

# Module ITIL41 – Analyse d'image/modélisation 3D

Compte rendu du projet

Année 2019 – 2020

Eric Landry **KOTTO DIPANDA**  
Sidi **TOURE**

# INTRODUCTION

Dans le cadre du module « Analyse d'images /modélisation 3D », il nous a été dispensé plusieurs notions de bases en mathématique notamment en géométrie et à l'initiation à la modélisation 3D sous POV-Ray. Nous avons réalisé plusieurs TD et TP pour facilement assimiler les notions.

Il nous été demandé dans le cadre d'un projet de réaliser l'animation d'une sphère se déplaçant sur une autre sphère plus grande de centre O et de rayon 1, la trajectoire pouvant être modélisée par une courbe de Bézier rationnelle de degré idoine soit par une courbe obtenue en plusieurs temps par projection stéréographique.

Nous allons présenter succinctement ces deux moyens en s'appuyant sur les connaissances développées en cours et quelques articles scientifiques que nous avons consultés.

# SOMMAIRE

INTRODUCTION .....	1
SOMMAIRE .....	2
I. Quelques généralités .....	3
1. Courbe de Bézier rationnelle .....	3
2. Quelques propriétés .....	3
II. Modélisation d'un arc de cercle par une courbe de Bézier rationnelle de degré idoine. .3	
1. Expression analytique des polynômes de Bernstein d'ordre 2 .....	3
2. Définition de l'arc de cercle par une courbe de Bézier quadratique .....	4
i. 1 <sup>er</sup> cas : $P_0$ et $P_2$ diamétralement opposées .....	4
ii. 2 <sup>ème</sup> cas : $P_0$ et $P_2$ ne sont pas diamétralement opposées.....	5
III. Construction d'une courbe en plusieurs temps via une projection stéréographique .....	6
1. Quelques généralités et courbe de Bézier rationnelle de degré 4 .....	6
1. Image de la sphère par projection stéréographique .....	6
i. Expression analytique du plan $ P$ .....	7
2. Définition d'une courbe de Bézier quadratique dans le plan $ P$ .....	8
3. Détermination de l'image de la courbe de Bézier par l'application inverse.....	8
i. Définition de l'application inverse .....	8
ii. Image de la courbe de Bézier quadratique par l'application inverse .....	8
iii. Détermination des poids de la nouvelle courbe de Bézier obtenue .....	10
iv. Détermination des abscisses des points de contrôles .....	10
v. Détermination des autres coordonnées .....	10
vi. Application à l'arc de cercle.....	11
IV. Gestion de l'animation de la petite sphère sur la grande sphère unité .....	12
BIBLIOGRAPHIE.....	13

## I. Quelques généralités

Dans cette section nous allons présenter quelques généralités pouvant nous servir par la suite.

### 1. Courbe de Bézier rationnelle

Une courbe de Bézier rationnelle est une courbe paramétrée  $M(t)$  satisfaisant deux cas de figure. On note l'ensemble des points de contrôles pondérés  $\{P_i, w_i\}$ ,  $i \in [0, n]$  avec  $n$  le degré de la courbe.

Certains poids peuvent être nul et d'autres non, on note  $I$  l'ensemble des indices de poids non nul et  $J$  l'ensemble des indices des poids nuls.

$M(t)$  satisfait donc l'équation :

$$M(t) = \frac{1}{\sum_{i \in I} B_i(t) w_i} \times \sum_{i \in I} B_i(t) w_i \overrightarrow{OP_i} + \frac{1}{\sum_{i \in I} w_i B_i(t)} \times \sum_{i \in J} B_i(t) \overrightarrow{P_i},$$

Dans le cas où tous les poids sont non nuls la courbe de Bézier rationnelle prend la forme suivante :

$$M(t) = \frac{1}{\sum_{i \in I} B_i(t)} \times \sum_{i \in I} B_i(t) \overrightarrow{OP_i}.$$

Aussi  $B_i(t)$  représente le « i » polynôme de Bernstein d'ordre  $n$ .

Dans tous les cas  $t \in [0, 1]$ .

### 2. Quelques propriétés

- ✓ Pour une courbe de Bézier rationnelle d'ordre  $n$  on a  $(n+1)$  points de contrôles pondérés
- ✓ On a une interpolation de la courbe avec le 1<sup>er</sup> et le dernier point de la courbe.
- ✓ Il existe plusieurs méthodes de constructions de la courbe, soit on peut utiliser directement la relation donnée précédente, soit on peut utiliser l'algorithme de Casteljaeu.

## II. Modélisation d'un arc de cercle par une courbe de Bézier rationnelle de degré idoine.

Un arc de cercle est défini par un point de départ et un point d'arrivée. Pour modéliser un arc de cercle on utilise les courbes de Bézier quadratique, le degré de la courbe est donc 3 ainsi on aura donc 4 points de contrôles de la courbe.

### 1. Expression analytique des polynômes de Bernstein d'ordre 2

Les polynômes de Bernstein d'ordre  $n$  sont donnés par la relation :

$B_i^n(t) = C_n^i (1-t)^{n-i} t^i$ , avec  $C_n^i$  la combinaison de  $i$  dans  $n$  donné par la relation :

$$C_n^i = \frac{n!}{i! (n-i)!}$$

Dans notre cas  $n=2$  et en développant pour  $i = 0,1,2$  on trouve les relations suivantes :

$$\begin{cases} B_0^2(t) = (1-t)^2 \\ B_1^2(t) = t(1-t) \\ B_2^2(t) = t^2 \end{cases}$$

L'ensemble des polynômes de Bernstein d'ordre 2 forme un sous espace vectorielle des polynômes de degré inférieur ou égale à 2 notée  $R_2[X]$ .

Ce qui nous amène à exprimer les vecteurs 1, t et  $t^2$  en fonction des polynômes de Bernstein comme suit :

$$\begin{cases} 1 = B_0^2(t) + B_1^2(t) + B_2^2(t) \\ t = B_1^2(t) + B_2^2(t) \\ t^2 = B_2^2(t) \end{cases}$$

## 2. Définition de l'arc de cercle par une courbe de Bézier quadratique

Pour modéliser un arc de cercle d'origine  $P_0$  et d'extrémité  $P_2$  deux cas de figure se présente :

- Les points  $P_0$  et  $P_1$  sont diamétralement opposées
- Les points  $P_1$  et  $P_2$  ne sont pas diamétralement opposées

### i. 1<sup>er</sup> cas : $P_0$ et $P_2$ diamétralement opposées

Dans le cas où  $P_0$  et  $P_2$  sont diamétralement opposées alors l'arc de cercle est un demi-cercle.

Nous notons par la suite  $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  et  $P_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ .

Nous utiliserons le résultat suivant :

Si  $P_0$  et  $P_2$  sont diamétralement opposée alors  $BR\{(P_0, w_0), (\vec{P_1}, 0), (P_2, w_2)\}$  est un demi-cercle si et seulement si :  $w_0 w_2 \overrightarrow{P_0 P_2}^2 = 4 \vec{P_1}$ , avec  $\vec{P_1}$  un vecteur orthogonal au vecteur  $\overrightarrow{P_0 P_2}$ .

✓ Détermination analytique du vecteur  $\vec{P_1}$

Etant donnée les expressions analytiques de  $P_0$  et  $P_2$  définit précédemment,  $P_0 P_2 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$ , une façon simple de choisir le vecteur  $\vec{P_1}$  est :  $\vec{P_1} = \begin{pmatrix} y_2 - y_1 \\ -(x_2 - x_1) \end{pmatrix}$ .

✓ Discussion autour des poids  $w_0$  et  $w_2$

Précédemment nous avons énoncée la relation  $w_0 w_2 \overrightarrow{P_0 P_2}^2 = 4 \vec{P_1}$

Soit en fixant  $w_0$ , on peut déterminer  $w_2$  comme suit :

$$w_2 = \frac{4 \vec{P_1}}{w_0 \overrightarrow{P_0 P_2}^2},$$

Vue que les vecteurs  $\overrightarrow{P_0 P_2}$  et  $\vec{P_1}$  sont orthogonaux et vue la manière dont on a défini le vecteur  $\vec{P_1}$ , on peut déduire la relation :

$$w_2 = \frac{4}{w_0}$$

L'expression analytique de la courbe peut donc être obtenue comme suit :

$$M(t) = \frac{1}{w_0 \times (1-t)^2 + w_2 \times t^2} (w_0(1-t)^2 \overrightarrow{OP_0} + w_2 t^2 \overrightarrow{OP_2}) + \frac{1}{w_0 \times (1-t)^2 + w_2 \times t^2} t(1-t) \overrightarrow{P_1}$$

Avec  $t \in [0,1]$ .

✓ Définition du centre et du rayon du demi arc-de cercle

Il paraît évident que le diamètre  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$  ;

Le rayon  $R = \frac{d}{2}$  soit  $R = \frac{1}{2} \times \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Aussi le rayon est le milieu du segment  $P_0P_2$  soit H le centre, H a pour coordonnées  $(\frac{x_0+x_2}{2}, \frac{y_0+y_2}{2})$ .

## ii. 2<sup>ème</sup> cas : $P_0$ et $P_2$ ne sont pas diamétralement opposées

Dans le cas où  $P_0$  et  $P_2$  ne sont pas diamétralement opposées, on utilise le résultat suivant :

On note  $I_1$  le milieu du segment  $P_0P_2$ , soit le point  $P_1$  donnée par la relation :

$$\overrightarrow{I_1P_1} = t_1 \overrightarrow{O_0I_1} \text{ avec } t_1 = \frac{\overrightarrow{O_0P_0} \cdot \overrightarrow{I_1P_0}}{\overrightarrow{O_0P_0} \cdot \overrightarrow{O_0I_1}} \text{ et } O_0 \text{ le centre du cercle.}$$

$BR\{(P_0, w_0), (P_1, w_1), (P_2, w_2)\}$  est un arc de cercle si et seulement si :

$$w_1 = w_0 w_2 \cos^2(\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2})$$

Si on a une condition sur  $w_0$  et  $w_2$  on peut trouver une condition sur  $w_1$  grâce à la relation précédente.

✓ Condition sur les poids  $w_0$  et  $w_2$

$P_0$  et  $P_2$  étant respectivement le 1<sup>er</sup> et le dernier point de contrôle alors ils appartiennent à la courbe de Bézier.

Dans ce cas où tous les poids sont nuls on a la relation suivante :

$$M(t) = \frac{1}{w_0 \times (1-t)^2 + w_1 \times t(1-t) + w_2 \times t^2} (w_0(1-t)^2 \overrightarrow{OP_0} + w_1 t(1-t) \overrightarrow{OP_1} + w_2 t^2 \overrightarrow{OP_2})$$

Etant donné un troisième point du cercle  $G(x_g, y_g)$  il appartient à la courbe de Bézier, cela signifie qu'il existe un  $t_0 \in [0,1]$  tel que :

$$\begin{cases} x_g = \frac{1}{w_0 \times (1-t_0)^2 + t_0(1-t_0)w_0w_2 \cos^2(\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}) + w_2 \times t_0^2} \times w_0(1-t_0)^2 x_0 + w_0w_2 \cos^2(\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}) t_0(1-t_0) x_1 + w_2 t_0^2 x_2 \\ y_g = \frac{1}{w_0 \times (1-t_0)^2 + t_0(1-t_0)w_0w_2 \cos^2(\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}) + w_2 \times t_0^2} \times w_0(1-t_0)^2 y_0 + w_0w_2 \cos^2(\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}) t_0(1-t_0) y_1 + w_2 t_0^2 y_2 \end{cases}$$

Ce qui nous donne un système de deux équations deux inconnues on peut donc facilement substituer  $w_0$  et  $w_2$  par la méthode de Cramer puis de remplacer leurs valeurs dans l'expression de  $w_1$  pour trouver enfin  $w_1$ .

L'arc de cercle sera donc ainsi maintenant parfaitement défini par notre courbe de Bézier rationnelle quadratique.

### III. Construction d'une courbe en plusieurs temps via une projection stéréographique

Dans cette partie on va d'abord une courbe de Bézier en un plan que l'on notera  $|P$  via une projection stéréographique puis nous allons définir une courbe de Bézier quadratique sur ce plan  $|P$  et pour finir nous allons trouver l'image du cercle dans plan  $|P$  sur la sphère  $|S$ .

#### 1. Quelques généralités et courbe de Bézier rationnelle de degré 4

Nous aurons besoin d'utiliser une courbe de Bézier de degré 4 par la suite.

✓ Polynômes de Bernstein de degré 4

A l'aide de la relation  $B_i^4(t) = C_n^i t^i (1-t)^{4-i}$  avec  $i$  valant 0,1,2,3,4, on peut définir les polynômes de Bernstein d'ordre 4 comme suit :

$$B_0^4 = (1-t)^4$$

$$B_1^4(t) = t(1-t)^3$$

$$B_2^4(t) = 6t^2(1-t)^2$$

$$B_3^4(t) = 4t^3(1-t)$$

$$B_4^4(t) = t^4$$

✓ Expression des vecteurs de la base canonique de  $R_4[X]$  dans la base des polynômes de Bernstein

Par la suite nous avons démontré les expressions des vecteurs 1,  $t$ ,  $t^2$ ,  $t^3$  et  $t^4$  dans la base de Bernstein comme suit :

$$1 = B_0^4 + B_1^4 + B_2^4 + B_3^4 + B_4^4$$

$$t = \frac{1}{4}B_1^4(t) + \frac{1}{2}B_2^4(t) + \frac{3}{4}B_3^4(t) + B_4^4(t)$$

$$t^2 = \frac{1}{6}B_2^4(t) + \frac{1}{2}B_3^4(t) + B_4^4(t)$$

$$t^3 = \frac{1}{4}B_3^4(t) + B_4^4(t)$$

$$t^4 = B_4^4(t)$$

L'expression analytique de la courbe de Bézier est donnée par la formule :

$$M(t) = \frac{1}{(1-t)^4 w_0 + t(1-t)^3 w_1 + 6t^2 w_2 + 4t^3(1-t)w_3 + t^4 w_4} ((1-t)^4 w_0 P_0 + t(1-t)^3 w_1 P_1 + 6t^2 w_2 P_2 + 4t^3(1-t)w_3 P_3 + t^4 w_4 P_4)$$

#### 1. Image de la sphère par projection stéréographique

Préambule : On considère une sphère centre en l'origine et de rayon 1, un point  $M(x,y,z)$  de l'espace appartient donc à une telle sphère si ses coordonnées vérifient la relation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Soit  $N = (0, 0, 1)$  le "pôle nord", et soit  $\mathcal{M}$  le reste de la sphère. Le plan  $z = 0$  passe par le centre de la sphère ; "l'équateur" est l'intersection de la sphère avec ce plan.

Définissez la **projection stéréographique** de P comme étant ce point P' dans le plan. Ce plan sera noté |P.

La figure suivante illustre la projection stéréographique de la sphère unitaire du pôle nord sur le plan  $z=0$ , représenté en coupe :

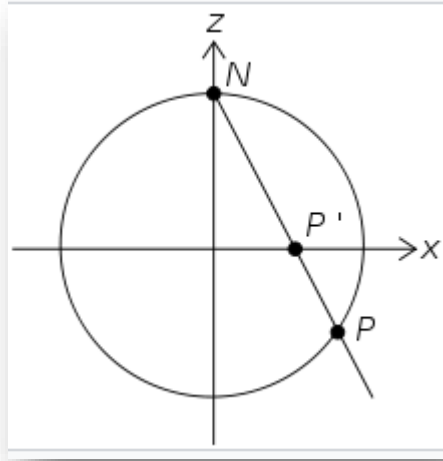


Figure 1: illustration de la projection stéréographique

On peut donc définir une application bijective f (projection stéréographique) comme suit :

$$f: \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{P}$$

$$(x, y, z) \longmapsto \left( \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$

Pour aller plus loin on peut essayer de donner une équation analytique de ce plan.

#### i. Expression analytique du plan |P

Il nous faut définir trois points A, B et C appartenant au plan le vecteur normal sera donnée par la relation  $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ .

✓ Détermination de trois points appartenant au plan |P

Soit le point  $A'(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}) \in \mathcal{M}$ , son image par f est le point  $A(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2}, \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2}, 0)$

Aussi soit le point  $B'(1/2, -1/2, 1/\sqrt{2})$  appartenant à la sphère, son image par f est le point B défini comme  $B(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2}, -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2}, 0)$

Et pour finir le point  $C'(1/3, 1/3, \sqrt{7}/3)$  appartenant à la sphère, son image par f est le point C défini par  $C(\frac{1}{3-\sqrt{7}}, \frac{1}{3-\sqrt{7}}, 0)$ .

Le vecteur  $\overrightarrow{AB} = (0, \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2}, 0)$ , et le vecteur  $\overrightarrow{AC} = (\frac{1}{3-\sqrt{7}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2}, \frac{1}{3-\sqrt{7}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2}, 0)$

Ayant les deux expressions des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  on peut calculer le vecteur normal  $n(a,b,c) = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ .



Ayant les coordonnées du vecteur normal  $n$  et un point  $A$  calculer précédemment on peut facilement expliciter l'équation analytique du plan qui sera de la forme  $ax+by+d=0$  ( $z=0$ ).

La démonstration est laissée avec soin au lecteur.

## 2. Définition d'une courbe de Bézier quadratique dans le plan |P

Ayant obtenue notre plan |P, nous allons définir dans cette partie une courbe de Bézier quadratique appartenant à ce plan.

Soit la courbe de Bézier appartenant à |P de degré 2 défini comme suit :

$$(L) : M(t) = \frac{1}{w_0 \times (1-t)^2 + w_1 \times t(1-t) + w_2 \times t^2} (w_0(1-t)^2 \overrightarrow{OP_0} + w_1 t(1-t) \overrightarrow{OP_1} + w_2 t^2 \overrightarrow{OP_2})$$

On suppose dans un 1<sup>er</sup> temps que tous les poids sont non nuls pour faciliter les calculs par la suite.

## 3. Détermination de l'image de la courbe de Bézier par l'application inverse

Dans cette section nous allons déterminer l'image de la courbe de Bézier (L) défini précédemment par l'application inverse de la projection stéréographique.

### i. Définition de l'application inverse

Nous définissons l'application inverse  $f$  comme suit :

$$f : |P \rightarrow M$$

$$(X, Y) \rightarrow (x = \frac{2X}{1+X^2+Y^2}, y = \frac{2Y}{1+X^2+Y^2}, z = \frac{-1+X^2+Y^2}{1+X^2+Y^2})$$

### ii. Image de la courbe de Bézier quadratique par l'application inverse

Ayant déjà défini l'application inverse, nous allons déterminer dans cette partie analytiquement l'image de la courbe de Bézier quadratique.

On pourra trouver une courbe de Bézier de degré idoine que l'on précisera.

Reprenons l'expression de (L) cette fois-ci en exprimant convenablement les expressions des abscisses et des ordonnées de la courbe. On obtient donc :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{(1-t)^2 w_0 x_0 + 2t(1-t) w_1 x_1 + t^2 w_2 x_2}{(1-t)^2 w_0 + 2t(1-t) w_1 + t^2 w_2} \\ y(t) = \frac{(1-t)^2 w_0 y_0 + 2t(1-t) w_1 y_1 + t^2 w_2 y_2}{(1-t)^2 w_0 + 2t(1-t) w_1 + t^2 w_2} \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2(w_0 x_0 - 2w_1 x_1 + w_2 x_2) + t(-2w_0 x_0 + 2w_1 x_1) + w_0 x_0}{t^2(w_0 - 2w_1 + w_2) + t(-2w_0 + 2w_1) + w_0} \\ y(t) = \frac{t^2(w_0 y_0 - 2w_1 y_1 + w_2 y_2) + t(-2w_0 y_0 + 2w_1 y_1) + w_0 y_0}{t^2(w_0 - 2w_1 + w_2) + t(-2w_0 + 2w_1) + w_0} \end{cases}$$

Pour simplifier les calculs on posera :

$$a_1=w_0x_0 - 2w_1x_1 + w_2x_2, a_2=-2w_0x_0 + 2w_1x_1 \text{ et } a_3=w_0x_0$$

$$b_1=w_0y_0 - 2w_1y_1 + w_2y_2, b_2=-2w_0y_0 + 2w_1y_1 \text{ et } b_3=w_0y_0$$

$$c=w_0 - 2w_1 + w_2, d=-2w_0 + 2w_1, e=w_0$$

L'expression précédente devient plus simplifiée :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{a_1t^2 + a_2t + a_3}{ct^2 + dt + e} \\ y(t) = \frac{b_1t^2 + b_2t + b_3}{ct^2 + dt + e} \end{cases}$$

Aussi exprimons  $x^2(t)$  et  $y^2(t)$ .

$$\begin{cases} x(t)^2 = \frac{a_1^2t^4 + 2a_1a_2t^3 + (a_2^2 + 2a_1a_3)t^2 + 2a_2a_3t + a_3^2}{(ct^2 + dt + e)^2} \\ y(t)^2 = \frac{b_1^2t^4 + 2b_1b_2t^3 + (b_2^2 + 2b_1b_3)t^2 + 2b_2b_3t + b_3^2}{(ct^2 + dt + e)^2} \end{cases}$$

Etant donnée que l'on sait exprimer  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $x^2(t)$  et  $y^2(t)$ , nous pouvons chercher l'expression analytique de l'image de la courbe par l'inversion. On notera  $x'$ ,  $y'$  et  $z'$  les images.

#### ✓ Expression analytique de $x'(t)$

Par définition de l'application inverse :

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{2x}{1+x^2+y^2} \\ &= \frac{2 \times \frac{a_1t^2 + a_2t + a_3}{ct^2 + dt + e}}{1 + \frac{a_1^2t^4 + 2a_1a_2t^3 + (a_2^2 + 2a_1a_3)t^2 + 2a_2a_3t + a_3^2}{(ct^2 + dt + e)^2} + \frac{b_1^2t^4 + 2b_1b_2t^3 + (b_2^2 + 2b_1b_3)t^2 + 2b_2b_3t + b_3^2}{(ct^2 + dt + e)^2}} \\ &= \frac{2 \times \frac{a_1t^2 + a_2t + a_3}{ct^2 + dt + e}}{(ct^2 + dt + e)^2 + \frac{a_1^2t^4 + 2a_1a_2t^3 + (a_2^2 + 2a_1a_3)t^2 + 2a_2a_3t + a_3^2}{(ct^2 + dt + e)^2} + \frac{b_1^2t^4 + 2b_1b_2t^3 + (b_2^2 + 2b_1b_3)t^2 + 2b_2b_3t + b_3^2}{(ct^2 + dt + e)^2}} \\ &= \frac{2 \times (a_1t^2 + a_2t + a_3)(ct^2 + dt + e)}{(ct^2 + dt + e)^2 + a_1^2t^4 + 2a_1a_2t^3 + (a_2^2 + 2a_1a_3)t^2 + 2a_2a_3t + a_3^2 + b_1^2t^4 + 2b_1b_2t^3 + (b_2^2 + 2b_1b_3)t^2 + 2b_2b_3t + b_3^2} \end{aligned}$$

Au numérateur on a le produit de deux polynômes de degré 2 donc le résultat est un polynôme de degré 4. Au dénominateur visiblement on a un polynôme de degré 4.

En notant cette-fois ci  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$  les coefficients dans là-bas canoniques des expressions au numérateurs et  $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4$  au dénominateur, on obtient l'expression :

$$x'(t) = \frac{a_0 \times 1 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4}{b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3 + b_4t^4}$$

Il apparait plus visible dans cette équation un numérateur et un dénominateur dont les degrés sont tous égaux à 4. On peut s'apparenter à une courbe de Bézier rationnelle de degré  $n=4$ .

A l'aide des expressions de 1, t, t<sup>2</sup>, t<sup>3</sup> et t<sup>4</sup> dans la base de Bernstein, cette expression devient :

$$x'(t) =$$

$$\frac{a_0(B_0^4(t) + B_1^4(t) + B_2^4(t) + B_3^4(t) + B_4^4(t)) + a_1(\frac{1}{4}B_1^4(t) + \frac{1}{2}B_2^4(t) + \frac{3}{4}B_3^4(t) + B_4^4(t)) + a_2(\frac{1}{6}B_2^4(t) + \frac{1}{2}B_3^4(t) + B_4^4(t)) + a_3(\frac{1}{4}B_3^4(t) + B_4^4(t)) + a_4(B_4^4(t))}{b_0(B_0^4(t) + B_1^4(t) + B_2^4(t) + B_3^4(t) + B_4^4(t)) + b_1(\frac{1}{4}B_1^4(t) + \frac{1}{2}B_2^4(t) + \frac{3}{4}B_3^4(t) + B_4^4(t)) + b_2(\frac{1}{6}B_2^4(t) + \frac{1}{2}B_3^4(t) + B_4^4(t)) + b_3(\frac{1}{4}B_3^4(t) + B_4^4(t)) + b_4(B_4^4(t))}$$

On peut ranger en ordre le numérateur et le dénominateur pour pouvoir facilement identifier les coordonnées des points de contrôles et les poids.

Ainsi :

$$x'(t) = \frac{a_0 B_0^4(t) + (a_0 + \frac{1}{4}a_1) B_1^4(t) + (a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{6}a_2) B_2^4(t) + (a_0 + \frac{3}{4}a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{4}a_3) B_3^4(t) + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4) B_4^4(t)}{b_0 B_0^4(t) + (b_0 + \frac{1}{4}b_1) B_1^4(t) + (b_0 + \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{6}b_2) B_2^4(t) + (b_0 + \frac{3}{4}b_1 + \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{4}b_3) B_3^4(t) + (b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4) B_4^4(t)}$$

### iii. Détermination des poids de la nouvelle courbe de Bézier obtenue

En reprendra l'expression de x'(t) démontré précédemment.

Etant donnée que nous avons une courbe de Bézier rationnelles, les poids sont les coefficients qui précède chaque élément constituant la base de Bernstein au dénominateur de la fraction rationnelle (x'(t)).

$$\text{Ainsi } w_0 = b_0, w_1 = b_0 + \frac{1}{4}b_1, w_2 = b_0 + \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{6}b_2, w_3 = b_0 + \frac{3}{4}b_1 + \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{4}b_3 \text{ et enfin } w_4 = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4.$$

### iv. Détermination des abscisses des points de contrôles

Notons nos 05 points de contrôles comme suit : P<sub>0</sub>(x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>, z<sub>0</sub>), P<sub>1</sub>(x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>, z<sub>1</sub>), P<sub>2</sub>(x<sub>2</sub>, y<sub>2</sub>, z<sub>2</sub>), P<sub>3</sub>(x<sub>3</sub>, y<sub>3</sub>, z<sub>3</sub>) et enfin le dernier point P<sub>4</sub>(x<sub>4</sub>, y<sub>4</sub>, z<sub>4</sub>).

Dans cette section nous cherchons les valeurs de x<sub>0</sub>, x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>, x<sub>3</sub>, x<sub>4</sub>.

Elles s'obtiennent en identifiant chaque coefficient qui précède chaque élément de la base de Bernstein à la valeur w<sub>i</sub>x<sub>i</sub> avec i la « i » composante dans la base de Bernstein.

On peut ainsi écrire :

$$w_0 x_0 = b_0 \rightarrow x_0 = \frac{b_0}{w_0}$$

$$w_1 x_1 = b_1 \rightarrow x_1 = \frac{b_1}{w_1}$$

$$w_2 x_2 = b_2 \rightarrow x_2 = \frac{b_2}{w_2}$$

$$w_3 x_3 = b_3 \rightarrow x_3 = \frac{b_3}{w_3}$$

$$w_4 x_4 = b_4 \rightarrow x_4 = \frac{b_4}{w_4}$$

Les valeurs des poids étant calculer précédemment, la détermination des abscisses est donc directe.

### v. Détermination des autres coordonnées

Nous avons détaillé les calculs dans le cas du calcul de l'image x'(t).

En ce qui concerne  $y'(t)$ , son expression est  $y'(t) = x'(t) = \frac{2y}{1+x^2+y^2}$

On peut constater que la seule chose qui change c'est que à la place de « x » qui était au numérateur nous avons « y ». Nous ne jugeons donc pas une utilité de présenter les résultats pour ce cas de figure au lecteur.

Par contre l'expression de  $z'(t)$  est un peu différente et nécessite d'être explicitée.

✓ Expression des coordonnées de « côte » des points de contrôles

$$z'(t) = \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}$$

En reprenant les expressions précédemment démontrées de  $x^2(t)$  et  $y^2(t)$  on a :

$$z'(t) = \frac{-1 + \frac{a_1 t^4 + 2a_1 a_2 t^3 + (a_2^2 + 2a_1 a_3) t^2 + 2a_2 a_3 t + a_3^2}{(ct^2 + dt + e)^2} + \frac{b_1 t^4 + 2b_1 b_2 t^3 + (b_2^2 + 2b_1 b_3) t^2 + 2b_2 b_3 t + b_3^2}{(ct^2 + dt + e)^2}}{1 + \frac{a_1 t^4 + 2a_1 a_2 t^3 + (a_2^2 + 2a_1 a_3) t^2 + 2a_2 a_3 t + a_3^2}{(ct^2 + dt + e)^2} + \frac{b_1 t^4 + 2b_1 b_2 t^3 + (b_2^2 + 2b_1 b_3) t^2 + 2b_2 b_3 t + b_3^2}{(ct^2 + dt + e)^2}}$$

$$z'(t) = \frac{\frac{-(ct^2 + dt + e)^2 + a_1 t^4 + 2a_1 a_2 t^3 + (a_2^2 + 2a_1 a_3) t^2 + 2a_2 a_3 t + a_3^2 + b_1 t^4 + 2b_1 b_2 t^3 + (b_2^2 + 2b_1 b_3) t^2 + 2b_2 b_3 t + b_3^2}{(ct^2 + dt + e)^2}}{\frac{(ct^2 + dt + e)^2 + a_1 t^4 + 2a_1 a_2 t^3 + (a_2^2 + 2a_1 a_3) t^2 + 2a_2 a_3 t + a_3^2 + b_1 t^4 + 2b_1 b_2 t^3 + (b_2^2 + 2b_1 b_3) t^2 + 2b_2 b_3 t + b_3^2}{(ct^2 + dt + e)^2}}$$

En simplifiant par  $(ct^2 + dt + e)^2$ , on obtient :

$$z'(t) = \frac{-(ct^2 + dt + e)^2 + a_1 t^4 + 2a_1 a_2 t^3 + (a_2^2 + 2a_1 a_3) t^2 + 2a_2 a_3 t + a_3^2 + b_1 t^4 + 2b_1 b_2 t^3 + (b_2^2 + 2b_1 b_3) t^2 + 2b_2 b_3 t + b_3^2}{(ct^2 + dt + e)^2 + a_1 t^4 + 2a_1 a_2 t^3 + (a_2^2 + 2a_1 a_3) t^2 + 2a_2 a_3 t + a_3^2 + b_1 t^4 + 2b_1 b_2 t^3 + (b_2^2 + 2b_1 b_3) t^2 + 2b_2 b_3 t + b_3^2}$$

on a plus qu'à simplifier le numérateur et le dénominateur et on obtient à nouveau au numérateur un polynôme de degré 4 et au dénominateur un polynôme de degré 4.

Il ne reste plus qu'à exprimer les vecteurs 1, t,  $t^2$ ,  $t^3$  et  $t^4$  dans la base des polynômes de Bernstein de degré 4

Après cette étape, pour trouver les valeurs de  $z_0, z_1, z_2, z_3, z_4$  on procède de façon analogue comme on a procédé pour déterminer les abscisses dans la section précédente.

On le laisse le loin au lecteur de reprendre les calculs.

## vi. Application à l'arc de cercle

Dans la section précédente nous avons défini des conditions sur les poids et les points de contrôles pour qu'une courbe de Bézier rationnelle de degré 2 décrit un arc de cercle. Donc si nous voulons décrire dans le plan |P de notre projection stéréographique un arc de cercle on a qu'à définir les poids et les points de contrôles idoines.

L'image par f (projection stéréographique) de tout cercle tracer sur la sphère est une droite ou un cercle : plus précisément, c'est une droite si le cercle passe par  $N$  et un cercle sinon.

Ainsi en modélisant un cercle sur le plan |P on peut le ramener sur la sphère par l'application inverse associée à la projection stéréographique.

## **IV. Gestion de l'animation de la petite sphère sur la grande sphère unité**

### **✓ Le tracé de la trajectoire**

Le tracé de la trajectoire est une phase très capitale. Notre trajectoire étant modéliser par une courbe de Bézier, nous pouvons directement utiliser la formule analytique de la courbe de Bézier.

Pour le tracé en fonction de la précision que l'on souhaite avoir on va discrétiser « N » points du plan à intervalles régulières puis nous allons modéliser des bouts de cylindre de faible rayon qui va relier chaque point a son voisin.

### **✓ L'animation**

En ce qui concerne l'animation nous allons positionner les deux sphères sur plusieurs endroits a répartition régulières puis nous allons faire une animation sur Pov-Ray avec ses ensembles d'images.

## BIBIOGRAPHIE

- [https://www.researchgate.net/profile/Lionel\\_Garnier/publication/267959964\\_Courbes\\_de\\_Bezier\\_quadratiques\\_et\\_arcs\\_de\\_coniques/links/54ec94bb0cf27fbfd7710fc5/Courbes-de-Bezier-quadratiques-et-arcs-de-coniques.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Lionel_Garnier/publication/267959964_Courbes_de_Bezier_quadratiques_et_arcs_de_coniques/links/54ec94bb0cf27fbfd7710fc5/Courbes-de-Bezier-quadratiques-et-arcs-de-coniques.pdf)
- [https://www.researchgate.net/publication/303304493\\_Subdivision\\_de\\_courbes\\_de\\_Bezier\\_quadratiques](https://www.researchgate.net/publication/303304493_Subdivision_de_courbes_de_Bezier_quadratiques)
- [https://www.researchgate.net/publication/303304360\\_Points\\_massiques\\_courbes\\_de\\_Bezier\\_quadratiques\\_et\\_coniques\\_un\\_etat\\_de\\_l'art](https://www.researchgate.net/publication/303304360_Points_massiques_courbes_de_Bezier_quadratiques_et_coniques_un_etat_de_l'art)