Nelineární optimalizace a numerické metody

Jaroslav Langer *

Říjen 2020

Contents

1 Přednáška 1. **1**
1.1 Funkce, extrémy funkcí 1
1.1.1 Derivace funkce 1
1.1.2 Derivace některých funkcí 2
1.1.3 Konvexní a konkávní funkce 2
1.2 Kvadratické programování 2
1.3 Kvadratická funkce mnoha proměnných 2

Abstract

Definice, pojmy a znalosti z předmětu NI-NON. Odkaz na prezentace.

1 Přednáška 1.

Úvod, motivace, funkce, derivace funkce, extrémy funkcí, kvadratické funkce n proměnných, metoda největšího spádu

1.1 Funkce, extrémy funkcí

1.1.1 Derivace funkce

Definice: Nechť je funkce f(x), limita

*z přednášek NI-NON/FIT/ČVUT pana profesora Jaroslava Kruise

$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
se nazývá derivace funkce f(x) v bodě x, někdy značeno $f'(x)$

1.1.2 Derivace některých funkcí

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$nx^{(n-1)}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
n^x	$n^x \cdot \ln n$
$\log_n x$	$\frac{1}{x \ln n}$

Definice: Bod $x \in D$ se nazývá stacionárním právě když $f'(x) = 0$

1.1.3 Konvexní a konkávní funkce

Definice: Funkce $f(x)$ se nazývá konvexní na množině $M \subset D$, když $\forall x_1, x_2 \in D, \alpha \in (0,1)$ platí $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$

Věta: jeli $f'(x) > 0$ funkce je v bodě x rostoucí.
Věta: jeli $f'(x) < 0$ funkce je v bodě x klesající.
Věta: jeli $f''(x) > 0$ funkce je v bodě k ryze konvexní.
Věta: jeli $f''(x) < 0$ funkce je v bodě k ryze konkávní.
Věta: jeli $f'(x) = 0 \wedge f''(x) > 0$ funkce má v bodě x lokální minimum.
Věta: jeli $f'(x) = 0 \wedge f''(x) < 0$ funkce má v bodě x lokální maximum.

1.2 Kvadratické programování

1.3 Kvadratická funkce mnoha proměnných

$$
\begin{aligned}
f(x) = \frac{1}{2}a_{1,1}x_1^2 + \frac{1}{2}a_{1,2}x_1x_2 + \cdots + \frac{1}{2}a_{1,n}x_1x_n \\
+ \frac{1}{2}a_{2,1}x_2x_1 + \frac{1}{2}a_{2,2}x_2^2 + \cdots + \frac{1}{2}a_{2,n}x_2x_n \\
\cdots \\
+ \frac{1}{2}a_{n,1}x_nx_1 + \frac{1}{2}a_{n,2}x_nx_2 + \cdots + \frac{1}{2}a_{n,n}x_n^2 \\
+ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n + c
\end{aligned} \quad (1)
$$

potom se dají proměnné $x_1, x_2, \ldots x_n$napsat jako vektor **v**
a kvadratická rovnice n proměnných se dá maticově napsat jako

$$f(x) = x^T Ax + x^T b + c$$

c nemění vlastnosti extrému, pouze jeho absolutní hodnotu, proto se dále předpokládá, že $c = 0$

Definice: Matice $A^{n,n}$ je pozitivně definitní, právě tehdy když pro libovolný nenulový vektor x

$$x \in R^n, x^T Ax > 0$$

Poznámka: Velmi mnoho inženýrských úloh se dá zkonstruovat tak, že se hledá minimum kvadratické rovnice o n neznámýchjako s pozitivně definitní maticí.

Věta: Matice $A^{n,n}$ je pozitivně definitní právě tehdy když jsou všechna její vlastní čísla kladná.

def: Matice A je symetrická právě tehdy když $A = A^T$