

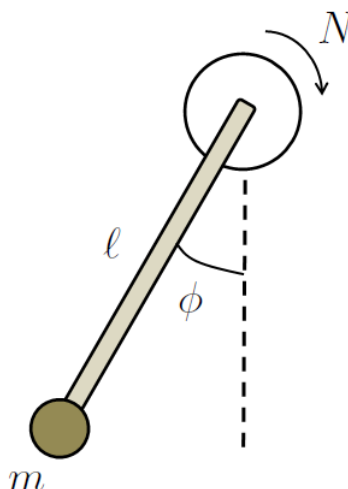
ONDAS Y FLUIDOS : BONO PARCIAL 1

MÁS ALLÁ DE PEQUEÑAS OSCILACIONES: EL PÉNDULO NO LINEAL

Profesor : Luis Aníbal García

S O L U C I Ó N

Como un ejemplo de vibraciones forzadas con fuerzas disipativas, consideremos el movimiento del péndulo mostrado en la figura, que está sujeto a un torque constante aplicado N , y que puede rotar a lo largo de todo su rango de movimiento $-\pi \leq \phi \leq \pi$. Adicionalmente, el péndulo estará sujeto a amortiguamiento debido a la viscosidad η del medio en el cual rota. Por simplicidad, asumimos que la varilla tiene masa despreciable, tal que toda la masa del péndulo está concentrada al final de la varilla.



La ecuación diferencial que rige el movimiento del sistema es una ecuación no lineal, y por lo tanto este puede exhibir un comportamiento extraordinariamente complicado e inestable. A pesar de que a primera vista inestabilidad y control parecieran términos contradictorios, podemos usar la inestabilidad del péndulo para controlarlo. Tal resultado es vital en robótica: el péndulo forzado es un subsistema básico en cualquier robot.

1. (+0.3) Primero escriba la Segunda Ley de Newton Rotacional (¡torques!) para el péndulo y encuentre así la ecuación diferencial correspondiente en términos de la masa m y la longitud

ℓ del péndulo. Suponga que el torque viscoso $\tau_{visc} = \eta\omega$ es proporcional a la velocidad angular ω ¹. Describa cualitativamente el movimiento del péndulo. Para ello piense en el caso cuando pasa mucho tiempo y muestre que hay dos comportamientos diferentes divididos por un torque aplicado crítico dado por

$$N_c = mg\ell$$

¿Qué ocurre cuando el torque aplicado es menor a N_c ? ¿Y cuando el torque es mayor? Analice cuidadosamente estas situaciones. Muestre también que hay una frecuencia crítica ω_c que corresponde a la velocidad angular en la cual el torque amortiguante es igual al torque crítico. Con esto en mente, muestre que la ecuación diferencial se puede escribir de la forma

$$\frac{N}{N_c} = \frac{1}{\Omega_0^2} \frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{1}{\omega_c} \frac{d\phi}{dt} + \sin\phi$$

donde Ω_0 es la frecuencia natural del péndulo simple.

La segunda ley de Newton rotacional $\sum \tau = I\alpha$, me relaciona el torque neto con la aceleración angular resultante de un sistema que gira alrededor de un eje fijo. Para este caso tendríamos entonces

$$-mg\ell \sin\phi - \eta\dot{\phi} + N = m\ell^2\ddot{\phi} \quad (1)$$

donde el primer término es el torque gravitacional *recuperador* (de ahí el signo negativo), el segundo es el torque viscoso que siempre se opone a la dirección del movimiento y el tercero es el torque constante externo (forzamiento).

Analizaremos cualitativamente el comportamiento del péndulo cuando este alcanza cierto estado estable según el forzamiento aplicado.

Al tener un forzamiento constante, esperamos que cuando pasa mucho tiempo el sistema alcanzará un equilibrio estático a cierto ángulo fijo según el forzamiento, implicando que $\dot{\phi} = \ddot{\phi} = 0$ y por lo tanto de (1) tendríamos la condición

$$N = mg\ell \sin\phi \quad (2)$$

Esto nos indica que este comportamiento en particular solo ocurre para cuando el torque externo cumple con $N < mg\ell$ por la cota superior que impone la función $\sin\phi$. Por esta razón, podemos definir un torque aplicado *crítico* que divide dos comportamientos muy distintos

$$\boxed{N_c = mg\ell} \quad (3)$$

Cuando $N < N_c$, se observa al sistema oscilar hasta que alcanza un equilibrio con el torque aplicado y queda finalmente estático en una posición angular terminal dada por $\sin\phi_t = N/N_c$.

Por otro lado, cuando $N \geq N_c$ el comportamiento cambia drásticamente, ya que no podremos tener equilibrio estático por encima de $\phi/2$. Lo que se espera *asintóticamente* (cuando pasa mucho tiempo) es un movimiento rotacional con cierta velocidad terminal $\langle\omega_t\rangle$ que dependerá de ese forzamiento inicial y que se puede calcular analíticamente al solucionar la ecuación (1) cuando $\ddot{\phi} = 0$

$$N = N_c \sin\phi + \eta\dot{\phi} + N \quad (4)$$

para el promedio de la velocidad.

¹¡CUIDADO! Las velocidades angulares las denotaremos $\omega = \dot{\phi}$, mientras que las frecuencias angulares, con Ω . No las confunda.

Adicionalmente, definimos una frecuencia crítica igualando el torque amortiguante y el torque crítico $N_c = \eta\omega_c$. De esta manera, reescribimos (1) como

$$\begin{aligned} N &= m\ell^2\ddot{\phi} + \eta\dot{\phi} + N_c \sin \phi \\ \frac{N}{N_c} &= \frac{m\ell^2}{mg\ell}\ddot{\phi} + \frac{\eta}{N_c}\dot{\phi} + \sin \phi \end{aligned}$$

y usando las definiciones de ω_c y $\Omega_0^2 = g/\ell$, queda

$$\boxed{\frac{N}{N_c} = \frac{1}{\Omega_0^2} \frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{1}{\omega_c} \frac{d\phi}{dt} + \sin \phi} \quad (5)$$

como se esperaba encontrar.

2. (+0.2) Esta ecuación diferencial exhibe no linealidad gracias al término $\sin \phi$ del torque gravitacional y por tanto no tendrá una solución analítica (exacta). Sin embargo, podemos extraer mucha física interesante de ella si estudiamos algunas de sus soluciones numéricas.²

Para nuestro caso particular, usaremos la integración de Verlet, que es un método numérico para resolver ecuaciones de movimiento de Newton. Este método ofrece una buena estabilidad en la solución, así como otras propiedades que son importantes en sistemas físicos como la reversibilidad temporal y la conservación de la forma simpléctica en el espacio de fases, sin costos computacionales significativos sobre el sencillo método de Euler, por ejemplo.

Usando la definición de derivada, muestre que una aceleración angular en un tiempo t es aproximadamente

$$\alpha(t) \approx \frac{\phi(t + \Delta t) + \phi(t - \Delta t) - 2\phi(t)}{\Delta t^2}$$

Por otro lado, use la ecuación diferencial del numeral anterior para escribir la aceleración angular como

$$\alpha(t) \approx -\Omega_0^2 \sin[\phi(t)] - \frac{\Omega_0^2}{2\omega_c \Delta t} [\phi(t + \Delta t) - \phi(t - \Delta t)] + \Omega_0^2 \frac{N}{N_c}$$

Igualando las dos ecuaciones anteriores, muestre que la posición angular en $t + \Delta t$ es

$$\boxed{\phi(t + \Delta t) \approx \frac{2\phi(t) - (\Omega_0 \Delta t)^2 \sin[\phi(t)] - \left(1 - \frac{\Omega_0^2}{2\omega_c} \Delta t\right) \phi(t - \Delta t) + \Omega_0^2 \frac{N}{N_c} \Delta t^2}{1 + \frac{\Omega_0^2}{2\omega_c} \Delta t}} \quad (6)$$

que depende únicamente de las posiciones en los dos tiempos anteriores $\phi(t)$ y $\phi(t - \Delta t)$, y los parámetros del sistema. Esta relación recursiva servirá para encontrar la posición del péndulo para cierto intervalo de tiempo de interés.

Para cierta función $f(x)$, tenemos tres formas de expresar su derivada

$$\text{Diferencia hacia adelante} \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (7a)$$

$$\text{Diferencia hacia atrás} \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (7b)$$

$$\text{Diferencia central} \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (7c)$$

²Como físicos, geocientíficos o ingenieros, se encontrarán muy a menudo con ecuaciones que deben resolverse usando métodos numéricos, así que les recomiendo que se empiecen a interesar por ellos.

Para aproximar la aceleración en un intervalo suficientemente pequeño, usemos primero la diferencia hacia atrás (7b), en términos de la velocidad angular; y después, usamos la diferencia hacia adelante (7a) para los términos resultantes

$$\begin{aligned}\alpha(t) &\approx \frac{\omega(t) - \omega(t - \Delta t)}{\Delta t} \\ &\approx \frac{\frac{\phi(t + \Delta t) - \phi(t)}{\Delta t} - \frac{\phi(t) - \phi(t - \Delta t)}{\Delta t}}{\Delta t} \\ &\approx \frac{\phi(t + \Delta t) + \phi(t - \Delta t) - 2\phi(t)}{\Delta t^2}\end{aligned}\quad (8)$$

Despejando $\phi(t + \Delta t)$ de la ecuación anterior, obtenemos la expresión

$$\phi(t + \Delta t) = 2\phi(t) - \phi(t - \Delta t) + \alpha(t)\Delta t^2 \quad (9)$$

Una forma alternativa para llegar a este resultado consiste en usar expansión en serie de Taylor de las cantidades $\phi(t + \Delta t)$ y $\phi(t - \Delta t)$

$$\phi(t + \Delta t) = \phi(t) + \omega(t)\Delta t + \frac{1}{2}\alpha(t)\Delta t^2 + \frac{1}{6}\beta(t)\Delta t^3 + O(\Delta t^4) \quad (10a)$$

$$\phi(t - \Delta t) = \phi(t) - \omega(t)\Delta t + \frac{1}{2}\alpha(t)\Delta t^2 - \frac{1}{6}\beta(t)\Delta t^3 + O(\Delta t^4) \quad (10b)$$

donde $\beta(t)$ es la tercera derivada de la posición con respecto al tiempo. Suponiendo un intervalo Δt suficientemente pequeño, podemos sumar (10a) y (10b) y despejar para $\phi(t + \Delta t)$, con lo cual obtenemos nuevamente la expresión (9).

Ahora, la aceleración angular la podemos obtener de la ecuación (5)

$$\alpha = \ddot{\phi} = -\Omega_0^2 \sin \phi - \frac{\Omega_0^2}{\omega_c} \dot{\phi} + \Omega_0^2 \frac{N}{N_c}$$

y usando la diferencia central para $\dot{\phi}$, obtenemos

$$\alpha(t) \approx -\Omega_0^2 \sin[\phi(t)] - \frac{\Omega_0^2}{2\omega_c \Delta t} [\phi(t + \Delta t) - \phi(t - \Delta t)] + \Omega_0^2 \frac{N}{N_c} \quad (11)$$

Reemplazando (11) en (9) y despejando para $\phi(t + \Delta t)$, es fácil mostrar que se encuentra la ecuación de recursión (6) para un conjunto dado de parámetros.

$$\boxed{\phi(t + \Delta t) \approx \frac{2\phi(t) - (\Omega_0 \Delta t)^2 \sin[\phi(t)] - \left(1 - \frac{\Omega_0^2}{2\omega_c} \Delta t\right) \phi(t - \Delta t) + \Omega_0^2 \frac{N}{N_c} \Delta t^2}{1 + \frac{\Omega_0^2}{2\omega_c} \Delta t}}$$

Recuerde que se tienen un par de condiciones iniciales para el sistema impuestas por nosotros, una posición inicial $\phi(0)$ y una velocidad angular inicial $\omega(0)$. Sin embargo, para hallar $\phi(\Delta t)$, necesitamos además de $\phi(0)$, la posición “anterior” $\phi(-\Delta t)$. Para ello definimos la velocidad angular como

$$\boxed{\omega(t) = \frac{\phi(t) - \phi(t - \Delta t)}{\Delta t}} \quad (12)$$

tal que $\phi(-\Delta t) = \phi(0) - \omega(0)\Delta t$, usando así también la condición inicial de la velocidad.

3. (+0.5) Usaremos Microsoft Excel para encontrar las soluciones deseadas (aunque puede usar otros programas para hacerlo). En una hoja nueva, que será nuestra hoja de cálculos, cree primero una tabla con los parámetros del sistema y las condiciones iniciales, como muestra la figura. Cambie los nombres de estas celdas de parámetros dando clic derecho sobre la celda y eligiendo la opción Nombrar rango, y poniéndole el nombre deseado. Esto permite que dichas celdas sean fijas a la hora de hacer cálculos. Las celdas que aparecen en rojo, deben calcularse a partir de otros parámetros, como se muestra. Los valores que aparecen en la figura deben ser fijos para todos los cálculos. Las celdas vacías serán de parámetros que variaremos para obtener diversas soluciones.

A	B	C	D	E	F
	Posición Inicial	x0	0	rad	
	Velocidad Inicial	v0	0	rad/s	
	Gravedad	g	9.8	m/s ²	
	Longitud	L	0.25	m	
	Masa	m	4	kg	
	Viscosidad	n		Nms	
	Torque crítico	Nc	mgL	Nm	
	Torque aplicado (relativo a Nc)	N/Nc		---	
	Frecuencia crítica	wc	Nc/n	rad/s	
	Frecuencia natural	W0	SQRT(g/L)	rad/s	
	Paso de tiempo	dt	0.0005	s	

Ahora cree otra tabla como la mostrada a continuación con tres columnas: tiempo, posición y velocidad angular. Las primeras tres filas son importantes: la primera corresponde al tiempo “anterior” discutido al final del numeral anterior; la segunda es en $t = 0$, donde se ponen las condiciones iniciales; y la tercera tiene los primeros cálculos a partir de las dos filas anteriores. Para el tiempo se escribe “(celda anterior) + dt”, para la posición se escribe la ecuación (6) usando los nombres de los parámetros ya definidos, y para la velocidad se escribe la ecuación (12), usando los valores de la posición actual y de la inmediatamente anterior.

	H	I	J	K	L
2					
3					
4			Tiempo	Posición	Velocidad
5		Tiempo "anterior"		x0-(v0*dt)	
6		Cond. Iniciales	0	x0	v0
7		Primer cálculo	J6+dt	Ec. (1)	Ec. (2)
8					
9					
10					
11					

Arrastrar

Una vez se tenga esto, seleccione las tres celdas de la tercera fila (Primeros cálculos) y arrastre de la esquina inferior derecha como se muestra, hasta generar unas 20000 filas

más. Así, para cierto conjunto de parámetros podremos graficar posición contra tiempo, velocidad contra tiempo, o velocidad contra posición (espacio de fases).

Grafique y analice ampliamente los siguientes casos³

- Amortiguamiento débil, $\eta = 0,2$ ($\omega_c \gg \Omega_0$). Posición en función del tiempo para $N/N_c = 0,5$.
- Amortiguamiento débil, $\eta = 0,2$ ($\omega_c \gg \Omega_0$). Posición y velocidad en función del tiempo para $N/N_c = 1$.
- Amortiguamiento fuerte, $\eta = 10$ ($\omega_c \ll \Omega_0$). Posición y velocidad en función del tiempo para $N/N_c = 0,5$
- Amortiguamiento fuerte, $\eta = 10$ ($\omega_c \ll \Omega_0$). Posición y velocidad en función del tiempo para $N/N_c = 2$

Para terminar, analice la relación entre la velocidad angular promedio del sistema $\langle \omega \rangle$ y el torque aplicado N . Para ello consigne los valores promedio de la columna de velocidad para $\eta = 10$, variando el torque aplicado relativo N/N_c desde 0 hasta 3 con pasos de 0,1. Grafique entonces N/N_c contra ese promedio de velocidad angular. Compare con el resultado teórico que sigue la relación

$$\langle \omega \rangle = \begin{cases} 0, & N \leq N_c \\ \omega_c \left[\left(\frac{N}{N_c} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}, & N > N_c \end{cases} \quad (13)$$

Explique el comportamiento y significado de la curva encontrada.

Una vez solucionamos numéricamente (ver código en figura 1), podemos simplemente variar los parámetros para generar las gráficas que queremos para el análisis.

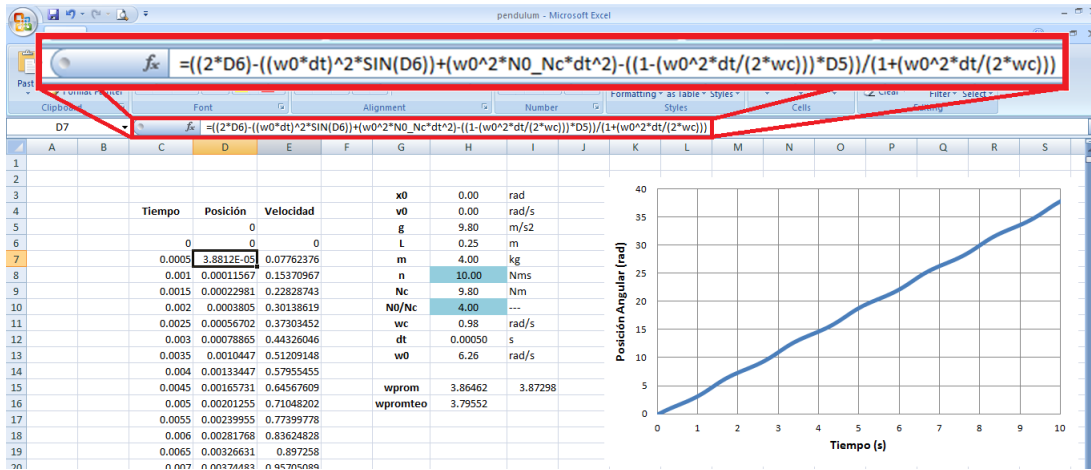


Figura 1: Implementación de la recursión (6) para parámetros dados. Fíjese bien en la forma de escribir la ecuación.

Estudiaremos primero el caso $N < N_c$, donde esperamos cierta estabilización estática en un ángulo fijo menor que $\pi/2$. Para $N/N_c = 0,5$, tenemos un comportamiento subamortiguado transitorio para valores pequeños de la viscosidad; por ejemplo, para $\eta = 0,2$ la posición angular varía como muestra la figura 2. En este caso, el sistema presentará oscilaciones

³Fíjese que no es necesario hacer una tabla para cada caso, simplemente guarde cada gráfica con cada cambio de parámetros.

alrededor de la nueva posición de equilibrio y alcanzará su estado estacionario en un tiempo mayor a los 10 seg.

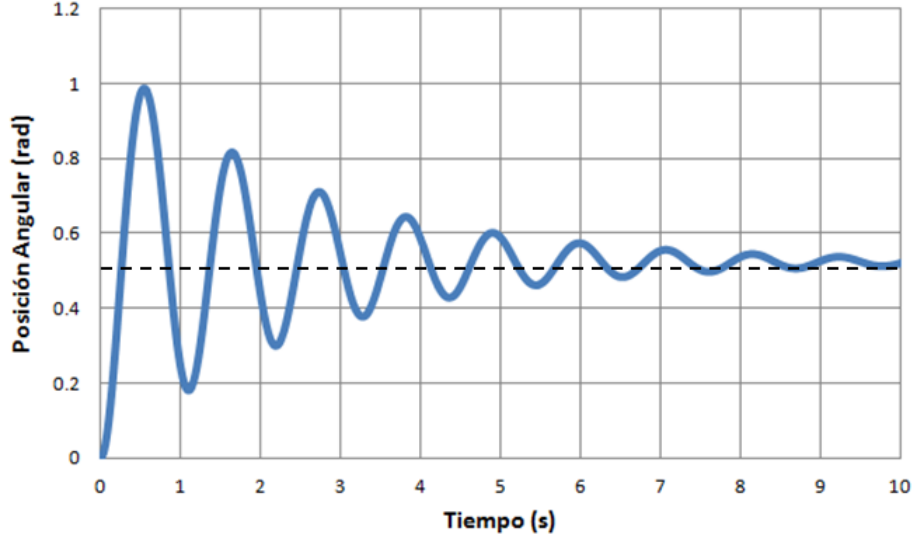


Figura 2: Posición angular en función del tiempo para $N/N_c = 0,5$ y $\eta = 0,2$. Se observa comportamiento subamortiguado.

Ahora, para cuando el amortiguamiento es grande $\eta = 10$, también observaremos un estado de equilibrio pero alcanzado en un tiempo mucho menor y sin oscilaciones (sobreamortiguado), como se ve en 3. La velocidad angular alcanza un máximo rápidamente pero luego decae también muy rápido, hasta que en el estado estable se vuelve esencialmente cero. Note que el amortiguamiento dependerá no solo de la viscosidad medio en el que está inmerso el péndulo y de su forma, sino también del rozamiento en el pivote. El control de este par de fuentes de disipación de energía mecánica es muy importante para definir el tipo de movimiento que se quiere para el péndulo (por ejemplo en un brazo mecánico).

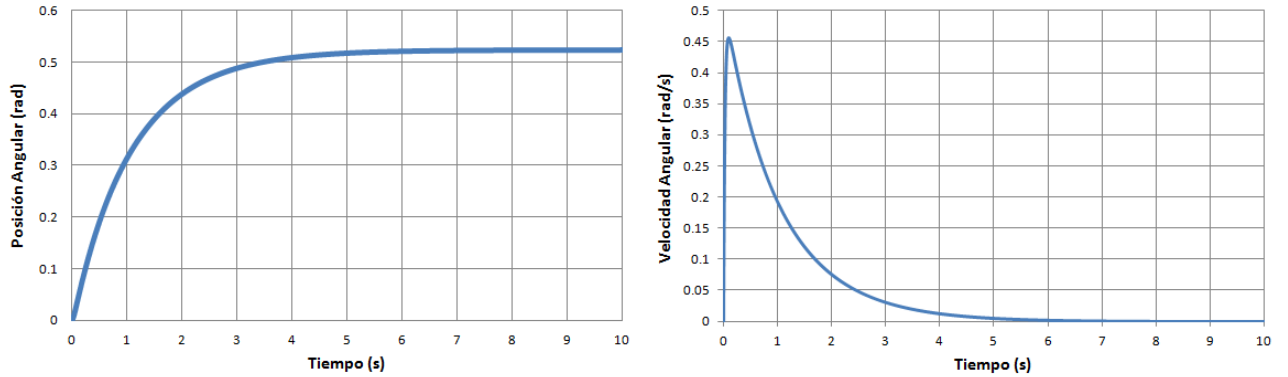


Figura 3: Posición y velocidad angulares en función del tiempo para $N/N_c = 0,5$ y $\eta = 10$. Se observa comportamiento sobreamortiguado.

En todo caso, sin importar qué tanta fricción exista en el sistema, podemos predecir que para $N < N_c$, que llamaremos *fase de equilibrio estático*, la velocidad promedio $\langle \omega \rangle$ del sistema será muy cercana a cero.

En el caso de movimiento sin amortiguamiento y torque aplicado N mayor que el torque crítico N_c , el movimiento será de rotación continuamente acelerada, y el péndulo incrementará su energía a medida que pasa el tiempo. La velocidad angular también aumenta con el tiempo, pero con fluctuaciones que se repiten cada ciclo. Cuando hay amortiguamiento la velocidad angular ω sigue incrementándose hasta que el término de amortiguamiento $\eta\omega$ se acerca al torque aplicado. Cuando esto ocurre, la velocidad angular promedio $\langle\omega\rangle$ alcanza un valor límite, como muestra la gráfica de velocidad angular de la figura 4(a), y la aceleración fluctúa alrededor de un promedio que es cero. El péndulo experimenta lo que se conoce como *movimiento cuasiestático* o *fase de equilibrio uniforme*, rotando con una velocidad angular ω , que sufre variaciones periódicas pero que siempre se mantiene cerca del promedio.

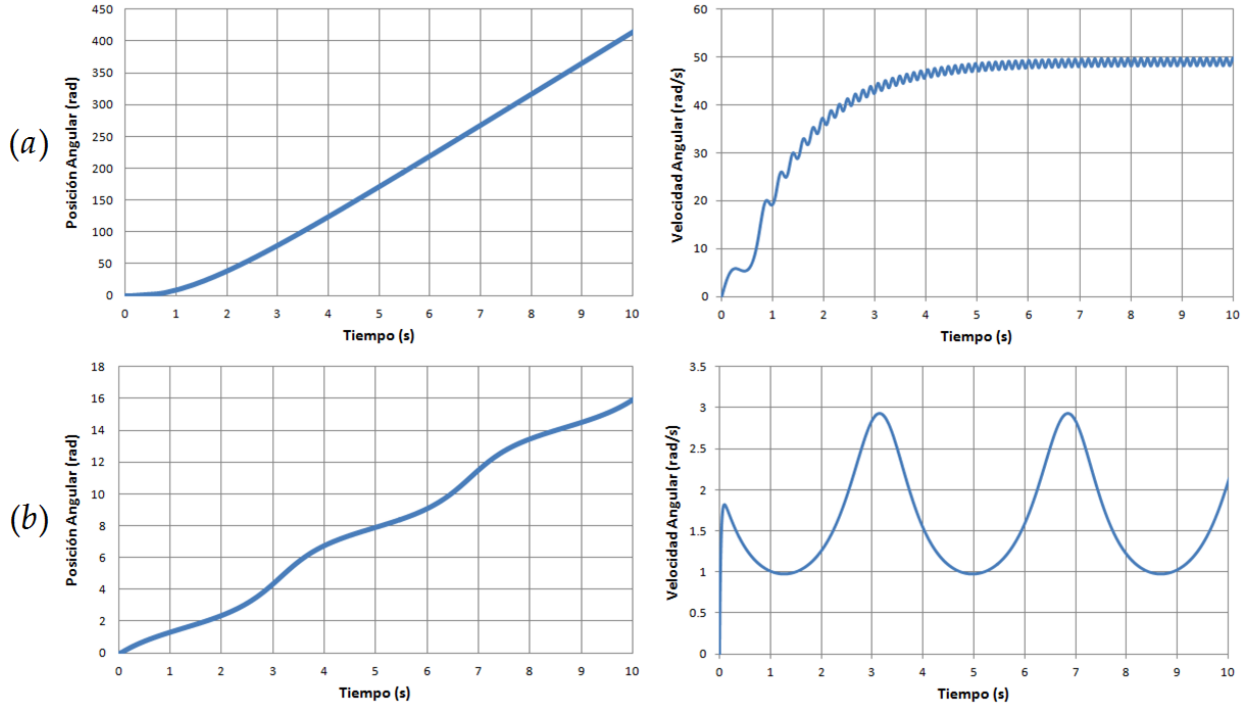


Figura 4: Gráficas para fase de equilibrio uniforme. (a) Posición y velocidad angulares en función del tiempo para $N/N_c = 1,0$ y $\eta = 0,2$. (b) Caso para $N/N_c = 2,0$ y $\eta = 10$.

Para amortiguamiento fuerte $\omega_c \ll \Omega_0$, la velocidad angular alcanza un estado estable rápidamente, donde fluctúa ampliamente alrededor del promedio, como muestra las gráficas de posición y velocidad en fig. 4(b). En la figura 5 se muestra el comportamiento de la velocidad promedio en este caso, con respecto al torque aplicado. La respuesta del sistema no muestra *histéresis* en este caso, es decir, que si se aumenta lentamente el torque aplicado también aumenta la velocidad promedio siguiendo la curva mostrada, y si se disminuye lentamente se devuelve exactamente por la misma curva. Existirá *histéresis* (esto es, que el aumento del torque externo produce una curva diferente para la velocidad promedio que la disminución de él) para casos de muy bajo amortiguamiento $\omega_c \gg \Omega_0$ y para condiciones intermedias $\omega_c \sim \Omega_0$.

Las variaciones cíclicas reales para A y B en esta gráfica se presentan en la figura 6. En el punto A, el torque aplicado tiene valor $N = 1,5N_c$ y la velocidad angular es rápida en la parte de abajo y lenta en la parte superior, con las variaciones mostradas en la parte inferior de la fig. 6. Para el punto B, tenemos $N = 5N_c$, donde se producen las variaciones de velocidad angular más regulares presentadas en la parte de arriba de la figura 6.

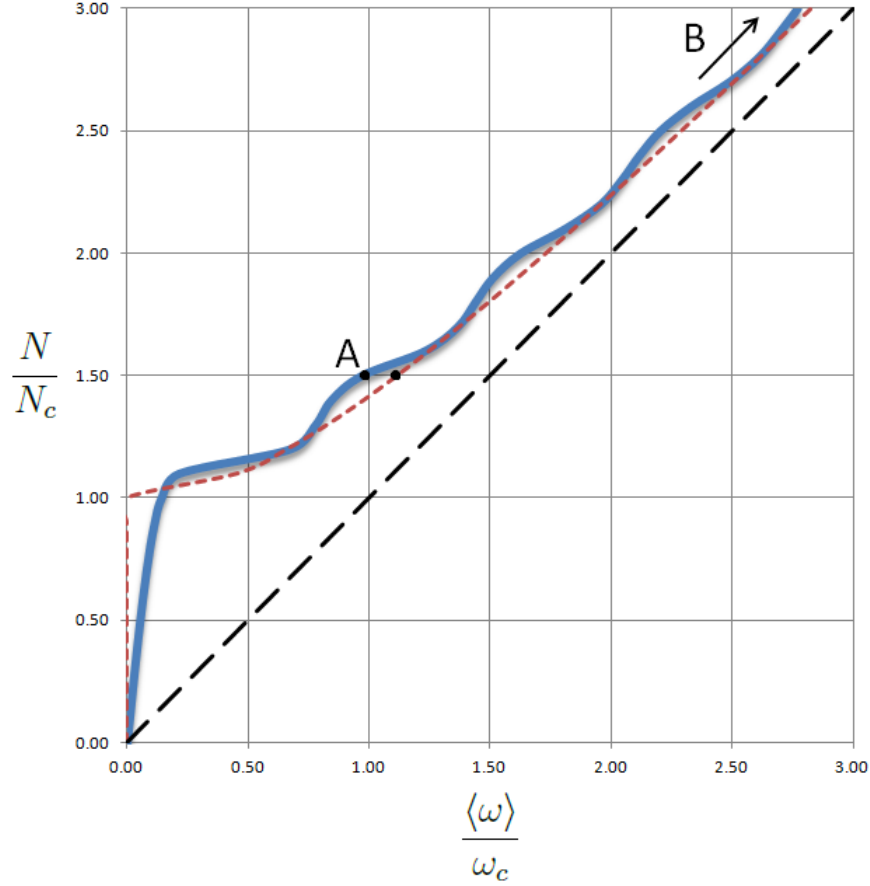


Figura 5: Relación entre el torque aplicado N y la velocidad angular promedio $\langle \omega \rangle$ para $\omega_c \ll \Omega_0$. Vemos que $\langle \omega \rangle = 0$ para $N < N_c$ y que $\langle \omega \rangle$ aumenta a medida que aumenta $N > N_c$.

La ecuación diferencial del péndulo amortiguado y forzado (5) tiene una aplicación particularmente importante en física del estado sólido. Cuando dos superconductores están en cercana proximidad con una delgada capa de material aislante entre ellos, el arreglo constituye lo que se conoce como una *juntura de Josephson*, que tiene la propiedad de que la corriente eléctrica I puede fluir a través de la juntura sin voltaje aplicado, hasta cierto valor de corriente crítica I_c . Cuando la corriente excede este valor se genera un voltaje, y las curvas de corriente I contra voltaje V para la juntura muestran histéresis. Las junturas de Josephson satisfacen la misma ecuación diferencial del péndulo estudiado, con la corriente jugando el papel del torque aplicado, el voltaje el de la velocidad angular promedio, la capacitancia

actuando como el momento de inercia y la conductancia eléctrica como la viscosidad. La variable, que es el ángulo ϕ para el oscilador, se convierte en la diferencia de fase cuántica ψ a través de la juntura de Josephson. Muchos físicos encuentran de mucha ayuda obtener un entendimiento intuitivo del funcionamiento operativo de las junturas estudiando las propiedades del péndulo amortiguado y forzado que mimetiza su comportamiento.

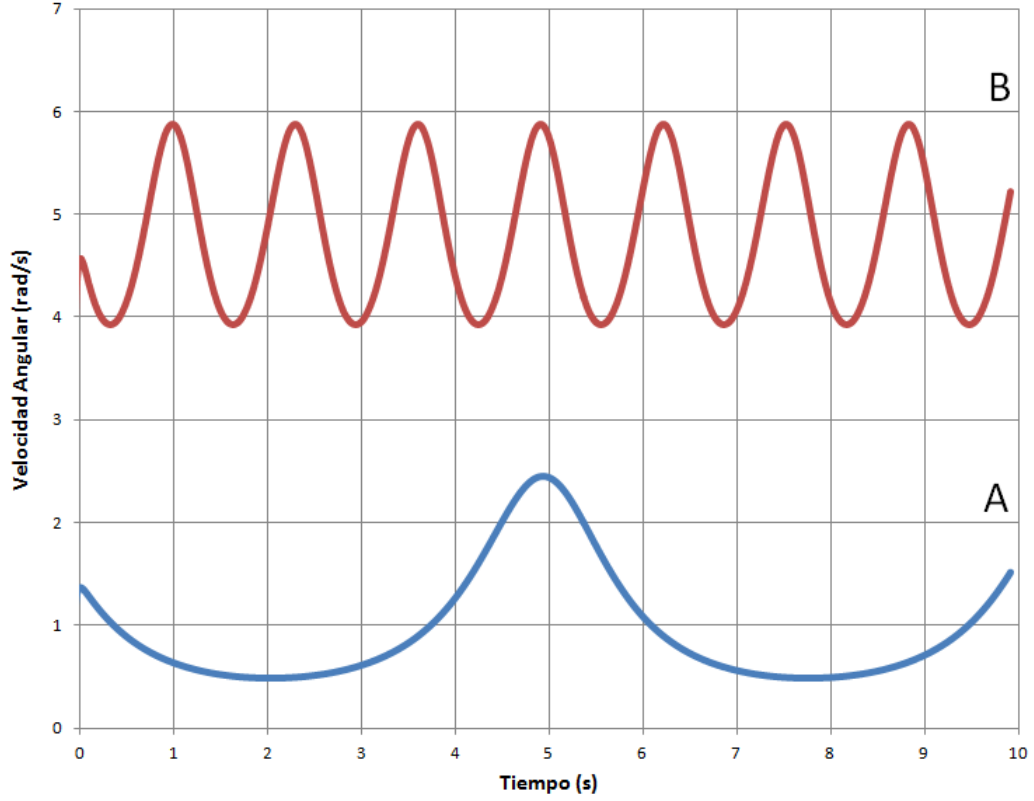


Figura 6: Oscilaciones en los puntos A ($N = 1,5N_c$) y B ($5N_c$) para $\omega_c \ll \Omega_0$ indicados en la figura 5 para el oscilador armónico amortiguado.