она достигает своего минимума $\min_{\Pi} F = -C_1$, $C_1 > 0$, в итоге имеем

$$u \cdot p(x, t, u) \geq -C_1 \quad \forall (x, t, u) \in \Omega \times \mathbf{R} \quad (4.15)$$

Докажем второе неравенство. Из (4) следует, что вне компакта Π выполняется неравенство

$$0 \leq p(x, t, u) \leq (\beta - \alpha)u \quad (4.16)$$

Можно взять модули от левой и правой части, так как они обе положительные.

$$|p(x, t, u)| \leq (\beta - \alpha)|u| \quad (4.17)$$

На компакте Π функция $F(x, t, u) = |p(x, t, u)| - (\beta - \alpha)|u|$ является непрерывной, значит достигает своего максимума

$$\max_{\Pi} F(x, t, u) = C_2, \quad C_2 > 0 \quad (4.18)$$

В итоге получаем:

$$|p(x, t, u)| < (\beta - \alpha)|u| + C_2 \quad \forall (x, t, u) \in \Omega \times R \quad (4.19)$$

Из полученных неравенств и (4.12) следует:

$$\begin{aligned} \frac{\xi}{\lambda_2 - \alpha} \|p(x, t, u)\|^2 &\geq \int_{\Omega} |p(x, t, u) \cdot u + C_1| dx dt - C_1 \|\Omega\| - \|\omega\| \cdot \|p(x, t, u)\| \geq \\ &\geq \int_{\Omega} |p(x, t, u) \cdot u| - C_1 dx dt - C_1 \|\Omega\| - \|\omega\| \cdot \|p(x, t, u)\| \geq \\ &\geq \int_{\Omega} |p(x, t, u)| \cdot |u| dx dt - 4\pi^2 C_1 - \|\omega\| \cdot \|p(x, t, u)\| \geq \\ &\geq \frac{1}{\beta - \alpha} \|p(x, t, u)\|^2 - C_3 \|p(x, t, u)\| - 4\pi^2 C_1 \quad (4.20) \end{aligned}$$

где $C_3 = \|\omega\| + \pi\sqrt{2}\frac{C_2}{\beta-\alpha}$ Оценив $\lambda_2 - \alpha > \beta - \alpha$ из полученного неравенства и (4.12) получим следующие оценки

$$\|p(x, t, u)\| \leq C_4, \|(A - \alpha I)(u - \xi\omega)\| < C_4. \quad (4.21)$$

Константа C_4 не зависит от ξ . Так как $\alpha \notin \sigma$, из последнего неравенства получим $\|u\| \leq C_5$, C_5 также не зависит от ξ , значит выполнены условия теоремы Лере-Шаудера о неподвижной точке, следовательно существует решение $u \in H$ уравнения (4.10). Гладкость и конечномерность обобщенного решения вытекает из конечномерности ядра оператора $\ker A$ и леммы 2.

Замечание (о единственности решения). Если дополнительно условиям теоремы функция $g(x, t, u)$ удовлетворяет условию

$$\alpha \leq g'_u(x, t, u) \leq \beta \quad \forall (u, x, t) \in R \times \Omega, \quad (4.22)$$

тогда задача (2.1) – (2.4) имеет единственное решение.

Доказательство. Предположим, что имеется два решения уравнения (4.8) u_1, u_2 , тогда

$$p(x, t, u_1) - (A - \alpha)u_1 = -f \quad (4.23)$$

$$p(x, t, u_2) - (A - \alpha)u_2 = -f \quad (4.24)$$

Из (5.2) несложно вывести, что

$$0 \leq (p(x, t, u) - p(x, t, v))(u - v) \leq (\beta - \alpha)(u - v)^2 \quad \forall (x, t) \in \Omega; u, v \in R \quad (4.25)$$

Вычав из (4.23) соотношение (4.24) и умножив скалярно в $L_2(\Omega)$ на $u_1 - u_2$ получим:

$$(h(x, t, u_1) - h(x, t, u_2), (u_1 - u_2)) + ((A - \alpha)(u_1 - u_2), u_1 - u_2) = 0 \quad (4.26)$$

Из неравенства (4.25) следует, что

$$(h(x, t, u_1) - h(x, t, u_2))(u_1 - u_2) \geq \frac{1}{\beta - \alpha}(h(x, t, u_1) - h(x, t, u_2))^2 \quad \forall (x, t) \in \Omega \quad (4.27)$$

Так как $(\alpha - \lambda_2)$ – наибольшее отрицательное собственное значение оператора $\alpha - A$, то из (4.26) и (5.10) получим

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{1}{\beta - \alpha} \|h(x, t, u_1) - h(x, t, u_2)\|^2 - \frac{1}{\lambda_2 - \alpha} \|(\alpha - A)(u_1 - u_2)\|^2 = \\ &= \left(\frac{1}{\beta - \alpha} - \frac{1}{\lambda_2 - \alpha} \right) \|(\alpha - A)(u_1 - u_2)\|^2 \quad (4.28) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $(\alpha - A)(u_1 - u_2) = 0$, это возможно только при $u_1 = u_2$.

Единственность решения доказана.

5. Теорема о существовании решения задачи (2.1) - (2.4) в резонансном случае

Запишем уравнение (2.1) в следующем виде:

$$u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx} = g(u) + f(x, t), \quad x \in (0, \pi), \quad t \in \mathbf{R} \quad (5.1)$$

Пусть функция $g(u)$ имеет вид

$$g(u) = \lambda u + p(u) \quad (5.2)$$

Причем $\lambda \in \sigma$, а функция $p(u)$ ограниченная, то есть существует такая L , что

$$p(u) \leq L \quad \forall u \in \mathbf{R} \quad (5.3)$$

Введем обозначения: $N_2 = \ker(A - \lambda I)$, $N_1 = N_2^\perp$, $N_1, N_2 \in L_2(\Omega)$. Представим функцию $f \in L_2(\Omega)$ в виде суммы

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1 \in N_1, \quad f_2 \in N_2. \quad (5.4)$$

Стоит заметить, что выполнение условий (5.2), (5.3) не гарантирует выполнения утверждения теоремы 1 для задачи (5.1), (2.1) - (2.4). Эта задача будет иметь решение не при всех правых частях $f \in H_1(\Omega)$. Рассмотрим в качестве примера уравнение:

$$u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx} - \lambda u - p(u) = k \cdot \eta. \quad (5.5)$$

Здесь $\lambda \in \sigma$, η – нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция оператора A с собственным значением λ и параметр $k : |k| > M\sqrt{\pi T}$. Чтобы показать, что эта задача не имеет решения, умножим скалярно обе части уравнения 5.5 на η , тогда

$$(Au, \eta) - \lambda(u, \eta) - (p(u), \eta) = k(\eta, \eta) = k \quad (5.6)$$

Преобразуем левую часть, используя то, что оператор A – самосопряженный.

$$\begin{aligned} (Au, \eta) - \lambda(u, \eta) - (p(u), \eta) &= \lambda(u, \eta) - \lambda(u, \eta) - (p(u), \eta) = -(p(u), \eta) = \\ &= - \int_{\Omega} p(u) \cdot \eta dx dt \leq \int_{\Omega} |p(u)| \cdot |\eta| dx dt \leq \int_{\Omega} L |\eta| dx dt \leq L \sqrt{\pi T} \cdot \|\eta\| = L \sqrt{\pi T} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Таким образом, получили, противоречие, значит решения не существует.

Сформулируем теорему о существовании решения задачи (5.1), (2.1) - (2.4)

Теорема. 5 *О существовании и единственности решения задачи (2.1) - (2.4) в резонансном случае.*

Пусть выполнены условия (3.43), (3.44), (5.2), (5.3), $\lambda \in \sigma$, функция $p(u) \in C^1 \mathbf{R}$ не убывает или не возрастает по u . Также предположим, что функция $f(x, t) \in H_1(\Omega)$ имеет представление (5.4) и слагаемое f_2 удовлетворяет либо неравенству:

$$p(-\infty) + \delta \leq -f_2(x, t) \leq p(+\infty) - \delta \quad \forall (x, t) \in \Omega \quad (5.8)$$

в том случае, если $p(x, t)$ не убывает, либо неравенству

$$p(+\infty) + \delta \leq -f_2(x, t) \leq p(-\infty) - \delta \quad \forall (x, t) \in \Omega \quad (5.9)$$

в том случае, если $p(x, t)$ не возрастает с константой $\delta > 0$, $(p(\pm\infty) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(u))$. Тогда задача (5.1), (2.1) - (2.4) имеет обобщенное решение $u \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ и $u_{xx} \in C(\Omega)$

Доказательство. Для определенности положим, что $p(u)$ не убывает. Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$-\varepsilon u + Au - g(u) = f \quad (5.10)$$

Из (5.2), (5.3) следует существование такого $\tilde{\varepsilon}$, что при всех $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon})$ выполнены условия теоремы 1 с нелинейным слагаемым $g_1(u) = p(u) + \lambda u + \varepsilon u$ и константами $\alpha = \lambda + \varepsilon/2$, $\beta = \lambda + 3\varepsilon/2$, покажем это, для этого проверим

выполнение условия 4:

$$\beta \geq \frac{p(u) + \lambda u + \varepsilon u}{u} \geq \alpha \quad (5.11)$$

$$\beta \geq \frac{p(u)}{u} + \lambda \varepsilon \geq \alpha \quad (5.12)$$

При стремлении u к бесконечности в силу того, что функция $p(u)$ ограничена, получим:

$$\beta \geq \lambda \varepsilon \geq \alpha \quad (5.13)$$

Если взять $\alpha = \lambda + \varepsilon/2$, $\beta = \lambda + 3\varepsilon/2$, то при достаточно малых ε промежуток (α, β) не будет содержать значений из спектра, значит условие будет выполнено, следовательно для задачи (5.10) существует решение u_ε . Совершив предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, для этого необходимо получить оценки норм $\|Au_\varepsilon\|$, $\|u_\varepsilon\|_{L_1}$, $\|u_\varepsilon\|_{L_\infty}$, которые не зависят от ε

Представим f_1 в виде суммы ряда Фурье

$$f_1 = \sum_{\mu_{nm} \neq \lambda} (a_{nm}e_{nm}^c + b_{nm}e_{nm}^s) \quad (5.14)$$

для сокращения положим $e_{n0}^s, b_{n0} = 0$. Введем обозначение

$$\omega = (A - \lambda I)^{-1} f_1 = \sum_{\mu_{nm}} \frac{1}{\mu_{nm} - \lambda} (a_{nm}e_{nm}^c + b_{nm}e_{nm}^s). \quad (5.15)$$

Покажем, что $\omega \in C(\Omega)$, для этого покажем сходимость ряда

$$\begin{aligned} \sum_{\mu_{nm}} \frac{1}{\mu_{nm} - \lambda} X_n(a_{nm}e_{nm}^c + b_{nm}e_{nm}^s) &\leq \sum_{\mu_{nm}} \frac{1}{|\mu_{nm} - \lambda|} (|a_{nm}e_{nm}^c| + |b_{nm}e_{nm}^s|) \leq \\ &\leq \sum_{\mu_{nm}} \frac{1}{|\mu_{nm} - \lambda|} A_0 \sqrt{\frac{2}{T}} (|a_{nm}| + |b_{nm}|) \leq A_0 \sqrt{\frac{2}{T}} \left(\sum_{\mu_{nm}} \frac{1}{(\mu_{nm} - \lambda)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|f_1\| \end{aligned} \quad (5.16)$$

Из условия (5.8) следует существование функции $v \in L_\infty(\Omega) : p(v) = -f_2$.

Таким образом u_ε является решение уравнения

$$\varepsilon u_\varepsilon = (A - \lambda I)(u_\varepsilon - \omega) - (p(u_\varepsilon) - p(v)). \quad (5.17)$$

Возьмем $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma$ такие, что $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \cap \sigma = \emptyset$. Умножим (5.17) на $(u_\varepsilon - \omega)$, воспользуемся (5.3), монотонностью p , а также тем, что $(\lambda_1 - \lambda)$ – наибольшее отрицательное собственное значение оператора $(A - \lambda I)$, тогда получим

$$\begin{aligned} (\varepsilon u_\varepsilon, u_\varepsilon - \omega) &= ((A - \lambda I)(u_\varepsilon - \omega), u_\varepsilon - \omega) - (p(u_\varepsilon) - p(v), u_\varepsilon - \omega) \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda - \lambda_1} \|(A - \lambda I)(u_\varepsilon - \omega)\|^2 - (p(u_\varepsilon) - p(v), u_\varepsilon - v) - (p(u_\varepsilon) - p(v), v - \omega) \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda - \lambda_1} \|\varepsilon u_\varepsilon + p(u_\varepsilon) - p(v)\|^2 + C_6 \leq \frac{1}{\lambda - \lambda_1} \|\varepsilon^2 \|u_\varepsilon\|^2 + C_7 \varepsilon \|u_\varepsilon\| + C_7 \end{aligned} \quad (5.18)$$

Тут и далее C_6, C_7, C_8, \dots есть положительные константы, не зависящие от ε . Из полученного выражения выведем оценки для $\varepsilon \|u_\varepsilon\|^2$ и $\|(A - \lambda I)u_\varepsilon\|$.

$$\begin{aligned} \varepsilon \|u_\varepsilon\|^2 &\leq \varepsilon(u_\varepsilon, \omega) + \frac{1}{\lambda - \lambda_1} \varepsilon^2 \|u_\varepsilon\|^2 + C_7 \varepsilon \|u_\varepsilon\| + C_7 \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda - \lambda_1} \varepsilon^2 \|u_\varepsilon\|^2 + C_8 \varepsilon \|u_\varepsilon\| + C_7. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Произведем замену $t = \sqrt{\varepsilon \|u_\varepsilon\|}$, тогда:

$$t^2 \leq \frac{1}{\lambda - \lambda_1} \varepsilon t^2 + C_8 \sqrt{\varepsilon} t + C_7 \quad (5.20)$$

Параметр ε считаем малым, поэтому $1/(\lambda - \lambda_1)\varepsilon < 1/2$, тогда

$$t^2 \leq \frac{1}{2} t^2 + C_8 \sqrt{\varepsilon} t + C_7 \quad (5.21)$$

$$t^2 \leq 2C_8 t + C_7 \quad (5.22)$$

$$(t - C_8 \sqrt{\varepsilon})^2 \leq C_7 + C_8^2 \varepsilon \quad (5.23)$$

$$|t - C_8 \sqrt{\varepsilon}| \leq \sqrt{C_7 + C_8^2 \varepsilon} \quad (5.24)$$

В итоге получаем, что

$$t \leq C_9 = C_8 \sqrt{\varepsilon} + \sqrt{C_7 + C_8^2 \varepsilon} \quad (5.25)$$

тогда

$$\varepsilon \|u_\varepsilon\|^2 < C_9 \quad (5.26)$$

Теперь покажем, что $\|(A - \lambda I)u_\varepsilon\| \leq C_{10}$

$$\begin{aligned} \|(A - \lambda I)u_\varepsilon\| &= \|\varepsilon u_\varepsilon + (p(u_\varepsilon) - p(v)) + (A - \lambda I)\omega\| \leq \\ &\leq \varepsilon \|u_\varepsilon\|^2 + \|p(u_\varepsilon) - p(v)\| + \|f_1\| \leq \sqrt{\varepsilon}C_8 + \sqrt{2}L\|\Omega\| + \|f_1\| \leq C_{10} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Чтобы показать ограниченность $\|u_\varepsilon\|_{L_1}$ введем функцию $\tau \in L_\infty(\Omega)$, такую, что $\|\tau\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \delta/2$, тогда из (5.8)

$$p(-\infty) + \frac{\delta}{2} \leq -f_2 + \tau \leq p(+\infty) - \frac{\delta}{2}, \quad -f_2 + \tau = p(v_\tau), \quad (5.28)$$

где $\|v_\tau\|_{L_\infty} \leq L_\delta$, L_δ не зависит от τ . Соотношение (5.17) примет вид:

$$-\varepsilon u_\varepsilon + (A - \lambda I)(u_\varepsilon - \omega) - p(u_\varepsilon) + p(v_\tau) = \tau \quad (5.29)$$

Получим оценку для $\|u_\varepsilon\|_{L_1}$, для этого умножим это уравнение скалярно в $L_2(\Omega)$ на $u_\varepsilon - v_\tau$, воспользуемся монотонностью функции p .

$$(\tau, u_\varepsilon - v_\tau) = -(\varepsilon u_\varepsilon, u_\varepsilon - v_\tau) + ((A - \lambda I)(u_\varepsilon - \omega), u_\varepsilon - v_\tau) - (p(u_\varepsilon) - p(v_\tau), u_\varepsilon - v_\tau) \quad (5.30)$$

Оценим отдельно первое слагаемое в правой части:

$$\begin{aligned} -(\varepsilon u_\varepsilon, u_\varepsilon - v_\tau) &\leq (\varepsilon u_\varepsilon, v_\tau) = \int_{\Omega} \varepsilon u_\varepsilon v_\tau \leq \\ &\leq \sqrt{\int_{\Omega} \varepsilon u_\varepsilon} \cdot \sqrt{\int_{\Omega} v_\tau} \leq \varepsilon \|u_\varepsilon\| \cdot |\Omega| L_\delta \leq \sqrt{\varepsilon C_9 |\Omega|} \cdot L_\delta. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Тогда

$$\begin{aligned} (\tau, u_\varepsilon - v_\tau) &\leq \sqrt{\varepsilon C_9 |\Omega|} \cdot L_\delta - ((\lambda I - A)(u_\varepsilon - \omega), u_\varepsilon - \omega) + ((A - \lambda I)(u_\varepsilon - \omega), \omega - v_\tau) \leq \\ &\leq \sqrt{\varepsilon C_9 |\Omega|} \cdot L_\delta + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda} \|(\lambda I - A)(u_\varepsilon - \omega)\|^2 + (C_9 + \|f_1\|)(\|\omega\| + L_\delta |\Omega|) \leq \\ &\leq \sqrt{\varepsilon C_9 |\Omega|} \cdot L_\delta + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda} (C_9 + \|f_1\|)^2 + (C_9 + \|f_1\|)(\|\omega\| + L_\delta |\Omega|) \end{aligned} \quad (5.32)$$

Отсюда следует, что $(\tau, u_\varepsilon) < C_{11}$ при любой функции $\tau \in L_\infty(\Omega)$, такой, что $\|\tau\|_{L_\infty} \leq \delta/2$. Таким образом

$$\|u_\varepsilon\|_{L_1} \leq C_{12}. \quad (5.33)$$

Пусть $u_\varepsilon = u_{1\varepsilon} + u_{2\varepsilon}$, где $u_{1\varepsilon} \in N_1, u_{2\varepsilon} \in N_2$. Выведем оценки $\|u_{1\varepsilon}\|_{L_\infty} \leq C_{13}$, $\|u_{2\varepsilon}\| \leq C_{14}$. Используем ограниченность нормы

$$\|(A - \lambda I)u_{1\varepsilon}\|^2 = \sum_{\mu_{nm} \neq \lambda} (\mu_{nm} - \lambda)^2 (a_{nm}^2 + b_{nm}^2) \leq C_9 \quad (5.34)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|u_{1\varepsilon}\| &= \left\| \sum_{\mu_{nm} \neq \lambda} (a_{nm}e_{nm}^c + b_{nm}e_{nm}^s) \right\| \leq \\ &\leq C_0 \sum_{\mu_{nm} \neq \lambda} (|a_{nm}| + |b_{nm}|) \leq C_0 \sum_{\mu_{nm} \neq \lambda} \frac{1}{\mu_{nm} - \lambda} \cdot \mu_{nm} - \lambda \cdot (|a_{nm}| + |b_{nm}|) \leq \\ &\leq C_0 \sqrt{\sum_{\mu_{nm} \neq \lambda} \frac{1}{(\mu_{nm} - \lambda)^2}} \cdot \sqrt{\sum_{\mu_{nm} \neq \lambda} (\mu_{nm} - \lambda)^2 (a_{nm}^2 + b_{nm}^2)} \leq C_0 \hat{C} C_9^2 = C_{13} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Теперь докажем, что $\|u_{2\varepsilon}\| \leq C_{14}$, эта оценка выводится из предыдущей

$$\begin{aligned} \|u_{2\varepsilon}\| &= \|u_\varepsilon - u_{1\varepsilon}\| \leq \|u_\varepsilon\|_{L_1} + \|u_{1\varepsilon}\| \leq C_{12} + \int_{\Omega} |u_{1\varepsilon}| dx dt \leq \\ &\leq C_{12} + \int_{\Omega} C_{13} dx dt = C_{12} + C_{13} \cdot |\Omega| = C_{14} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Покажем теперь ограниченность $\|u_\varepsilon\|$, эта выводится из двух предыдущих оценок

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon\|^2 &= \|u_{1\varepsilon} + u_{2\varepsilon}\|^2 = \|u_{1\varepsilon}\|^2 + \|u_{2\varepsilon}\|^2 \leq C_0 \cdot \|u_{1\varepsilon}\|_{L_\infty}^2 + B_0 \|u_{2\varepsilon}\|_{L_1}^2 \leq \\ &\leq C_0 \cdot C_{13}^2 + B_0 \cdot C_{14}^2 = C_{15}^2 \end{aligned} \quad (5.37)$$

Получили оценку $\|u_\varepsilon\| \leq C_{15}$

Совершим предельный переход в уравнении (5.10) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Из полученных оценок (5.26), (5.27), а так же только что полученной оценки для $\|u_\varepsilon\|$

следует, что существует последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}$: $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и последовательности $\{u_{\varepsilon_n}\}_n$: $u_{\varepsilon_n} \rightarrow u$, $\{(A - \lambda I)u_{\varepsilon_n}\}_n$: $(A - \lambda I)u_{\varepsilon_n} \rightarrow \zeta$ слабо в $L_2(\Omega)$. Пусть $u = u_1 + u_2$, $u_\varepsilon = u_{1\varepsilon_n} + u_{2\varepsilon_2}$, где $u_{1\varepsilon_n}, u_1 \in N_1$, $u_{2\varepsilon_n}, u_2 \in N_2$. Оператор $(A - \lambda I)^{-1} : N_1 \rightarrow N_1$ является вполне непрерывным, из этого следует сильная в $L_2(\Omega)$ сходимость $u_{1\varepsilon_n} \rightarrow (A - \lambda I)^{-1}\zeta$. Отсюда следует, что

$$(A - \lambda I)^{-1}\zeta = u_1 \in N_1 \quad (5.38)$$

$$\zeta = (A - \lambda I)u_1 = (A - \lambda I)u \quad (5.39)$$

$$((A - \lambda I)u_{\varepsilon_n}, u_{\varepsilon_n}) \rightarrow ((A - \lambda I)u, u) \quad (5.40)$$

при $n \rightarrow \infty$. Из монотонности функции следует, что

$$\int_{\Omega} (p(u_{\varepsilon_n}) - p(\theta))(u_{\varepsilon_n} - \theta) dx dt \geq 0 \quad \forall \theta \in L_2(\Omega), \quad (5.41)$$

из (5.10) выведем

$$\int_{\Omega} (-\varepsilon_n u_{\varepsilon_n} + (A - \lambda I)u_{\varepsilon_n} - f - p(\theta))(u_{\varepsilon_n} - \theta) dx dt \geq 0 \quad (5.42)$$

Если перейти в этом неравенстве к пределу $n \rightarrow \infty$, то получим

$$\int_{\Omega} ((A - \lambda I)u - f - p(\theta))(u - \theta) dx dt \geq 0 \quad (5.43)$$

Положим в этом неравенстве $\theta = u - \kappa t$, $\kappa \in D, t > 0$

$$\int_{\Omega} ((A - \lambda I)u - f - p(u - \kappa t))\kappa t dx dt \geq 0 \quad (5.44)$$

Сократим на t и перейдем к пределу $t \rightarrow 0 + 0$, тогда получим

$$\int_{\Omega} ((A - \lambda I)u - f - p(u))\kappa dx dt \geq 0 \quad \forall \kappa \in D \quad (5.45)$$

Отсюда следует, что $(A - \lambda I)u - f - p(u) = 0$. Включения $u \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$, $u_{xx} \in C(\Omega)$ следуют из леммы 2. Таким образом, теорема доказана

6. Постановка задачи 2

Во второй части работы рассматривается квазилинейное уравнение Эйлера—Бернулли

$$u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx} = g(x, t)|u|^{p-2}u, \quad x \in (0, \pi), \quad t \in \mathbf{R} \quad (6.1)$$

с однородными граничными условиями на отрезке

$$u(0, t) = u_{xx}(0, t) = 0, \quad t \in \mathbf{R} \quad (6.2)$$

$$u_x(\pi, t) = u_{xxx}(\pi, t) - hu(\pi t) = 0, \quad t \in \mathbf{R} \quad (6.3)$$

и с условием периодичности по времени

$$u(x, t + T) = u(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (6.4)$$

Граничные условия соответствуют случаю, когда левый конец шарнирно оперт, а правый жестко закреплен. [??] В уравнении (6.1) константы a, h являются положительными и

$$p > 2 \quad (6.5)$$

Цель второй части работы — получить условия существования, несуществования и единственности периодического решения задачи (6.1) – (6.4).

7. Линейное уравнение

7.1. Задача Штурма-Лиувилля, соответствующая случаю закрепления концов

Рассмотрим линейное уравнение:

$$u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx} = f(x, t), \quad x \in (0, \pi), \quad t \in \mathbf{R} \quad (7.1)$$

с однородными граничными условиями на отрезке

$$u(0, t) = u_{xx}(0, t) = 0, \quad t \in \mathbf{R} \quad (7.2)$$

$$u_x(\pi, t) = u_{xxx}(\pi, t) - hu(\pi, t) = 0, \quad (7.3)$$

и с условием периодичности по времени

$$u(x, t + T) = u(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (7.4)$$

Проведем исследование для линейного случая, чтобы в дальнейшем использовать его для квазилинейного случая, в частности построим ортонормированный базис.

Поставим и исследуем задачу Штурма—Лиувилля [10] на поиск собственных значений оператора уравнения (7.1).

$$Y'''' - aY'' = \lambda Y, \quad y \in (0, \pi), \quad a > 0 \quad (7.5)$$

с граничными условиями

$$Y(0) = Y''(0) = 0, \quad (7.6)$$

$$Y'(\pi) = Y'''(\pi) - hY(\pi) = 0. \quad (7.7)$$

По тем же соображениям, что были приведены в первой части работы, λ является положительным.

Рассмотрим задачу (7.5) - (7.7)

$$Y'''' - aY'' = \lambda Y, \quad y \in (0, \pi), \quad a > 0. \quad (7.8)$$

Составим и решим характеристическое уравнение

$$k^4 - ak^2 - \lambda = 0,$$

$$D = a^2 + 4\lambda = 0,$$

$$k^2 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 + 4\lambda}) < 0,$$

$$k^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 4\lambda}) > 0.$$

Произведем замену, для упрощения вычислений

$$-b^2 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 + 4\lambda}), \quad (7.9)$$

$$c^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 4\lambda}), \quad (7.10)$$

$$(7.11)$$

$$k^2 = c^2, \quad k^2 = -b^2,$$

$$k_1 = c, \quad k_2 = -c, \quad k_3 = ib, \quad k_4 = -ib,$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + 4\lambda} - a)}, \quad c = \sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 4\lambda})}. \quad (7.12)$$

В качестве фундаментальной системы решений возьмем

$$\{\operatorname{ch}(cx), \operatorname{sh}(cx), \cos(bx), \sin(bx)\},$$

общий вид частного решения можно представить как

$$Y = C_1 \operatorname{ch}(cx) + C_2 \operatorname{sh}(cx) + C_3 \cos(bx) + C_4 \sin(bx). \quad (7.13)$$

Из первых граничных условий (7.6) следует, что

$$\begin{cases} Y(0) = C_1 + C_3 = 0 \\ Y''(0) = C_1 c^2 - C_3 b^2 = 0, \end{cases}$$

следовательно $C_1 = C_3 = 0$, уравнение (7.13) примет вид

$$Y(y) = C_2 \operatorname{sh} cy + C_4 \sin by$$

Из (7.7) следует, что

$$\begin{cases} C_2 c \operatorname{ch} c\pi + C_4 b \cos b\pi = 0 \\ C_2 (c^3 \operatorname{ch} c\pi - h \operatorname{sh} c\pi) + C_4 (-b^3 \cos b\pi - h \sin b\pi) = 0, \end{cases} \quad (7.14)$$

Эта система имеет решения относительно C_1, C_2 тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю, это условие имеет вид:

$$-c \operatorname{ch} c\pi (b^3 \cos b\pi + h \sin b\pi) = y \cos b\pi (c^3 \operatorname{ch} c\pi - h \operatorname{sh} c\pi)$$

После преобразований получим следующее выражение

$$\operatorname{ctg} b\pi = \frac{1}{\frac{b}{c} \operatorname{th}(c\pi) - \frac{1}{h}(2b^3 + ba)} \quad (7.15)$$

Если подставить в это равенство выражение c через b , то получим

$$\operatorname{ctg} b\pi = \frac{1}{\frac{b}{\sqrt{b^2+a}} \operatorname{th}(\pi\sqrt{b^2+a}) - \frac{1}{h}(2b^3 + ba)} \quad (7.16)$$

После подстановки в него выражений для $y(\lambda), z(\lambda)$ получим трансцендентное уравнение относительно λ . Собственные функции можно представить в виде:

$$Y(y) = C_2 \operatorname{sh} cy + C_4 \sin by, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad (7.17)$$

Выражение для λ примет вид

$$\lambda = b^4 + ab^2 \quad (7.18)$$

7.2. Локализация собственных значений

Проведем исследование корней уравнения (7.16), для этого обозначим $g(b) = \frac{b}{c(b)} \operatorname{th}(\pi c(b)) - \frac{1}{h}(2b^3 + ba)$. Найдем производную функции $g(b)$,

$$g'(b) = \frac{b}{c^3} \operatorname{th}(c\pi) + \frac{b^2\pi}{c^2 \operatorname{ch}^2(c\pi)} - \frac{1}{h}(6b^2 + a)$$

Так как $\operatorname{th}(c\pi) > 0$ при $c > 0$, а так же $a > 0$, $b, h = \text{const} > 0$, то существует такое $b' \in N$, что для любого $b > b'$ $g(b) < 0$ и $g'(b) < 0$, следовательно функция $\frac{1}{g(b)}$, соответствующая правой части уравнения (7.16) является отрицательной и возрастает при $b > b'$. Рассмотрим функцию $G(b) = \operatorname{ctg} b\pi - \frac{1}{g(b)}$. При $n > b' + \frac{1}{2}$ будем иметь следующие соотношения

$$G(n - \frac{1}{2}) = \frac{-1}{g(n - \frac{1}{2})} > 0, \quad (7.19)$$

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow n-0} G(b) &= \lim_{b \rightarrow n-0} \operatorname{ctg}(b\pi) - 1 / \left(\frac{b}{c(b)} \operatorname{th}(\pi c(b)) - \frac{1}{h}(2b^3 + ba) \right) = \\ &= \lim_{b \rightarrow n-0} \operatorname{ctg}(b\pi) = -\infty \end{aligned} \quad (7.20)$$

Отсюда следует, что для $n > b' + \frac{1}{2}$ на каждом интервале $(n - \frac{1}{2}, n)$ найдется корень уравнения (7.16). Левая часть уравнения убывает, а правая возрастает, этот корень единственен на каждом интервале, отсюда следует, что корень b_n уравнения (7.16) можно записать в виде

$$b_n = n - \frac{1}{2} + \rho_n, \text{ где величина } \rho_n \in (0, \frac{1}{2}). \quad (7.21)$$

На промежутке $(n, n + \frac{1}{2})$ решений нет, так как

$$G(n + \frac{1}{2}) = \frac{-1}{g(n + \frac{1}{2})} > 0, \quad \lim_{b \rightarrow n+0} G(b) = +\infty \quad (7.22)$$

Подставим выражение для b_n (7.21) в уравнение (7.15), тогда получим

$$\operatorname{ctg}(\pi(n - \frac{1}{2} + \rho_n)) = \frac{1}{\frac{b_n}{c_n} \operatorname{th} \pi c_n - \frac{1}{h}(2b_n^3 + b_n a)} \quad (7.23)$$

После преобразование получим следующее выражение

$$ctg(\pi\rho_n) = \frac{b_n}{c_n} \operatorname{th} \pi c_n - \frac{1}{h}(2b_n^3 + b_n a) \quad (7.24)$$

Исследуем поведение величины ρ_n при $n \rightarrow +\infty$, для этого сначала оценим правую часть, величина $\frac{b_n}{c_n}$ стремится к при $n \rightarrow +\infty$, $\operatorname{th} \pi c_n$ ограниченная функция и стремится к 1 при $n \rightarrow +\infty$. Величина $(2b_n^3 + b_n a)$ стремится к бесконечности и имеет третий порядок, то есть $O(n^3)$, следовательно

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos \pi \rho_n}{\sin \pi \rho_n} = +\infty, \quad (7.25)$$

следовательно

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \pi \rho_n = 0 \quad (7.26)$$

Это возможно только, если

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_n \rightarrow 0. \quad (7.27)$$

Причем $\rho_n = O(n^3)$, осталось получить строгую оценку скорости роста ρ_n

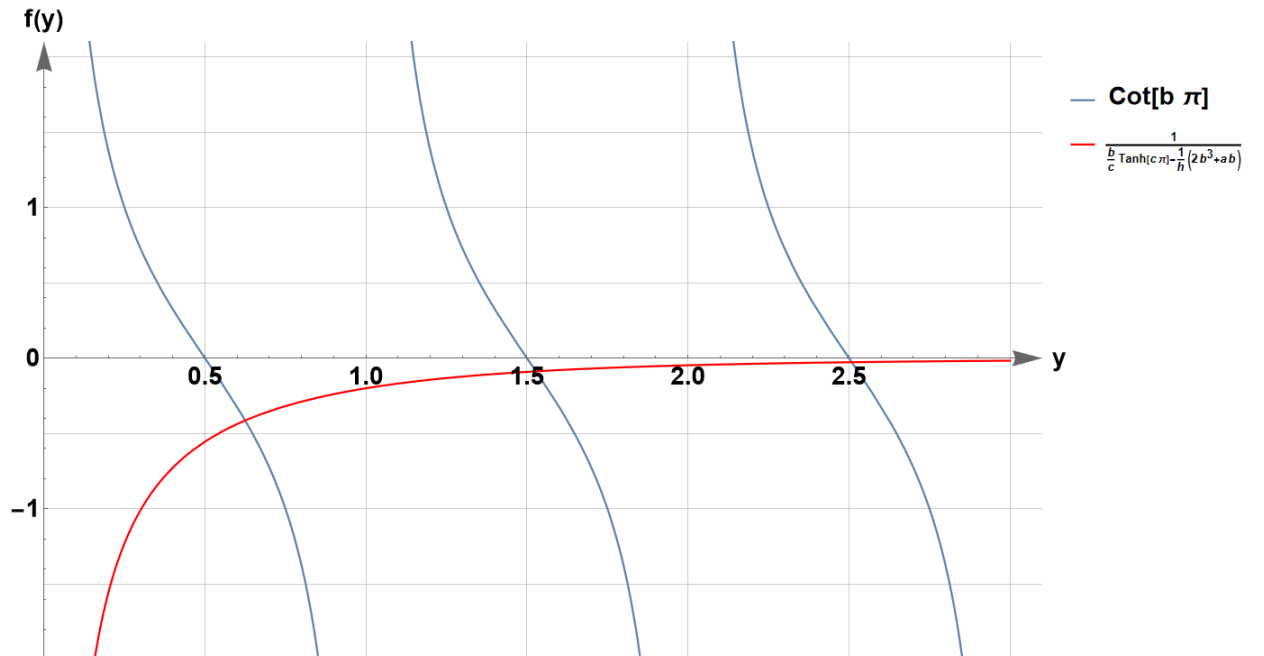


Рис.2 Иллюстрация решения уравнения (6.1)

7.3. Оценка ρ_n

Перепишем уравнение (7.15) в виде:

$$\operatorname{ctg} b_n \pi = \frac{h}{h \frac{b_n}{c_n} \operatorname{th}(c_n \pi) - 2b_n^3 + b_n a} \quad (7.28)$$

После подстановки выражения (7.21) в левую часть, получим

$$\operatorname{ctg}(b_n \pi) = \operatorname{ctg} \left(n - \frac{1}{2} + \rho_n \right) \pi = -\operatorname{tg}(\rho_n) \quad (7.29)$$

Домножим уравнение (7.28) на $\frac{\rho_n}{\operatorname{tg}(\pi \rho_n)}$, получим

$$\rho_n = \frac{\pi \rho_n}{\pi \operatorname{tg}(\pi \rho_n)} \frac{h}{h \frac{b_n}{\sqrt{b_n^2 + a}} \operatorname{th}(\sqrt{b_n^2 + a} \pi) - 2b_n^3 + b_n a} \quad (7.30)$$

Рассмотрим функцию $u(l) = \frac{l}{\operatorname{tg}(l)}$, её производная $u'(l) = \frac{\sin(2l) - 2l}{2 \sin^2(l)}$ отрицательная на промежутке $l \in (0, \frac{\pi}{4})$, так как

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow 0+0} u'(l) &= \lim_{l \rightarrow 0+0} \frac{\sin 2l - 2l}{2 \sin^2 l} = \lim_{l \rightarrow 0+0} \frac{2 \sin l - 2l}{2 \sin^2 l} = \\ &= \lim_{l \rightarrow 0+0} \frac{\cos l - 1}{2 \sin l} = \lim_{l \rightarrow 0+0} \frac{-\sin l}{2 \cos l} = 0 \end{aligned} \quad (7.31)$$

$$u'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{2}}{2 \sin^2(\frac{\pi}{2})} = 1 - \frac{\pi}{2} < 0 \quad (7.32)$$

Тогда для $u(\pi \rho_n)$ будет справедлива формула

$$\frac{\pi}{4} < \frac{\pi \rho_n}{\operatorname{tg}(\pi \rho_n)} < 1 \quad (7.33)$$

Обозначим

$$v(l) = \frac{l}{\sqrt{l^2 + a}} \operatorname{th}(\pi \sqrt{l^2 + a}) \quad (7.34)$$

Тогда для функции $1 - v(l)$ справедливо

$$\begin{aligned} 1 - v(l) &= 1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + a}} \operatorname{th} \left(\pi \sqrt{l^2 + a} \right) = \\ &= \frac{a}{\sqrt{l^2 + a}(\sqrt{l^2 + a} + l)} + \frac{l}{\sqrt{l^2 + a}} \left(1 - \operatorname{th} \left(\pi \sqrt{l^2 + a} \right) \right) \end{aligned} \quad (7.35)$$

Проивведем оценку снизу

$$\begin{aligned}
1 - v(b_n) &= \frac{a}{\sqrt{b_n^2 + a}(\sqrt{b_n^2 + a} + l)} + \frac{b_n}{\sqrt{b_n^2 + a}} \left(1 - \operatorname{th} \left(\pi \sqrt{b_n^2 + a} \right) \right) > \\
&> \frac{a}{\sqrt{b_n^2 + a}(\sqrt{b_n^2 + a} + l)} = \frac{a}{b_n^2 + a + b_n \sqrt{b_n^2 + a}} > \frac{a}{2(b_n^2 + a)} \quad (7.36)
\end{aligned}$$

Теперь оценку сверху

$$\begin{aligned}
1 - v(b_n) &= \frac{a}{\sqrt{b_n^2 + a}(\sqrt{b_n^2 + a} + l)} + \frac{b_n - b_n \operatorname{th} \left(\pi \sqrt{b_n^2 + a} \right)}{\sqrt{b_n^2 + a}} < \\
&< \frac{a}{b_n^2 + a + b_n \sqrt{b_n^2 + a}} + \frac{b_n - b_n \operatorname{th} \left(\pi b_n \right)}{\sqrt{b_n^2 + a}} < \frac{a}{2b_n^2} + b_n - b_n \operatorname{th}(\pi b_n) = \\
&= \frac{a}{2b_n^2} + b_n - b_n \frac{\operatorname{sh}(\pi b_n)}{\operatorname{ch}(\pi b_n)} = \frac{a}{2b_n^2} + b_n - b_n \frac{e^{2\pi b_n} - 1}{e^{2\pi b_n} + 1} = \\
&= \frac{a}{2b_n^2} + \frac{2b_n}{e^{2\pi b_n} + 1} < \frac{a + 2b_n}{2b_n^2}. \quad (7.37)
\end{aligned}$$

Из этих оценок следует оценка для $v(b_n) = \frac{b_n}{\sqrt{b_n^2 + a}} \operatorname{th}(\pi \sqrt{b_n^2 + a})$:

$$1 - \frac{a + 2b_n}{2b_n^2} < \frac{b_n \operatorname{th}(\pi \sqrt{b_n^2 + a})}{\sqrt{b_n^2 + a}} < 1 - \frac{a}{2(b_n^2 + a)} \quad (7.38)$$

Корни уравнения (7.15) лежат на интервале $(n - 1/2, n)$, поэтому для b_n справедливо:

$$\left(n - \frac{1}{2} \right)^k < b_n^k < n^k, \quad k = 2, 3 \quad (7.39)$$

Тогда из оценок (7.33) - (7.39) получим оценку ρ_n :

$$\frac{h/4}{2n^3 + an - h \left(1 - \frac{a+2n}{2(n-\frac{1}{2})^2} \right)} < \rho_n < \frac{h/\pi}{2 \left(n - \frac{1}{2} \right)^3 + a \left(n - \frac{1}{2} \right) - h \left(1 - \frac{a}{2(n^2+a)} \right)} \quad (7.40)$$

Следовательно существуют $C_1, C_2 \in R$ и число $b' \in N$ такие, что для любого $n > b' + \frac{1}{2}$

$$\frac{C_1}{n^3} < \rho_n < \frac{C_2}{n^3} \quad (7.41)$$

7.4. Нормировка собственных функций оператора

Из первого уравнения системы (7.14) выразим C_2

$$C_2 = -C_4 \frac{b \cos(b\pi)}{c \operatorname{ch}(c\pi)} \quad (7.42)$$

Тогда собственные функции представимы в виде:

$$Y_n(y) = C_4 (\sin(b_n y) - \operatorname{sh}(c_n y) \frac{b \cos(b\pi)}{c \operatorname{ch}(c\pi)}) \quad (7.43)$$

Произведем нормировку собственных функций

$$\begin{aligned} \|Y_n\|_{L_2[0,\pi]}^2 &= C_4^2 \left(\int_0^\pi \sin^2(b_n y) dy - 2 \frac{b_n \cos(b_n \pi)}{c_n \operatorname{ch}(c_n \pi)} \int_0^\pi \sin(b_n y) \operatorname{sh}(c_n y) dy + \right. \\ &\quad \left. + \frac{b_n^2 \cos^2(b_n \pi)}{c_n^2 \operatorname{ch}^2(c_n \pi)} \int_0^\pi \operatorname{sh}^2(c_n y) dy \right) = C_4^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin(2\pi b_n)}{4b_n} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{b_n \cos(b_n \pi)}{c_n \operatorname{ch}(c_n \pi)} \frac{1}{b_n^2 + c_n^2} (c_n \sin(b_n \pi) \operatorname{ch}(c_n \pi) - b_n \cos(b_n \pi) \operatorname{sh}(c_n \pi)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{b_n^2 \cos^2(b_n \pi)}{c_n^2 \operatorname{ch}^2(c_n \pi)} \left(\frac{\operatorname{sh}(2\pi c_n)}{4c_n} - \frac{\pi}{2} \right) \right) \quad (7.44) \end{aligned}$$

Из выражений (7.12) для b_n, c_n следует следующее выражение для $\|Y_n\|^2$:

$$\|Y_n\|_{L_2[0,\pi]}^2 = C_4^2 \left(\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad \text{при } n \rightarrow +\infty \quad (7.45)$$

Значит имеет место следующее представление $C_4 = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + O(\frac{1}{n})}}$, тогда выражение для собственных функций примет вид:

$$Y_n(y) = C_n (\sin(b_n y) - \operatorname{sh}(c_n y) \frac{b \cos(b\pi)}{c \operatorname{ch}(c\pi)}), \quad \text{где } C_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + O(\frac{1}{n})}} \text{ при } n \rightarrow +\infty \quad (7.46)$$

7.5. Собственные значения λ_n

Из формул (7.18) и (7.12) вытекает следующее представление для собственных функций

$$\lambda_n = \left(n - \frac{1}{2} + \rho_n\right)^4 + a\left(n - \frac{1}{2} + \rho_n\right)^2 \quad (7.47)$$

В дальнейшем удобно использовать формулу для λ_n (7.2) из работы [6], которая является общей для собственных значений произвольного дифференциального оператора четного порядка с переменными коэффициентами. Для задачи (6.1) - (6.4) справедливо следующее выражение для собственных значений при всех натуральных n

$$\lambda_n = \left(n - \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^4 \quad (7.48)$$

Покажем, что полученное нами выражение, является обобщением формулы (7.48), для этого рассмотрим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[4]{\lambda_n} - \left(n + \frac{1}{2}\right) \right) n, \quad (7.49)$$

где λ_n вычисляются по формуле (7.47). Пусть $\{\kappa_n\}_n$ - числовая последовательность такая, что существует n_0 такое, что для любого $n > n_0$ $0 < \kappa_n < \infty$, тогда выражение (7.49) представимо в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[4]{\left(n - \frac{1}{2} + \frac{\kappa_n}{n^3}\right)^4 + a\left(n - \frac{1}{2} + \frac{\kappa_n}{n^3}\right)^2} - \left(n - \frac{1}{2}\right) \right) n. \quad (7.50)$$

Произведем замену $m = n - \frac{1}{2}$, тогда выражение примет вид

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sqrt[4]{\left(m + \frac{\kappa_{m+\frac{1}{2}}}{(m + \frac{1}{2})^3}\right)^4 + a\left(m + \frac{\kappa_{m+\frac{1}{2}}}{(m + \frac{1}{2})^3}\right)^2} - m \right) \left(m + \frac{1}{2}\right). \quad (7.51)$$

Члены $\frac{\kappa_{m+\frac{1}{2}}}{(m+\frac{1}{2})^3}$, стремятся к нулю при $m \rightarrow \infty$, исключая их, а так же полагая $m+1 \sim m$, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} (\sqrt[4]{m^4 + am^2} - m) \left(m + \frac{1}{2} \right) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[4]{m^8 + am^6} - m^2 = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{m^8 + am^6} - m^4}{\sqrt[4]{m^8 + am^6} + m^2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{am^6}{(\sqrt[4]{m^8 + am^6} + m^2)(\sqrt{m^8 + am^6} + m^2)} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{am^6}{4m^6} = \frac{a}{4} \quad (7.52) \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили первый член ассимптотики слагаемого $O(\frac{1}{n})$ в формуле для λ_n (7.48), следовательно наша формула (7.47) является её обобщением, и с учетом представленных выше выкладок, выражение (7.48) примет вид:

$$\lambda_n = \left(n - \frac{1}{2} + \frac{a}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \quad (7.53)$$

Если значение $b' + \frac{1}{2} \in N$, тогда обозначим $n' = b' + \frac{1}{2}$, если же $b' + \frac{1}{2} \notin N$, то $n' = [b' + \frac{1}{2}] + 1$. Тогда на интервале $(0, n' - \frac{1}{2})$ задача (6.1) - (6.4) имеет конечное число собственных значений [4]. Рассмотрим интервал $(0, n_0 - \frac{1}{2})$, пусть на нём имеется $k, k \in N \cup \{0\}$ собственных значений задачи (6.1) - (6.4) (с учетом кратностей). Введем обозначение $\{\varphi_n\}, \{Y_n\}, n \in N$ соответственно последовательность собственных значений (расположенных в порядке возрастания) и соответствующие им собственные функции. Из (7.53) вытекает, что для $n > k + 1$ справедливо следующее представление

$$\varphi_n = \left(n + n' - k + \frac{3}{2} + \frac{a}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right). \quad (7.54)$$

При этом собственные функции примут следующий вид

$$Y_n = C_n \left(\sin(\tilde{b}_n x) - \frac{\tilde{b}_n}{\tilde{c}_n} \cos(\tilde{b}_n x) \frac{\text{sh}(\tilde{c}_n \pi)}{\text{ch}(\tilde{c}_n \pi)} \right), \quad (7.55)$$

где

$$\tilde{b}_n = n + n' - k - \frac{3}{2} + \rho_n \quad (7.56)$$

$$\tilde{c}_n = \sqrt{\tilde{b}_n^2 + a} \quad (7.57)$$

$$\tilde{n} = n + n' - m - 1 \quad (7.58)$$

7.6. Базисные функции дифференциального оператора P и их свойства

Введем понятие обобщенного решения. Обобщенным решением [9] задачи (3.1) - (3.4) называют такую функцию $u \in L_2(\Omega)$, что для любой функции $\xi \in V : |\xi| < \infty$

$$\int_{\Omega} u(\xi_{tt} + \xi_{xxxx} - a\xi_{xx}) dxdt = \int_{\Omega} f(x, t)\xi dxdt, \quad (7.59)$$

где множество $V = \{\xi \in C^\infty(\Omega) \mid \xi(0, t) = \xi_{xx}(0, t) = 0, \xi(\pi, t) = \xi_{xx}(\pi, t) - h\xi(\pi, t) = 0 \forall t\}$

Решение исходной задачи (6.1) - (6.4) можно представить в виде ряда Фурье по следующей системе функций.

$$\left\{ \sqrt{\frac{p}{\pi q}} Y_n(x) \cos\left(\frac{p}{q}lt\right), \sqrt{\frac{p}{\pi q}} Y_n(x) \sin\left(\frac{p}{q}lt\right), \frac{p}{2\pi q} Y_n(x) \right\}_{l,n \in N},$$

где p, q определяются условием на период:

$$T = 2\pi \frac{q}{p}, \quad q, p \in N, \quad \text{НОД}(q, p) = 1. \quad (7.60)$$

Эта система является полной и ортонормированной в $L_2(\Omega)$. Введем следующие обозначения:

$$g_{nl}^{cos} = \sqrt{\frac{p}{\pi q}} Y_n(x) \cos\left(\frac{p}{q}lt\right) \quad (7.61)$$

$$g_{nl}^{sin} = \sqrt{\frac{p}{\pi q}} Y_n(x) \sin\left(\frac{p}{q}lt\right) \quad (7.62)$$

$$(7.63)$$

Введем в рассмотрение оператор $\tilde{P}: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$, областью определения которого является множество W и $\tilde{P}h = h_{tt} + h_{xxxx} - ah_{xx}$ для $h \in W$. Далее обозначим оператор сопряженный в $L_2(\Omega)$ к \tilde{P} как P ($P = \tilde{P}^*$). Оператор P является самосопряженным в пространстве $L_2(\Omega)$. Введем следующие

обозначения: $Ker(P), R(P)$ - соответственно ядро и образ оператора P . Покажем, что функции (7.61) являются собственными функциями оператора P со следующими собственными значениями:

$$r_{nl} = \varphi_n - \left(\frac{pl}{q}\right)^2, \quad n \in N, l \in Z_+ \quad (7.64)$$

Для это необходимо убедиться в выполнении равенства

$$Pg_{nl}^{sin,cos} = r_{nl}g_{nl}^{sin,cos} \quad (7.65)$$

Оператор задачи (6.1) - (6.4) представим в виде

$$P = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} - a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (7.66)$$

Вычислим

$$\begin{aligned} Pg_{nl}^{sin} &= -\sqrt{\frac{p}{\pi q}} \frac{p^2 l^2}{q^2} \sin\left(\frac{p}{q} lt\right) Y_n + \sqrt{\frac{p}{\pi q}} \sin\left(\frac{p}{q} lt\right) (Y^{(4)} - aY'') = \\ &= \sqrt{\frac{p}{\pi q}} \sin\left(\frac{p}{q} lt\right) \left(\frac{(Y_n^{(4)} - aY_n'')}{Y_n} - \frac{p^2 l^2}{q^2} \right) \cdot Y_n = g_{nl}^{sin} \left(\varphi_n - \left(\frac{pl}{q}\right)^2 \right) = g_{nl}^{sin} r_{nl} \end{aligned} \quad (7.67)$$

Рассмотрением выражения Pg_{nl}^{cos} можно так же показать, что $Pg_{nl}^{cos} = r_{nl}g_{nl}^{cos}$

8. Теорема о существовании решений задачи (6.1) - (6.4)

8.1. Лемма о вполне непрерывности оператора

Будем полагать выполнение следующего условия

$$a > 0, (2a + 1)q/4 \notin \mathbf{N} \quad (8.1)$$

Лемма. Пусть выполнены условия (7.60), (8.1), тогда ядро $N(P)$ оператора P является конечномерным, а оператор $D^{-1} : R(D) \rightarrow R(D)$ является вполне непрерывным

Доказательство. Из условия (7.60) следует, что существует такое число m , что выполнено $\frac{q}{4}(2a + 1) \in (m - 1, m)$. Введем обозначение

$$\sigma_0 = \min \left(\frac{q}{4}(2a + 1) - l + 1, l - \frac{q}{4}(2a + 1) \right) \quad (8.2)$$

Используя выражения (8.2) и (7.54) выведем:

$$\begin{aligned} |q\sqrt{\varphi} - pl| &= \left| q \left(n + n' - k + \frac{3}{2} + \frac{a}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)^2 - pl \right| = \\ &= \left| q \left((n + n' - k - 1)(n + n' - k - 2) + \left(n + n' - k - \frac{3}{2} + \frac{a}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \cdot \right. \right. \\ &\quad \cdot \left. \left(\frac{a}{4n} - \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + (n + n' - k - 1) \left(\frac{a}{4n} + \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right) - pl \right| \end{aligned} \quad (8.3)$$

Введем обозначение $v(n, l) = q(n + n' - k - 1)(n + n' - k - 2) - pl \in \mathbf{Z}$, тогда выражение (8.3) примет вид

$$|q\sqrt{\varphi} - pl| = |v(n, l) + q(2a + 1)/4 + \alpha_n|, \quad (8.4)$$

где $\alpha_n = O(\frac{1}{n})$. Пусть n_1 такое натуральное число, что для любого $n > n_1$ $|\alpha_n| < \frac{\sigma_0}{2}$. Тогда так как для любого $n > n_1$ и $l \in \mathbf{Z}$ $v(n, l)$ принимает только целые значения, при этом выражение $q(2a + 1)/4$ является нецелым, то имеет место следующая оценка

$$v(n, l) + q(2a + 1)/4 > \sigma_0, \quad (8.5)$$

тогда из выражений (8.4) и (8.5) следует оценка

$$|q\sqrt{\varphi} - pl| \geq \frac{\sigma_0}{2}, \quad (8.6)$$

а из выражения (7.64) вытекает следующая оценка

$$|r_n l| \geq \frac{\sigma_0}{2q^2}(q\sqrt{\varphi} + pl). \quad (8.7)$$

Из выражения (8.7) следует, что ядро оператора P конечномерно, то есть равенство $r_{nl} = 0$ выполняется не более чем для конечного числа пар $(n, l) \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}_+$. Следовательно, $\dim \ker P < \infty$, таким образом, доказано первое утверждение леммы. Введем следующие обозначения

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_0}{2p}, \quad y_n = \frac{q}{p}\sqrt{\varphi_n} \quad (8.8)$$

Покажем что следующий ряд является ограниченным в $L_2(\Omega)$, для этого воспользуемся выражениями (7.54), (7.64).

$$\begin{aligned} J &= \sum_{n=n_1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r_{nk}^2} = \frac{1}{q^2} \sum_{n=n_1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(q\sqrt{\varphi_n} - pl)^2 (q\sqrt{\varphi_n} + pl)^2} \leq \\ &\leq \frac{1}{q^2 p^2} \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_n} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l - y_n)^2} \right) \end{aligned} \quad (8.9)$$

Из выражений (8.6), (8.8) следует, что для любого натурального $n > n_1$, $l \in \mathbf{Z}_+$ выполнено неравенство $|l - y_n| \geq \sigma_1$, причем $\sigma_1 \in (0, 1/2]$. Положим $y_n \in (d_n, d_{n+1})$, $d_n \in \mathbf{Z}_+$, тогда имеет место оценка:

$$\begin{aligned} J &\leq \frac{2}{q^4 p^2} \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_n} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l - (y_n - d_n))^2} \right) \leq \\ &\leq \frac{2}{q^4 p^2} \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_n} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(l - (1 - \sigma_1))^2} + \frac{1}{\sigma_1^2} \right) \end{aligned} \quad (8.10)$$

Из сходимости ряда J следует, что оператор $P^{-1} : R(P) \rightarrow R(P)$ является вполне непрерывным. Таким образом, лемма доказана

8.2. Теорема о существовании бесконечного числа решений задачи (6.1) - (6.4)

Пусть функция $g(x, t)$ в уравнении (6.1) удовлетворяет следующим условиям

$$g(x, t) \in C^1(\Omega), \text{ а также } T - \text{периодичная по } t \quad (8.11)$$

$$g(x, t) > 0 \quad \forall (x, t) \in \Omega \quad (8.12)$$

Пусть $H_1(\Omega) = W_2^1(\Omega)$, $H_2(\Omega) = W_2^2(\Omega)$ есть пространства Соболева. Введем множество $V =$

$$\left\{ \psi \in C^\infty(\Omega) \mid \psi(0, t) = \psi_{xx}(0, t) = 0, \quad \psi(\pi, t) = \psi_{xxx}(\pi, t) - h\psi(\pi, t) \right\}_{l, n \in \mathbb{N}},$$

Определение. Обобщенным решением задачи (6.1)–(6.4) называется функция $u \in L_2(\Omega)$ такая, что

$$\int_{\Omega} (u(\psi_{tt} + \psi_{xxxx} - a\psi_{xx}) + g(x, t)|u|^{p-2}u\psi) dx dt = 0 \quad \forall \psi \in V \quad (8.13)$$

Торема. Пусть выполнены условия (6.5), (7.60), (8.1), (8.11), (8.12), тогда для любого $r > 0$ задача (6.1)–(6.4) имеет обобщенное решение

$$u \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega), \quad (8.14)$$

такое, что $\|u\|_p \geq r$, $u_{xx}, u_{xxx} \in C(\Omega)$ и граничные условия (6.2)–(6.3) выполнены в классическом смысле.

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся вариационным методом. Введем обозначение: $Q_l, l \in \mathbb{N}$ подпространства $L_2(\Omega)$, которые состоят из конечных линейных комбинаций элементов следующего множества

$$\left\{ Y_m(x) \cos \left(\frac{p}{q} kt \right), Y_m(x) \sin \left(\frac{p}{q} kt \right) \right\}, m \in [1, l], \quad k \in [0, l]$$

Подпространства Q_l являются конечномерными, это следует из леммы и выражения (8.7), введём на Q_l функционал

$$N(u) = \frac{1}{2}(Pu, u) + \frac{1}{p} \int_{\Omega} g(x, t)|u|^p dx dt \quad (8.15)$$

Для доказательства существования критических точек функционала N воспользуемся методом из работы [5]. Введем разбиение исходного пространства Q_l на прямую сумму двух подпространств $Q_l = D^\delta + U^\delta$. Базисы в данных пространствах задаются соответственно:

$$\left\{ Y_m(x) \cos\left(\frac{p}{q}kt\right), Y_m(x) \sin\left(\frac{p}{q}kt\right) \right\}, r_{mk} \leq \delta, \quad m \in [1, l], \quad k \in [0, l]$$

$$\left\{ Y_m(x) \cos\left(\frac{p}{q}kt\right), Y_m(x) \sin\left(\frac{p}{q}kt\right) \right\}, r_{mk} > \delta, \quad m \in [1, l], \quad k \in [0, l]$$

Покажем, что существует

$$d \in (0, 1), \quad (8.16)$$

независящее от l такое, что

$$\|u\|_p^2 \leq C_1 \sum_{m=1}^l \sum_{k=0}^l |r_{mk}|^d (a_{mk}^2 + b_{mk}^2) \quad (8.17)$$

для любой функции u из $Q_l \cap R(P)$, где $R(P)$ — область определения оператора P , a_{mk}, b_{mk} — коэффициенты разложения функции u в ряд Фурье по системе базисных функций, а C_1 не зависит от u и l . Введем вспомогательные обозначения

$$p_1 = \frac{p}{p-1}, \quad \xi = \frac{2}{p_1}, \quad \xi_1 = \frac{\xi}{\xi-1}, \quad \rho \in \left(\frac{p-2}{2(p-1)}, \frac{2}{2(p-1)} \right) \quad (8.18)$$

Используя неравенства Хаусдорфа—Юнга, Гёлдера, а так же условие огра-

ниченности собственных функций из базиса выведем

$$\begin{aligned}
\|u\|_p &\leq C_0 \left(\sum_{m=1}^l \sum_{k=0}^l (|a_{mk}|^{p_1} + |b_{mk}|^{p_1}) \right)^{\frac{1}{p_1}} = \\
&= C_0 \left(\sum_{m=1}^l \sum_{k=0}^l |r_{mk}|^{-\rho} (|r_{mk}|^\rho |a_{mk}|^{p_1} + |r_{mk}|^\rho |b_{mk}|^{p_1}) \right)^{\frac{1}{p_1}} = \\
&= C_0 \left(\sum_{m=1}^l \sum_{k=0}^l \frac{1}{|r_{mk}|^{\rho \xi_1}} \right)^{\frac{1}{\xi_1 p_1}} \cdot \left(\sum_{m=1}^l \sum_{k=0}^l |r_{mk}|^{\rho \xi} (|a_{mk}|^{\xi p_1} + |b_{mk}|^{\xi p_1}) \right)^{\frac{1}{\xi p_1}} = \\
&= C_0 \left(\sum_{m=1}^l \sum_{k=0}^l \frac{1}{|r_{mk}|^{\rho \xi_1}} \right)^{\frac{1}{\xi_1 p_1}} \cdot \left(\sum_{m=1}^l \sum_{k=0}^l |r_{mk}|^{\frac{2(p-1)\rho}{p}} (|a_{mk}|^2 + |b_{mk}|^2) \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Если обозначить

$$d = \frac{2(p-1)\rho}{p}, \quad c = \rho \xi_1 = \frac{2(p-1)\rho}{p-2} \in (1, +\infty), \quad (8.19)$$

тогда $d \in (0, 1)$ и неравенство (8.17) выполнено с константой

$$C_1 = C_0 \left(\sum_{m=1}^l \sum_{k=0}^l \frac{1}{|r_{mk}|^\rho} \right)^{\frac{2}{\xi_1 p_1}} \quad (8.20)$$

Здесь и далее C_1, C_2, \dots будут обозначать константы, которые не зависят от l . Обозначим через R_l множество таких функций w , для которых имеет место следующее представление

$$w = \sum_{m=1}^l \sum_{k=0}^l Y_m \left(a_{mk} \cos \left(\frac{p}{q} kt \right) + b_{mk} \sin \left(\frac{p}{q} kt \right) \right) \quad (8.21)$$

$$\sum_{m=1}^l \sum_{k=0}^l |r_{mk}|^d (a_{mk}^2 + b_{mk}^2) = 1 \quad (8.22)$$

То есть для функций из единичного шара в норме

$$|||w|||_s = \sum_{m=1}^l \sum_{k=0}^l |r_{mk}|^s (a_{mk}^2 + b_{mk}^2) \quad (8.23)$$

Оценим значения функционала N на множестве $R_l \cap D^{-\delta}$, причем $\delta > 0$, сначала проведем оценку сверху:

$$N(u) \leq -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^l \sum_{k=0}^l |r_{mk}| (a_{mk}^2 + b_{mk}^2) + \frac{g^+}{p} \|u\|_p \leq -\frac{1}{2} \delta^{1-d} + \frac{g^+}{p} \sqrt{C_1}, \quad (8.24)$$

для всех функций u , удовлетворяющих условию

$$u = \sum_{m=1}^l \sum_{k=0}^l Y_m \left(a_{mk} \cos \left(\frac{p}{q} kt \right) + b_{mk} \sin \left(\frac{p}{q} kt \right) \right) \in R_l \cap D^{-\delta}. \quad (8.25)$$

Выберем произвольное число $L > 0$, обозначим

$$\delta_L = \left(2 \left(L + \frac{g^+}{p} \sqrt{C_1} \right) \right)^{\frac{1}{1-d}} \quad (8.26)$$

Тогда имеет место следующее неравенство

$$N(u) \leq -L \quad \forall u \in R_l \cap D^{-\delta_L} \quad (8.27)$$

Возьмем произвольное число κ , тогда для любой функции $u \in U^{-\kappa}$ выполняется

$$N(u) \geq -\frac{1}{2}\kappa\|u\|^2 + \frac{g^-}{p}\|u\|_p^p \geq C_2\|u\|^p - \frac{1}{2}\kappa\|u\|^2 \quad (8.28)$$

Обозначим

$$f(t) = C_2 t^p - \frac{1}{2}\kappa t^2 \quad (8.29)$$

Найдем минимум этой функции, для этого решим уравнение $f'(t) = 0$, тогда получим

$$C_2 p t^{p-1} - \kappa t = 0 \quad (8.30)$$

Это выполняется для

$$t_{min} = \left(\frac{C_2 p}{\kappa} \right)^{\frac{1}{2-p}}$$

После подстановки t_{min} в функцию $f(t)$ получим следующее выражение

$$\begin{aligned} f(t_{min}) &= C_2 \left(\frac{C_2 p}{\kappa} \right)^{\frac{p}{2-p}} - \frac{1}{2} \left(\frac{C_2 p}{\kappa} \right)^{\frac{2}{2-p}} \kappa = C_2^{\frac{2}{2-p}} p^{\frac{p}{2-p}} \kappa^{\frac{p}{p-2}} - \frac{1}{2} C_2^{\frac{2}{2-p}} p^{\frac{2}{2-p}} \kappa^{\frac{p}{p-2}} = \\ &= \kappa^{\frac{p}{p-2}} (C_2 p)^{\frac{2}{2-p}} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) = \frac{2-p}{2p(C_2 p)^{\frac{2}{p-2}}} \kappa^{\frac{p}{p-2}} = C_3 \kappa^{\frac{p}{p-2}}, \end{aligned} \quad (8.31)$$

где

$$C_3 = \frac{2-p}{2p(C_2 p)^{\frac{2}{p-2}}}, \quad g^- = \min_{\Omega} g(x, t), \quad g^+ = \max_{\Omega} g(x, t) \quad (8.32)$$

Оно выполнено для любого u из $U^{-\kappa}$. Введем обозначение

$$z_{\kappa} = C_3 \kappa^{\frac{p}{p-2}} - 1 \quad (8.33)$$

Зафиксируем число L , пусть число L_1 такое, что $L_1 > \delta_L$, а также $D^{-L_1} \neq D^{-\delta_L}$. Из этого вытекает существование собственной функции $p(x, t) \in R_l$ оператора P с собственным значением $r \in (-L_1, -\delta_L]$, тогда имеет место следующее неравенство

$$-z_{L_1} < N(p) \leq -L, \quad -z_{L_1} < -L$$

Далее покажем, что на отрезке $[-z_{L_1}]$ существует значение функционала $N(u)$ в его критической точке. Доказательство будем проводить от противного, предположим что на отрезке $[-z_{L_1}]$ нет критических значений функционала N . Тогда из деформационной леммы [7] следует существование такого непрерывного нечетного отображения $h : Q_l \rightarrow Q_l$, что если функция $u \in Q_l$, а $N(u) \leq -L$, то $h(N(u)) < -z_{L_1}$. Введем разбиение любой функции $u \in Q_l$ на сумму $u = u^D + u^U$, где $u^D \in D^{-L_1}$, $u^U \in U^{-L_1}$. Пусть K есть линейный оператор, такой, что

$$K : Q_l \rightarrow D^{-L_1}, \quad Ku = u^D \quad \forall u \in Q_l$$

, то есть является проектором. Отображение $Kh : Q_l \rightarrow D^{-L_1}$ является нечетным и переводит пространство $R_l \cup D^{-L_1}$ в подмножество пространства D^{-L_1} меньшей размерности. Тогда удовлетворяются условия теоремы Борсука, из нее следует, что существует $v_0 \in R_l \cup D^{-\delta_L}$, для которого выполняется:

$$Kh(v_0) = 0 \quad (8.34)$$

Значит, $h(v_0) = (h(v_0))^D \in D^{-L_1}$, а

$$N(h(v_0)) > z_{L_1} \quad (8.35)$$

В то же время, $N(v_0) < L$, отсюда следует, что

$$N(h(v_0)) \leq -z_{L_1} \quad (8.36)$$

Это противоречит (8.35), из этого противоречия следует, что существует такая функция $u_l \in Q_l$, такая, что

$$N'(u_l) = 0, \quad N(u_l) \in [-z_{L_1}, -L] \quad (8.37)$$

Таким образом, существование критической точки функционала на отрезке $[-z_{L_1}, -L]$ доказано. Проведем предельный переход при $l \rightarrow \infty$, для этого оценим $\|u_l\|_p$. Из (8.37) получаются следующие соотношения:

$$(Pu_l, \psi) + \int_{\Omega} g(x, t) |u_l|^{p-2} u_l \psi dx dt = 0 \quad \forall \psi \in Q_l, \quad (8.38)$$

$$z_{L_1} \leq \frac{1}{2}(Pu_l, u_l) + \frac{1}{p} \int_{\Omega} g(x, t) |u_l|^p dx dt \leq L. \quad (8.39)$$

Если положить в равенстве (8.38) $\psi = u_l$, далее умножить полученное выражение на $1/2$ и вычесть из него (8.39), то получим (с учетом условия $p > 2$):

$$L \leq \int_{\Omega} g(x, t) \left(\frac{1}{2} |u_l|^{p-2} u_l^2 - \frac{1}{p} |u_l|^p \right) dx dt \leq z_{L_1} \quad (8.40)$$

$$L \leq \int_{\Omega} g(x, t) |u_l|^{p-2} \left(\frac{1}{2} u_l^2 - \frac{1}{p} |u_l|^2 \right) dx dt \leq z_{L_1} \quad (8.41)$$

$$L \leq \int_{\Omega} g(x, t) |u_l|^{p-2} |u_l|^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) dx dt \leq z_{L_1} \quad (8.42)$$

$$\frac{2p}{p-2} L \leq \int_{\Omega} g(x, t) |u_l|^p dx dt \leq \frac{2p}{p-2} z_{L_1} \quad (8.43)$$

$$(8.44)$$

Разобьем полученное выражение на два неравенства и рассмотрим их отдель-

но

$$\frac{2p}{p-2}L \leq \int_{\Omega} g(x, t)|u_l|^p dx dt \quad (8.45)$$

$$\frac{2p}{(p-2)g^-}L \leq \int_{\Omega} |u_l|^p dx dt \quad (8.46)$$

$$\frac{2p}{(p-2)g^-}L \leq \|u_l\|_p^p \quad (8.47)$$

$$(8.48)$$

С другой стороны

$$\int_{\Omega} g(x, t)|u_l|^p dx dt \leq \frac{2p}{p-2}z_{L_1} \quad (8.49)$$

$$\int_{\Omega} |u_l|^p dx dt \leq \frac{2p}{(p-2)g^+}z_{L_1} \quad (8.50)$$

$$\|u_l\|_p^p \leq \frac{2p}{(p-2)g^+}z_{L_1} \quad (8.51)$$

$$(8.52)$$

Итоговая оценка примет вид

$$C_3 \leq \|u_l\|_p^p \leq C_4, \quad (8.53)$$

где $C_3 = \frac{2p}{(p-2)g^-}L$, $C_4 = \frac{2p}{(p-2)g^+}z_{L_1}$. Из (8.53) следует существование подпоследовательности $u_{l_k} = w_k$, такой, что $w_k \rightarrow u$, слабо в $L_p(\Omega)$, а функция $g(x, t)|w_k|^{p-2}w_k \rightarrow g_0$ слабо в $L_{p_1}(\Omega)$. Рассмотрим задачу (6.1) — (6.4), покажем, что u является её обобщенным решением. Пусть функции w_k, u представляются в виде рядов Фурье по системе базисных функций с коэффициентами $\{a_{ij}^k, b_{ij}^k\}, \{a_{ij}, b_{ij}\}$ соответственно. Проведем оценку значения суммы

$$J_M^k = \sum_{|r_{ij}| \geq M} |r_{ij}|((a_{ij}^k)^2 + (b_{ij}^k)^2), \quad (8.54)$$

для этого введем обозначение

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, t > 0 \\ -1, t \leq 0 \end{cases}$$

Подставим в выражение (8.38) функцию

$$\psi_0 = \sum_{|r_{ij}| \geq M} \eta(r_{ij}) Y_i(x) \left(a_{ij} \cos \left(\frac{p}{q} jt \right) + b_{ij} \sin \left(\frac{p}{q} jt \right) \right), \quad (8.55)$$

тогда применяя неравенство Гёлдера, а так же (8.17) получим

$$\begin{aligned} J_M^k &\leq g^+ \int_{\Omega} |w_k|^{p-1} |\psi_0| dx dt \leq \\ &\leq g^+ C_5^{\frac{p-1}{p}} \sqrt{C_1 \sum_{|r_{ij}| \geq L} |r_{ij}|^d ((a_{ij}^k)^2 + (b_{ij}^k)^2)} \leq \sqrt{C_1} g^+ C_5^{\frac{p-1}{p}} \frac{1}{M^{\frac{1-d}{2}}} \sqrt{J_M^k} \end{aligned} \quad (8.56)$$

Отсюда следует, что

$$J_M^k \leq \sqrt{C_1} g^+ C_5^{\frac{p-1}{p}} \frac{1}{M^{\frac{1-d}{2}}} \sqrt{J_M^k} \quad (8.57)$$

$$(J_M^k)^2 \leq C_1 \cdot (g^+)^2 C_5^{\frac{2(p-1)}{p}} \frac{1}{M^{1-d}} J_M^k \quad (8.58)$$

$$J_M^k \left(J_M^k - C_1 \cdot (g^+)^2 C_5^{\frac{2(p-1)}{p}} \frac{1}{M^{1-d}} \right) \leq 0 \quad (8.59)$$

В следствии неотрицательности J_M^k получаем

$$J_M^k \leq \frac{C_6}{M^{1-d}}, \quad (8.60)$$

где $C_6 = C_1 \cdot (g^+)^2 C_5^{\frac{2(p-1)}{p}}$. Из ограниченности этого ряда следует существование предела

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (Pw_k, w_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} r_{ij} (a_{ij}^2 + b_{ij}^2) \quad (8.61)$$

Зафиксируем функцию $\psi \in Q_{l_0}$, $l_0 \in \mathbf{N}$ и перейдем в равенстве 8.38 к пределу в подпоследовательности u_{l_k} при $l \rightarrow \infty$

$$(u, P\psi) + \int_{\Omega} p_0 \psi dx dt = 0 \quad (8.62)$$

Требуется показать, что

$$p_0 = g(x, t) |u|^{p-2} u \quad (8.63)$$

Положим в равенстве (8.38) $\psi = w_k$, $l = l_k$ и перейдем к пределу при $l \rightarrow \infty$, тогда получим

$$\lim_{l \rightarrow \infty} (Pw_k, w_k) + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g(x, t) |w_k|^p dx dt = 0. \quad (8.64)$$

Из равенства (8.61) вытекает, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} (Pw_k, w_k) = - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g(x, t) |w_k|^p dx dt = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} r_{ij} (a_{ij}^2 + b_{ij}^2) \quad (8.65)$$

Докажем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (u, Pw_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} r_{ij} (a_{ij}^2 + b_{ij}^2) \quad (8.66)$$

Введем обозначение

$$I_M^l = \sum_{i,j} |r_{ij}| ((a_{ij})^2 + (b_{ij})^2), \quad |r_{ij}| \geq M; \quad i, j < l \quad (8.67)$$

Тогда, если в (8.62) подставить $\psi = \psi_0$, где

$$\psi_0 = \sum_{i,j} \eta(r_{ij}) Y_i(x) \left(a_{ij} \cos \left(\frac{p}{q} j t \right) + b_{ij} \sin \left(\frac{p}{q} j t \right) \right), \quad |r_{ij}| \geq M; \quad i, j < l, \quad (8.68)$$

то получим

$$\begin{aligned} I_M^l &= - \int_{\Omega} p \psi_0 dx dt \leq \|h\|_{p_1} \|\psi_0\|_p \leq \\ &\leq \|p\|_{p_1} \sqrt{C_1} \sqrt{\sum_{|r_{ij}| \geq M; \quad i,j \leq l} |r_{ij}|^d ((a_{ij})^2 + (b_{ij})^2)} \leq \frac{\|p\|_{p_1} \sqrt{C_1}}{L^{1-\frac{d}{2}}} \sqrt{I_M^l} \end{aligned} \quad (8.69)$$

Тогда,

$$I_M^l \leq \frac{\|p\|_{p_1} \sqrt{C_1}}{L^{1-\frac{d}{2}}} \sqrt{I_M^l} \quad (8.70)$$

$$(I_M^l)^2 \leq \frac{\|p\|_{p_1}^2 C_1}{L^{2-d}} I_M^l \quad (8.71)$$

$$I_M^l \left(I_M^l - \frac{\|p\|_{p_1}^2 C_1}{L^{2-d}} \right) \leq 0 \quad (8.72)$$

Если учесть, что $I_M^l > 0$, то получим

$$I_M^l \leq \frac{C_7}{L^{2-d}}, \quad (8.73)$$

где $C_7 = \|p\|_{p_1}^2 C_1$, тогда существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I_M^{l_k} = \sum_{|r_{ij}| \geq M} |r_{ij}|((a)_{ij}^2 + (b)_{ij}^2) \equiv I_M \quad (8.74)$$

При этом $I_M \leq \frac{C_7}{M^{1-d}}$. Тогда из (8.74) и (8.61) вытекает (8.66). Подставим в (8.62) $\psi = w_k$, тогда если перейти к пределу при $k \rightarrow \infty$, то получим следующие равенства

$$\int_{\Omega} p_0 u dx dt = - \lim_{k \rightarrow \infty} (u, P w_k) = - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} r_{ij} (a_{ij}^2 + b_{ij}^2). \quad (8.75)$$

Тогда из выражений (8.65) и (8.75) вытекает, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g(x, t) |w_k|^p dx dt = \int_{\Omega} p_0 u dx dt \quad (8.76)$$

Для любой функции $w \in L_p(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} g(x, t) (|w|^{p-2} w - |w_k|^{p-2} w_k) (w - w_k) dx dt \geq 0 \quad (8.77)$$

Перейдем к пределу при $k \rightarrow \infty$, с учетом выражения 8.76

$$\int_{\Omega} (g(x, t) |w|^{p-2} w - p_0) (w - u) dx dt \geq 0 \quad \forall w \in L_p(\Omega) \quad (8.78)$$

Отсюда несложно вывести равенство (8.63). Тогда из (8.62), (8.63) следует, что u является обобщенным решением задачи (6.1)–(6.4). Из оценки (8.53) и выражений (8.63), (8.76) вытекает оценка

$$\|u\|_p^p \geq \frac{2pg_-}{(p-2)(g^+)^2} L \quad (8.79)$$

Утверждения о гладкости u (включения $u \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$, $u_{xx}, u_{xxx} \in C(\Omega)$) доказываются из (7.54), (8.6), (8.7), с помощью рядов Фурье, используя метод работы [8]. Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первой части работы была рассмотрена задача о периодических решениях квазилинейного уравнения Эйлера—Бернулли с граничными условиями (2.2)—(2.3), соответствующими случаю, когда один конец балки жестко закреплен, а другой шарнирно оперт. Была исследована соответствующая задача Штурма-Лиувилля на поиск собственных значений и собственных функций. В результате решения этой задачи было получено трансцендентное уравнение на собственные значения, произведена полная локализация собственных значений и выведены асимптотические оценки для собственных значений. Были доказаны теоремы о существовании и единственности решения исходной задачи в нерезонансном и резонансном случаях.

Во второй части работы была рассмотрена задача о периодических решениях квазилинейного уравнения Эйлера—Бернулли с граничными условиями (6.2)—(2.3). Как и в первой части, была поставлена и исследована задача Штурма-Лиувилля, а также получено трансцендентное уравнение на собственные значения и проведено его исследование. Была доказана теорема о существовании и единственности решения задачи.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. M. Yamaguchi "Existence of periodic solutions of second order nonlinear evolution equations and applications Funkcialaj Ekvacioj, 38, 519-538 (1995).
2. I.A. Rudakov, "On periodic solutions of a beam vibration equation Differential Equations, 54, No 5, 687-695 (2018). DOI 10.1134/S0012266118050117
3. Ji S. Periodic solutions for one dimensional wave equation with bounded nonlinearity. J. Differential Equations. 2018. v. 264. No 9. p. 5527-5540.
4. М.А. Наймарк, "Линейные дифференциальные операторы Физматлит, М.(2010).
5. O. Vevoda, "Partial differential equation,"Nordhoff, Groningen (1981).
6. A.I. Nazarov, Y. Y. Nikitin, "Exact L2-small ball behavior of integrated Gaussian processes and spectral asymptotics of boundary value problems, "Probability Theory and Related Fields V. 129, № 4, 469-494 (2004).
7. L. Nirenberg. "Variational and topological methods in nonlinear problems,"Bull. Amer. Math. Soc.(N.S.), 1981. V 4. N 3. P. 267-302.
8. I. A. Rudakov "Periodic solutions of the quasilinear equation if forced beam vibration with homogeneous boundary conditions,"Izvestiya: Mathematics, 79, No 5, 1064-1086 (2015).
9. Ф.А. Березин, М.А.Шубин. Уравнение Шрёдингера. М: Изд-во Моск. ун-та, 1983. - 392 с.
10. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. М: Издательство Наука, 1977. - 735 с.

11. Рудаков И.А. Периодические решения квазилинейного уравнения колебаний балки с однородными граничными условиями. Дифференциальные уравнения, 2012. - 48 с.
12. Рудаков И.А. Периодические решения квазилинейного уравнения вынужденных колебаний балки. Серия математическая. М: Известия РАН, 2015. - 34 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Графическая часть дипломного проекта

В графическую часть дипломного проекта входят:

1. иллюстрация решения уравнения (2.1);
2. иллюстрация решения уравнения (6.1);
3. иллюстрация теоремы.

