Modelowanie matematyczne i symulacje komputerowe

Projekt 1

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Informacje praktyczne

Ocenie podlega część symulacyjna oraz opisowa. Projekt należy załączyć na kursie przedmiotu za pomocą odpowiedniej aktywności w składowej *Projekt*.

Poniżej znajdują się szczegółowe informacje dotyczące wykonania obu części projektu.

1. Część symulacyjna.
   - Każdy kod załączony na eNauczaniu ma być **podpisany**.
   - Proszę umieścić w kodzie wyraźne podziały na poszczególne części zadania.
   - Należy sprawdzić kompilacje każdego fragmentu kodu, zwrócić uwagę na nazwy zmiennych (aby się nie nakładały).
   - Nazwa pliku symulacyjnego: *ImieNazwisko_Projekt1.rozszerzenie*.
2. Część teoretyczna.
   - Sprawozdanie powinno zawierać: imiona i nazwiska osób wchodzących w skład grupy pracujących nad danym projektem, specjalność, data wykonania.
   - Sprawozdanie z projektu opisujemy w specjalistycznym środowisku matematycznym TeX lub LaTeX, i na kursie załączamy plik PDF o nazwie *ImieNazwisko_Projekt1.pdf*.
   - Proszę upewnić się, że w sprawozdaniu w każdym podpunkcie zamieszczone są wymagane informacje. Poza tym proszę umieścić wnioski i/lub opisy uzyskanych wyników czy wykresów. Proszę nie zapomnieć o podpisaniu każdego wykresu (w szczególności dla jakich parametrów został wykonany).
   - Należy pamiętać, że ocenie podlega również sposób wykonania sprawozdania, więc nie należy zamieszczać “suchych” wyników lub wykresów.
   - Do każdego punktu załączamy odpowiadający mu kod programu. Cały kod z opisem umieszczamy na końcu sprawozdania.

Podstawowa literatura, przydatne pliki i linki: podane na stronie kursu w module *Projekt*.

Generowanie liczb pseudolosowych i wybrane zastosowania

Liczba losowa (ang. random number) to liczba X należącą do zbioru wartości $\Sigma = \{X_1, ..., X_n\}$ wybranych z pewnym prawdopodobieństwem. Jeśli X może być każdą liczbą ze zbioru z tym samym prawdopodobieństwem $p(X) = 1/n$, to mówimy o równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa liczb losowych ze zbioru Σ.

Symulacyjne generowanie liczb czysto losowych jest zadaniem niezwykle trudnym do wykonania. Wynika to z deterministycznego charakteru komputera i wykonywanych przez niego operacji. Gdy człowiek dokonuje rzutu kością, nie wie i nie może przewidzieć co wypadnie. Taka sama operacja na komputerze wymaga działania, którego wynik jest nieprzewidywalny - żadna z operacji wykonywanych przez procesor nie posiada takiej cechy.

Z drugiej strony liczby losowe są powszechnie używane w programowaniu: gry losowe, symulacje różnych procesów losowych czy statystycznych, testowanie algorytmów dla losowych zestawów danych, szyfrowanie obrazów, itp. Ponieważ nie możemy w prosty sposób uzyskać prawdziwych liczb losowych, musimy pracować na ich sztucznym odpowiedniku - liczbach pseudolosowych (ang. pseudorandom numbers). Liczby pseudolosowe wyglądają jak losowe, jednak nimi nie są, ponieważ aby je wygenerować używamy algorytmów (z góry określonego skończonego zbioru kroków). Oznacza to, iż znając wzór generacyjny oraz kilka kolejnych liczb pseudolosowych możemy bez problemu wygenerować resztę potrzebnych liczb - tej cechy nie posiadają liczby losowe, w przeciwnym razie totolotek straciłby sens.

Zatem komputerowe generatory liczb pseudolosowych, to tak naprawdę funkcje deterministyczne, które wyznaczają kolejne elementy ciągu liczb pseudolosowych jako kolejne iteracje ustalonego algorytmu. Aby rozpocząć iterację liczb pseudolosowych potrzebna jest wartość startowa, od której rozpocznie się generowanie. Wartość tę nazywamy *ziarnem pseudolosowym (pseudorandom seed).*

CZĘŚĆ I

I. Generowanie liczb pseudolosowych o zadanym rozkładzie. Wiele języków programowania, środowisk programistycznych czy też pakietów statystycznych ma wbudowane funkcje pozwalające na generację liczb pseudolosowych. U podstaw symulacji stochastycznych leży zagadnienie generowania liczb pseudolosowych, naśladujących zachowanie zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym.

Zakładamy zatem, że mamy do dyspozycji potencjalnie nieskończony ciąg niezależnych zmiennych pseudolosowych $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ o jednostajnym rozkładzie $U(0,1)$. W pakiecie R służy do tego funkcja

`runif(`n`)` (**r**andom **unif**orm distribution).

Zadanie 1. *Wykorzystując metodę dystrybuanty odwrotnej wygenerować ciąg liczb pseudolosowych o wybranym rozkładzie (Arcus Sinus, Cauchy, Wartości ekstremalnych, Rayleigh, Weibull, Logistyczny, Pareto, Trójkątny) przy zadanej gęstości $f(x)$.*

1.1 Wyznaczyć w sposób analityczny dystrybuantę i dystrybuantę odwrotną.

1.2 Przedstawić obie dystrybuanty na jednym wykresie.

1.3 Wyznaczyć ***wybrane*** *miary rozproszenia i położenia, następnie porównać z parametrami rozkładu teoretycznego.*

1.4 Wykreślić na jednym wykresie: histogram (wykres częstości wystąpień) i wykres gęstości rozkładu teoretycznego (wykres mas prawdopodobieństwa).

1.5 Wykreślić na jednym wykresie: dystrybuantę empiryczną i dystrybuantę wybranego rozkładu.

1.6 Podpunkty 1.3-1.5 wykonać dla co najmniej trzech różnolicznych próbek.

Co możemy wywnioskować na podstawie powyższych rezultatów?

$- \star -$

II. Mapy chaotyczne. Mając zadany ciąg liczb pseudo losowych $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ o dowolnym rozkładzie (nawet nieznanym), możemy wygenerować na jego podstawie wartości **prawdziwie losowe** wykorzystując **mapy chaotyczne**.

Dyskretna mapa chaotyczna to mapa zdefiniowana za pomocą funkcji transformacji $f : (0, 1) \to (0, 1)$. Jednowymiarowy dyskretny układ dynamiczny jest zdefiniowany jako

$$z_{k+1} = f(z_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Przykładem jednowymiarowej mapy chaotycznej o rozkładzie jednorodnym jest **ukośna mapa namiotu** (*ang. skew tent map*), która definiuje się zależnością rekurencyjną:

$$z_{k+1} = f(z_k) = \begin{cases} \dfrac{z_k}{p}, & z_k \in [0, p), \\ \dfrac{1 - z_k}{1 - p}, & z_k \in [p, 1], \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $p \in (0, 1)$, $k = 0, 1, \ldots, N$, N oznacza ilość wykonanych iteracji przy użyciu mapy chaotycznej.

Inne przykłady jednowymiarowych dyskretnych map chaotycznych znajdą Państwo w [1].

Zauważmy, że

$$z_2 = f(z_1) = f(f(z_0)) = f^2(z_0).$$

Zatem $f^N(x)$ oznacza N-tą iterację mapy chaotycznej dla wartości początkowej $z_0 = x$. Niech $\widetilde{X} = \{\widetilde{x}_0, \ldots, \widetilde{x}_n\}$ jest normalizacją danego ciągu liczb pseudolosowych X.

Wówczas ciąg $U = \{u_0, u_1, \ldots, u_n\}$, którego poszczególne elementy wyznaczamy przy użyciu N-tej iteracji mapy chaotycznej z odpowiednią wartością początkową:

$$u_i = f^N(\widetilde{x}_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{2}$$

ma rozkład zbliżony do jednorodnego (w przypadku mapy namiotu) dla odpowiedniej ilości iteracji N.

Zadanie 2. *Dla wygenerowanych próbek z Zadania 1 ciągów liczb pseudolosowych o wybranym rozkładzie, proszę wykonać:*

3.1 Znormalizować próbki.

3.2 Dla każdej znormalizowanej próbki wygenerować ciąg liczb pseudolosowych U *wykorzystując (2), gdzie* f^N *oznacza* N*-tą iterację mapy chaotycznej (1) dla* $p = 0.45$.

3.3 Wygenerować histogramy rozkładu U *dla każdej z próbek, dla trzech wartości* N *(np. dla* $N = 1, 5, 12$*, może być konieczne eksperymentalne dobranie wartości).*

3.4 W każdym przypadku wygenerować wykresy zależności par (u_k, u_{k+1}) *(rozrzut punktów na płaszczyźnie* (u_k, u_{k+1})*).*

3.5 Dla jakiej ilości iteracji mapy chaotycznej otrzymujemy "wypłaszczenie"(zbliżenie do rozkładu jednorodnego)?

Zadanie 3. *Dla wygenerowanych próbek z Zadania 1 ciągów liczb pseudolosowych o wybranym rozkładzie wykonać podpunkty 3.1-3.4 dla dwóch dowolnie wybranych z [1] map chaotycznych.*

Literatura

[1] Z.M. Gao, J. Zhao, Y.J. Zhang, *Review of chaotic mapping enabled nature-inspired algorithms* (artykuł umieszczony na stronie kursu w materiałach do projektu).