

基于 Barnes Hut 算法的 N-body 问题模拟

牟磊

(同济大学软件工程系 08 级工程硕士 上海 201804)

【摘要】: 文章详细分析了 Barnes-Hut 算法的原理, 并采用了 Barnes-Hut 算法模拟了 2D N-body 问题。Barnes-Hut 算法采用了树形结构对质点所在的空间进行分割, 并利用质心对足够远的质点群进行近似, 从而使时间复杂度从直接计算的 $O(N^2)$ 减少到了 $O(N \lg N)$ 。

【关键词】: N-body 问题; Barnes-Hut 算法; 二叉树; 模拟

0. 引言

N-body 问题研究的是一系列物体或质点只在一种力的作用下的运动规律。N-body 问题的模拟在许多学科和领域内都有应用, 如天体物理, 分子力学等 [1]。模拟的一个基本方法是把时间划分成连续的, 足够小的时间步, 在每个时间步内, 计算每个质点所受的力, 根据上面的结果来更新质点的加速度, 并更新质点的位置。从数学上来说, N-body 问题可以用下面的公式来描述:

$$F_i = \sum_{j=1} f_{j,i} \quad (1)$$

其中 F_i 指的是质点 i 在整个系统所受到的力, $f_{j,i}$ 指的是质点 j 对质点 i 施加的力。对于一个在二维平面内含有 N 个质点的系统, 质点之间只受引力的作用, 那么上面的公式可以表示为:

$$F_i = \sum_{j=0, j \neq i}^{N-1} \frac{Gm_i m_j}{|x_j - x_i|} (x_j - x_i) \quad (2)$$

其中 G 是引力常数, m_i 和 m_j 是质点 i 和质点 j 的质量, 向量 x_i 和 x_j 分别代表质点 i 和 j 在平面所在的位置。对于每个质点, 利用公式 (1) 计算其受力的情况所需的计算次数为 $O(N)$ 。更新所有质点受力情况的计算量为 $O(N^2)$ 。当 N 很大, 时间步很小的情况下, 计算量相当庞大。利用 Barnes-Hut 算法, 可以将这一步的复杂度从 $O(N^2)$ 减少到 $O(N)$, 可以极大地提升模拟的速度。

1. Barnes-Hut 算法

1.1 基本思路

Barnes-Hut 算法是 J.Barnes 和 P.Hut 在 1986 年提出的一种算法 [2]。这种算法利用了下面的基本思路: 当一组总数为 M 的质点和质点 i 的距离足够远时, 这组质点对 i 施加的力, 可以近似为一个质点 g 对 i 施加的力。质点 g 的质量为这组质点的质量和, 质点 g 的位置位于这组质点的质心。如图 1 所示:

其中如果 $d/r < \epsilon$ 则认为这该组质点可以近似为一个质点。这样, 这部分的运算次数就从 M 次减少到了 1

次。按照这种方法来近似, 每次更新质点位置所需要的计算量就会大大减少。

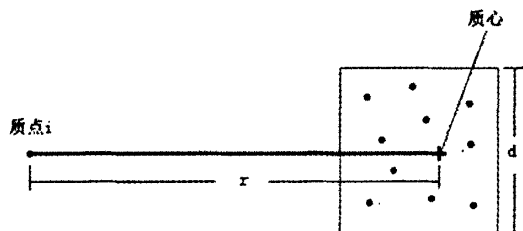


图 1

2.2 划分空间的方法

为了用上面的方法来计算每个质点的受力情况, 则必须用一种方法来对质点所在的空间进行分割。Barnes-Hut 算法利用了二叉树 (三维空间则是二叉树) 来达到这个目的。划分空间的基本方法是, 如果当前平面 (或空间) 所含的质点数量大于 1, 则把该平面等分成四个子平面, 并按照同样的方法递归地分割这四个子平面, 直到每个子平面只包含一个质点为止。如图 2 所示。

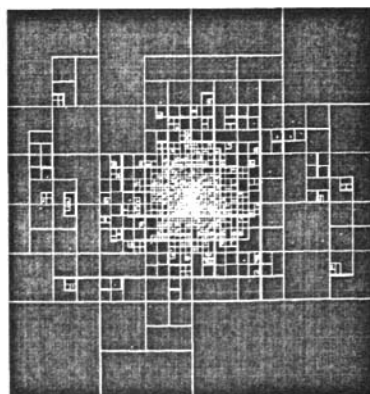


图 2 质点数为 1500 时某一时刻的二叉树

按照以上的表述, Barnes-Hut 算法可以用如下的步骤来表示:

- 1) 根据平面上的质点的位置构建二叉树;
- 2) 对于二叉树上的每一个节点, 计算它的质心位

置;

3)对于每一个质点,利用四叉树递归地计算它的受力情况;

4)根据上一步的结果更新每个质点的位置

5)重新绘制每个质点

6)转至步骤 1)

在步骤 3) 中,为了计算一个质点 i 的受力情况,需要判断是否需要把一个正方形区域内的所有质点近似为一个质点来处理。这是由一个阈值 $\theta(0 \leq \theta \leq 1)$ 来决定的。当 $d/r < \theta$ 时,把当前正方形区域的所有节点近似为一个节点,递归结束。当 $d/r \geq \theta$ 时,则递归处理该正方形区域的所有子区域。

2.实验结果及分析

为了测试 Barnes-Hut 算法的性能以及分析不同 θ 值对于算法的影响,我做了两组实验,测试每个时间步所需的计算时间。实验结果如下面两个表格所示:

N	平均时间 (基本算法)	平均时间 (Barnes-Hut 算法)
100	0.001 s	0.001 s
200	0.001 s	0.001 s
400	0.002 s	0.001 s
800	0.009 s	0.003 s
1600	0.044 s	0.007 s
3200	0.271 s	0.016 s
6400	1.116 s	0.036 s

表 1:基本算法和 Barnes-Hut 算法的性能比较

从表格 1 中可以看出,当 $N > 400$ 时,Barnes-Hut 算法对模拟的性能有很明显的提升。从表格 2 中可以看出, θ 值越大,越多的质点可以被近似为一个质点,

每一个时间步所需的计算量减小,所以每一次算法所需的平均时间和模拟的精度都随着 θ 值的增大而减小。这需要 Barnes-Hut 算法的使用者在速度和精度之间做权衡取舍。

θ	平均时间
0.25	0.047 s
0.35	0.030 s
0.45	0.021 s
0.55	0.016 s
0.65	0.013 s
0.75	0.011 s
0.85	0.009 s
0.95	0.008 s
1.00	0.008 s

表格 2:粒子数为 2500 时,不同的 θ 值对于 Barnes-Hut 算法的影响

3.结束语

按照常规的方法模拟 N-body 问题,每个时间步的时间复杂度为 $O(N^2)$,这极大地限制了模拟的规模 [3]。利用 Barnes-Hut 算法,可将每个时间步的时间复杂度降低为 $O(N \log N)$ 。通过选择合理的阈值,可以同时获得理想的运行速度与模拟精度。

参考文献:

[1]D. Blackston and T. Suel, " - Highly Portable and Efficient Implementations of Parallel Adaptive N-Body Methods," vol. -, pp. - 4, 1997.
[2]J. Barnes and P. Hut, " - A hierarchical $O(N \log N)$ force-calculation algorithm," vol. - 324, pp. - 449, 1986.
[3] 王武,冯仰德,迟学斌,树结构在 N 体问题中的应用[J]. 计算机应用研究,2008,25(1)

(上接第 145 页)

降低到预设参数后,停泵。

开机水位	停机水位	运行台数
B13 米	C13 米	3 台
B12 米	C12 米	2 台
B11 米	C11 米	1 台

表 1 水泵启停水位参数值

4)雨天模式:与白天模式类似,只是参数值不同。系统转换为雨天模式后,开始关闭进水启闭机,进水启闭机完全关闭后,再打开进水启闭机 D4 秒。

上面每种模式下参数对应的开泵台数是水泵在自动状态下由下位 PLC 程序开启的,相关参数可在 PLC 编程时写入,也可通过上位监控机设置。

4.4 泵站 PLC 控制程序

根据控制要求,PLC 自动控制程序由三部分组成:主程序、格栅池部分子程序和污水集水池部分子程序。由于篇幅有限,本

文只叙述控制工艺,对程序不进行详解。

5、结论

污水提升泵站除了设备数量有区别外,控制工艺基本没有多少变化,通过此控制要求由 PLC 实现的控制方式经实践证明,设计合理、运行安全、可靠。本系统除了大大减轻了现场操作人员的工作量外还使得设备可以合理调控。通过和上位机的配合使用还实现了设备远控、参数设置、报表生成等功能,提高了泵站的设备运行效率和管理水平。

参考文献:

[1] Allen-Bradley. SLC 500 Systems Selection Guide[Z]. 2005,3
[2] Allen-Bradley. SLC! " 500 Modular Hardware Style User Manual.[Z] 2004,2
[3] 浙江大学罗克韦尔自动化技术中心. PLC 系统. 浙江大学出版社[M]. 2000,3

基于Barnes Hut算法的N-body问题模拟

作者: [牟磊](#)
作者单位: [同济大学软件工程系, 上海, 201804](#)
刊名: [福建电脑](#)
英文刊名: [FUJIAN COMPUTER](#)
年, 卷(期): 2010, 26 (8)

参考文献(3条)

1. 王武;冯仰德;迟学斌 [树结构在N体问题中的应用](#) [期刊论文]-[计算机应用研究](#) 2008 (01)
2. J. Barnes;P. Hut [A hierarchical \$O\(N \log N\)\$ force calculation algorithm](#) 1986
3. D. Blackston;T. Suel [Highly Portable and Efficient Implementations of Parallel Adaptive N-Body Methods](#) 1997

本文读者也读过(5条)

1. [杨圣云](#). [赖国明](#). [霍红卫](#). [YANG Sheng-yun](#). [LAI Guo-ming](#). [HUO Hong-wei](#) [BH算法的几点注记](#) [期刊论文]-[计算机工程与设计](#)2006, 27 (16)
2. [王小伟](#). [郭力](#). [杨章远](#) [N-body算法及其并行化](#) [期刊论文]-[计算机与应用化学](#)2003, 20 (1)
3. [吕菲](#). [张华](#). [张龙霞](#). [LV Fei](#). [ZHANG Hua](#). [ZHANG Long-xia](#) [N体问题并行算法的探讨](#) [期刊论文]-[漯河职业技术学院学报](#)2008, 7 (2)
4. [徐鹏](#). [魏紫](#) [N-Body问题在CUDA平台上并行实现研究](#) [期刊论文]-[科技信息](#)2009 (27)
5. [张伟哲](#). [胡铭曾](#). [张树峰](#). [ZHANG Wei-zhe](#). [HU Ming-zeng](#). [ZHANG Shu-feng](#) [基于机群系统的N体问题调度算法](#) [期刊论文]-[哈尔滨工业大学学报](#)2005, 37 (10)

本文链接: http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical_fjdn201008055.aspx