Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Фундаментальные науки»

КАФЕДРА «Прикладная математика»

РАСЧЁТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ

НА ТЕМУ:

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ С ЖЕСТКО ЗАКРЕПЛЕННЫМ КОНЦОМ

Студент группы ФН2-81	______________ (Подпись, дата)	М.Д. Зиновьев
Руководитель ВКР	______________ (Подпись, дата)	И.А. Рудаков
Нормоконтролер	______________ (Подпись, дата)	М.М. Лукашин

2020 г.

АННОТАЦИЯ

Расчётно-пояснительная записка 64 с., 2 рис., 11 источников.

Объектом исследования является квазилинейное уравнение Эйлера—Бернулли. Метод исследования — использование аппарата нелинейного функционального анализа

Цель работы — получить условия существования, несуществования и единственности периодического решения уравнения, в случаях когда нелинейное слагаемое удовлетворяет условию нерезонансности на бесконечности, или когда разность между ним и линейной функцией представляет собой ограниченную функцию, причем коэффициент линейной функции совпадает с собственным значением дифференциального оператора.

Поставленная цель достигается с помощью методов: малого параметра, компактности, монотонности и принципа Лере—Шаудера о неподвижной точке

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

Во многих физических задачах, связанных с процессами колебаний, возникаают квазилинейные эволюционные уравнения. В данной работе рассматривается квазилинейное уравнение Эйлера—Бернулли, описывающее процессы колебаний проводов, стержня, способного сопротивлятся изгибу и двутавровых балок:

$$u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx} = g(x,t,u) + f(x,t),\ x \in (0,\pi),\ t \in \mathbf{R} \tag{1.1}$$

с однородными граничными условиями на отрезке

$$u(0,t) = u_x(0,t) = 0,\ t \in \mathbf{R} \tag{1.2}$$

$$u(\pi,t) = u_x(\pi,t) = 0,\ t \in \mathbf{R} \tag{1.3}$$

и с условием периодичности по времени

$$u(x,t+T) = u(x,t),\ 0 < x < \pi,\ t \in \mathbf{R}. \tag{1.4}$$

Если внешняя сила f и нелинейное слагаемое g периодичны по времени с периодом T, то возникает задача о доказательстве существования $T-$периодических по времени решений

Начиная с семидесятых годов 20-го века вышло большое число работ, посвященных задачам о периодических и квазипериодических решениях нелинейных эволюционных уравнений, таких как волнове уравнение и уравнение Эйлера—Бернулли. В этих статьях были доказаны теоремы о существовании периодических решений для волнового уравнения с постоянными и переменными коэффициентами. В целом для данных задач было разработано множество методов.

2. Постановка задачи

Рассматривается квазилинейное уравнение вынужденных колебаний двутавровой балки (1.1). С граничными условиями ((1.2), (1.3).

Цель первой чаасти работы — получить условия существования, несуществования и единственности периодического решения задачи (1.1) – (1.4), в случаях когда нелинейное слагаемое удовлетворяет условию резонансности и нерезонанстности на бесконечности.

3. Линейное уравнение

Рассмотрим линейное уравнение:

$$u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx} = f(x,t),\ x \in (0,\pi),\ t \in \mathbf{R} \tag{3.1}$$

с однородными граничными условиями на отрезке

$$u(0,t) = u_x(0,t) = 0,\ t \in \mathbf{R} \tag{3.2}$$

$$u(\pi,t) = u_x(\pi,t) = 0,\ t \in \mathbf{R} \tag{3.3}$$

и с условием периодичности по времени

$$u(x,t+T) = u(x,t),\ 0 < x < \pi,\ t \in \mathbf{R}. \tag{3.4}$$

Проведем исследование для линейного случая, чтобы в дальнейшем использовать его для квазилинейного случая, в частности построим ортонормированный базис.

3.1. Задача Штурма-Лиувилля, соответствующая случаю закрепления концов

Рассмотрим задачу Штурма—Лиувилля на поиск собственных значений оператора уравнения (3.1). Любое нетривиальное решение задачи Штурма—Лиувилля называется собственной функцией $X(x)$, а определенные при этом значения параметра λ — собственными значениями

$$X'''' - aX'' = \lambda X, x \in (0, \pi),\ a > 0 \tag{3.1}$$

с граничными условиями

$$X(0) = X'(0) = 0, \tag{3.2}$$

$$X(\pi) = X'(\pi) = 0. \tag{3.3}$$

Покажем положительность λ, для это домножим обе части на X и возьмем интеграл от обеих частей исходного уравнения.

$$\int\limits_0^\pi X''''X dx - a\int\limits_0^\pi X''X dx = \lambda\int\limits_0^\pi X^2 dx.$$

В правой части λ умножается на положительное число. Оценим левую часть и убедимся, что она тоже положительна.

$$\int\limits_0^\pi X''X dx = X'X\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi X'X' dx = -\int\limits_0^\pi X'^2 < 0$$

$$\int\limits_0^\pi X''''X dx = XX'''\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi X'X''' dx = -X''X'\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi X''X'' dx = \int\limits_0^\pi X''^2 > 0$$

$$\int\limits_0^\pi X''^2 dx + a\int\limits_0^\pi X'^2 dx = \lambda\int\limits_0^\pi X^2 dx.$$

Отсюда следует, что $\lambda \geqslant 0$, докажем, что $\lambda \neq 0$. Если $\lambda = 0$, значит левая часть уравнения (3.1) равняется нулю.

$$\int\limits_0^\pi X''^2 dx + a\int\limits_0^\pi X'^2 dx = 0. \tag{3.4}$$

Это равенство выполняется если функция X — тождественный ноль. Нас интересуют тоьлко нетривиальный случай, следовательно $\lambda > 0$

3.2. Вывод трансцендентного уравнения для поиска собственных значений

Решим исходное уравнение (3.1) - (7.9)

$$X'''' - aX'' = \lambda X,\ x \in (0, \pi),\ a > 0. \tag{3.1}$$

Составим и решим характеристическое уравнение

$$k^4 - ak^2 - \lambda = 0,$$

$$D = a^2 + 4\lambda = 0,$$

$$k^2 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 + 4\lambda}) < 0,$$

$$k^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 4\lambda}) > 0.$$

Произведем замену, для упрощения вычислений

$$-y^2 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 + 4\lambda}), \tag{3.2}$$

$$z^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 4\lambda}), \tag{3.3}$$

$$k^2 = z^2,\ k^2 = -y^2, \tag{3.4}$$

$$k_1 = z,\ k_2 = -z,\ k_3 = iy,\ k_4 = -iy, \tag{3.5}$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + 4\lambda} - a)},\ z = \sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 4\lambda})}. \tag{3.6}$$

В качестве фундаментальной системы решений возьмем

$$\{\mathrm{ch}(zx),\ \mathrm{sh}(zx),\ \cos(yx),\ \sin(yx)\},$$

общий вид частного решения можно представить как

$$X = C_1 \,\mathrm{ch}(zx) + C_2 \,\mathrm{sh}(zx) + C_3 \cos(yx) + C_4 \sin(yx). \tag{3.7}$$

Из первых граничных условий (3.2) следует, что

$$\begin{cases} X(0) = C_1 + C_3 = 0 \\ X'(0) = C_2 z + C_4 y = 0 \end{cases}$$

Тогда уравнение (7.10) примет вид

$$X = C_1(\mathrm{ch}(zx) - \cos(yx)) + C_2(\mathrm{sh}(zx) - \frac{z}{y}\sin(yx)).$$

Из (7.9) следует, что

$$\begin{cases} X(\pi) = C_1(\operatorname{ch}(z\pi) - \cos(y\pi)) + C_2(\operatorname{sh}(z\pi) - \frac{z}{y}\sin(y\pi)) = 0 \\ X'(\pi) = C_1(z\operatorname{sh}(z\pi) + y\sin(y\pi)) + C_2(z\operatorname{ch}(z\pi) - z\cos(y\pi)) = 0 \end{cases}$$

Эта система имеет решения относительно C_1, C_2 тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю, выпишем это условие

$$(\operatorname{ch}(z\pi) - \cos(y\pi)) \cdot (z\operatorname{ch}(z\pi) - z\cos(y\pi)) - (\operatorname{sh}(z\pi) - \frac{z}{y}\sin(y\pi)) \cdot (z\operatorname{sh}(z\pi) + y\sin(y\pi)) = 0$$

После преобразований получим следующее уравнение

$$\cos(y\pi) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi z)} + \frac{a\sin(\pi y)\operatorname{th}(\pi z)}{2yz} \tag{3.8}$$

После подстановки в него выражений для $y(\lambda), z(\lambda)$ получим трансцендентное уравнение относительно λ. Собственные функции можно представить ввиде:

$$X = C_1(\operatorname{ch}(zx) - \cos(yx)) + C_2(\operatorname{sh}(zx) - \frac{z}{y}\sin(yx)), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \tag{3.9}$$

3.3. Локализация собственных значений

Выразим для начала λ из (3.6)

$$\lambda = y^4 + ay^2 \tag{3.1}$$

Покажем, что найдется такое $n_0 \in \mathbf{N}$, что для любого натурального $n \geqslant n_0$ на интервале $(n, n + \frac{1}{2})$ существует единственный корень y_n уравнения (3.8), а на отрезке $[n + \frac{1}{2}, n + 1]$ уравнение не имеет решений. Рассмотрим функцию

$$H(y) = \frac{1}{\mathrm{ch}(z\pi)} + \frac{a \sin(y\pi)\,\mathrm{th}(z\pi)}{2yz} - \cos(y\pi) \tag{3.2}$$

Для любого натурального n справедливы неравенства:

$$H(2n) = \frac{1}{\mathrm{ch}(z\pi)} - 1 < 0 \tag{3.3}$$

$$H\left(2n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\mathrm{ch}(z\pi)} + \frac{a}{2c(2n + \frac{1}{2})}\,\mathrm{th}(z\pi) > 0 \tag{3.4}$$

Из этого следует, что на интервале $(2n, 2n + \frac{1}{2})$ существует корень уравнения (3.8). Также имеем следующие соотношения:

$$H(2n - 1) = \frac{1}{\mathrm{ch}(z\pi)} + 1 > 0 \tag{3.5}$$

$$H\left(2n - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\mathrm{ch}(z\pi)} - \frac{a}{2c(2n - \frac{1}{2})}\,\mathrm{th}(z\pi) > 0 \tag{3.6}$$

Существует такое $n_1 \in \mathbf{N}$, что для любого натурального $n > n_1$ $H(2n - \frac{1}{2}) < 0$. Значит для любого $n > n_1$ на интервале $(2n - 1, 2n - \frac{1}{2})$ существует корень уравнения (3.8). Рассмотрим отрезок $b \in [2n + \frac{1}{2}, 2n + 1]$, для любого натурального n справедливо, что $\sin(b\pi) \geqslant 0$, $\cos(b\pi) \leqslant 0$, следовательно $H(b) > 0$, значит на этом промежутке уравнение (3.8) не имеет решений. Осталось доказать, что уравнение не имеет решений на промежутке $[2n - \frac{1}{2}, 2n]$. Существует такое $n_2 \in \mathbf{N}$, что для любого натурального $n \geqslant n_2$ выполнены равенства:

$$\mathrm{th}(z\pi) \geqslant 0, \;\; \mathrm{ch}(z\pi) \geqslant 0, \;\; \frac{1}{\mathrm{ch}(z\pi)} \leqslant \frac{a}{4bc} \tag{3.7}$$

Расммотрим два промежутка: $[2n - \frac{1}{2}, 2n - \frac{1}{4}]$ и $[2n - \frac{1}{4}, 2n]$. На первом промежутке выполнено:

$$H(y) \leqslant \frac{1}{\mathrm{ch}(z\pi)} + \frac{a}{2bc}\sin(y\pi)\,\mathrm{th}(z\pi) \leqslant \frac{a}{4bc} - \frac{a}{2bc}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{8} \leqslant \frac{a}{4bc}\left(1 - \frac{3\sqrt{2}}{4}\right) < 0 \tag{3.8}$$

На втором промежутке:

$$H(y) \leqslant \frac{1}{\mathrm{ch}(z\pi)} - \cos(y\pi) \leqslant \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} < 0 \tag{3.9}$$

Значит для любого $n > n_2$ на всем промежутке $y \in [2n-\frac{1}{2}, 2n-\frac{1}{4}]$ уравнение (3.8) не имеет решений. Покажем единственность решения данного уравнения на интервале $(n, n+\frac{1}{2})$ при достаточно больших n, положим $n_3 = \max(n_1, n_2)$. Для любого натурального $n > n_3$ корень $y \in (n, n+\frac{1}{2})$ уравнения (3.8) представляется ввиде:

$$y = n + \frac{1}{2} - \rho, \quad \rho \in (0, 1/2) \tag{3.10}$$

Используя полученное соотношение, уравнение (3.8) можно привести к виду:

$$\sin(\rho\pi) = \frac{(-1)^n}{\operatorname{ch}(z\pi)} + a\cos(\rho\pi)\operatorname{th}(z\pi)\frac{1}{yz} \tag{3.11}$$

Отсюда следует, что $\rho \to 0$ при $n \to \infty$. Для производной H' имеем следующее представление:

$$H'(y) = \pi\sin(y\pi) + \psi(y), \tag{3.12}$$

где $\psi(y) = O(\frac{1}{y^2})$ при $y \to \infty$. Значит найдется такое натуральное $n_4 > n_3$, что для любого натурального $n > n_4$

$$|H'(y)| \geqslant \frac{\sqrt{2}\pi}{2} - |\psi(y)| > 0 \ \ \forall y \in [n+1/4, n+1/2] \tag{3.13}$$

Значит при $n > n_4$ на каждом интервале $(n, n+1/2)$ уравнение (3.8) имеет единственный корень y_n:

$$y_n = n + \frac{1}{2} - \rho_n \tag{3.14}$$

Получим из (3.1) следующий вид собственных значений:

$$\lambda_n = (n + \frac{1}{2} - \rho_n)^4 + a(n + \frac{1}{2} - \rho_n)^2, \quad \rho_n \in (0, 1/2) \tag{3.15}$$

3.4. Оценка ρ_n

Решения уравнения (3.8) представимы в виде:

$$y_n = n + \frac{1}{2} - \rho_n \tag{3.1}$$

Покажем, что $\rho_n > 0$, для этого домножим уравнение (3.8) на $\frac{\rho_n}{\cos(y_n \pi)}$, тогда получим

$$\rho_n = \frac{\rho_n}{\operatorname{ch}(\pi\sqrt{y_n^2 + a})\cos(z_n\pi)} + \frac{a \sin b_n\pi \operatorname{th} \pi sqrty_n^2 + a\rho_n}{2y_n \cos \pi b_n \sqrt{y_n^2 + a}}. \tag{3.2}$$

Учтем, что

$$\cos \pi b_n = \cos \pi(n + \frac{1}{2} + \rho_n) = cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi n + \pi\rho_n\right) = -\sin(\pi n + \pi\rho_n) =$$

$$= -\cos \pi n \sin \pi\rho_n = (-1)^{n+1} \sin \pi\rho_n \tag{3.3}$$

$$\sin \pi y_n = \sin \pi(n + \frac{1}{2} + \rho_n) = sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n + \pi\rho_n\right) = \cos(\pi n + \pi\rho_n) =$$

$$= -\cos \pi n \sin \pi\rho_n = (-1)^n \cos \pi\rho_n \tag{3.4}$$

Тогда, выражение (3.2) примет вид

$$\rho_n = \frac{\rho_n}{\operatorname{ch} \pi\sqrt{y_n^2 + a}(-1)^{n+1} \sin \pi\rho_n} + \frac{a(-1)^n \cos pi\rho_n \operatorname{th} \pi\sqrt{y_n^2 + a}\rho_n}{2y_n\sqrt{y_n^2 + a}(-1)^{n+1} \sin \pi\rho_n} =$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{\pi\rho_n}{\sin \pi\rho_n} \cdot \frac{1}{\pi \operatorname{ch} \pi\sqrt{y_n^2 + a}} - \frac{a \cos pi\rho_n \operatorname{th} \pi\sqrt{y_n^2 + a}}{2\pi y_n\sqrt{y_n^2 + a}} \cdot \frac{\pi\rho_n}{\sin \pi\rho_n} \tag{3.5}$$

Докажем, что существуют такие $c_0, c_1 > 0$, что $0 < c_0\frac{1}{n^2} < \rho_n < c_1\frac{1}{n^2}$. Сначала оценим сверху. Очевидно, что $th(\rho_n) < 1$. Далее рассмотрим функцию

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{\sin t}, t \in [\frac{-\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}] \\ 1, \quad t = 0 \end{cases}$$

$$f'(t) = \frac{\sin t - t\cos t}{\sin^2 t} = \frac{\cos t(tg(t) - t)}{\sin^2 t}$$

Покажем, что $tg(t) > t$ при $t \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Посчитаем производную функции $P(t) = tg(t) - t$ и наложим условие $P'(t) > 0$

$$P'(t) = \frac{1}{\cos^2(t)} - 1 > 0$$

$$\cos^2(t) < 1$$

Это выполняется на всем промежутке $t \in (0, \frac{\pi}{2}]$, значит функця $tg(t) - t$ имеет положительную проиводную на всем промежутке $(0, \frac{\pi}{2}]$, в нуле принимает значение ноль, следовательно возрастает и положительна на всем промежутке. Значит

$$P(t) = \frac{\sin t - t\cos t}{\sin^2 t} > 0, \text{ при } t \in (0; \frac{\pi}{2}]$$

Исходная функция при t, стремящемся к 0 имеет предел $\lim\limits_{t \to 0} \frac{t}{\sin t} = 1$, а в точке $t = \frac{\pi}{2}$ принимает значение $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, функцию $f(t)$ можно оценить как:

$$1 \leqslant \frac{t}{\sin t} \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{3.6}$$

$$|\rho_n| \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{1}{ch(\pi c_n)} + \frac{\pi}{4}\frac{a}{\pi b_n c_n} = \frac{\pi}{2}\Big(\frac{1}{ch(\pi c_n)} + \frac{a}{2\pi b_n c_n}\Big)$$

Из (3.6) получим ооценку $b_n c_n$

$$b_n c_n = \sqrt{\frac{1}{4}(a^2 + 4\lambda_n - a^2)} = \sqrt{\lambda_n} = \sqrt{(n + \frac{1}{2} - \rho_n)^4 + a(n + \frac{1}{2} - \rho_n)^2} \geqslant (n + \frac{1}{2} - \rho_n)^2 \geqslant n^2$$

$$\frac{1}{b_n c_n} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

$$|\rho_n| \leqslant \frac{\pi}{2}\Big(\frac{1}{ch(\pi c_n)} + \frac{a}{2\pi n^2}\Big)$$

$$\frac{1}{ch(\pi c_n)} = \frac{2}{e^{\pi c_n} + e^{-\pi c_n}} < \frac{2}{e^{\pi c_n}}$$

Докажем, что $\frac{1}{e^x} < \frac{2}{x^2}$. Рассмотрим функцию $Q(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$, возьмем ее первую и вторую производные

$$Q'(x) = e^x - x$$

$$Q''(x) = e^x - 1$$

Вторая производная положительная при всех $x > 0$, значит $Q'(x)$ возрастает на этом интервале, а так как в нуле она принимает значение $Q'(0) = 1$, то она положительна на все положительной полуоси. А значит исходная функция возрастает при $x > 0$, но в нуле $Q(0) = 1$, значит и исходная функция положительна.

$$|\rho_n| \leqslant \frac{1}{\pi c_n^2} + \frac{a}{2\pi n^2}$$

Оценим c_n.

$$c_n = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + 4\lambda_n)} > \sqrt[4]{\frac{1}{2} - 4\lambda_n} > \sqrt[4]{\lambda_n} > n$$

Отсюда получаем финальную оценку сверху ρ_n

$$|\rho_n| \leqslant \frac{2}{\pi n^2} + \frac{a}{2\pi n^2} = \frac{1}{n^2}\Big(\frac{2}{\pi} + \frac{a}{2\pi}\Big) \tag{3.7}$$

Теперь оценим снизу. Используем, то, что

$$\frac{\pi\rho_n}{\sin(\pi\rho_n)} \geqslant 1$$

Оценим $cos(\pi\rho_n)$. Его аргумент стремится к нулю, следовательно сама функция возрастает, стремясь к единице, $\forall\varepsilon: \ 1 > \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n > n_0 \ \cos(\pi\rho_n) > 1-\varepsilon$ значит мы можем оценить ее снизу константой

$$cos(\pi\rho_n) \geqslant d$$

Так же и с $th(\pi c_n)$. При стремлении его аргумента к бесконечности, он стремится к единице, $\forall\varepsilon: \ 1 > \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n > n_0 \ th(\pi c_n) > 1-\varepsilon$ значит его тоже можно оценить снизу константой

$$th(\pi c_n) \geqslant g$$

Отсюда получаем:

$$|\rho_n| \geqslant \frac{a\cdot g\cdot d}{2\pi b_n c_n} - \frac{1}{ch(\pi c_n)}$$

$$b_n c_n = \sqrt{(n+\frac{1}{2}-\rho_n)^4 + a(n+\frac{1}{2}-\rho_n)^2} \leqslant \sqrt{(a+1)(n+\frac{1}{2}-\rho_n)^4} = \\ = \sqrt{a+1}\cdot(n+\frac{1}{2}-\rho_n)^2 \leqslant \sqrt{a+1}\cdot(2n)^2$$

$$\frac{1}{b_n c_n} \geqslant \frac{1}{4\sqrt{a+1}n^2}$$

Имеем:

$$|\rho_n| \geqslant \frac{a\cdot g\cdot d}{8\sqrt{a+1}n^2} - \frac{1}{ch(\pi c_n)}$$

Оценим $ch(\pi c_n)$

$$\frac{1}{ch(\pi c_n)} = \frac{2}{e^{\pi c_n} + e^{-\pi c_n}} \geqslant \frac{1}{e^{\pi c_n}}$$

Обозначим $A = \frac{a\cdot g\cdot d}{8\sqrt{a+1}}$ и покажем, что $\exists n_0 : \forall n > n_0 \ e^{\pi c_n} > \frac{2}{A}n^2$

$$e^{\pi c_n} = e^{\pi\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{a^2+4(n+\frac{1}{2}-\rho_n)^4+a(n+\frac{1}{2}-\rho_n)^2}}} \geqslant e^{\pi n}$$

$$e^{\pi n} > \frac{2}{A}n^2$$

$$e^{\pi n_0} > \frac{2}{A}n_0^2 \tag{3.8}$$

Докажем, что $\exists n_0$ такое, что (3.8) выполняется для $\forall n \geqslant n_0$. Рассмотрим функцию $R(n) = ln(e^{\pi n} - \frac{2}{A}n^2) = \pi n - ln(\frac{2}{A}) - ln(n^2)$ и докажем исходное утверждение.

$$\pi n - 2ln(n) > ln(\frac{2}{A})$$

Линейная функция имеет более высокий порядок роста, чем логарифмическая, значит $\forall A$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \ e^{\pi n} > \frac{2}{A} n^2$

Значит

$$|\rho_n| \geqslant \frac{a \cdot g \cdot d}{8\sqrt{a+1}n^2} \tag{3.9}$$

Из верхней и нижней $(3.7), (3.9)$ оценок получаем финальную:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R} : \quad \forall n > n_0 \quad \frac{c_1}{n^2} \geqslant |\rho_n| \geqslant \frac{c_2}{n^2}$$

3.5. Свойства собственных функций

Докажем, что любые две собственые функции X_n и X_m ортогональны в пространстве $L_2[0;\pi]$, т.е, что:

$$\int\limits_0^\pi X_n(x)X_m(x)dx = 0$$

Рассмотрим интеграл

$$\lambda_n\int\limits_0^\pi X_nX_mdx = \int\limits_0^\pi (X_n^{(4)} - aX_n^{''})X_mdx = \int\limits_0^\pi X_n^{(4)}X_mdx - a\int\limits_0^\pi X_n^{''}X_mdx \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\pi X_n^{(4)}X_mdx = X_n^{'''}X_m\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi X_n^{'''}X_m^{'}dx = -(X_n^{''}X_m^{'}\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi X_n^{''}X_m^{''}dx) = \\ = X_n^{'}X_m^{''}\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi X_n^{'}X_m^{'''}dx = -(X_nX_m^{'''}\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi X_nX_m^{(4)}dx) = \int\limits_0^\pi X_m^{(4)}X_ndx\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\int\limits_0^\pi X_n^{''}X_mdx = X_n^{'}X_m\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi X_n^{'}X_m^{'}dx = -(X_nX_m^{'}\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi X_nX_m^{''}) = \int\limits_0^\pi X_m^{''}X_ndx \tag{3.3}$$

Подставив полученные выражения в (3.1) , получим:

$$\lambda_n\int\limits_0^\pi X_nX_mdx = \lambda_m\int\limits_0^\pi X_nX_mdx \tag{3.4}$$

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int\limits_0^\pi X_nX_mdx = 0 \tag{3.5}$$

Так как $\lambda_n \neq \lambda_m$, собственные функции ортогональны.

Нормировав собственные функции, получим следующий их вид

$$X_n = C_n((\operatorname{ch}(z_n\pi) - \cos y_n\pi)(\operatorname{sh} z_nx\frac{z_n}{y_n}\sin y_nx) + (\cos y_nx - \operatorname{ch} z_nx)(\operatorname{sh} z_n\pi - \frac{z_n}{y_n}\sin y_n\pi)), \tag{3.6}$$

где $C_n = 1/(\operatorname{sh} z_n\pi(\pi + O(\frac{1}{n})))\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

Также, функции обладают свойством равномерной ограниченности в $L_2[0;\pi]$:

$$|X_n|^(k) < A_k \cdot n^k, \;\; A_k = const, \tag{3.7}$$

это следует из прямых вычислений.

3.6. Базисные функции дифференциального оператора A и их свойства

Период в условие (3.4) представлен в виде:

$$T = 2\pi\frac{b}{c},\ b, c \in N,\ (b, c) = 1. \tag{3.1}$$

Решение исходной задачи (1.1) - (1.4) будет представлено в виде ряда Фурье по следующей системе функций, обладающей свойствами полноты и ортонормированности в $L_2(\Omega)$

$$\left\{\ \tfrac{1}{T}X_n, \sqrt{\tfrac{2}{T}}X_n\cos(\tfrac{2\pi}{T}mt), \sqrt{\tfrac{2}{T}}X_n\sin(\tfrac{2\pi}{T}mt)\ \right\}.$$

Положим, что коэффициент a исходного уравнения

$$a > 0,\ (a + 1/8)b \notin \mathbf{N}, \tag{3.2}$$

обозначим

$$e^c_{nm} = \sqrt{\frac{2}{T}}X_n\cos\left(\frac{2\pi}{T}mt\right), \tag{3.3}$$

$$e^s_{nm} = \sqrt{\frac{2}{T}}X_n\sin\left(\frac{2\pi}{T}mt\right). \tag{3.4}$$

Введем обозначение: $\Omega = [0; \pi] \times \mathbf{R}/(T\mathbf{Z})$. Обозначим D множество конечных линейных комбинаций функций из базиса. Рассмотрим оператор $A_0 : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, с областью определения $D(A_0) = D$, и такой, что

$$A_0u = u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx},\ u \in D.$$

Далее обозначим $A = A_0^*$ в $L_2(\Omega)$, они совпадают на $D(A_0)$. Оператор A является самосопряженным в $L_2(\Omega)$, покажем, что (3.3), (3.4) являются собственными функциями оператора A с собственными значениями

$$\mu_{nm} = \lambda_n - \left(\frac{c}{b}m\right)^2,\ n \in N,\ m \in Z_+, \tag{3.5}$$

то есть убедимся в выполнении равенства

$$Ae^{c,s}_{nm} = \mu_{nm}e^{c,s}_{nm}.$$

Оператор A задачи (3.1) — (3.4) можно записать в виде:

$$A = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} - a\frac{\partial^2}{\partial x^2}. \tag{3.6}$$

Вычислим для e^c_{nm}:

$$Ae^c_{nm} = \frac{4\pi^2}{T^2}m^2\sqrt{\frac{2}{T}}\cos\left(\frac{2\pi}{T}mt\right) + (X_n^{(4)} - aX_n'')e^c_{nm} =$$

$$= \left((X_n^{(4)} - aX_n'')/X_n - \frac{4\pi^2m^2}{T^2}\right)e^c_{nm} = \left(\lambda_n - \left(\frac{2\pi m}{T}\right)^2\right) = \left(\lambda_n - \left(\frac{c}{b}m\right)^2\right)e^c_{nm} = \mu_{nm}e^c_{nm}.$$

Аналогичное доказательство можно провести и для e^s_{nm}. Введем обозначение

$$\mu_{nm} = \frac{c^2}{b^2} M(n,m) \left(\frac{b}{c} \sqrt{\lambda_n} + m \right), \tag{3.7}$$

где $M(n,m) = \left(\frac{b}{c} \sqrt{\lambda_n} - m \right)$

3.7. Лемма 1

Сформулируем лемму, которая потребуется нам для доказательства следующей теоремы.

1. Для любого $n_1 \in \mathbf{N}$ существует $\alpha_0 > 0$, такая что, если выполнены условия (3.2), то выполнено неравенство

$$|M(n,m)| \geqslant \alpha_0, \forall n > n_1,\ m \in Z_+. \tag{3.1}$$

2. Существует такая c_0, что если $\mu_{nm} \neq 0$

$$|\mu_{nm}| \geqslant c_0(bn^2 + cm). \tag{3.2}$$

Докажем первое утверждение: Для начала рассмотрим выражение для $\sqrt{\lambda_n}$, его можно записать в виде:

$$\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\left(n + \frac{1}{4} - \rho_n\right)^4 + a\left(n + \frac{1}{4} - \rho_n\right)^2} =$$

$$= \left(n + \frac{1}{4} - \rho_n\right)^2 \sqrt{1 + \frac{a}{(n + 1/4 - \rho_n)^2}}.$$

Для произвольного $\delta \in (0; 1/2)$ обозначим $n_0(\delta) = [\delta\sqrt{a/(1-2\delta)}] + 1$, тогда для любого натурального $n \geqslant n_0(\delta)$ имеет место соотношение

$$\sqrt{\lambda_n} = \left(n + \frac{1}{4} - \rho_n\right)^2 + r(n)a, r(n) \in (\delta, 1/2). \tag{3.3}$$

Выберем и зафиксируем $\delta \in (0, 1/2)$, при $n \geqslant n_0(\delta)$, тогда из равенства (3.3) выведем соотношение

$$|M(n,m)| = \frac{1}{2c}\left|(n + 2n^2)b - 2cm + \beta(n) + V_n\right|,$$

где $\beta(n) = b(2\rho_n^2 - (4n+1)\rho_n)$, $V_n = b(2v(n)a + \frac{1}{8})$, $v(n) \in (\delta, 1/2)$. Из условия на a и b (3.2) следует, что:

$$b\left(a + \frac{1}{8}\right) \in (k-1, k),\ k \in N.$$

Положим $k = 1$, тогда имеем $a < \frac{1}{b} - \frac{1}{8}, b < 8$, из выражения для V_n следует, что

$$\frac{b}{8} < V_n < \left(a + \frac{1}{8}\right)b < 1. \tag{3.4}$$

Положим $k \geqslant 2$, тогда при $l \geqslant \frac{b}{8} + 1$ зафиксируем

$$\delta = \left(\frac{\frac{k-1}{b} - \frac{1}{8}}{a} + 1\right)/4,$$

значит для любого $n \geqslant n_0(\delta)$ имеем

$$k-1 < \left(\frac{1}{2}\left(\frac{l-1}{b}+a\right)+\frac{1}{16}\right)\cdot b < V_n < \left(a+\frac{1}{8}\right)b < k. \tag{3.5}$$

Если же $b > 8$ и $2 \leqslant l \leqslant \frac{b}{8}+1$, тогда для $n \geqslant n_0(\delta)$ зафиксируем $\delta = \frac{1}{4}$, получим следующее выражение:

$$k-1 < \left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{8}\right)b < V_n < \left(a+\frac{1}{8}\right)b < k. \tag{3.6}$$

Из неравенств (3.4), (3.5), (3.6) можно заключить, что существует такая $\alpha_1 \in (0,1)$, что

$$|R_n + l| \geqslant \alpha_1, l \in Z.$$

Из оценки для ρ_n (**??**) следует, что если выбрать $n_1 \geqslant n_0(\delta)$, то для любого $n \geqslant n_1$ имеет место оценка $|\beta_n| < \frac{\alpha_1}{2}$. Обозначив $l = (n+2n^2)b-2cm$ при $n \geqslant n_1,\ m \in Z$ имеем следующее неравенство

$$|M(n,m)| \geqslant \frac{1}{2c}(|l+R_n+\beta_n|) \geqslant \frac{1}{2c}(|l+R_n|-|\beta_n|) \geqslant \frac{1}{2c}(\alpha_1-\frac{\alpha_1}{2}) = \frac{1}{4c}\alpha_1 = \alpha_0.$$

Первое неравенство доказано

Докажем второе неравенство, μ_{nm} имеет вид

$$\mu_{nm} = \frac{c^2}{b^2}M(n,m)\left(\frac{b}{c}\sqrt{\lambda_n}+m\right).$$

Мы только что доказали, что существует $\alpha_0 > 0$, такая что $|M(n,m)| > \alpha_0$, тогда

$$\frac{c^2}{b^2}M(n,m)\left(\frac{b}{c}\sqrt{\lambda_n}+m\right) > \alpha_0\left(\frac{c}{b}\sqrt{\lambda_n}+\frac{c^2}{b^2}m\right).$$

Из выражения (3.3) для $\sqrt{\lambda_n}$ следует, что

$$\alpha_0\left(\frac{c}{b}\sqrt{\lambda_n}+\frac{c^2}{b^2}m\right) > c_0(bn^2+cm). \tag{3.7}$$

Второе неравенство леммы доказано.

4. Теорема о существовании решения задачи (1.1) - (1.4) в нерезонансном случае

Введем понятие обобщенного решения. Обобщенным решением задачи (3.1) - (3.4) называют такую функцию $u \in L_2(\Omega)$, что для любой функции $\varphi \in D(A) : |\varphi| < \infty$

Теорема. *(О существовании и единственности решения задачи (1.1) - (1.4) в нерезонансном случае.)*

Будем полагать, что нелинейное слагаемое $g(x,t,u)$ удовлетворяет условиям:

1. $g \in C^1(\Omega \times R)$, T периодична по t
2. Существуют константы $\alpha, \beta, \widetilde{u}$, что

$$\beta \geqslant \frac{g(x,t,u)}{u} \geqslant \alpha \quad \forall (x,t) \in \Omega, \ \ u \in (-\infty; -\widetilde{u}] \cup [\widetilde{u}; +\infty). \tag{4.1}$$

Пусть выполнены условия (3.1), (3.2), (4) с условием на константы $\alpha, \beta, \widetilde{u}$:

$$\alpha < \beta, \widetilde{u} > 0, [\alpha, \beta] \cap \sigma = \varnothing, \tag{4.2}$$

где $\sigma = sp(A)$. Тогда задача (1.1) - (1.4) имеет обобщенное решение $u \in H_2(\Omega) \cup C^1(\Omega)$, $u_{xx} \in C(\Omega)$ для любой T – периодической по t правой части $f \in H_1(\Omega)$

Доказательство.Введем обозначения: $H = L_2(\Omega)$, $p(x,t,u) = g(x,t,u) - \alpha u$. Из леммы 2 следует вполне непрерывность оператора $A : ImA \to ImA$. Так как $\alpha \notin \sigma$, то $(A - \alpha I)^{-1} : H \to H$ тоже является вполне непрерывным. Действительно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(\mu_{nm} - \alpha)^2} = \frac{d}{\alpha^2} + \sum_{\mu_{nm} \neq 0} \frac{1}{\mu_{nm}^2 (1 - \alpha/\mu_{nm})^2}, \tag{4.3}$$

где d – размерность ядра оператора A Так как $\alpha \notin \sigma$, то из (3.2) следует, что существует такое $\varepsilon > 0$, что $(1 - \frac{\alpha}{\mu_{nm}})^2 > \varepsilon > 0$ для всех $n \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{Z}_+$ таких, что $\mu_{nm} \neq 0$. Отсюда получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(\mu_{nm} - \alpha)^2} \leqslant \frac{d}{\alpha^2} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\mu_{nm} \neq 0} \frac{1}{\mu_{nm}^2}. \tag{4.4}$$

Сходимость этого ряда была доказана нами ранее.

Будем искать обобщенное решение задачи (1.1) - (1.4) как решение операторного уравнения

$$Au - g(x,t,u) = f \tag{4.5}$$

Введем обозначение

$$T(u) = (A - \alpha I)^{-1}(p(x,t,u) + f), \tag{4.6}$$

тогда уравнение (4.5) можно переписать в виде

$$u = T(u) \tag{4.7}$$

Оператор $T : H \to H$ является вполне непрерывным. Рассмотрим уравнение:

$$u = \xi T(u), \;\; \xi \in (0, 1]. \tag{4.8}$$

Оценим L_2-норму решений уравненя (4.8), для этого введем обозначение $\omega = (A - \alpha I)^{-1} f$ и приведем уравнение к виду

$$p(x, t, u) = -\frac{1}{\xi}(\alpha I - A)(u - \xi\omega). \tag{4.9}$$

Пусть λ_1, λ_2 – соседние значения из спектра оператора A, т.е. $(\lambda_1, \lambda_2) \cap \sigma = \varnothing$, также потребуем, чтобы $[\alpha, \beta] \subset (\lambda_1, \lambda_2)$. Умножим равенствно (4.9) скалярно на $u - \xi\omega$ в H, воспользуемся тем, что $\alpha - \lambda_2$ является наименьшим по модулю собственным значением оператора $\alpha I - A$, тогда получим:

$$\begin{aligned}(p(x, t, u), u - \xi\omega) = -\frac{1}{\mu}((\alpha I - A)(u - \xi\omega), u - \xi\omega) \leq \\ \leq \frac{1}{\xi(\lambda_2 - \alpha)}\|(\alpha I - A)(u - \xi\omega)\|^2 = \frac{\xi}{\lambda_2 - \alpha}\|p(x, t, u)\|\end{aligned} \tag{4.10}$$

Выведем существования таких констант C_1, C_2, что

$$u \cdot p(x, t, u) \geqslant -C_1, \;\; |p(x, t, u)| < (\beta - \alpha)|u| + C_2 \;\; \forall (x, t, u) \in \Omega \times R \tag{4.11}$$

Докажем первое неравенство. $u \cdot p(x, t, u) \geqslant 0 \;\; \forall |u| > u_0$, введем функцию $F(x, t, u) = u \cdot p(x, t, u)$, она непрерывна на компакте $\Pi = [0, \pi] \times [-\widetilde{u}, \widetilde{u}]$, значит на этом компакте она достигает своего минимума $\min\limits_{\Pi} F = -C_1, \; C_1 > 0$, в итоге имеем

$$u \cdot p(x, t, u) \geqslant -C_1 \quad \forall (x, t, u) \in \Omega \times \mathbf{R} \tag{4.12}$$

Докажем вторoе неравенство. Из (4) следует, что вне компакта Π выполняется неравенство

$$0 \leqslant p(x, t, u) \leqslant (\beta - \alpha)u \tag{4.13}$$

Можно взять модули от левой и правой части, так как они обе положительные.

$$|p(x, t, u)| \leqslant (\beta - \alpha)|u| \tag{4.14}$$

На компакте Π функция $F(x, t, u) = |p(x, t, u)| - (\beta - \alpha)|u|$ является непрерывной, значит достигает своего максимума

$$\max_{\Pi} F(x, t, u) = C_2, \;\; C_2 > 0 \tag{4.15}$$

В итоге получаем:

$$|p(x,t,u)| < (\beta-\alpha)|u| + C_2 \;\; \forall (x,t,u) \in \Omega \times R \tag{4.16}$$

Из полученных неравенств и (4.9) следует:

$$\begin{aligned}
\frac{\xi}{\lambda_2-\alpha}\|p(x,t,u)\|^2 \geqslant \int\limits_{\Omega} |p(x,t,u)\cdot u + C_1|dxdt - C_1\|\Omega\| - \|\omega\|\cdot\|p(x,t,u)\| \geqslant \\
\geqslant \int\limits_{\Omega} |p(x,t,u)\cdot u| - C_1 dxdt - C_1\|\Omega\| - \|\omega\|\cdot\|p(x,t,u)\| \geqslant \\
\geqslant \int\limits_{\Omega} |p(x,t,u)|\cdot|u|dxdt - 4\pi^2 C_1 - \|\omega\|\cdot\|p(x,t,u) \geqslant \\
\geqslant \frac{1}{\beta-\alpha}\|p(x,t,u)\|^2 - C_3\|p(x,t,u)\| - 4\pi^2 C_1
\end{aligned} \tag{4.17}$$

где $C_3 = \|\omega\| + \pi\sqrt{2}\frac{C_2}{\beta-\alpha}$ Оценив $\lambda_2 - \alpha > \beta - \alpha$ из полученного неравенства и (4.9) получим следующие оценки

$$\|p(x,t,u)\| \leqslant C_4, \|(A-\alpha I)(u-\xi\omega)\| < C_4. \tag{4.18}$$

Константа C_4 не зависит от ξ. Так как $\alpha \notin \sigma$, из последнего неравенства получим $\|u\| \leqslant C_5$, C_5 также не зависити от ξ, значит выполнены условия теоремы Лере-Шаудера о неподвижной точке, следовательно существует решение $u \in H$ уравнения (4.7). Гладкость и конечномерность обобщенного решения вытекает из конечномерности ядра оператора $kerA$ и леммы 2.

Замечание (о единственности решения). Если дополнительно условиям теоремы функция $g(x,t,u)$ удовлетворяет условию

$$\alpha \leqslant g'_u(x,t,u) \leqslant \beta \;\; \forall (u,x,t) \in R \times \Omega, \tag{4.19}$$

тогда задача (1.1) – (1.4) имеет единственное решение.

Доказательство. Предположим, что имеется два решения уравнения (4.5) u_1, u_2, тогда

$$p(x,t,u_1) - (A-\alpha)u_1 = -f \tag{4.20}$$

$$p(x,t,u_2) - (A-\alpha)u_2 = -f \tag{4.21}$$

Из (5.2) несложно вывести, что

$$0 \leqslant (p(x,t,u) - p(x,t,v))(u-v) \leqslant (\beta-\alpha)(u-v)^2 \;\; \forall (x,t) \in \Omega; \; u,v \in R \tag{4.22}$$

Вычев из (4.20) соотношение (4.21) и умножив скалярно в $L_2(\Omega)$ на $u_1 - u_2$ получим:

$$(h(x,t,u_1) - h(x,t,u_2),(u_1-u_2)) + ((A-\alpha)(u_1-u_2),u_1-u_2) = 0 \tag{4.23}$$

Из неравенства (4.22) следует, что

$$(h(x,t,u_1) - h(x,t,u_2))(u_1 - u_2) \geqslant \frac{1}{\beta - \alpha}(h(x,t,u_1) - h(x,t,u_2))^2 \quad \forall (x,t) \in \Omega \tag{4.24}$$

Так как $(\alpha - \lambda_2)$ – наибольшее отрицательное собственное значение оператора $\alpha - A$, то из (4.23) и (5.10) получим

$$0 \geqslant \frac{1}{\beta - \alpha}\|h(x,t,u_1) - h(x,t,u_2)\|^2 - \frac{1}{\lambda_2 - \alpha}\|(\alpha - A)(u_1 - u_2)\|^2 = \\ = \left(\frac{1}{\beta - \alpha} - \frac{1}{\lambda_2 - \alpha}\right)\|(\alpha - A)(u_1 - u_2)\|^2 \tag{4.25}$$

Отсюда следует, что $(\alpha - A)(u_1 - u_2) = 0$, это возможно только при $u_1 = u_2$. Единственность решения доказана.

5. Теорема о существовании решения задачи (1.1) - (1.4) в резонансном случае

Запишем уравнение (1.1) в следующем виде:

$$u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx} = g(u) + f(x,t), \;\; x \in (0,\pi), \; t \in \mathbf{R} \tag{5.1}$$

Пусть функция $g(u)$ имеет вид

$$g(u) = \lambda u + p(u) \tag{5.2}$$

Причем $\lambda \in \sigma$, а функция $p(u)$ ограниченная, то есть существует такая L, что

$$p(u) \leqslant L \;\; \forall u \in \mathbf{R} \tag{5.3}$$

Введем обозначения: $N_2 = ker(A - \lambda I), \; N_1 = N_2^{\perp}, \; N_1, N_2 \in L_2(\Omega)$. Представим функцию $f \in L_2(\Omega)$ в виде суммы

$$f = f_1 + f_2, \; f_1 \in N_1, \; f_2 \in N_2. \tag{5.4}$$

Стоит заметить, что выполнение условий (5.2), (5.3) не гарантирует выполнения утверждения теоремы 1 для задачи (5.1), (1.1) - (1.4). Эта задача будет иметь решение не при всех правых частях $f \in H_1(\Omega)$. Рассмотрим в качестве примера уравнение:

$$u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx} - \lambda u - p(u) = k \cdot \eta. \tag{5.5}$$

Здесь $\lambda \in \sigma, \; \eta$ – нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция оператора в A с собственным значением λ и параметр $k : |k| > M\sqrt{\pi T}$. Чтобы показать, что эта задача не имеет решения, умножим скалярно обе части уравнения 5.5 на η, тогда

$$(Au, \eta) - \lambda(u, \eta) - (p(u), \eta) = k(\eta, \eta) = k \tag{5.6}$$

Преобразуем левую часть, используя то, что оператор A – самосопряженный.

$$\begin{aligned}(Au, \eta) - \lambda(u, \eta) - (p(u), \eta) = \lambda(u, \eta) - \lambda(u, \eta) - (p(u), \eta) = -(p(u), \eta) = \\ = -\int\limits_{\Omega} p(u) \cdot \eta dxdt \leqslant \int\limits_{\Omega} |p(u)| \cdot |\eta| dxdt \leqslant \int\limits_{\Omega} L|\eta| dxdt \leqslant L\sqrt{\pi T} \cdot \|\eta\| = L\sqrt{\pi T}\end{aligned} \tag{5.7}$$

Таким образом, получили, противоречие, значит решения не существует. Сформулируем теорему о существовании решения задачи (5.1), (1.1) - (1.4)

Теорема. 5 *О существовании и единственности решения задачи (1.1) - (1.4) в резонансном случае.*

Пусть выполнены условия (3.1), (3.2), (5.2), (5.3), $\lambda \in \sigma$, функция $p(u) \in C^1\mathbf{R}$ не убывает или не возрастает по u. Также предположим, что функция $f(x,t) \in H_1(\Omega)$ имеет представление (5.4) и слагаемое f_2 удовлетворяет либо неравенству:

$$p(-\infty) + \delta \leqslant -f_2(x,t) \leqslant p(+\infty) - \delta \ \ \forall (x,t) \in \Omega \tag{5.8}$$

в том случае, если $p(x,t)$ не убывает, либо неравенству

$$p(+\infty) + \delta \leqslant -f_2(x,t) \leqslant p(-\infty) - \delta \ \ \forall (x,t) \in \Omega \tag{5.9}$$

в том случае, если $p(x,t)$ не возрастает с константой $\delta > 0$, ($p(\pm\infty) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} p(u)$). Тогда задача (5.1), (1.1) - (1.4) имеет обобщенное решение $u \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ и $u_{xx} \in C(\Omega)$

Доказательство. Для определенности положим, что $p(u)$ не убывает. Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$-\varepsilon u + Au - g(u) = f \tag{5.10}$$

Из (5.2), (5.3) следует существование такого $\widetilde{\varepsilon}$, что при всех $\varepsilon \in (0, \widetilde{\varepsilon})$ выполнены условия теоремы 1 с нелинейным слагаемым $g_1(u) = p(u) + \lambda u + \varepsilon u$ и константами $\alpha = \lambda + \varepsilon/2$, $\beta = \lambda + 3\varepsilon/2$, покажем это, для этого проверим выполнение условия 4:

$$\beta \geqslant \frac{p(u) + \lambda u + \varepsilon u}{u} \geqslant \alpha \tag{5.11}$$

$$\beta \geqslant \frac{p(u)}{u} + \lambda\varepsilon \geqslant \alpha \tag{5.12}$$

При стремлении u к бесконечности в силу того, что функция $p(u)$ ограничена, получим:

$$\beta \geqslant \lambda\varepsilon \geqslant \alpha \tag{5.13}$$

Если взять $\alpha = \lambda + \varepsilon/2$, $\beta = \lambda + 3\varepsilon/2$, то при достаточно малых ε промежуток (α, β) не будет содержать значений из спектра, значит условие будет выполнено, следовательно для задачи (5.10) существует решение u_ε. Совершим предельный переход при $\varepsilon \to 0$, для этого необходимо получить оценки норм $\|Au_\varepsilon\|, \|u_\varepsilon\|_{L_1}, \|u_\varepsilon\|_{L_\infty}$, которые не зависят от ε

Представим f_1 в виде суммы ряда Фурье

$$f_1 = \sum_{\mu_{nm} \neq \lambda} (a_{nm} e^c_{nm} + b_{nm} e^s_{nm}) \tag{5.14}$$

для сокращения положим $e^s_{n0}, b_{n0} = 0$. Введем обозначение

$$\omega = (A - \lambda I)^{-1} f_1 = \sum_{\mu_{nm}} \frac{1}{\mu_{nm} - \lambda} (a_{nm} e^c_{nm} + b_{nm} e^s_{nm}). \tag{5.15}$$

Покажем, что $\omega \in C(\Omega)$, для этого покажем сходимость ряда

$$\sum_{\mu_{nm}} \frac{1}{\mu_{nm}-\lambda} X_n(a_{nm}e^c_{nm} + b_{nm}e^s_{nm}) \leqslant \sum_{\mu_{nm}} \frac{1}{|\mu_{nm}-\lambda|}(|a_{nm}e^c_{nm}| + |b_{nm}e^s_{nm}|) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\mu_{nm}} \frac{1}{|\mu_{nm}-\lambda|} A_0\sqrt{\frac{2}{T}}(|a_{nm}| + |b_{nm}|) \leqslant A_0\sqrt{\frac{2}{T}}\left(\sum_{\mu_{nm}} \frac{1}{(\mu_{nm}-\lambda)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \|f_1\| \quad (5.16)$$

Из условия (5.8) следует существование функции $v \in L_\infty(\Omega):\ p(v) = -f_2$. Таким образом u_ε является решение уравнения

$$\varepsilon u_\varepsilon = (A - \lambda I)(u_\varepsilon - \omega) - (p(u_\varepsilon) - p(v)). \quad (5.17)$$

Возьмем $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma$ такие, что $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2,\ (\lambda_1, \lambda_2) \cap \sigma = \lambda$. Умножим (5.17) на $(u_\varepsilon - \omega)$, воспользуемся (5.3), монотонностью p, а также тем, что $(\lambda_1 - \lambda)$ – наибольшее отрицательное собственное значение оператора $(A - \lambda I)$, тогда получим

$$(\varepsilon u_\varepsilon, u_\varepsilon - \omega) = ((A - \lambda I)(u_\varepsilon - \omega), u_\varepsilon - \omega) - (p(u_\varepsilon) - p(v), u_\varepsilon - \omega) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\lambda - \lambda_1}\|(A - \lambda I)(u_\varepsilon - \omega)\|^2 - (p(u_\varepsilon) - p(v), u_\varepsilon - v) - (p(u_\varepsilon) - p(v), v - \omega) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\lambda - \lambda_1}\|\varepsilon u_\varepsilon + p(u_\varepsilon) - p(v)|^2 + C_6 \leqslant \frac{1}{\lambda - \lambda_1}\|\varepsilon^2\|u_\varepsilon\|^2 + C_7\varepsilon\|u_\varepsilon\| + C_7 \quad (5.18)$$

Тут и далее $C_6, C_7, C_8, \dots$ есть положительные константы, не зависящее от ε. Из полученного выражения выведем оценки для $\varepsilon\|u_\varepsilon\|^2$ и $\|(A - \lambda I)u_\varepsilon\|$.

$$\varepsilon\|u_\varepsilon\|^2 \leqslant \varepsilon(u_\varepsilon, \omega) + \frac{1}{\lambda - \lambda_1}\varepsilon^2\|u_\varepsilon\|^2 + C_7\varepsilon\|u_\varepsilon\| + C_7 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\lambda - \lambda_1}\varepsilon^2\|u_\varepsilon\|^2 + C_8\varepsilon\|u_\varepsilon\| + C_7. \quad (5.19)$$

Произведем замену $t = \sqrt{\varepsilon\|u_\varepsilon\|}$, тогда:

$$t^2 \leqslant \frac{1}{\lambda - \lambda_1}\varepsilon t^2 + C_8\sqrt{\varepsilon}t + C_7 \quad (5.20)$$

Параметр ε считаем малым, поэтому $1/(\lambda - \lambda_1)\varepsilon < 1/2$, тогда

$$t^2 \leqslant \frac{1}{2}t^2 + C_8\sqrt{\varepsilon}t + C_7 \quad (5.21)$$

$$t^2 \leqslant 2C_8 t + C_7 \quad (5.22)$$

$$(t - C_8\sqrt{\varepsilon})^2 \leqslant C_7 + C_8^2\varepsilon \quad (5.23)$$

$$|t - C_8\varepsilon| \leqslant \sqrt{C_7 + C_8^2\varepsilon} \quad (5.24)$$

В итоге получаем, что

$$t \leqslant C_9 = C_8\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{C_5 + C_6^2\varepsilon} \tag{5.25}$$

тогда

$$\varepsilon\|u_\varepsilon\|^2 < C_9 \tag{5.26}$$

Теперь покажем, что $\|(A-\lambda I)u_\varepsilon\| \leqslant C_{10}$

$$\begin{aligned}\|(A-\lambda I)u_\varepsilon\| = \|\varepsilon u_\varepsilon + (p(u_\varepsilon)-p(v)) + (A-\lambda I)\omega\| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon\|u_\varepsilon\|^2 + \|p(u_\varepsilon)-p(v)\| + \|f_1\| \leqslant \sqrt{\varepsilon}C_8 + \sqrt{2}L\|\Omega\| + \|f_1\| \leqslant C_{10}\end{aligned} \tag{5.27}$$

Чтобы показать ограниченность $\|u_\varepsilon\|_{L_1}$ введем функцию $\tau \in L_\infty(\Omega)$, такую, что $\|\tau\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \delta/2$, тогда из (5.8)

$$p(-\infty) + \frac{\delta}{2} \leqslant -f_2 + \tau \leqslant p(+\infty) - \frac{\delta}{2}, \;\; -f_2 + \tau = p(v_\tau), \tag{5.28}$$

где $\|v_\tau\|_{L_\infty} \leqslant L_\delta$, L_δ не зависит от τ. Соотношение (5.17) примет вид:

$$-\varepsilon u_\varepsilon + (A-\lambda I)(u_\varepsilon - \omega) - p(u_\varepsilon) + p(v_\tau) = \tau \tag{5.29}$$

Получим оценку для $\|u_\varepsilon\|_{L_1}$, для этого умножим это уравнение скалярно в $L_2(\Omega)$ на $u_\varepsilon - v_\tau$, воспользуемся монотонностью функции p.

$$(\tau, u_\varepsilon - v_\tau) = -(\varepsilon u_\varepsilon, u_\varepsilon - v_\tau) + ((A-\lambda I)(u_\varepsilon - \omega), u_\varepsilon - v_\tau) - (p(u_\varepsilon) - p(v_\tau), u_\varepsilon - v_\tau) \tag{5.30}$$

Оценим отдельно первое слагаемое в правой части:

$$\begin{aligned}-(\varepsilon u_\varepsilon, u_\varepsilon - v_\tau) \leqslant (\varepsilon u_\varepsilon, v_\tau) = \int\limits_\Omega \varepsilon u_\varepsilon v_\tau \leqslant \\ \leqslant \sqrt{\int\limits_\Omega \varepsilon u_\varepsilon} \cdot \sqrt{\int\limits_\Omega v_\tau} \leqslant \varepsilon\|u_\varepsilon\| \cdot |\Omega| L_\delta \leqslant \sqrt{\varepsilon C_9|\Omega|} \cdot L_\delta.\end{aligned} \tag{5.31}$$

Тогда

$$\begin{aligned}(\tau, u_\varepsilon - v_\tau) \leqslant \sqrt{\varepsilon C_9|\Omega|} \cdot L_\delta - ((\lambda I - A)(u_\varepsilon - \omega), u_\varepsilon - \omega) + ((A-\lambda I)(u_\varepsilon - \omega), \omega - v_\tau) \leqslant \\ \leqslant \sqrt{\varepsilon C_9|\Omega|} \cdot L_\delta + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda}\|(\lambda I - A)(u_\varepsilon - \omega)\|^2 + (C_9 + \|f_1\|)(\|\omega\| + L_\delta|\Omega|) \leqslant \\ \leqslant \sqrt{\varepsilon C_9|\Omega|} \cdot L_\delta + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda}(C_9 + \|f_1\|)^2 + (C_9 + \|f_1\|)(\|\omega\| + L_\delta|\Omega|)\end{aligned} \tag{5.32}$$

Отсюда следует, что $(\tau, u_\varepsilon) < C_{11}$ при любой функции $\tau \in L_\infty(\Omega)$, такой, что $\|\tau\|_{L_\infty} \leqslant \delta/2$.Таким образом

$$\|u_\varepsilon\|_{L_1} \leqslant C_{12}. \tag{5.33}$$

Пусть $u_\varepsilon = u_{1\varepsilon} + u_{2\varepsilon}$, где $u_{1\varepsilon} \in N_1, u_{2\varepsilon} \in N_2$. Выведем оценки $\|u_{1\varepsilon}\|_{L_\infty} \leqslant C_{13},\ \|u_{2\varepsilon}\| \leqslant C_{14}$. Используем ограниченность нормы

$$\|(A-\lambda I)u_{1\varepsilon}\|^2 = \sum_{\mu_{nm}\neq\lambda} (\mu_{nm}-\lambda)^2(a_{nm}^2 + b_{nm}^2) \leqslant C_9 \tag{5.34}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\|u_{1\varepsilon}\| = &\left|\sum_{\mu_{nm}\neq\lambda} (a_{nm}e^c_{nm} + b_{nm}e^s_{nm})\right| \leqslant \\ &\leqslant C_0 \sum_{\mu_{nm}\neq\lambda} (|a_{nm}| + |b_{nm}|) \leqslant C_0 \sum_{\mu_{nm}\neq\lambda} \frac{1}{\mu_{nm}-\lambda}\cdot \mu_{nm}-\lambda\cdot(|a_{nm}|+|b_{nm}|) \leqslant \\ &\leqslant C_0\sqrt{\sum_{\mu_{nm}\neq\lambda}\frac{1}{(\mu_{nm}-\lambda)^2}}\cdot\sqrt{\sum_{\mu_{nm}\neq\lambda}(\mu_{nm}-\lambda)^2(a_{nm}^2+b_{nm}^2)} \leqslant C_0\widehat{C}C_9^2 = C_{13}\end{aligned} \tag{5.35}$$

Теперь докажем, что $\|u_{2\varepsilon}\| \leqslant C_{14}$, эта оценка выводится из предыдущей

$$\begin{aligned}\|u_{2\varepsilon}\| = \|u_\varepsilon - u_{1\varepsilon}\| \leqslant \|u_\varepsilon\|_{L_1} + \|u_{1\varepsilon}\| \leqslant C_{12} + \int\limits_\Omega |u_{1\varepsilon}|dxdt \leqslant \\ \leqslant C_{12} + \int\limits_\Omega C_{13}dxdt = C_{12} + C_{13}\cdot|\Omega| = C_{14}\end{aligned} \tag{5.36}$$

Покажем теперь ограниченность $\|u_\varepsilon\|$, эта выводится из двух предыдущих оценок

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon\|^2 = \|u_{1\varepsilon}+u_{2\varepsilon}\|^2 = \|u_{1\varepsilon}\|^2 + \|u_{2\varepsilon}\|^2 \leqslant C_0\cdot\|u_{1\varepsilon}\|^2_{L_\infty} + B_0\|u_{2\varepsilon}\|^2_{L_1} \leqslant \\ \leqslant C_0\cdot C_{13}^2 + B_0\cdot C_{14}^2 = C_{15}^2\end{aligned} \tag{5.37}$$

Получили оценку $\|u_\varepsilon\| \leqslant C_{15}$

Совершим предельный переход в уравнении (5.10) при $\varepsilon \to 0$. Из полученных оценок (5.26), (5.27), а так же только что полученной оценки для $\|u_\varepsilon\|$ следует, что существует последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}:\ \varepsilon_n \to 0$ при $n\to\infty$ и последовательности $\{u_{\varepsilon_n}\}_n:\ u_{\varepsilon_n} \to u,\ \{(A-\lambda I)u_{\varepsilon_n}\}_n:\ (A-\lambda I)u_{\varepsilon_n} \to \zeta$ слабо в $L_2(\Omega)$. Пусть $u = u_1 + u_2,\ u_\varepsilon = u_{1\varepsilon_n} + u_{2\varepsilon_2}$, где $u_{1\varepsilon_n}, u_1 \in N_1,\ u_{2\varepsilon_n}, u_2 \in N_2$. Оператор $(A-\lambda I)^{-1}: N_1 \to N_1$ является вполне непрерывным, из этого следует сильная в $L_2(\Omega)$ сходимость $u_{1\varepsilon_n} \to (A-\lambda I)^{-1}\zeta$. Отсюда следует, что

$$(A-\lambda I)^{-1}\zeta = u_1 \in N_1 \tag{5.38}$$

$$\zeta = (A-\lambda I)u_1 = (A-\lambda I)u \tag{5.39}$$

$$((A-\lambda I)u_{\varepsilon_n}, u_{\varepsilon_n}) \to ((A-\lambda I)u, u) \tag{5.40}$$

при $n\to\infty$. Из монотонности функции следует, что

$$\int\limits_\Omega (p(u_{\varepsilon_n}) - p(\theta))(u_{\varepsilon_n} - \theta)dxdt \geqslant 0\ \ \forall\theta\in L_2(\Omega), \tag{5.41}$$

из (5.10) выведем

$$\int\limits_{\Omega}(-\varepsilon_n u_{\varepsilon_n} + (A - \lambda I)u_{\varepsilon_n} - f - p(\theta))(u_{\varepsilon_n} - \theta)dxdt \geqslant 0 \tag{5.42}$$

Если перейти в этом неравенстве к пределу $n \to \infty$, то получим

$$\int\limits_{\Omega}((A - \lambda I)u - f - p(\theta))(u - \theta)dxdt \geqslant 0 \tag{5.43}$$

Положим в этом неравенстве $\theta = u - \kappa t,\ \kappa \in D, t > 0$

$$\int\limits_{\Omega}((A - \lambda I)u - f - p(u - \kappa t))\kappa t dxdt \geqslant 0 \tag{5.44}$$

Сократим на t и перейдем к переделу $t \to 0 + 0$, тогда получим

$$\int\limits_{\Omega}((A - \lambda I)u - f - p(u))\kappa dxdt \geqslant 0 \ \ \forall \kappa \in D \tag{5.45}$$

Отсюда следует, что $(A - \lambda I)u - f - p(u) = 0$. Включения $u \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega), u_{xx} \in C(\Omega)$ следуют из леммы 2. Таким образом, теорема доказана

6. Постановка задачи 2

Рассматривается квазилинейное уравнение вынужденных колебаний двутавровой балки

$$u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx} = g(x,t)|u|^{p-2}u,\ x \in (0,\pi),\ t \in \mathbf{R} \tag{6.1}$$

с однородными граничными условиями на отрезке

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = 0,\ t \in \mathbf{R} \tag{6.2}$$

$$u_x(\pi,t) = u_{xxx}(\pi,t) - hu(\pi t) = 0,\ t \in \mathbf{R} \tag{6.3}$$

и с условием периодичности по времени

$$u(x,t+T) = u(x,t),\ 0 < x < \pi,\ t \in \mathbf{R}. \tag{6.4}$$

Цель второй части работы — получить условия существования, несуществования и единственности периодического решения задачи (1.1) – (1.4), в случаях когда нелинейное слагаемое удовлетворяет условию резонансности и нерезонанстности на бесконечности.

7. Линейное уравнение

Рассмотрим линейное уравнение:

$$u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx} = f(x,t),\ x \in (0,\pi),\ t \in \mathbf{R} \tag{7.1}$$

с однородными граничными условиями на отрезке

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = 0,\ t \in \mathbf{R} \tag{7.2}$$

$$u_x(\pi,t) = u_{xxx}(\pi,t) - hu(\pi t) = 0, \tag{7.3}$$

и с условием периодичности по времени

$$u(x,t+T) = u(x,t),\ 0 < x < \pi,\ t \in \mathbf{R}. \tag{7.4}$$

Проведем исследование для линейного случая, чтобы в дальнейшем использовать его для квазилинейного случая, в частности построим ортонормированный базис.

7.1. Задача Штурма-Лиувилля, соответствующая случаю закрепления концов

Поставим и исследуем задачу Штурма—Лиувилля на поиск собственных значений оператора уравнения (7.1).

$$Y'''' - aY'' = \lambda Y, y \in (0, \pi),\ a > 0 \tag{7.1}$$

с граничными условиями

$$Y(0) = Y''(0) = 0, \tag{7.2}$$

$$Y'(\pi) = Y'''(\pi) - hY(\pi) = 0. \tag{7.3}$$

По тем же соображениям, что были приведены в первой части работы, λ является положительным.

Решим исходное уравнение (7.1) - (7.3)

$$Y'''' - aY'' = \lambda Y,\ y \in (0, \pi),\ a > 0. \tag{7.4}$$

Составим и решим характеристическое уравнение

$$k^4 - ak^2 - \lambda = 0,$$

$$D = a^2 + 4\lambda = 0,$$

$$k^2 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 + 4\lambda}) < 0,$$

$$k^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 4\lambda}) > 0.$$

Произведем замену, для упрощения вычислений

$$-b^2 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 + 4\lambda}), \tag{7.5}$$

$$c^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 4\lambda}), \tag{7.6}$$

$$k^2 = c^2,\ k^2 = -b^2, \tag{7.7}$$

$$k_1 = c,\ k_2 = -c,\ k_3 = ib,\ k_4 = -ib, \tag{7.8}$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + 4\lambda} - a)},\ c = \sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 4\lambda})}. \tag{7.9}$$

В качестве фундаментальной системы решений возьмем

$$\{\mathrm{ch}(cx),\ \mathrm{sh}(cx),\ \cos(bx),\ \sin(bx)\},$$

общий вид частного решения можно представить как

$$Y = C_1 \operatorname{ch}(cx) + C_2 \operatorname{sh}(cx) + C_3 \cos(bx) + C_4 \sin(bx). \tag{7.10}$$

Из первых граничных условий (7.2) следует, что

$$\begin{cases} Y(0) = C_1 + C_3 = 0 \\ Y''(0) = C_1 c^2 - C_3 y^2 = 0, \end{cases}$$

следовательно $C_1 = C_3 = 0$, уравнение (7.10) примет вид

$$Y(y) = C_2 \operatorname{sh} cx + C_4 \sin bx$$

Из (7.3) следует, что

$$\begin{cases} C_2 c \operatorname{ch} c\pi + C_4 b \cos b\pi = 0 \\ C_2 (c^3 \operatorname{ch} c\pi - h \operatorname{sh} c\pi) + C_4(-b^3 \cos b\pi - h \sin b\pi) = 0, \end{cases} \tag{7.11}$$

Эта система имеет решения относительно C_1, C_2 тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю, это условие имеет вид:

$$-c \operatorname{ch} c\pi (b^3 \cos b\pi + h \sin b\pi) = y \cos b\pi (c^3 \operatorname{ch} c\pi - h \operatorname{sh} c\pi)$$

После преобразований получим следующее выражение

$$\operatorname{ctg} b\pi = \frac{1}{\frac{b}{c} \operatorname{th}(c\pi) - \frac{1}{h}(2b^3 + ba)} \tag{7.12}$$

Если подставить в это равенство выражение c через b, то получим

$$\operatorname{ctg} b\pi = \frac{1}{\frac{b}{\sqrt{b^2+a}} \operatorname{th}(\pi \sqrt{b^2 + a}) - \frac{1}{h}(2b^3 + ba)} \tag{7.13}$$

После подстановки в него выражений для $y(\lambda), z(\lambda)$ получим трансцендентное уравнение относительно λ. Собственные функции можно представить ввиде:

$$Y(y) = C_2 \operatorname{sh} cy + C_4 \sin by, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \tag{7.14}$$

Выражение для λ примет вид

$$\lambda = b^4 + ab^2 \tag{7.15}$$

7.2. Локализация собственных значений

Проведем исследование корней уравнения (7.13), для этого обозначим $g(b) = \frac{b}{c(b)} \operatorname{th}(\pi c(b)) - \frac{1}{h}(2b^3 + ba)$. Найдем производную функции $g(b)$,

$$g'(b) = \frac{b}{c^3} \operatorname{th}(c\pi) + \frac{b^2\pi}{c^2 \operatorname{ch}^2(c\pi)} - \frac{1}{h}(6b^2 + a)$$

Так как $\operatorname{th}(c\pi) > 0$ при $c > 0$, а так же $a > 0$, $b, h = const > 0$, то существует такое $b' \in N$, что для любого $b > b'$ $g(b) < 0$ и $g'(b) < 0$, следовательно функция $\frac{1}{g(b)}$, соответствующая правой части уравнения (7.13) являеетя отрицательной и возрастает при $b > b'$. Рассмотрим функцию $G(b) = \operatorname{ctg} b\pi - \frac{1}{g(\pi)}$. При $n > b' + \frac{1}{2}$ будем иметь следующие соотношения

$$G(n - \frac{1}{2}) = \frac{-1}{g(n - \frac{1}{2})} > 0, \tag{7.1}$$

$$\lim_{b \to n-0} G(b) = \lim_{b \to n-0} \operatorname{ctg}(b\pi) - 1/\left(\frac{b}{c(b)} \operatorname{th}(\pi c(b)) - \frac{1}{h}(2b^3 + ba)\right) =$$
$$= \lim_{b \to n-0} \operatorname{ctg}(b\pi) = -\infty \tag{7.2}$$

Отсюда следует, что для $n > b' + \frac{1}{2}$ на каждом интервале $(n - \frac{1}{2}, n)$ найдется корень уравнения (7.13). Левая часть уравнения убывает, а правая возрастает, этот корень единственнен на каждом интервале, отсюда следуюет, что корень b_n уравнения (7.13) можно записать ввиде

$$b_n = n - \frac{1}{2} + \rho_n, \text{ где величина } \rho_n \in (0, \frac{1}{2}). \tag{7.3}$$

На промежутке $(n, n + \frac{1}{2})$ решений нет, так как

$$G(n + \frac{1}{2}) = \frac{-1}{g(n + \frac{1}{2})} > 0, \quad \lim_{b \to n+0} G(b) = +\infty \tag{7.4}$$

Подставим выражение для b_n (7.3) в уравнение (7.12), тогда получим

$$ctg(\pi(n - \frac{1}{2} + \rho_n)) = \frac{1}{\frac{b_n}{c_n} \operatorname{th} \pi c_n - \frac{1}{h}(2b_n^3 + b_n a)} \tag{7.5}$$

После преобразование получим следующее выражение

$$ctg(\pi\rho_n) = \frac{b_n}{c_n} \operatorname{th} \pi c_n - \frac{1}{h}(2b_n^3 + b_n a) \tag{7.6}$$

Исследуем поведение велоичины ρ_n при $n \to +\infty$, для этого сначала оценим правую часть, величина $\frac{b_n}{c_n}$ стремиться к при $n \to +\infty$, $\operatorname{th} \pi c_n$ ограниченная функция и стремиться к 1 при $n \to +\infty$. Величина $(2b_n^3 + b_n a)$ стремиться к бесконечности и имеет третий порядок, то есть $0(n^3)$, следоватедно

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\cos \pi\rho_n}{\sin \pi\rho_n} = +\infty, \tag{7.7}$$

следовательно

$$\lim_{n\to+\infty} \sin \pi\rho_n = 0 \tag{7.8}$$

Это возможно только, если

$$\lim_{n\to+\infty} \rho_n \to 0. \tag{7.9}$$

Причем $\rho_n = O(n^3)$, осталось получить строгую оценку скорости роста ρ_n

7.3. Оценка ρ_n

Перепишем уравнение (7.12) в виде:

$$\operatorname{ctg} b_n\pi = \frac{h}{h\frac{b_n}{c_n}\operatorname{th}(c_n\pi) - 2b_n^3 + b_n a} \tag{7.1}$$

После подстановки выражения (7.3) в левую часть, получим

$$\operatorname{ctg}(b_n\pi) = \operatorname{ctg}(n - \frac{1}{2} + \rho_n)\pi = -\operatorname{tg}(\rho_n) \tag{7.2}$$

Домножим уравнение (7.1) на $\frac{\rho_n}{\operatorname{tg}(\pi\rho_n)}$, получим

$$\rho_n = \frac{\pi\rho_n}{\pi\operatorname{tg}(\pi\rho_n)}\frac{h}{h\frac{b_n}{\sqrt{b_n^2+a}}\operatorname{th}(\sqrt{b_n^2+a}\pi) - 2b_n^3 + b_n a} \tag{7.3}$$

Рассмотрим функцию $u(l) = \frac{l}{\operatorname{tg}(l)}$, её производная $u'(l) = \frac{\sin(2l)-2l}{2\sin^2(l)}$ отрицательная на промежутке $l \in (0, \frac{\pi}{4})$, так как

$$\lim_{l\to 0+0} u'(l) = \lim_{l\to 0+0}\frac{\sin 2l - 2l}{2\sin^2 l} = \lim_{l\to 0+0}\frac{2\sin l - 2l}{2\sin^2 l} = \\ = \lim_{l\to 0+0}\frac{\cos l - 1}{2\sin l} = \lim_{l\to 0+0}\frac{-\sin l}{2\cos l} = 0 \tag{7.4}$$

$$u'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{2}}{2\sin^2(\frac{\pi}{2})} = 1 - \frac{\pi}{2} < 0 \tag{7.5}$$

Тогда для $u(\pi\rho_n)$ будет справедлива формула

$$\frac{\pi}{4} < \frac{\pi\rho_n}{\operatorname{tg}(\pi\rho_n)} < 1 \tag{7.6}$$

Обозначим

$$v(l) = \frac{l}{\sqrt{l^2+a}}\operatorname{th}(\pi\sqrt{(l^2+a)}) \tag{7.7}$$

Тогда для функции $1 - v(l)$ справедливо

$$1 - v(l) = 1 - \frac{l}{\sqrt{l^2+a}}\operatorname{th}\left(\pi\sqrt{l^2+a}\right) = \\ = \frac{a}{\sqrt{l^2+a}(\sqrt{l^2+a}+l)} + \frac{l}{\sqrt{l^2+a}}\left(1 - \operatorname{th}\left(\pi\sqrt{l^2+a}\right)\right) \tag{7.8}$$

Произведем оценку снизу

$$1 - v(b_n) = \frac{a}{\sqrt{b_n^2+a}(\sqrt{b_n^2+a}+l)} + \frac{b_n}{\sqrt{b_n^2+a}}\left(1 - \operatorname{th}\left(\pi\sqrt{b_n^2+a}\right)\right) > \\ > \frac{a}{\sqrt{b_n^2+a}(\sqrt{b_n^2+a}+l)} = \frac{a}{b_n^2+a+b_n\sqrt{b_n^2+a}} > \frac{a}{2(b_n^2+a)} \tag{7.9}$$

Теперь оценку сверху

$$1-v(b_n)=\frac{a}{\sqrt{b_n^2+a}(\sqrt{b_n^2+a}+l)}+\frac{b_n-b_n\operatorname{th}\left(\pi\sqrt{b_n^2+a}\right)}{\sqrt{b_n^2+a}}<$$

$$<\frac{a}{b_n^2+a+b_n\sqrt{b_n^2+a}}+\frac{b_n-b_n\operatorname{th}\left(\pi b_n\right)}{\sqrt{b_n^2+a}}<\frac{a}{2b_n^2}+b_n-b_n\operatorname{th}(\pi b_n)=$$

$$=\frac{a}{2b_n^2}+b_n-b_n\frac{\operatorname{sh}(\pi b_n)}{\operatorname{ch}(\pi b_n)}=\frac{a}{2b_n^2}+b_n-b_n\frac{e^{2\pi b_n}-1}{e^{2\pi b_n}+1}=$$

$$=\frac{a}{2b_n^2}+\frac{2b_n}{e^{2\pi b_n}+1}<\frac{a+2b_n}{2b_n^2}. \quad (7.10)$$

Из этих оценок следует оценка для $v(b_n)=\frac{b_n}{\sqrt{b_n^2+a}}\operatorname{th}(\pi\sqrt(b_n^2+a))$:

$$1-\frac{a+2b_n}{2b_n^2}<\frac{b_n\operatorname{th}(\pi\sqrt{b_n^2+a})}{\sqrt{b_n^2+a}}<1-\frac{a}{2(b_n^2+a)} \quad (7.11)$$

Корни уравнения (7.12) лежат на интервале $(n-1/2,n)$, поэтому для b_n справедливо:

$$\left(n-\frac{1}{2}\right)^k<b_n^k<n^k,\quad k=2,3 \quad (7.12)$$

Тогда из оценок (7.6) - (7.12) получим оценку ρ_n:

$$\frac{h/4}{2n^3+an-h\left(1-\frac{a+2n}{2(n-\frac{1}{2})^2}\right)}<\rho_n<\frac{h/\pi}{2\left(n-\frac{1}{2}\right)^3+a\left(n-\frac{1}{2}\right)-h\left(1-\frac{a}{2(n^2+a)}\right)} \quad (7.13)$$

Следовательно существуют $C_1,C_2\in R$ и число $b'\in N$ такие, что для любого $n>b'+\frac{1}{2}$

$$\frac{C_1}{n^3}<\rho_n<\frac{C_2}{n^3} \quad (7.14)$$

7.4. Нормировка собственных функций оператора

Из первого уравнения системы (7.11) выразим C_2

$$C_2 = -C_4 \frac{b\cos(b\pi)}{c\,\mathrm{ch}(c\pi)} \tag{7.1}$$

Тогда собственные функции представимы в виде:

$$Y_n(y) = C_4(\sin(b_n y) - \mathrm{sh}(c_n y)\frac{b\cos(b\pi)}{c\,\mathrm{ch}(c\pi)}) \tag{7.2}$$

Произведем нормировку собственных функций

$$\|Y_n\|^2_{L_2[0,\pi]} = C_4^2\Bigg(\int\limits_0^\pi \sin^2(b_n y)dy - 2\frac{b_n\cos(b_n\pi)}{c_n\,\mathrm{ch}(c_n\pi)}\int\limits_0^\pi \sin(b_n y)\,\mathrm{sh}(c_n y)dy + \\ + \frac{b_n^2\cos^2(b_n\pi)}{c_n^2\,\mathrm{ch}^2(c_n\pi)}\int\limits_0^\pi \mathrm{sh}^2(c_n y)dy\Bigg) = C_4^2\Bigg(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin(2\pi b_n)}{4b_n} - \\ -2\frac{b_n\cos(b_n\pi)}{c_n\,\mathrm{ch}(c_n\pi)}\frac{1}{b_n^2+c_n^2}(c_n\sin(b_n\pi)\,\mathrm{ch}(c_n\pi) - b_n\cos(b_n\pi)\,\mathrm{sh}(c_n\pi)) + \frac{b_n^2\cos^2(b_n\pi)}{c_n^2\,\mathrm{ch}^2(c_n\pi)}(\frac{\mathrm{sh}(2\pi c_n)}{4c_n} - \frac{\pi}{2})\Bigg) \tag{7.3}$$

Из выражений (7.9)для b_n, c_n следует следуещее выражение для $\|Y_n\|^2$:

$$\|Y_n\|^2_{L_2[0,\pi]} = C_4^2\left(\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \text{ при} n \to +\infty \tag{7.4}$$

Значит имеет место следующее представление $C_4 = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+O(\frac{1}{n})}}$, тогда выражение для собственных функций примет вид:

$$Y_n(y) = C_n(\sin(b_n y) - \mathrm{sh}(c_n y)\frac{b\cos(b\pi)}{c\,\mathrm{ch}(c\pi)}), \text{ где } C_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+O(\frac{1}{n})}} \text{ при } n \to +\infty \tag{7.5}$$

7.5. Собственные значения λ_n

Из формул (7.15) и (7.9) вытекает следующее представление для собственных функций

$$\lambda_n = (n - \frac{1}{2} + \rho_n)^4 + a(n - \frac{1}{2} + \rho_n)^2 \tag{7.1}$$

В дальнейшем удобно использовать формулу для λ_n (7.2) из работы [Назаров], которая является общей для собственных значений произвольного дифференциального оператора четного порядка с переменными коэффициентами. Для задачи (6.1) - (6.4) справедливо следующее выражение для собственных значений при всех натуральных n

$$\lambda_n = \left(n - \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^4 \tag{7.2}$$

Покажем, что полученное нами выражение, является обобщением формулы (7.2), для этого рассмотрим предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[4]{\lambda_n} - \left(n + \frac{1}{2}\right)\right)n, \tag{7.3}$$

где λ_n вычислятся по формуле (7.1). Пусть $\{\kappa_n\}_n$ - числовая последовательность такая, что существует n_0 такое, что для любого $n > n_0$ $0 < \kappa_n < \infty$, тогда выражение (7.3) представимо в виде

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[4]{\left(n - \frac{1}{2} + \frac{\kappa_n}{n^3}\right)^4 + a\left(n - \frac{1}{2} + \frac{\kappa_n}{n^3}\right)^2} - \left(n - \frac{1}{2}\right)\right)n. \tag{7.4}$$

Произведем замену $m = n - \frac{1}{2}$, тогда выражение примет вид

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sqrt[4]{\left(m + \frac{\kappa_{m+\frac{1}{2}}}{(m+\frac{1}{2})^3}\right)^4 + a\left(m + \frac{\kappa_{m+\frac{1}{2}}}{(m+\frac{1}{2})^3}\right)^2} - m\right)\left(m + \frac{1}{2}\right). \tag{7.5}$$

Члены $\frac{\kappa_{m+\frac{1}{2}}}{(m+\frac{1}{2})^3}$, стремятся к нулю при $m \to \infty$, исключая их, а так же полагая $m + 1 \sim m$, получаем

$$\lim_{m\to\infty}(\sqrt[4]{m^4 + am^2} - m)\left(m + \frac{1}{2}\right) = \lim_{m\to\infty}\sqrt[4]{m^8 + am^6} - m^2 =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\frac{\sqrt{m^8 + am^6} - m^4}{\sqrt[4]{m^8 + am^6} + m^2} = \lim_{m\to\infty}\frac{am^6}{(\sqrt[4]{m^8 + am^6} + m^2)(\sqrt{m^8 + am^6} + m^2)} =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\frac{am^6}{4m^6} = \frac{a}{4} \tag{7.6}$$

Таким образом, мы получили первый член ассимптотики слагаемого $O(\frac{1}{n})$ в формуле для λ_n (7.2), следовательно наша формула (7.1) является её обобщением, и с учетом представленных выше выкладок, выражение (7.2) примет вид:

$$\lambda_n = \left(n - \frac{1}{2} + \frac{a}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \tag{7.7}$$

Если значение $b' + \frac{1}{2} \in N$, тогда обозначим $n' = b' + \frac{1}{2}$, если же $b' + \frac{1}{2} \notin N$, то $n' = [b' + \frac{1}{2}] + 1$. Тогда на интервале $(0, n' - \frac{1}{2})$ задача (6.1) - (6.4) имеет конечное число собственных значений [НЕЙМАРК]. Рассмотрим интервал $(0, n_0 - \frac{1}{2})$, пусть на нём имеется $k, k \in N \cup \{0\}$ собственных значений задачи (6.1) - (6.4) (с учетом кратностей). Введем обозначение $\{\varphi_n\}, \{Y_n\}, n \in N$ соответственно последовательность собственных значений (расположенных в порядке возрастания) и соответствующие им собственные функции. Из (7.7) вытекает, что для n $>$ k $+$ 1 справедливо следующее представление

$$\varphi_n = \left(n + n' - k + \frac{3}{2} + \frac{a}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right). \tag{7.8}$$

При этом собственные функции примут следующий вид

$$Y_n = C_n\left(\sin(\tilde{b}_n x) - \frac{\tilde{b}_n}{\tilde{c}_n}\cos(\tilde{b}_n x)\frac{\operatorname{sh}(\tilde{c}_n\pi)}{\operatorname{ch}(\tilde{c}_n\pi)}\right), \tag{7.9}$$

где

$$\tilde{b}_n = n + n' - k - \frac{3}{2} + \rho_n \tag{7.10}$$

$$\tilde{c}_n = \sqrt{\tilde{b}_n^2 + a} \tag{7.11}$$

$$\tilde{n} = n + n' - m - 1 \tag{7.12}$$

7.6. Базисные функции дифференциального оператора P и их свойства

Введем понятие обобщенного решения. Обобщенным решением задачи (3.1) - (3.4) называют такую функцию $u \in L_2(\Omega)$, что для любой функции $\xi \in V : |\xi| < \infty$

$$\int\limits_{\Omega} u(\xi_{tt} + \xi_{xxxx} - a\xi_{xx})\, dxdt = \int\limits_{\Omega} f(x,t)\xi\, dxdt, \tag{7.1}$$

где множество $V = \{\xi \in C^{\infty}(\Omega) \mid \xi(0,t) = \xi_{xx}(0,t) = 0,\ \xi(\pi,t) = \xi_{xxx}(\pi,t) - h\xi(\pi,t) = 0\ \forall t\}$

Решение исходной задачи (6.1) - (6.4) можно представить в виде ряда Фурье по следующей системе функций.

$$\left\{\ \sqrt{\tfrac{p}{\pi q}} Y_n(x)\cos(\tfrac{p}{q}lt), \sqrt{\tfrac{p}{\pi q}} Y_n(x)\sin(\tfrac{p}{q}lt), \tfrac{p}{2\pi q}Y_n(x)\ \right\}_{l,n\in N},$$

где p, q определяются условием на период:

$$T = 2\pi\frac{q}{p},\ q,p \in N,\ \text{НОД}(q,p) = 1. \tag{7.2}$$

Эта система является полной и ортонормированной в $L_2(\Omega)$. Введем следующие обозначения:

$$g_{nl}^{cos} = \sqrt{\frac{p}{\pi q}} Y_n(x)\cos\left(\frac{p}{q}lt\right) \tag{7.3}$$

$$g_{nl}^{sin} = \sqrt{\frac{p}{\pi q}} Y_n(x)\sin\left(\frac{p}{q}lt\right) \tag{7.4}$$

$$\tag{7.5}$$

Введем в рассмотрение оператор $\tilde{P}.L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, областью определения которого является множество W и $\tilde{P}h = h_{tt} + h_{xxxx} - ah_{xx}$ для $h \in W$. Далее обозначим оператор сопряженный в $L_2(\Omega)$ к $\tilde{P}$ как $P\ \ (P = \tilde{P}^*)$. Оператор P является самосопряженным в пространстве $L_2(\Omega)$. Введем следующие обозначения: $Ker(P), R(P)$ - соответственно ядро и образ оператора P. Покажем, что функции (7.3) являются собственными функциями оператора P со следующими собственными значениями:

$$r_{nl} = \varphi_n - \left(\frac{pl}{q}\right)^2,\ \ n \in N, l \in Z_+ \tag{7.6}$$

Для это необходимо убедится в выполнении равенства

$$Pg_{nl}^{sin,cos} = r_{nl}g_{nl}^{sin,cos} \tag{7.7}$$

Оператор задачи (6.1) - (6.4) представим в виде

$$P = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} - a\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{7.8}$$

Вычислим

$$Pg_{nl}^{sin} = -\sqrt{\frac{p}{\pi q}}\frac{p^2l^2}{q^2}\sin\left(\frac{p}{q}lt\right)Y_n + \sqrt{\frac{p}{\pi q}}\sin\left(\frac{p}{q}lt\right)(Y^{(4)} - aY'') =$$

$$= \sqrt{\frac{p}{\pi q}}\sin\left(\frac{p}{q}lt\right)\left(\frac{(Y_n^{(4)} - aY_n'')}{Y_n} - \frac{p^2l^2}{q^2}\right)\cdot Y_n = g_{nl}^{sin}\left(\varphi_n - \left(\frac{pl}{q}\right)^2\right) = g_{nl}^{sin}r_{nl} \quad (7.9)$$

Рассмотрением выражения Pg_{nl}^{cos} можно так же показать, что $Pg_{nl}^{cos} = r_{nl}g_{nl}^{cos}$

8. Теорема о существовании решений задачи (6.1) - (6.4)

8.1. Лемма о вполне непрерывности оператора

Лемма. *Пусть выполнено условие (7.2), тогда ядро $N(P)$ оператора P является конечномерным, а оператор $D^{-1} : R(D) \to R(D)$ является вполне непрервным*

Доказательство. Из условия (7.2) следует, что существует такое число m, что выполнено $\frac{q}{4}(2a+1) \in (m-1, m)$. Введем обозначение

$$\sigma_0 = \min\left(\frac{q}{4}(2a+1) - l + 1, l - \frac{q}{4}(2a+1)\right) \tag{8.1}$$

Используя выражения (8.1) и (7.8) выведем:

$$|q\sqrt{\varphi} - pl| = \left|q\left(n + n' - k + \frac{3}{2} + \frac{a}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 - pl\right| =$$
$$= \left|q\left((n+n'-k-1)(n+n'-k-2) + \left(n+n'-k-\frac{3}{2}+\frac{a}{4n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(\frac{a}{4n}-\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left. + (n+n'-k-1)\left(\frac{a}{4n}+\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) - pl\right| \tag{8.2}$$

Введем обозначение $v(n,l) = q(n+n'-k-1)(n+n'-k-2) - pl \in \mathbf{Z}$, тогда выражение (8.2) примет вид

$$|q\sqrt{\varphi} - pl| = |v(n,l) + q(2a+1)/4 + \alpha_n|, \tag{8.3}$$

где $\alpha_n = O(\frac{1}{n})$. Пусть n_1 такое натурально число, что для любого $n > n_1$ $|\alpha_n| < \frac{\sigma_0}{2}$. Тогда так как для любого $n > n_1$ и $l \in \mathbf{Z}$ $v(n,l)$ принимает только целые значения, при этом выражение $q(2a+1)/4$ является нецелым, то имеет место следующая оценка

$$v(n,l) + q(2a+1)/4 > \sigma_0, \tag{8.4}$$

тогда из выражений (8.3) и (8.4) следует оценка

$$|q\sqrt{\varphi} - pl| \geqslant \frac{\sigma_0}{2}, \tag{8.5}$$

а из выражения (7.6) вытекает следующая оценка

$$|r_n l| \geqslant \frac{\sigma_0}{2q^2}(q\sqrt{\varphi} + pl). \tag{8.6}$$

Из выражения (8.6) следует, что ядро оператора P конечномерно, то есть равенство $r_{nl} = 0$ выполняется не более чем для конечного числа пар $(n,l) \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}_+$. Следовательно, $dim\ ker\ P < \infty$, таким образом, доказано первое утверждение леммы. Введем следующие обозначения

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_0}{2p}, \ \ y_n = \frac{q}{p}\sqrt{\varphi_n} \tag{8.7}$$

Покажем что следующий ряд является ограниченным в $L_2(\Omega)$, для этого воспользуемся выражениями (7.8), (7.6).

$$J = \sum_{n=n_1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r_{nk}^2} = \frac{1}{q^2}\sum_{n=n_1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(q\sqrt{\varphi_n}-pl)^2(q\sqrt{\varphi_n}+pl)^2} \leqslant \frac{1}{q^2p^2}\sum_{n=n_1}^{\infty}\frac{1}{\varphi_n}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(l-y_n)^2}\right) \tag{8.8}$$

Из выражений (8.5), (8.7) следует, что для любого натурального $n > n_1,\ l \in \mathbf{Z}_+$ выполнено неравенство $|l - y_n| \geqslant \sigma_1$, причем $\sigma_1 \in (0, 1/2]$. Положим $y_n \in (d_n, d_{n+1}), d_n \in \mathbf{Z}_+$, тогда имеет место оценка:

$$J \leqslant \frac{2}{q^4p^2}\sum_{n=n_1}^{\infty}\frac{1}{\varphi_n}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(l-(y_n-d_n))^2}\right) \leqslant \frac{2}{q^4p^2}\sum_{n=n_1}^{\infty}\frac{1}{\varphi_n}\left(\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(l-(1-\sigma_1))^2}+\frac{1}{\sigma_1^2}\right) \tag{8.9}$$

Из сходимости ряда J следует, что оператор $P^{-1} : R(P) \to R(P)$ является вполне непрерывным. Таким образом, лемма доказана

8.2. Теорема о существовании бесконечного числа решений задачи (6.1) - (6.4)

Торема. *ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРЕМЫ* **Доказательство.** Для доказательства теоремы воспользуемся вариационным методом. Введем обозначение: $Q_l, l \in \mathbf{N}$ подпространства $L_2(\Omega)$, которые состоян из конечных линейных комбинаций элементов следующего множества

$$\left\{ Y_m(x)\cos\left(\tfrac{p}{q}kt\right), Y_m(x)\sin\left(\tfrac{p}{q}kt\right) \right\}, m \in [1, l], \quad k \in [0, l]$$

Подпространства Q_l являются конечномерными, это следует из леммы и выражения (8.6), введём на Q_l функционал

$$N(u) = \frac{1}{2}(Pu, u) + \frac{1}{p}\int\limits_{\Omega} g(x,t)|u|^p dxdt \tag{8.1}$$

Для доказательства существования критических точек функционала N воспользуемся методом из работы [O. Vevoda, "Partial di?erential equation,"Nordho?, Groningen (1981).]. Введем разбиение исходного пространства Q_l на прямую сумму двух подпространств $Q_l = D^\delta + U^\delta$. Базисы в данных пространствах задаются соответственно:

$$\left\{ Y_m(x)\cos\left(\tfrac{p}{q}kt\right), Y_m(x)\sin\left(\tfrac{p}{q}kt\right) \right\}, r_{mk} \leqslant \delta, \quad m \in [1, l], \quad k \in [0, l]$$

$$\left\{ Y_m(x)\cos\left(\tfrac{p}{q}kt\right), Y_m(x)\sin\left(\tfrac{p}{q}kt\right) \right\}, r_{mk} > \delta, \quad m \in [1, l], \quad k \in [0, l]$$

Покажем, что существует

$$d \in (0, 1), \tag{8.2}$$

независящее от l такое, что

$$\|u\|_p^2 \leqslant C_1 \sum_{m=1}^{l}\sum_{k=0}^{l} |r_{mk}|^d (a_{mk}^2 + b_{mk}^2) \tag{8.3}$$

для любой функции u из $Q_l \cap R(P)$, где $R(P)$ — область определения оператора P, a_{mk}, b_{mk} — коэффициенты разложения функции u в ряд Фурье по системе базисных функций, а C_1 не зависит от u и l. Ввеедм вспомогательные обозначения

$$p_1 = \frac{p}{p-1}, \quad \xi = \frac{2}{p_1}, \quad \xi_1 = \frac{\xi}{\xi - 1}, \quad \rho \in \left(\frac{p-2}{2(p-1), \frac{2}{2(p-1)}}\right) \tag{8.4}$$

Используя неравенства Хаусдорфа—Юнга, Гёлдера, а так же условие ограниченности собственных функций из базиса выведем

$$\|u\|_p \leqslant C_0 \biggl(\sum_{m=1}^{l} \sum_{k=0}^{l} (|a_{mk}|^{p_1} + |b_{mk}|^{p_1}) \biggr)^{\frac{1}{p_1}} =$$

$$= C_0 \biggl(\sum_{m=1}^{l} \sum_{k=0}^{l} |r_{mk}|^{-\rho} (|r_{mk}|^{\rho} |a_{mk}|^{p_1} + |r_{mk}|^{\rho} |b_{mk}|^{p_1}) \biggr)^{\frac{1}{p_1}} =$$

$$= C_0 \biggl(\sum_{m=1}^{l} \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{|r_{mk}|^{\rho\xi_1}} \biggr)^{\frac{1}{\xi_1 p_1}} \cdot \biggl(\sum_{m=1}^{l} \sum_{k=0}^{l} |r_{mk}|^{\rho\xi} (|a_{mk}|^{\xi p_1} + |b_{mk}|^{\xi p_1}) \biggr)^{\frac{1}{\xi p_1}} =$$

$$= C_0 \biggl(\sum_{m=1}^{l} \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{|r_{mk}|^{\rho\xi_1}} \biggr)^{\frac{1}{\xi_1 p_1}} \cdot \biggl(\sum_{m=1}^{l} \sum_{k=0}^{l} |r_{mk}|^{\frac{2(p-1)\rho}{p}} (|a_{mk}|^2 + |b_{mk}|^2) \biggr)^{\frac{1}{2}}.$$

Если обозначить

$$d = \frac{2(p-1)\rho}{p}, \quad c = \rho\xi_1 = \frac{2(p-1)\rho}{p-2} \in (1, +\infty), \tag{8.5}$$

тогда $d \in (0,1)$ и неравенство (8.3) выполнено с константой

$$C_1 = C_0 \biggl(\sum_{m=1}^{l} \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{|r_{mk}|^{\rho}} \biggr)^{\frac{2}{\xi_1 p_1}} \tag{8.6}$$

Здесь и далее $C_1, C_2, \ldots$ будут обозначать константы, которые не зависят от l. Обозначим через R_l множество таких функций w, для которых имеет место следующее представление

$$w = \sum_{m=1}^{l} \sum_{k=0}^{l} Y_m \biggl(a_{mk} \cos\left(\frac{p}{q} kt\right) + b_{mk} \sin\left(\frac{p}{q} kt\right) \biggr) \tag{8.7}$$

$$\sum_{m=1}^{l} \sum_{k=0}^{l} |r_{mk}|^{d} (a_{mk}^2 + b_{mk}^2) = 1 \tag{8.8}$$

То есть для функций из единичного шара в норме

$$|||w|||_s = \sum_{m=1}^{l} \sum_{k=0}^{l} |r_{mk}|^{s} (a_{mk}^2 + b_{mk}^2) \tag{8.9}$$

Оценим значения функционала N на множестве $R_l \cap D^{-\delta}$, причем $\delta > 0$, сначала проведем оценку сверху:

$$N(u) \leqslant -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{l} \sum_{k=0}^{l} |r_{mk}| (a_{mk}^2 + b_{mk}^2) + \frac{g^+}{p} \|u\|_p \leqslant -\frac{1}{2} \delta^{1-d} + \frac{g^+}{p} \sqrt{C_1}, \tag{8.10}$$

для всех функций u, удовлетворяющих условию

$$u = \sum_{m=1}^{l} \sum_{k=0}^{l} Y_m \biggl(a_{mk} \cos\left(\frac{p}{q} kt\right) + b_{mk} \sin\left(\frac{p}{q} kt\right) \biggr) \in R_l \cap D^{-\delta}. \tag{8.11}$$

Выберем произвольное число L > 0, обозначим

$$\delta_L = \biggl(2 \biggl(L + \frac{g^+}{p} \sqrt{C_1} \biggr) \biggr)^{\frac{1}{1-d}} \tag{8.12}$$

Тогда имеет место следующее неравенство

$$N(u) \leqslant -L \ \ \forall u \in R_l \cap D^{-\delta_L} \tag{8.13}$$

Возьмем произвольное число κ, тогда для любой функции $u \in U^{-\kappa}$ выполняется

$$N(u) \geqslant -\frac{1}{2}\kappa\|u\|^2 + \frac{g^-}{p}\|u\|_p^p \geqslant C_2\|u\|^p - \frac{1}{2}\kappa\|u\|^2 \tag{8.14}$$

Обозначим

$$f(t) = C_2 t^p - \frac{1}{2}\kappa t^2 \tag{8.15}$$

Найдем минимум этой функции, для этого решим уравнение $f'(t) = 0$, тогда получим

$$C_2 p t^{p-1} - \kappa t = 0 \tag{8.16}$$

Это выполняется для

$$t_{min} = \left(\frac{C_2 p}{\kappa}\right)^{\frac{1}{2-p}}$$

После подстановки t_{min} в функцию $f(t)$ получим следующее выражение

$$\begin{aligned} f(t_{min}) = C_2\left(\frac{C_2 p}{\kappa}\right)^{\frac{p}{2-p}} - \frac{1}{2}\left(\frac{C_2 p}{\kappa}\right)^{\frac{2}{2-p}}\kappa = C_2^{\frac{2}{2-p}} p^{\frac{p}{2-p}} \kappa^{\frac{p}{p-2}} - \frac{1}{2} C_2^{\frac{2}{2-p}} p^{\frac{2}{2-p}} \kappa^{\frac{p}{p-2}} = \\ = \kappa^{\frac{p}{p-2}} (C_2 p)^{\frac{2}{2-p}} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2-p}{2p(C_2 p)^{\frac{2}{p-2}}} \kappa^{\frac{p}{p-2}} = C_3 \kappa^{\frac{p}{p-2}}, \end{aligned} \tag{8.17}$$

где

$$C_3 = \frac{2-p}{2p(C_2 p)^{\frac{2}{p-2}}}, \ \ g^- = \min_{\Omega} g(x,t), \ \ g^+ = \max_{\Omega} g(x,t) \tag{8.18}$$

Оно выполнено для любого u из $U^{-\kappa}$ Введем обозначение

$$z_\kappa = C_3 \kappa^{\frac{p}{p-2}} - 1 \tag{8.19}$$

Зафиксируем число L, пусть число L_1 такое, что $L_1 > \delta_L$, а также $D^{-L_1} \neq D^{-\delta_L}$. Из этого вытекает существование собственной функции $p(x,t) \in R_l$ оператора P с собственным значением $r \in (-L_1, -\delta_L]$, тогда имеет место следующее неравенство

$$-z_{L_1} < N(p) \leqslant -L, \ \ -z_{L_1} < -L$$

Далее покажем, что на отрезке $[-z_{L_1}]$ существует значение функционала $N(u)$ в его критической точке. Доказательство будем проводить от противного, предположим что на отрезке $[-z_{L_1}]$ нет критических значений функционала N. Тогда из деформационной леммы [L. Nirenberg. "Variational and topological methods in nonlinear problems,"Bull. Amer. Math. Soc.(N.S.). ?1981.? V 4. N 3.? P. 267-302.] следует существование такого непрерывного нечетного отображения $h : Q_l \to Q_l$, что если функция $u \in Q_l$, а $N(u) \leqslant -L$, то

$h(N(u)) < -z_{L_1}$ Введем разбиение любой функции $u \in Q_l$ на сумму $u = u^D + u^U$, где $u^D \in D^{-L_1}, u^U \in U^{-L_1}$. Пусть K есть линейный оператор, такой, что

$$K : Q_l \to D^{-L_1}, \;\; Ku = u^D \;\; \forall u \in Q_l$$

, то есть является проектором. Отображение $Kh : Q_l \to D^{-L_1}$ является нечетным и переводит пространство $R_l \cup D^{-L_1}$ в подмножество пространства D^{-L_1} меньшей размерности. Тогда удовлетворяются условия теоремы Борсука, из нее следует, что существует $v_0 \in R_l \cup D^{-\delta_L}$, для которого выполняется:

$$Kh(v_0) = 0 \tag{8.20}$$

Значит, $h(v_0) = (h(v_0))^D \in D^{-L_1}$, а

$$N(h(v_0)) > z_{L_1} \tag{8.21}$$

В то же время, $N(v_0) < L$, отсюда следует, что

$$N(h(v_0)) \leqslant -z_{L_1} \tag{8.22}$$

Это противоречит (8.21), из этого противоречия следует, что существует такая функция $u_l \in Q_l$, такая, что

$$N'(u_l) = 0, \;\; N(u_l) \in [-z_{L_1}, -L] \tag{8.23}$$

Таким образом, существование критической точки функционала на отрезке $[-z_{L_1}, -L]$ доказано. Проведем предельный переход при $l \to \infty$, для этого оценим $\|u_l\|_p$. Из (8.23) получаются следующие соотношения:

$$(Pu_l, \psi) + \int\limits_{\Omega} g(x,t)|u_l|^{p-2} u_l \psi dxdt = 0 \;\; \forall \psi \in Q_l, \tag{8.24}$$

$$z_{L_1} \leqslant \frac{1}{2}(Pu_l, u_l) + \frac{1}{p} \int\limits_{\Omega} g(x,t)|u_l|^p dxdt \leqslant L. \tag{8.25}$$

Если положить в равенстве (8.24) $\psi = u_l$, далее умножить полученное выражение на $1/2$ и вычесть из него (8.25), то получим (с учетом условия $p > 2$):

$$L \leqslant \int\limits_{\Omega} g(x,t)\left(\frac{1}{2}|u_l|^{p-2}u_l^2 - \frac{1}{p}|u_l|^p\right)dxdt \leqslant z_{L_1} \tag{8.26}$$

$$L \leqslant \int\limits_{\Omega} g(x,t)|u_l|^{p-2}\left(\frac{1}{2}u_l^2 - \frac{1}{p}|u_l|^2\right)dxdt \leqslant z_{L_1} \tag{8.27}$$

$$L \leqslant \int\limits_{\Omega} g(x,t)|u_l|^{p-2}|u_l|^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)dxdt \leqslant z_{L_1} \tag{8.28}$$

$$\frac{2p}{p-2}L \leqslant \int\limits_{\Omega} g(x,t)|u_l|^p dxdt \leqslant \frac{2p}{p-2}z_{L_1} \tag{8.29}$$

(8.30)

Разобьем полученное выражение на два неравенства и рассмотрим их отдельно

$$\frac{2p}{p-2}L \leqslant \int\limits_{\Omega} g(x,t)|u_l|^p dxdt \tag{8.31}$$

$$\frac{2p}{(p-2)g^-}L \leqslant \int\limits_{\Omega} |u_l|^p dxdt \tag{8.32}$$

$$\frac{2p}{(p-2)g^-}L \leqslant \|u_l\|_p^p \tag{8.33}$$

(8.34)

С другой стороны

$$\int\limits_{\Omega} g(x,t)|u_l|^p dxdt \leqslant \frac{2p}{p-2}z_{L_1} \tag{8.35}$$

$$\int\limits_{\Omega} |u_l|^p dxdt \leqslant \frac{2p}{(p-2)g^+}z_{L_1} \tag{8.36}$$

$$\|u_l\|_p^p \leqslant \frac{2p}{(p-2)g^+}z_{L_1} \tag{8.37}$$

(8.38)

Итоговая оценка примет вид

$$C_3 \leqslant \|u_l\|_p^p \leqslant C_4, \tag{8.39}$$

где $C_3 = \frac{2p}{(p-2)g^-}L$, $C_4 = \frac{2p}{(p-2)g^+}z_{L_1}$. Из (8.39) следует существование подпоследовательности $u_{l_k} = w_k$, такой, что $w_k \to u$, слабо в $L_p(\Omega)$, а функция $g(x,t)|w_k|^{p-2}w_k \to g_0$ слабо в $L_{p_1}(\Omega)$. Рассмотрим задачу (6.1) — (6.4), покажем, что u является её обобщенным решением. Пусть функции w_k, u представляются в виде рядов Фурье по системе функций

[ВСТАВИТЬ ССЫЛКУ!] с коэффициентаии $\{a^k_{ij}, b^k_{ij}\}, \{a_{ij}, b_{ij}\}$ соответственно. Проведем оценку значения суммы

$$J^k_M = \sum_{|r_{ij}|\geqslant M} |r_{ij}|((a^k_{ij})^2 + (b^k_{ij})^2), \tag{8.40}$$

для этого введем обозначение

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, t > 0 \\ -1, t \leqslant 0 \end{cases}$$

Подставим в выражение (8.24) функцию

$$\psi_0 = \sum_{|r_{ij}|\geqslant M} \eta(r_{ij}) Y_i(x) \left(a_{ij} \cos\left(\frac{p}{q} jt\right) + b_{ij} \sin\left(\frac{p}{q} jt\right)\right), \tag{8.41}$$

тогда применяя неравенство Гёлдера, а так же (8.3) получим

$$J^k_M \leqslant g^+ \int\limits_\Omega |w_k|^{p-1} |\psi_0| dxdt \leqslant$$

$$\leqslant g^+ C_5^{\frac{p-1}{p}} \sqrt{C_1 \sum_{|r_{ij}|\geqslant L} |r_{ij}|^d ((a^k_{ij})^2 + (b^k_{ij})^2)} \leqslant \sqrt{C_1} g^+ C_5^{\frac{p-1}{p}} \frac{1}{M^{\frac{1-d}{2}}} \sqrt{J^k_M} \tag{8.42}$$

Отсюда следует, что

$$J^k_M \leqslant \sqrt{C_1} g^+ C_5^{\frac{p-1}{p}} \frac{1}{M^{\frac{1-d}{2}}} \sqrt{J^k_M} \tag{8.43}$$

$$(J^k_M)^2 \leqslant C_1 \cdot (g^+)^2 C_5^{\frac{2(p-1)}{p}} \frac{1}{M^{1-d}} J^k_M \tag{8.44}$$

$$J^k_M \left(J^k_M - C_1 \cdot (g^+)^2 C_5^{\frac{2(p-1)}{p}} \frac{1}{M^{1-d}} \right) \leqslant 0 \tag{8.45}$$

В следствии неотрицательности J^k_M получаем

$$J^k_M \leqslant \frac{C_6}{M^{1-d}}, \tag{8.46}$$

где $C_6 = C_1 \cdot (g^+)^2 C_5^{\frac{2(p-1)}{p}}$.

9. Заключение

В работе была поставлена задача Штурма-Лиувилля для уравнения (3.1) - (3.4). Было получено трансцендентное уравнение и в качестве его решения были получены собственные функции и асимптотика собственных значений. Далее были проведены оценки для собственных функций и их производных, а так же собственных значений. Была поставлена и доказана теорема о существовании и единственности решения операторного уравнения $Au = f$, а так же о его принадлежности $u \in H_1(\Omega)$ при $f \in L_2(\Omega)$ и $u \in H_2(\Omega)$ при $f \in H_1(\Omega)$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Ф.А. Березин, М.А.Шубин. Уравнение Шрёдингера. М: Изд-во Моск. ун-та, 1983. - 392 с.
2. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. М: Издательство Наука, 1977. - 735 с.
3. Треногин В.А. Функциональный анализ. М: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 488 с.
4. Рудаков И.А. Периодические решения квазилинейного уравнения колебаний балки с однородными граничными условиями. Дифференциальные уравнения, 2012. - 48 с.
5. Рудаков И.А. Периодические решения квазилинейного уравнения вынужденных колебаний балки. Серия математическая. М: Известия РАН, 2015. - 34 с.
6. Рудаков И.А. О периодических решениях одного уравнения колебаний балки. Дифференциальные уравнения, 2018. - 54 с.
7. Рудаков И.А. Задача о колебаниях двутавровой балки с закрепленным и шарнирно опертым концами. М: Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2019. - 21 с.
8. Рудаков И.А. Периодические решения квазилинейного уравнения Эйлера– Бернулли. Дифференциальные уравнения, 2019. - 11 с.