GDV II - Uebung 3

Fabian Langguth - 1415571
Sebastian Koch - 1388035
FB20 M.Sc. Visual Computing

June 21, 2011

Aufgabe 1 Rationale Bezier-Kurven und Kreise

a)

Aus der Endpunktinterpolation folgt: $b_{20} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b_{02} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$t_0 = P_0' = 2\left(B_{10}(0)b_{10}^{[1]} + B_{01}(0)b_{01}^{[1]}\right) \tag{1}$$

$$P_0' = 2\left(b_{11} - b_{20} + 0\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$t_1 = P_1' = 2\left(B_{10}(1)b_{10}^{[1]} + B_{01}(1)b_{01}^{[1]}\right) \tag{3}$$

$$P_1' = 2\left(0 + b_{02} - b_{11}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$\Rightarrow b_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Damit kÃűnnen wir de Casteljau ausfÃijhren:

$$P(0.5) = B_{20}(0.5)b_{20} + B_{11}(0.5)b_{11} + B_{02}(0.5)b_{02} \tag{5}$$

$$= 0.25\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.25\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.75 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{7}$$

b)

$\omega_{20} = \omega_{02} = 1$

$$R(0.5) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{\omega_{20}B_{20}(0.5)b_{20} + \omega_{11}B_{11}(0.5)b_{11} + \omega_{02}B_{02}(0.5)b_{02}}{B_{20}(0.5)b_{20} + B_{11}(0.5)b_{11} + B_{02}(0.5)b_{02}} \tag{8}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0.25 \end{pmatrix} + \omega_{11}\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.75 \end{pmatrix}} \tag{9}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} \omega_{11}0.5 + 0.25 \\ \omega_{11}0.5 + 0.25 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.75 \end{pmatrix}} \tag{10}$$

$\Rightarrow \omega_{11} = \frac{3-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bernstein-Beziér-Tensorprodukte

a)

Da das Tensorprodukt die Eckpunkte interpoliert sind die Koeffizienten direkt gegeben:

$$P(a,c) = P(0,0) = 0 = b_{10,10} \tag{11}$$
$$P(b,c) = P(1,0) = 0 = b_{01,10} \tag{12}$$
$$P(a,d) = P(0,1) = 0 = b_{10,01} \tag{13}$$
$$P(b,d) = P(1,1) = 1 = b_{01,01} \tag{14}$$
$$\tag{15}$$

b)

Fuer den Unterteilungsschritt muessen wir 16 neue Kontrollpunkte berechnen. Wir bestimmen diese indem wir de Casteljeau fuer fixe u bzw. v anwenden und erhalten so:

Fuer fixe v_0:

$$P_{20}(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} \qquad P_{20}(\frac{3}{4}) = \frac{3}{4} \tag{16}$$
$$P_{11}(\frac{1}{4}) = \frac{19}{32} \qquad P_{11}(\frac{3}{4}) = \frac{19}{32} \tag{17}$$
$$P_{02}(\frac{1}{4}) = \frac{3}{4} \qquad P_{02}(\frac{3}{4}) = \frac{1}{4} \tag{18}$$
$$P_{20}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \qquad P_{11}(\frac{1}{2}) = \frac{5}{8} \tag{19}$$
$$P_{02}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \tag{20}$$

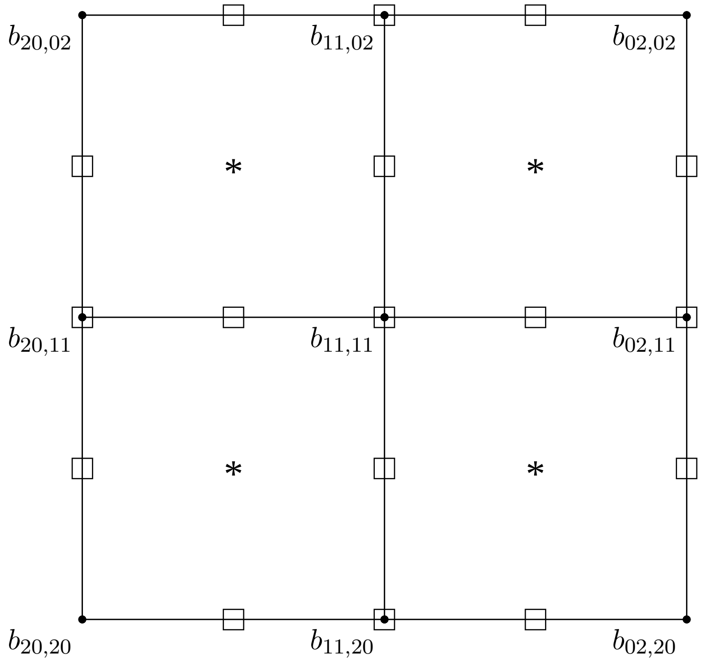
Fuer fixe u_0:

$$P_{20}(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} \qquad P_{20}(\frac{3}{4}) = \frac{3}{4} \tag{21}$$
$$P_{11}(\frac{1}{4}) = \frac{19}{32} \qquad P_{11}(\frac{3}{4}) = \frac{19}{32} \tag{22}$$
$$P_{02}(\frac{1}{4}) = \frac{3}{4} \qquad P_{02}(\frac{3}{4}) = \frac{1}{4} \tag{23}$$
$$P_{20}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \qquad P_{11}(\frac{1}{2}) = \frac{5}{8} \tag{24}$$
$$P_{02}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \tag{25}$$

Die naechsten 4 Punkte folgen aus einem weiteren Schritt des de Casteljau:

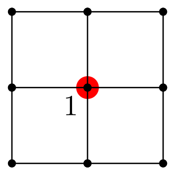
$$P(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{105}{256} \qquad P(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) = \frac{105}{256} \tag{26}$$
$$P(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{105}{256} \qquad P(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}) = \frac{105}{256} \tag{27}$$

Im jeweils ersten Schritt erhalten wir $\square$ und im zweiten Schritt $*$

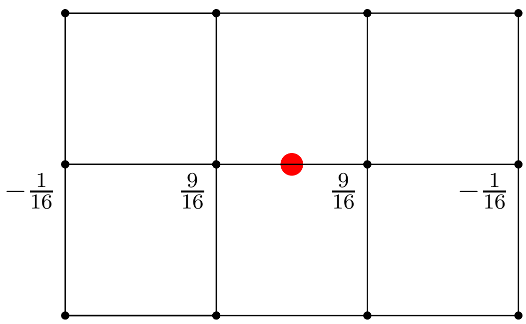


c)

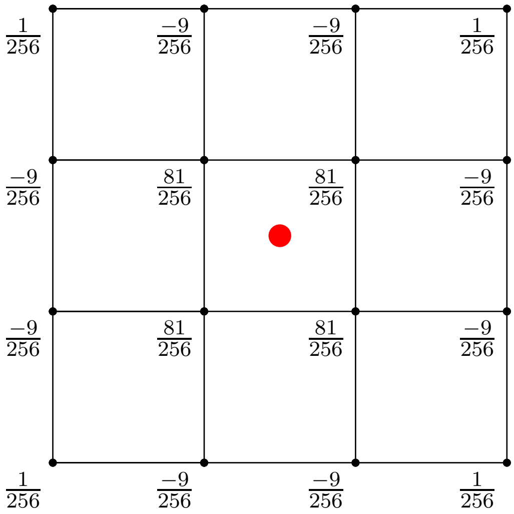
Punkt:



Kante:



Flaeche:



Aufgabe 3 B-Splines vom Grad 2

a)

Fuer Knoten x_j sind die Basisfunktionen B^2_{j-1} und B^2_{j-2} ungleich 0. Vereinfachen ergibt:

$$B^2_{j-1} = \frac{x_j - x_{j-1}}{x_{j+1} - x_{j-1}} \tag{28}$$

$$B^2_{j-2} = \frac{x_{j+1} - x_j}{x_{j+1} - x_{j-1}} \tag{29}$$

Daraus folgt:

$$S(x_j) = \frac{x_j - x_{j-1}}{x_{j+1} - x_{j-1}} b_{j-1} + \frac{x_{j+1} - x_j}{x_{j+1} - x_{j-1}} b_{j-2} \tag{30}$$

b)

Fuer einen uniformen Knotenvektor:

$$S(x_j) = \frac{x_j - x_{j-1}}{x_{j+1} - x_{j-1}} b_{j-1} + \frac{x_{j+1} - x_j}{x_{j+1} - x_{j-1}} b_{j-2} \tag{31}$$

$$= \frac{\triangle x}{2\triangle x} b_{j-1} + \frac{\triangle x}{2\triangle x} b_{j-2} \tag{32}$$

$$= 0.5(b_{j-1} + b_{j-2}) \tag{33}$$

Bei einem uniformen Knotenvektor geht der Spline S an der Stelle x_j genau durch den Mittelpunkt zwischen b_{j-1} und b_{j-2}.

c)

Fuer zwei Knoten eines Splines S, x_i und x_{i+1} ergibt sich der naechste Knoten $x_{i+2} = x_{i+1} + 1/3 * (x_{i+1} - x_i)$.

d)

$$\begin{aligned}
B^2_{j-1}(x_j) &= \frac{t - x_{j-1}}{x_{j+1} - x_{j-1}} && (34)\\
B'^2_{j-1}(x_j) &= \frac{1}{x_{j+1} - x_{j-1}} && (35)\\
&= \frac{1}{2\triangle x} && (36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B^2_{j-2}(x_j) &= \frac{x_{j+1} - x_j}{x_{j+1} - x_{j-1}} && (37)\\
B'^2_{j-2}(x_j) &= -\frac{1}{x_{j+1} - x_{j-1}} && (38)\\
&= -\frac{1}{2\triangle x} && (39)
\end{aligned}$$

Damit ist die komplette Ableitung:

$$S'(x_j) = \frac{1}{2\triangle x} b_{j-1} - \frac{1}{2\triangle x} b_{j-2} \qquad (40)$$

Die Tangente an x_j ist der Vektor von b_{j-2} nach b_{j-1}.

e)