



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования «Московский государственный технический  
университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский  
университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

**ФАКУЛЬТЕТ**

«Информатика и системы управления» (ИУ)

**КАФЕДРА**

«Теоретическая информатика и компьютерные технологии» (ИУ9)

**РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**  
***К КУРСОВОЙ РАБОТЕ***  
***НА ТЕМУ:***

***Решение уравнения теплопроводности на примере  
анализа температурного поля детали***

Студент ИУ9-72:

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата) А.С. Шишигина

Руководитель курсовой работы:

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата) А.Б. Домрачева

Москва, 2019 г.

## Содержание

Введение .....	3
1. Теоретические сведения .....	4
1.1 Проекционный и вариационный подходы к МКЭ .....	4
1.1.1 Проекционный подход .....	4
1.1.2 Вариационный подход .....	6
1.2 Основные понятия МКЭ .....	7
1.2.1 Дискретизация области .....	8
1.2.2 Определение базисных функций .....	10
1.2.3 Естественная система координат .....	13
1.3 Решение системы линейных алгебраических уравнений .....	13
2. Разработка алгоритма решения уравнения теплопроводности .....	17
2.1 Постановка задачи .....	17
2.2 Описание модели детали .....	20
2.3 Вывод частного вида уравнения теплопроводности для детали .....	22
3. Программная реализация .....	24
3.1 Обзор выбранных инструментов разработки .....	24
3.2 Общая структура проекта .....	24
3.3 Хранение разреженных матриц и работа с ними .....	25
4. Тестирование .....	27
4.1 Улучшение разбиения сетки .....	27
4.2 Оценка производительности .....	28
Заключение .....	30
Список использованной литературы .....	31
Приложение А. Алгоритм решения .....	33

## ВВЕДЕНИЕ

Метод конечных элементов (МКЭ) представляет собой эффективный численный метод решения инженерных и физических задач. Основная идея метода состоит в том, что любую непрерывную величину, такую как температура, давление или перемещение, можно аппроксимировать дискретной моделью, которая строится на множестве кусочно-непрерывных функций, определенных на конечном числе подобластей. Таким образом, метод конечных элементов позволяет приблизить и заменить в расчетах дифференциальную задачу дискретной, что необходимо для решения ее на компьютере.

Необходимость проведения анализа температурного поля детали может быть связана с задачей расчета оптимальных параметров их обработки, например, для разработки технологий оперативной сварки труб при низких температурах. Актуальность данных исследований заключается в экономии не только времени, но и больших средств, необходимых для проведения подобных операций в текущий момент.

*Целью* работы является изучение и реализация метода конечных элементов на примере анализа температурного поля двумерной детали.

Для достижения поставленной цели в рамках курсовой работы были поставлены следующие *задачи*:

- провести обзор соответствующей литературы
- реализовать метод конечных элементов для решения уравнения теплопроводности
- выбрать и реализовать метод решения систем линейных уравнений
- описать анализируемую деталь
- вывести частный вид уравнения теплопроводности для детали
- провести тестирование реализованного алгоритма
- провести анализ результатов применения метода к данным тестовых задач

## 1. Теоретические сведения

### 1.1 Проекционный и вариационный подходы к МКЭ

Под термином «метод конечных элементов» понимается семейство методов, основанных на проекционных методах решения уравнений или вариационных методах минимизации функционалов. Рассмотрим данные подходы подробнее.

#### 1.1.1 Проекционный подход

Поставим задачу о приближенном решении дифференциального уравнения

$$F(u) = 0, \quad (1)$$

где оператор  $F : E \rightarrow H$  и  $E, H$  — два бесконечномерных нормированных пространства. Пусть в пространствах  $E$  и  $H$  имеются базисы в следующем смысле: существуют последовательности  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ , такие что для любых  $x \in E$  и  $y \in H$  найдутся числовые последовательности  $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ , такие что  $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n, y = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \psi_n$  (под суммой рядов понимается предел по нормам пространств  $E$  или  $H$  частичных сумм этих рядов). Введем последовательности конечномерных подпространств  $E_n$  и  $H_n$ , натянутых на первые  $n$  векторов, и обозначим через  $P_n$  и  $Q_n$  операторы проектирования на эти пространства ( $E_n = P_n E, H_n = Q_n H$ ).

Суть проекционных методов состоит в замене уравнения (1) приближенным конечномерным уравнением

$$F_n(\bar{u}) = 0, \quad (2)$$

где  $\bar{u} \in E_n, F_n : E_n \rightarrow H_n, F_n = Q_n F$ . Выбор разных базисов  $\varphi_n, \psi_n$  и разных проекторов приводит к разным проекционным методам.

В *методе Петрова-Галеркина* [1] решение уравнения (1) представляется в виде такой линейной комбинации  $n$  базисных функций пространства  $E_n : \bar{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$ , что функция  $F(\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i)$  ортогональна функциям базиса  $\psi_1, \dots, \psi_n$ . Если бы функция  $F(\bar{u})$  была ортогональна всем функциям базиса  $H$ , то в сепарабельных пространствах она должна была бы обращаться в нуль, и тогда функция  $\bar{u}$  была бы точным решением (1). Поскольку

вместо бесконечного набора базисных функций мы ограничиваемся только  $n$  функциями  $\varphi_i$  и  $\psi_i$  полученное решение будет приближенным. Условия ортогональности  $F(\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i) \perp \psi_j$  представляют собой  $n$  уравнений относительно неизвестных  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Выражая из полученной системы числовые коэффициенты  $\alpha_i$  найдем представление  $\bar{u}$ .

В *методе Галеркина* пространства  $E_n$  и  $H_n$  совпадают, то есть  $\varphi_i = \psi_i$ . Таким образом, общая схема построения приближенного решения уравнения  $F(u) = f - Lu = 0$  или  $Lu = f$  для метода Галеркина выглядит следующим образом:

1. выбор базиса  $\varphi_i, i = \overline{1, n}$ ;
2. поиск приближенного решения в виде  $\bar{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$ ;
3. выражение коэффициентов  $\alpha_i$  из СЛАУ, описывающей условие ортогональности:

$$(f - L\bar{u}, \varphi_i) = 0, (L\bar{u}, \varphi_i) = (f, \varphi_i), i = \overline{1, n}$$

$$\text{СЛАУ } \sum_{j=1}^n \alpha_j (L\varphi_j, \varphi_i) (f, \varphi_i), i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Рассмотрим альтернативный подход к проекционным методам. Пусть дано уравнение  $Lu = f$  с граничными условиями  $M(u) = g$ . В методе взвешенных невязок решение аппроксимируется набором функций  $N_i(x)$

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i N_i(x),$$

где  $\alpha_i$  — неизвестные числовые параметры,  $N_i(x)$  — линейно-независимые функции из полной последовательности (к тому же функции должны удовлетворять граничным условиям и быть нужной степени гладкости).

Обозначим невязку уравнения через  $R = f - L\bar{u}$ . Поскольку решение  $\bar{u}$  приближенное,  $R = f - L\bar{u} \neq 0$ , а для точного решения  $R = 0$ . Стремятся, чтобы ошибка равнялась нулю в среднем, полагая равными нулю интегралы, взятые от невязки с некоторыми весовыми функциями  $w_i$

$$\int_{\Omega} R w_i d\Omega = 0, i = \overline{1, n},$$

то есть, чтобы равнялось нулю скалярное произведение в пространстве  $L_2$ .

$$(R, w_i) = 0, i = \overline{1, n}.$$

Таким образом, получаем систему (3), в которой  $\varphi_i = w_i = N_i$ . При этом разные весовые функции  $w_i$  соответствуют разным проекционным методам.

### 1.1.2 Вариационный подход

В отдельных случаях задачу решения дифференциального уравнения можно свести к задаче минимизации или максимизации некоторого функционала. Задачи такого рода называются вариационными. При этом для некоторых физических задач такой подход является более популярным. Например, для получения равновесия механических систем требуется минимизация потенциальной энергии системы. При этом вариационный принцип обычно формулируется в виде задачи минимизации интеграла от некоторой функции. Применение вариационных принципов порождает ослабленную формулировку, когда соответствующее дифференциальное уравнение выполняется не в каждой точке тела, а в среднем, то есть в некотором интегральном смысле.

Сформулируем несколько утверждений, позволяющих описать данный подход.

Пусть оператор  $L$  - положительно определенный симметричный оператор над гильбертовым пространством. Пусть функционал  $F : Y \rightarrow R$  и  $\Phi(t) = F[y_0 + th]$  - функция вещественной переменной. Если существует производная

$$\Phi'(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt}F[y_0 + th]|_{t=0}, \forall h \in Y,$$

то эта производная называется слабой вариацией или просто вариацией функционала  $F$  в точке  $y_0$  и обозначается  $\delta F(y_0, h)$ .

*Теорема 1 (необходимое условие экстремума).* Пусть  $y_0 \in Y$  — точка экстремума функционала  $F(y)$  и существует слабая вариация  $\delta F(y_0)$ . Тогда  $\delta F(y_0) = 0$ .

*Теорема 2.* Чтобы элемент  $u_0 \in D(L)$  из области определения оператора  $L$  доставлял минимум квадратичному функционалу  $F(u) = (Lu, u) - 2(u, f)$  (функционалу энергии) необходимо и достаточно, чтобы этот элемент удовлетворял уравнению  $Lu_0 = f$  (причем такой элемент будет единственным).

Так, для определенного класса операторов задача минимизации функционала и задача решения уравнения  $Lu = f$  эквивалентны.

Рассмотрим один из методов поиска приближенного решения задачи минимизации. *Метод Ритца (Релея-Ритца)* состоит в том, чтобы искать минимум функционала в вариационной задаче на конечномерном пространстве  $H_n$ . Элементы  $v \in H_n$  называются *пробными* функциями. Аппроксимацией Ритца называется функция  $u^h \in H_n$ , минимизирующая  $F$  на подпространстве  $H_n$

$$F(u^h) \leq F(v), \forall v \in H_n.$$

Основные этапы метода:

1. выбор подпространства  $H_n$  и базиса  $\varphi_i, i = \overline{1, n}$ ;
2. поиск приближенного решения в виде  $u^h = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$ ;
3. выражение коэффициентов  $\alpha_i$  из СЛАУ, описывающей условие минимизации функционала  $F(u^h)$  по параметрам  $\alpha_i$ :

$$\frac{\partial F(u^h)}{\partial \alpha_i} = 0, i = \overline{1, n}.$$

Аппроксимации методом Ритца и Галеркина тождественны, если оператор симметричен. Метод Галеркина может использоваться вне зависимости от того, можно ли найти вариационную формулировку, и, следовательно, имеет более широкую область применения.

Матрицы СЛАУ, получаемые в методе Галеркина и методе Ритца, оказываются заполненными, то есть большинство элементов этих матриц отличны от нуля. Решение систем с заполненными матрицами делает оба метода затратными. Метод конечных элементов позволяет получать разреженную систему при определенном выборе базисных функций.

## 1.2 Основные понятия МКЭ

Метод конечных элементов — это численная процедура решения задач, сформулированных в виде дифференциального уравнения или вариационного принципа. Метод конечных элементов отличается от классических методов Ритца и Галеркина тем, что аппроксимирующая функция является линейной комбинацией непрерывных кусочно-гладких финитных функций, отличных от нуля только в заданном интервале. В МКЭ под такими интервалами подразумеваются конечные элементы, на которые разбивается область  $\Omega$ . Таким

образом, при проведении конечно-элементного анализа включает следующие шаги:

1. В рассматриваемой области фиксируется конечное число точек, называемых *узловыми точками* (узлами). Значение непрерывной величины в каждой узловой точке считается переменной, которая должна быть определена (с разными степенями свободы). Область определения непрерывной величины разбивается на конечное число подобластей, называемых *элементами*. Эти элементы имеют общие узловые точки и в совокупности аппроксимируют форму области. Множество элементов, на которые разбита область, называется конечно-элементной *сеткой*.

2. Выбор базисных функций.

3. Формирование СЛАУ с учетом вкладов от элементов и узлов, введение граничных условий в систему уравнений и решение полученной системы.

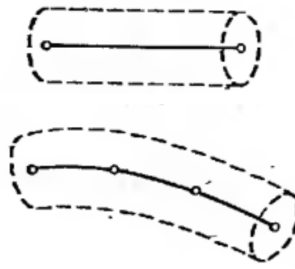
4. Определение расчетных величин в элементах. Точное решение дифференциального уравнения при подстановке в это дифференциальное уравнение обращает его в тождество в каждой точке. Решение МКЭ предполагает, что приближенное решение  $\bar{u}$  будет удовлетворять дифференциальному уравнению в узлах сетки  $\bar{u}(x_i) = u(x_i) = u_i$ .

### 1.2.1 Дискретизация области

Дискретизация области включает задание числа, размеров и формы подобластей, которые используются для построения дискретной модели реального тела. При этом необходимо учитывать два аспекта: с одной стороны, элементы должны быть достаточно малого размера для более точной аппроксимации, с другой - применение более крупных элементов сокращает вычислительную сложность задачи. Используются элементы различных типов. Рассмотрим подробнее одномерные и двумерные элементы.

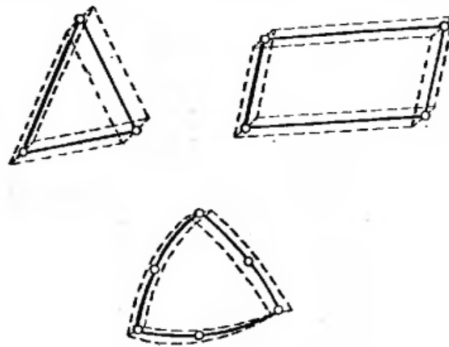
Одномерные элементы являются простейшими и схематически обычно изображаются в виде отрезка. При этом такие элементы могут иметь разное количество узлов и быть криволинейными при условии, что длина дуги входит в уравнения, определяющие элементы (Рисунок 1).





*Рисунок 1 - Одномерные элементы*

Для построения дискретной модели двумерной области используются два основных семейства элементов: треугольных и четырехугольных (Рисунок 2). Стороны линейных элементов каждого семейства представляют собой прямые линии, квадратичные и кубические элементы могут иметь как прямолинейные, так и криволинейные и другие стороны. Возможность моделирования криволинейных границ достигается добавлением узлов в середину сторон элементов. Толщина элемента может быть постоянной или являться функцией координат.



*Рисунок 2 - Двумерные элементы*

На практике наиболее часто производится разбиение на треугольники. Это обусловлено возможностью триангулировать любую область и сравнительно небольшой вычислительной сложностью. Для построения сетки совмещают разные техники, такие как последовательное разбиение области на прямоугольники и построение их диагонали, а также алгоритм Делоне [2]. *Триангуляция Делонé* — триангуляция для заданного множества точек на

плоскости, при которой для любого треугольника все точки множества за исключением точек, являющихся его вершинами, лежат вне окружности, описанной вокруг треугольника.

### 1.2.2 Определение базисных функций

В качестве функции, определенной на элементе, (функции элемента) чаще всего применяется полином, порядок которого зависит от числа используемых в каждом узле элемента данных о непрерывной функции. При этом рассматриваются три основные группы элементов в соответствии с порядком полиномиальных функций: *симплекс*- (содержат константы и линейные члены, число узлов на единицу больше размерности), *комплекс*- (содержат члены высокого порядка, число узлов больше размерности пространства как минимум на единицу) и *мультикомплекс-элементы* (содержат члены высокого порядка, но границы элементов при этом должны быть параллельны координатным осям).

Рассмотрим как определяются кусочно-линейные базисные функций при решении одномерной задачи на отрезке  $\Omega = [a, b]$ . Пусть  $x_1, \dots, x_n$  - узлы области,  $e_k = (x_k, x_{k+1}), k = 1, \dots, n - 1$  - конечные элементы (одномерные симплекс-элементы),  $h_k = x_{k+1} - x_k$  длина элемента (шаг сетки). Каждому внутреннему узлу  $x_i$  ставится в соответствие кусочно-линейная функция  $N_i(x)$

$$N_i(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{i-1} \\ \frac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1}-x}{h_i}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & x \geq x_{i+1} \end{cases}, i = \overline{2, n-1}.$$

Базисные функции на элементе также называются функциями формы. Аппроксимируемая функция представляется в виде  $\bar{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i N_i(x)$ .

Функции форм обладают следующими свойствами:

1. Функция  $N_i$  равна единице в узле  $x_i$  и нулю во всех других узлах.
2. Функция  $N_i$  отлична от нуля только для элементов, содержащих узел  $x_i$ .

Рассмотрим физический смысл коэффициентов  $\alpha_i$ . Пусть элемент  $e = [x_i, x_j]$ , и  $N_i = \frac{x_j-x}{h_i}, N_j = \frac{x-x_i}{h_i}$  (Рисунок 3). Тогда

$$\bar{u}^e = \alpha_i N_i + \alpha_j N_j = \frac{\alpha_i x_j - \alpha_j x_i}{h_i} + \frac{\alpha_j - \alpha_i}{h_i} x. \quad (4)$$

К тому же  $\bar{u}^e(x_i) = u_i, \bar{u}^e(x_j) = u_j$ . Если подставить  $x_i$  и  $x_j$  в (4), получим  $\bar{u}^e(x_i) = \alpha_i = u_i, \bar{u}^e(x_j) = \alpha_j = u_j$ . Таким образом, при таком выборе базисных функций, неизвестные коэффициенты  $\alpha_i$  являются значениями функции в узлах  $\alpha_i = u_i$ , то есть  $\bar{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i N_i(x)$ .

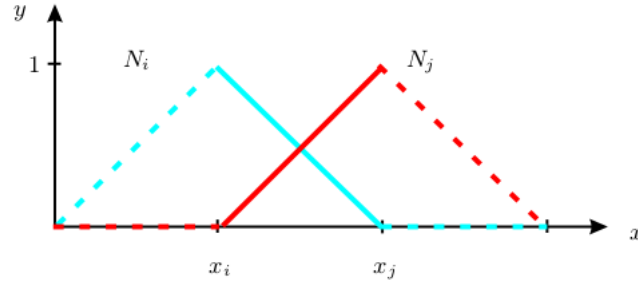


Рисунок 3 - Базисные функции  $N_i, N_j$  на элементе  $[x_i, x_j]$

Рассмотрим теперь двумерную задачу и соответствующий ей линейный треугольный элемент (двумерный симплекс-элемент), который представляет собой треугольник с прямолинейными сторонами и тремя узлами  $i, j, k$  по одному в каждой вершине (Рисунок 4).

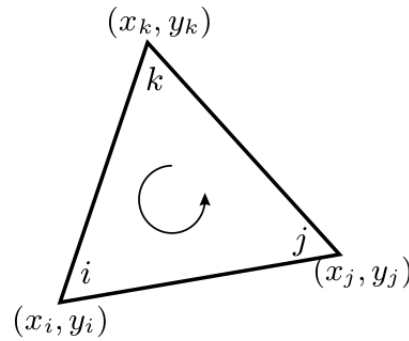


Рисунок 4 - Треугольный элемент

Пусть  $(u_i, u_j, u_k)$  - значения в узлах (нумерация против часовой стрелки),  $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k)$  - координаты узлов,  $A$  - площадь треугольника. Незвестная функция  $u(x, y)$  интерполируется на элементе линейной функцией

$$u^e(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y. \quad (5)$$

При этом значения точной и приближенной функции совпадают в узлах сетки

$$\begin{cases} u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i, \\ u_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j, \\ u_k = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k. \end{cases}$$

Заметим, что определитель данной системы уравнения равен  $2A \neq 0$ , то есть существует единственное решение. Разрешив ее относительно  $\alpha_i$  и подставив решение в (5), получим

$$\begin{aligned} u^e &= \frac{1}{2A} (u_i(x_j y_k - x_k y_j + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y) + u_j(x_k y_i - x_i y_k + \\ &\quad (y_k - y_i)x + (x_i - x_k)y) + u_k(x_i y_j - x_j y_i + (y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y) \\ u^e &= N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k \end{aligned}$$

Тогда базисные функции имеют вид

$$N_l = \frac{1}{2A} (a_l + b_l x + c_l y), \quad l \in \{i, j, k\} \quad (6)$$

$$\begin{cases} a_i = x_j y_k - x_k y_j \\ b_i = y_j - y_k \\ c_i = x_k - x_j \end{cases} \quad \begin{cases} a_j = x_k y_i - x_i y_k \\ b_j = y_k - y_i \\ c_j = x_i - x_k \end{cases} \quad \begin{cases} a_k = x_i y_j - x_j y_i \\ b_k = y_i - y_j \\ c_k = x_j - x_i \end{cases} \quad (7)$$

Аналогично одномерному случаю функция  $N_l$  равна единице в узле  $(x_l, y_l)$  и нулю в двух других узлах (Рисунок 5).

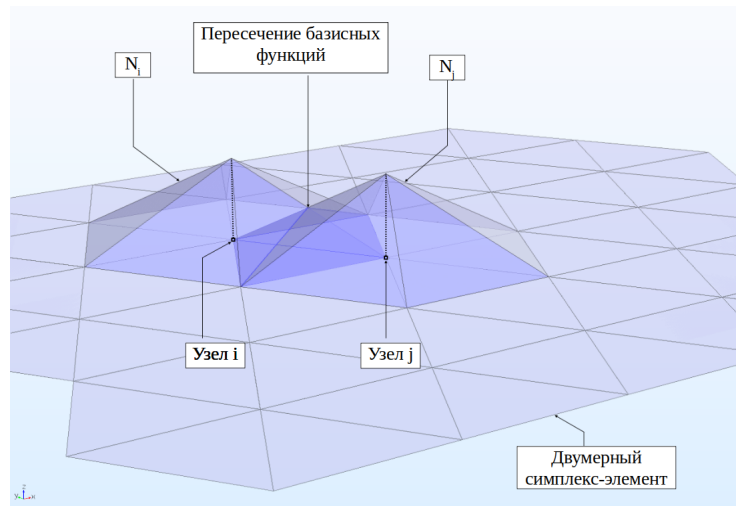


Рисунок 5 - Базисные функции  $N_i, N_j$  на двумерном симплекс-элементе

### 1.2.3 Естественная система координат

Часто для оптимизации вычислений, в частности на этапе вычисления интегралов, вводят специальную систему координат, которую называют *естественной* (ЕСК) [3]. ЕСК является локальной и в узле элемента локальная координата принимает значения  $0, \pm 1$ .

Для треугольного элемента наиболее распространенной является *барицентрическая система координат* или *L-координаты*. Каждая координата представляет собой отношение расстояния от выбранной точки треугольника до одной из его сторон к высоте, опущенной на эту сторону из противолежащей вершины. При этом сумма трех координат равняется 1. Преимуществом использования L-координат является существование интегральных формул, которые упрощают вычисление интегралов вдоль сторон элемента и по его площади.

### 1.3 Решение системы линейных алгебраических уравнений

Квадратную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) от  $n$  неизвестных будем записывать в матрично-векторной форме

$$Ax = b, \quad (8)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  - заданная матрица,  $b \in \mathbb{R}^n$  - заданный вектор,  $x \in \mathbb{R}^n$  - вектор из  $n$  неизвестных. При этом матрицу  $A$  будем считать обратимой, т.е.  $\det A \neq 0$ .

Для произвольной матрицы  $A$  известный метод Гаусса требует  $O(n^3)$  арифметических операций для решения системы (6). Поскольку в прикладных за-

дачах, где имеется большое количество неизвестных, в частности соответствующих узлам в МКЭ, такая асимптотическая сложность неприемлема, в таких случаях целесообразно использовать итерационные методы для приближенного нахождения решения. Как правило, в реальных задачах нет необходимости находить точное решение, достаточно иметь аппроксимацию с приемлемой точностью.

В рамках курсовой работы будем рассматривать и использовать такой итерационный метод решения СЛАУ, как *метод сопряженных градиентов* [4]. Аналогично Разделу 1.1.2 сформулируем требования для положительно определенной симметричной матрицы  $A$ . Подходящим выбором является минимизация квадратичного функционала

$$f(x) = (Ax, x) - 2(b, x). \quad (9)$$

Действительно, из соотношения

$$(A^{-1}(Ax - b), Ax - b) = (Ax, x) - 2(b, x) + (A^{-1}b, b)$$

видно, что минимизация  $f(x)$  равносильна минимизации функционала невязки  $\|Ax - b\|_{A^{-1}}$ , который достигает минимума на решении системы (8).

Рассмотрим методы минимизации функционала, основанные на подпространствах Крылова. Для этого построим последовательность вложенных подпространств  $\mathbb{V}_k$

$$\dim(\mathbb{V}_k) = \mathbb{V}_{k-1} + 1,$$

$$\mathbb{V}_k = \mathbb{V}_{k-1} \oplus \text{span}\{A^k, r^0\}, k = 1, 2, \dots, \mathbb{V}_0 = \text{span}\{r^0\},$$

где  $r^0$ - начальная невязка, *span* - линейная оболочка.

Тогда

$$\mathbb{V}_k = \text{span}\{r^0, Ar^0, \dots, A^k r^0\},$$

$$\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{V}_1 \subset \mathbb{V}_2 \subset \dots \subset \mathbb{R}^n.$$

Построенное таким образом  $\mathbb{V}_k$  называется *k-ым подпространством Крылова*, ассоциированным с матрицей  $A$  и вектором  $r^0$ . Если в разложении  $r^0$  по системе собственных векторов матрицы  $A$  все коэффициенты разложения

отличны от нуля, то  $\mathbb{V}_n$  совпадает с решением. Однако это возможно только при наличии ошибок округления, в то время как на практике это почти невозможно.

Для симметричной положительно-определенной матрицы при начальной приближении  $x_0$ ,  $k$ -ое приближение определяется как

$$x_k = \underset{x \in \mathbb{V}_k(x_0)}{\operatorname{argmin}} f(x),$$

$$\mathbb{V}_k(x_0) := \{x : x = x^0 + v, v \in \mathbb{V}_k\}.$$

Можно показать, что нахождение приближений  $x_i$ , основанное на минимизации функционала (9) на последовательности подпространств Крылова, не требует явного построения самих подпространств, а может быть записано в виде рекурсивного трехчленного соотношения на приближения:

$$x^{i+1} = \alpha_i x^i + (1 - \alpha_i) x^{i-1} - \beta_i r^i, i = 1, 2, \dots$$

с начальным соотношением:

$$x^1 = x^0 - \beta_0 r^0, \beta_0 = \frac{(r^0, r^0)}{(r^0, Ar^0)}.$$

Параметры  $(\alpha_k, \beta_k)$  определяются динамически из равенств

$$\mu_k = \frac{(r^k, Ar^k)}{(r^k, r^k)},$$

$$\delta_k = (r^k, r^k),$$

$$\beta_k^{-1} = \mu_k - \delta_k \delta_{k-1}^{-1} \beta_{k-1}^{-1},$$

$$\alpha_k = \beta_k \mu_k.$$

На практике чаще всего используют следующий критерий останова:

$$\|r^k\| < \varepsilon.$$

Стоит заметить, что существует семейство *многосеточных методов*, которые совместно с МКЭ позволяют получать наиболее точное и быстрое

решение уравнений в частных производных. Основной идеей подобных алгоритмов является получение точного решения системы, полученной после рекурсивной операции перехода к более грубым сеткам, т.е. с малым количеством узлов.



## 2. Разработка алгоритма решения уравнения теплопроводности

### 2.1 Постановка задачи

В рамках курсовой работы необходимо решить уравнение теплопроводности для определенной детали и провести анализ температурного поля. Двумерное стационарное уравнение теплопроводности имеет вид

$$K_x \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} + Q(x, y) = 0, \quad (10)$$

где  $K_x, K_y$  - коэффициенты теплопроводности в направлении осей  $x, y$  ( $\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ ),  $T(x, y)$  - искомая функция распределения температуры,  $Q(x, y)$  - плотность тепловых источников внутри тела ( $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$ ).

Существуют граничные условия трех типов:

1. На границе тела или ее части задана температура

$$\Gamma_1 : T = \bar{T}(x). \quad (11)$$

2. На границе тела или ее части задан конвективный теплообмен - процесс переноса тепла, происходящий в движущихся текучих средах, т.е. теплообмен с окружающей средой. Характеризуется величиной  $h(T - T_\infty)$ ,  $h$  - коэффициент теплообмена ( $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$ ),  $T_\infty$  - температура окружающей среды.

3. На границе тела или ее части задан тепловой поток  $q$  ( $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ ), обусловленный её самопроизвольным, необратимым переносом в пространстве от более нагретых тел (участков тела) к менее нагретым. При этом  $q > 0$ , если тепло отводится от тела. Поток тепла и конвективная теплоотдача на одном и том же участке не могут действовать одновременно.

Если имеется теплоизолированная граница, то поток тепла  $q = 0$  и конвективный теплообмен отсутствует  $h = 0$ , тогда граничное условие запишется в виде  $\frac{\partial T}{\partial n}$ , где  $n$  - внешняя нормаль к границе рассматриваемой области.

Граничные условия 2) и 3) записываются с помощью смешанного условия

$$\Gamma_2 : K_x \frac{\partial T}{\partial x} \cos \alpha + K_y \frac{\partial T}{\partial y} \cos \beta + h(T - T_\infty) + q = 0, \quad (12)$$

где  $(\cos \alpha, \cos \beta)$  - единичный вектор внешней нормали к поверхности.

Введем понятие градиента температуры, показывающего интенсивность изменения температуры

$$\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta T}{\Delta n} \right) = \nabla T = \frac{dT}{dn} = \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \quad \frac{\partial T}{\partial y} \right].$$

Температурный градиент является вектором, направленным в сторону увеличения температуры.

Будем решать уравнение (10) с помощью вариационной постановки. Используя необходимое условие экстремума (Теорема 1) и теорему Эйлера вариационного исчисления [Зинкевич], получаем, что уравнение (10) по области  $\Omega$  с граничными условиями (11), (12) эквивалентно требованию минимизации функционала

$$F(T) = \int_{\Omega} (\nabla T)^T D \nabla T d\Omega - 2 \int_{\Omega} Q T d\Omega + 2 \int_{\Gamma_1} q T d\Gamma + \int_{\Gamma_2} h (T - T_{\infty})^2 d\Gamma, \quad (13)$$

где  $D = \begin{bmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_y \end{bmatrix}$  - матрица коэффициентов теплопроводности.

Так как задача двумерная и необходимо найти распределение функции с одной степенью свободы, будем использовать двумерные симплекс-элементы (треугольники). Пусть имеется  $m$  конечных элементов  $\Omega_e, e = \overline{1, m}$ ,  $n$  узлов и соответствующие им функции формы  $N_i$ . Тогда решение аппроксимируется конечной суммой  $T = \sum_{i=1}^n N_i T_i$ . Запишем (13) в виде суммы вкладов всех конечных элементов по области

$$F(T) = \sum_{e=1}^m F^e(T) = \sum_{e=1}^m \left[ \int_{\Omega^e} ((\nabla T)^e)^T D^e (\nabla T)^e d\Omega - 2 \int_{\Omega^e} Q^e T^e d\Omega + 2 \int_{\Gamma_1^e} q^e T^e d\Gamma + \right. \\ \left. + \int_{\Gamma_2^e} h^e [(T^e)^2 - 2T^e T_{\infty} + T_{\infty}^2] d\Gamma \right].$$

Тогда

$$(\nabla T)^e = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} & \frac{\partial N_j^e}{\partial x} & \frac{\partial N_k^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} & \frac{\partial N_j^e}{\partial y} & \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{pmatrix} = B^e T. \quad (14)$$

Получаем

$$\begin{aligned} F^e = & \int_{\Omega^e} T (B^e)^T D^e B^e T d\Omega - 2 \int_{\Omega^e} Q^e N^e T d\Omega + 2 \int_{\Gamma_1^e} q^e N^e T d\Gamma + \int_{\Gamma_2^e} h^e (N^e T)^2 d\Gamma + \\ & - \int_{\Gamma_2^e} 2T_\infty h^e N^e T d\Gamma + \int_{\Gamma_2^e} h^e T_\infty^2 T d\Gamma. \end{aligned}$$

Таким образом, записывая условие минимума функционала (13)  $\frac{\partial F}{\partial T} = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial T} &= \sum_{e=1}^m \frac{\partial F^e}{\partial T} = 0, \\ \frac{\partial F^e}{\partial T} &= k^e T + f^e, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} k^e &= \int_{\Omega^e} (B^e)^T D^e B^e d\Omega + \int_{\Gamma_2^e} h^e (N^e)^T N^e d\Gamma = k_1 + k_2, \\ f^e &= - \int_{\Omega^e} Q^e (N^e)^T d\Omega + \int_{\Gamma_1^e} q^e (N^e)^T N^e d\Gamma - \int_{\Gamma_2^e} h^e T_\infty (N^e)^T = k_1 + k_2, \end{aligned}$$

Итак, пусть  $u = T$ , тогда запишем СЛАУ следующего вида

$$Ku = F, \quad (15)$$

где  $K = \sum_{e=1}^m k^e$ ,  $F = \sum_{e=1}^m f^e$ .

Согласно формулам (6), (7) и (14) матрица градиентов выглядит следующим образом

$$B^e = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Считая толщину элемента единичной, заменим  $dV$  на  $dA$ , а также опустим верхний индекс  $e$ . Из (16) следует, что

$$k_1 = B^T D B \int_A dA = B^T D B A = \frac{K_x}{4A} \begin{pmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k \end{pmatrix} + \frac{K_y}{4A} \begin{pmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k \end{pmatrix}.$$

Второй интеграл вычисляем по поверхности

$$k_2 = \int_S h N^T N dS = h \int_S \begin{pmatrix} N_i N_i & N_i N_j & N_i N_k \\ N_j N_i & N_j N_j & N_j N_k \\ N_k N_i & N_k N_j & N_k N_k \end{pmatrix} dS. \quad (17)$$

Для определения правой части уравнения необходимо знать информацию о внешних воздействиях. Так, при использовании L-координат получаем следующий вид вектора внешних воздействий элемента:

$$F^e = \frac{Q^e}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{q^e + hT_\infty}{2} \left[ L_{12} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + L_{12} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + L_{31} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \right] + \quad (18)$$

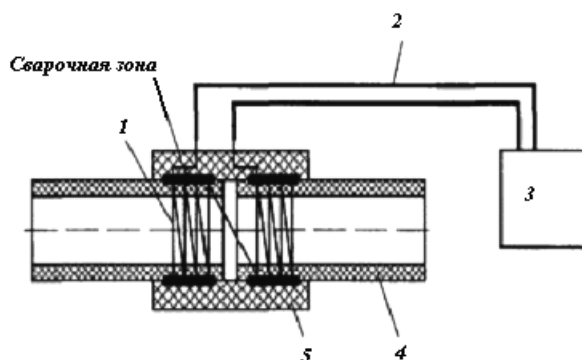
$$+ Q^e \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix}_{(X_0, Y_0)}.$$

В зависимости от принадлежности элемента определенной границе или наличия в нем тепловых источников определенные элементы матрицы в (17) и слагаемые в (18) обращаются в нуль. Так, общий алгоритм решения данной задачи представлен в Приложении 1.

## 2.2 Описание модели детали

В качестве теплового процесса для проведения расчетов была выбрана электродуговая сварка полиэтиленовых труб, т.е. проводился анализ температурного поля в сечении муфты и трубы. При сварке трубопроводов

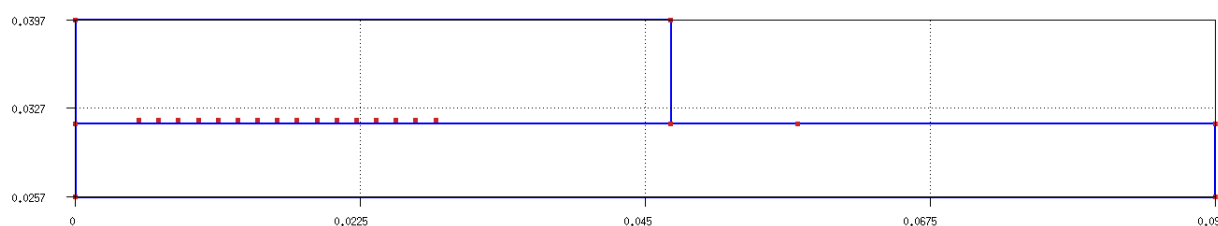
из полиэтилена широко применяется способ с применением закладных нагревателей (Рисунок 6).



*Рисунок 6 - Схема электромуфтовой сварки с закладным нагревателем.*

*(1 – закладной нагреватель; 2 – электрокабель; 3 – сварочный аппарат; 4 – полиэтиленовая труба; 5 – электромуфта)*

Рассматривалось распределение температур для определенной трубы ПЭ100 SDR 11 (отношение внешнего диаметра трубы к толщине стенки равно 11). Заметим, что температурное поле в соединении не только осесимметрично, но и симметрично относительно плоскости, проходящей через середину муфты ортогонально оси соединяемых труб. Поэтому задача сводится к расчетам в соединении муфты только с одной трубой. Тепловые источники считаются сосредоточенными точечными источниками, количество которых соответствует количеству витков спирали. Таким образом, упрощенная схема детали с учетом точечных источников представлена на Рисунке 7.



*Рисунок 7 - Сечение муфты и трубы (значения на сетке изображены в метрах)*

## 2.3 Вывод частного вида уравнения теплопроводности для детали

Обозначим  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  область стенки муфты  $\Omega_1$  и участок трубы  $\Omega_2$  из полиэтилена. Простота геометрии рассматриваемой области позволяет решать двумерную осесимметричную задачу теплопроводности, что существенно сокращает количество узлов расчетной сетки и позволяет решать задачу с использованием более детальной сетки. Определение всех параметров сварки было основано на работе [5], посвященной разработке методики приварки труб при низких температурах.

Определим граничные условия. Для корректного прохождения процесса охлаждения при низких температурах необходимо наличие теплоизоляционного слоя на границе, соприкасающейся с окружающей средой, из некоторого специального материала определенной толщины  $l_{из}$ . Определим также 4 участка границ с одинаковыми условиями (Рисунок 8).

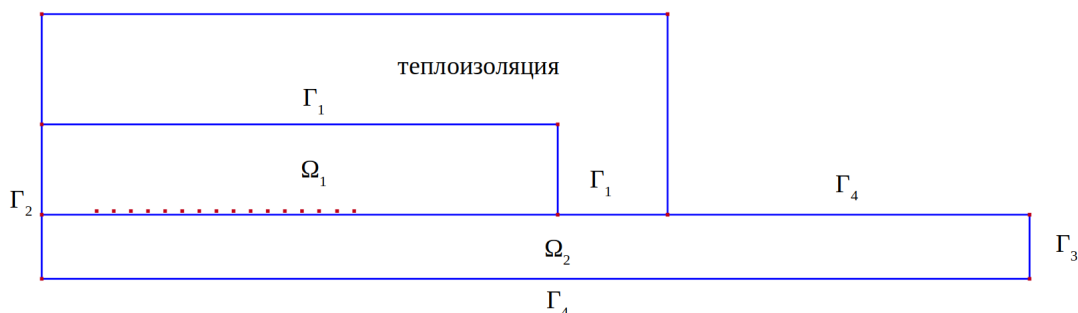


Рисунок 8 - Граничные условия

Границе  $\Gamma_1$  соответствует условие III рода конвективного теплообмена с эффективным коэффициентом теплообмена  $h_{эфф}$ , значение которого зависит от коэффициента теплообмена поверхности с воздухом  $h$ , толщины  $l_{из}$  и теплопроводности  $K_{из}$  используемого теплоизоляционного материала [14 из перехода]. Так,

$$\frac{1}{h_{эфф}} = \frac{1}{h} + \frac{l_{из}}{K_{из}}.$$

Границе  $\Gamma_2$  соответствует условие II рода наличия теплового потока. Известно, что при плавлении (кристаллизации) полиэтилена не существует

четко выраженной границы раздела фаз – фазовое превращение происходит в интервале температур. Для адекватного описания теплового процесса с таким фазовым превращением в математической модели необходимо учитывать изменение кристалличности полиэтилена в зависимости от температуры. Однако в работе исследуется стационарное уравнение теплопроводности, поэтому можно сделать допущение о том, что начальная температура находится вне интервала фазового перехода ( $T_{min} = 70, T_{max} = 140$ ). В данном случае поток тепла будет нулевой  $q = 0$ .

Границе  $\Gamma_3$  соответствует условие I рода, соответствующее определенной температуре на поверхности тела. Будем считать, что  $T_{\Gamma_3} = T_{\infty} = 20^{\circ}\text{C}$ .

Наконец, границе  $\Gamma_4$  также соответствует условие III рода конвективного теплообмена с воздухом при  $h = 10 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$ .

Значения остальных параметров следующие: коэффициенты теплопроводности в обоих направлениях трубы и муфты  $K_{\text{т}} = 0,46 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$  и  $K_{\text{м}} = 0,24 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ , количество витков спирали  $n_{\text{сп}} = 16$ ,  $l_{\text{из}} = 0.001\text{м}$ ,  $K_{\text{из}} = 0.0883 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ . Мощности источников не были зафиксированы и принимают значения для тестирования алгоритма.

### 3. Программная реализация

#### 3.1 Обзор выбранных инструментов разработки

В качестве основного языка разработки был выбран Python версии 3.6. В рамках курсовой работы было решено использовать уже готовое решение триангуляции области с помощью программы gmsh [6]. Данный инструментарий сохраняет информацию о построенной сетке в формате xml, для работы с данным форматом была использована библиотека lxml [7]. Для оптимизации алгоритма использовалась библиотека параллельных вычислений multiprocessing [8].

Также для реализации метода конечных элементов использовались оптимизированные для многомерных массивов библиотеки numpy [9] и scipy [10]. Для визуализации итогового температурного поля использовался графический кросс-платформенный пакет paraview [11] и соответствующий формат данных vtu, а для визуализации градиентов - библиотека matplotlib [12].

#### 3.2 Общая структура проекта

Поскольку метод конечных элементов был изучен на примере решения двумерной задачи теплопроводности конкретной детали, все методы были описаны для данной задачи. Для использования программного обеспечения в решении задач для других деталей, необходимо переопределить методы класса, описывающего деталь, и задать параметры теплового процесса.

Как говорилось ранее, для построения детали и ее сетки было использовано библиотечное решение, которое позволяет производить дискретизацию области треугольными элементами разного масштаба для определенной области, соблюдая реальные пропорции и точность разбиения. Так, в файле *mesh.xml* хранится информация об узлах, их индексах и координатах, а также элементах и соответствующих им узлам.

Главные функции располагаются в файле *fem.py*. Здесь представлена реализация следующих классов: класс *FEM*, содержащий основные методы работы с данными о сетке, детали и полученной СЛАУ; класс *Element*, описывающий треугольный элемент, формирование элементных матриц, проверку принадлежности границам или источникам тепла и т.д.; класс *Node* узла сетки; класс *Detail*, который описывает рассматриваемую деталь,



ее границы и расположение источников тепла. Также для чтения сетки из формата xml и сохранение полученных значений температур для визуализации в формат vtu написаны дополнительные методы *create\_vtu()* и *read\_mesh()*, соответственно.

Поскольку построенная глобальная матрица является симметричной и разреженной, для оптимизации хранимой памяти реализован класс *SparseMatrix* (*sparse\_matrix.py*), подробно описанный в следующем разделе. Для решения системы линейных уравнений также реализован метод сопряженных градиентов (*conjugate\_gradient\_method.py*). Пример работы с программой представлен в Листинге 1.

```
fem = FEM('mesh.xml', Detail())
fem.define_border_conditions()
fem.build_system()
fem.solve_system()
fem.get_info()
fem.create_vtu('data.vtu')
```

*Листинг 1 - Пример работы с программой*

### **3.3 Хранение разреженных матриц и работа с ними**

Поскольку для матрицы, построенной в МКЭ, характерно наличие ненулевых элементов только для ячеек, соответствующих соседним узлам, такие операции, как умножение матрицы на вектор, сводятся к умножению только ненулевых составляющих. Более того, для последующего решения СЛАУ, достаточно хранить в машинной памяти только определенные элементы и их положение в матрице. В связи с этим, одним из решений является использование словарей или хеш-таблиц, где ключами будут являться пара индексов, а в качестве значений выступать значения. В языке Python подходящей структурой является dict (словарь) - неупорядоченная коллекция произвольных объектов с доступом по ключу.

Для работы с данной структурой реализованы метод получения значения по индексу, запись нового ненулевого элемента, сложения, вычитания, а также умножения на вектор, необходимый для решения СЛАУ. При этом последний метод оптимизирован для симметричных квадратных матриц с ненулевой диагональю (Листинг 2).

```

def dot(self, b):
    """
    Dot product of n*n symmetric sparse matrix and n-vector
    ---- Parameters ----
    b: 1d numpy.array
    ---- Returns ----
    1d numpy.array x such that  $Ab = x$ 
    """
    result = np.zeros(len(b))
    for row, col in self.A:
        if row > col:
            result[row] += self.A[(row, col)] * b[col]
            result[col] += self.A[(row, col)] * b[row]
    result += [self.A[(i, i)] * b[i] for i in range(len(b))]
    return result

```

*Листинг 2 - Реализация умножения разреженной матрицы на вектор*

## 4. Тестирование

### 4.1 Улучшение разбиения сетки

Оценка надежности построенного алгоритма решения задачи может быть осуществлена с помощью проверки того, что решение точно воспроизводит имеющиеся аналитические решения, либо проверки того, что его результаты согласуются с экспериментальными данными. В связи с отсутствием необходимых данных о точном решении протестируем реализованную программу с помощью сходимости сетки.

Сходимость сетки - это простой метод, который сравнивает приближенные решения, полученные для разных сеток. В идеале, очень точное сеточное приближение может быть принято в качестве приближения к фактическому решению. Рассмотрим три варианта разбиения (Рисунок 9). Вариант а) соответствует самому грубому разбиению с 284 элементами одного размера, вариант б) - более точному с 3780 элементами одного размера. В наиболее точном разбиении в) учитывается особенность области, то есть присутствуют элементы разных размеров.

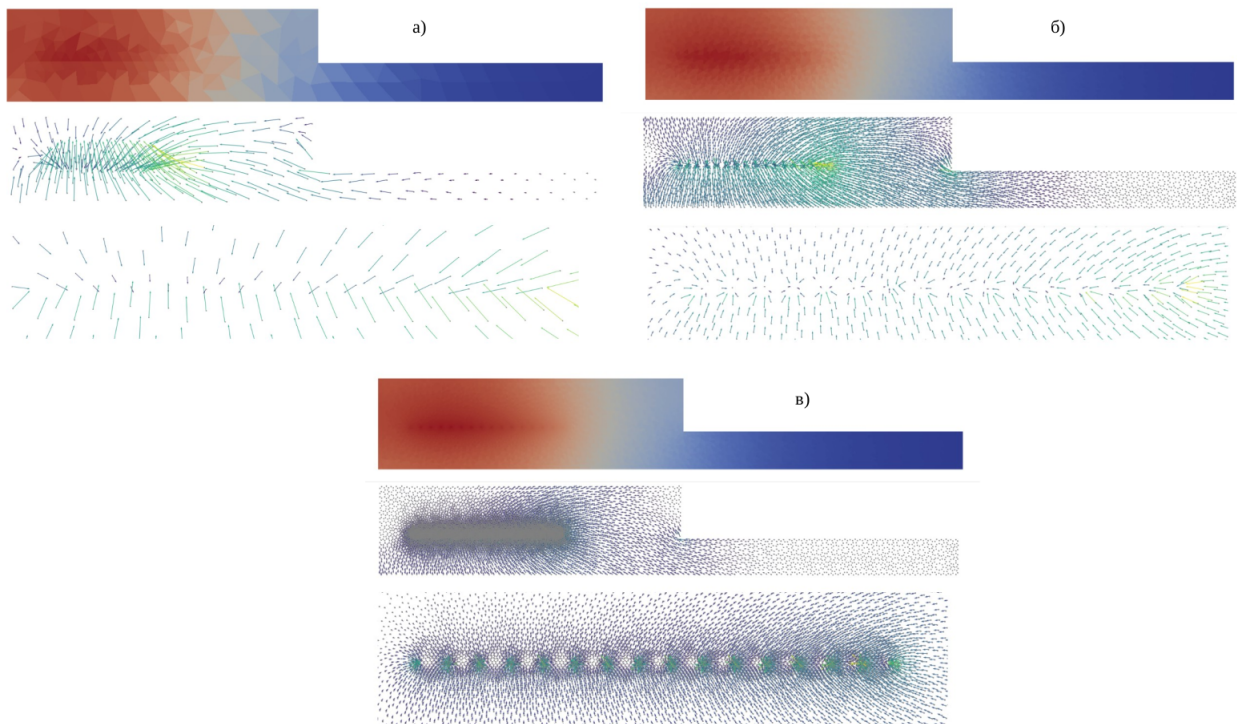
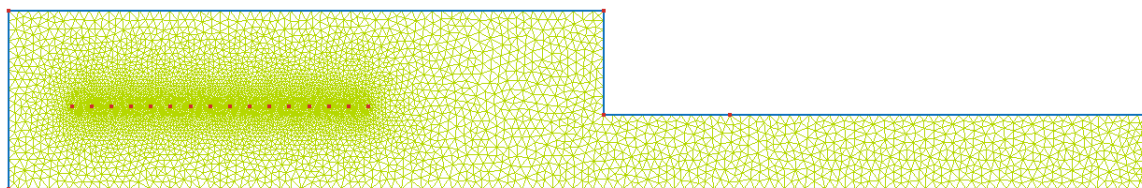


Рисунок 9 - Варианты разбиений и соответствующие им графики поля градиентов

Так, следуя основному правилу при построении конечно-элементной сетки, будем варьировать их размеры: уменьшать размеры элементов в тех областях, где ожидаемый результат может очень сильно меняться (например, большие величины градиентов), и увеличить их там, где ожидаемый результат почти постоянен. Таким образом, будем уменьшать размер элементов ближе к источникам тепла для более точных результатов. В расчетной сетке получилось 5817 узлов и 11368 элементов.

На рисунке представлено распределение температуры на области (значение на элементе равно среднему на узлах), а также графики поля градиентов всего поля и увеличенный вариант вблизи источников. Анализируя полученные графики, можно заметить, что использование адаптивного разбиения оправдано, поскольку в данном случае наблюдается характерное поведение вблизи источников тепла (значение градиента возрастает), в отличие от второго варианта. В это время недостаточно точное разбиение а) не дает необходимого результата для анализа температурного поля. Это качественное поведение сходимости при увеличении точности разбиения придает нам некоторую уверенность в численном решении. Таким образом, итоговое разбиение представлено на Рисунке 10.



*Рисунок 10 - Итоговая расчетная сетка*

## 4.2 Оценка производительности

Для описанной ранее сетки при использовании собственного класса разреженных матриц общее время выполнения алгоритма занимает около 20 секунд. При этом решение СЛАУ происходит за 259 итераций при параметре критерия останова  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Стоит заметить, что значительная часть этого

времени (18,5 секунд) приходится на решение СЛАУ, а именно на умножение матриц на векторы. При этом формирование системы занимает 1,05 секунды, чтение сетки - 0.3 секунды, определение граничных условий - 0.2 секунды, построение поля градиентов - 0.2 секунды.

Поэтому для оптимизации времени подсчета значений можно либо распараллелить этап умножения матрицы на вектор (с 10 потоками -  $\sim 3$  секунды) или использовать класс `csc_matrix` библиотечного модуля `scipy.sparse`, предназначенного для эффективной работы с разреженными матрицами. В последнем случае время решения СЛАУ сокращается до 0.1 секунд. Таким образом, минимальное время работы для 5817 узлов и 11368 элементов составляет 1.79 секунды.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлена реализация программного численного решения уравнения теплопроводности методом конечных элементов. Проведен обзор используемых методик при решении подобных дифференциальных задач, на основе которого выведен частный вид уравнения и алгоритм поэтапного формирования решения. В качестве теплового процесса для проведения расчетов была выбрана электродуговая сварка полиэтиленовых труб. Также было проведено моделирование двумерного сечения и триангуляция полученной области с использованием библиотечного решения.

Дальнейшая разработка проекта может быть направлена на решение нестационарной задачи теплопроводности с учетом скрытой теплоты фазового превращения в интервале температур, которая требует более сложных вычислений, связанных с зависимостью от времени. Также существует необходимость варьирования параметров для обеспечения определенной динамики сварки. Решение подобных задач требует работы с большим количеством данных, что влечет за собой необходимость дополнительных оптимизаций.

## Список использованной литературы

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров // Учеб. пособие. — М.: Высш. шк., 1994. — 544 с.
2. Скворцов А.В. С 42 Триангуляция Делоне и её применение // Томск, Изд-во Том. ун-та, 2002. — 128 с.
3. Румянцев А.В. Метод конечных элементов в задачах теплопроводности: Учебное пособие // Изд. 3-е, перераб. — Российский госуниверситет им. И. Канта. — Калининград. 2010. — 95 с.
4. М.А. Олышанский Лекции и упражнения по многосеточным методам // Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова, 2003. - 176 с.
5. Старостин Н.П., Аммосова О.А. Конечно-элементное моделирование теплового процесса и расчет параметров электрофузионной сварки полиэтиленовых труб при низких температурах // Информационные технологии в проектировании и производстве, 2018. № 2. С. 69–75.
6. Конечно-элементный генератор сеток gmsh // url: <http://geuz.org/gmsh/>
7. Библиотека для работы с xml-форматом // url: <https://lxml.de/>
8. Библиотека параллельных вычислений multiprocessing // url: <https://docs.python.org/3.4/library/multiprocessing.html>
9. Библиотека numpy // url: <https://numpy.org/>
10. Библиотека scipy // url: <https://www.scipy.org/>
11. Графический пакет для визуализации paraview // url: <http://paraview.org/>
12. Библиотека matplotlib для визуализации данных // url: <https://matplotlib.org/>

13. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов // Мир, 1979. - 392 с.



## Приложение А. Алгоритм решения